Innhold

Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- forenkle og løse lineære og kvadratiske likninger i trigonometriske uttrykk ved å bruke sammenhenger mellom de trigonometriske funksjonene
- omforme trigonometriske uttrykk av typen $a\sin kx + b\cos kx$, og bruke dem til å modellere periodiske fenomener

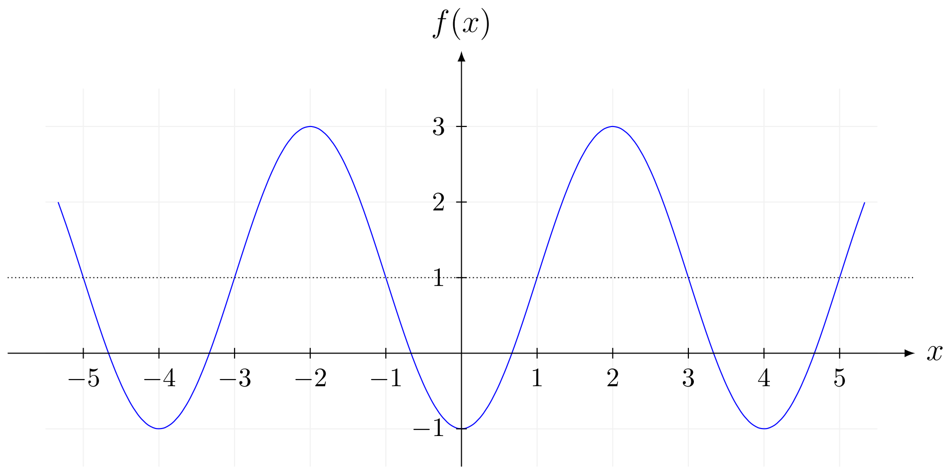
0.1 Trigonometriske funksjoner

Cosinusfunksjoner

La oss nå ta en titt på funksjonen

$$f(x) = a\cos(kx + c) + d \tag{0.1}$$

hvor a, k, c og d er konstanter. Dette kaller vi en *cosinusfunksjon*. Under ser vi grafen til $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$:



Figur 1

Og vi noterer oss dette:

- grafen er symmetrisk om linja $y = 1$, som vi derfor kaller for *likevektslinja* til grafen. Verdien til likevektslinja samsvarer med konstantleddet til f.
- vertikalavstanden fra likevektslinja til et toppunkt er 2, noe som samsvarer med faktoren foran cosinusuttrykket. Dette tallet kalles *amplituden*.
- horisontalavstanden fra et toppunkt til et annet er 4, denne avstanden kalles *perioden* (eventuelt *bølgelengden*).

Om vi ikke visste uttrykket til f, kunne vi altså likevel ut ifra *Figur 1* og punktene over sett at $a = 2$ og $d = 1$. Men hva med b og c?

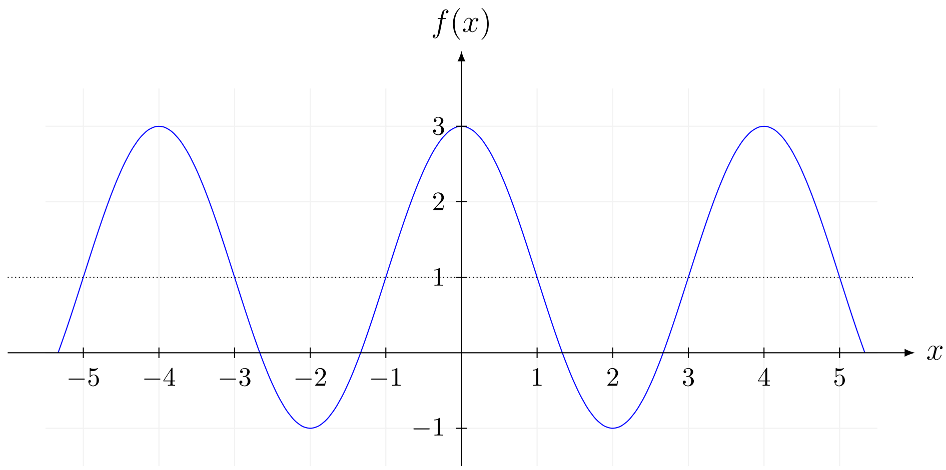
La oss starte med det enkleste: Når vi kjenner perioden $P = 4$, kan vi finne k ut ifra følgende relasjon:

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{P} \\ &= \frac{2\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

For å finne c gjør vi denne observasjonen: En cosinusfunksjon med positiv a må ha et toppunkt der hvor $kx + c = 0$ (fordi $\cos 0 = 1$). Siden f har et toppunkt der hvor $x = 2$, må vi ha at:

$$\frac{\pi}{2} \cdot 2 + c = 0$$
$$c = -\pi$$

Før vi tar en liten oppsummering skal vi kort studere grafen til $g = -2\cos(\frac{\pi}{2}x - \pi)$



Figur 2

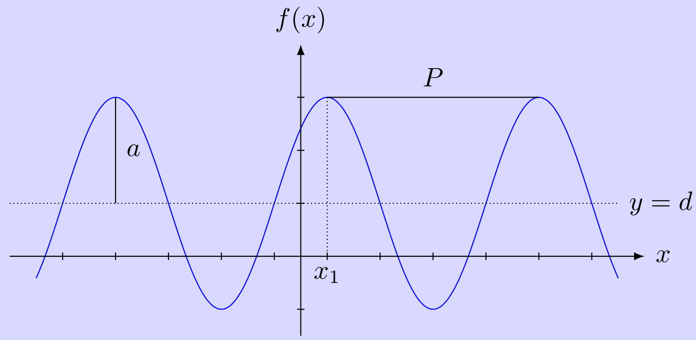
Den eneste forskjellen på uttrykkene til f og g er at g har faktoren -2 foran cosinusuttrykket. Vertikalavstanden fra likevektslinja til et toppunkt er likevel 2 også for g, som derfor har 2 som amplitude. For en hvilken som helst cosinusfunksjon er altså $|a|$ lik verdien til amplituden. Men fordi a er negativ har g et toppunkt når $kx + c = \pi$ (siden $\cos \pi = -1$).

Cosinusfunksjonen

En funksjon $f(x)$ på formen

$$f(x) = a\cos(kx + c) + d$$

kalles en cosinusfunksjon med amplitude $|a|$, bølgetall k, fase c og likevektslinje d.



Figur 3

k er gitt ved relasjonen:

$$k = \frac{2\pi}{P}$$

hvor P er perioden til f. Videre kan c finnes ut ifra ligningen:

$$kx_1 + c = 0$$

hvor x_1 er x-verdien til et toppunkt.

Funksjonen har ekstremalpunkter der hvor:

$$kx + c = 2\pi n \quad \vee \quad kx + c = \pi + 2\pi n$$

for alle $n \in \mathbb{Z}$.

Sinusfunksjoner

Om du har lest forrige delseksjon, har du kanskje allerede tenkt deg fram til at funksjoner på formen

$$f(x) = a\sin(kx + c) + d$$

kalles *sinusfunksjoner*. Amplituden, bølgetallet og likevektslinjen finner vi på akkurat samme måte som for cosinusfunksjoner.

Fasen finner vi derimot ved å observere at en sinusfunksjon må ha en maksimalverdi der hvor $kx + c = \frac{\pi}{2}$ hvis a er positiv $\left(\text{fordi } \sin\frac{\pi}{2} = 1\right)$, og der hvor $kx + c = -\frac{\pi}{2}$ hvis a er negativ $\left(\text{fordi } \sin -\frac{\pi}{2} = -1\right)$.

Sinusfunksjonen

En funksjon $f(x)$ på formen

$$f(x) = a\sin(kx + c) + d$$

kalles en sinusfunksjon med amplitude $|a|$, bølgetall b, fase c og likevektslinje d.

k er gitt ved relasjonen:

$$k = \frac{2\pi}{P}$$

hvor P er perioden til f. Videre kan c finnes ut ifra ligningen:

$$kx_1 + c = \frac{\pi}{2}$$

hvor x_1 er x-verdien til et toppunkt.

Funksjonen har ekstremalpunkter der hvor:

$$kx + c = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

for alle $n \in \mathbb{Z}$.

Eksempel

Skriv om funksjonen $f(x) = 2\cos(3x + \pi) + 1$ til en sinusfunksjon.

Svar:

Det eneste vi må sørge for er å gjøre om cosinusuttrykket til et sinusuttrykk. Og vi vet at:

$$\begin{aligned}
\cos(3x + \pi) &= \cos\left(3x + \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sin\left(3x + \pi + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sin\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Dermed får vi:

$$f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right) + 1$$

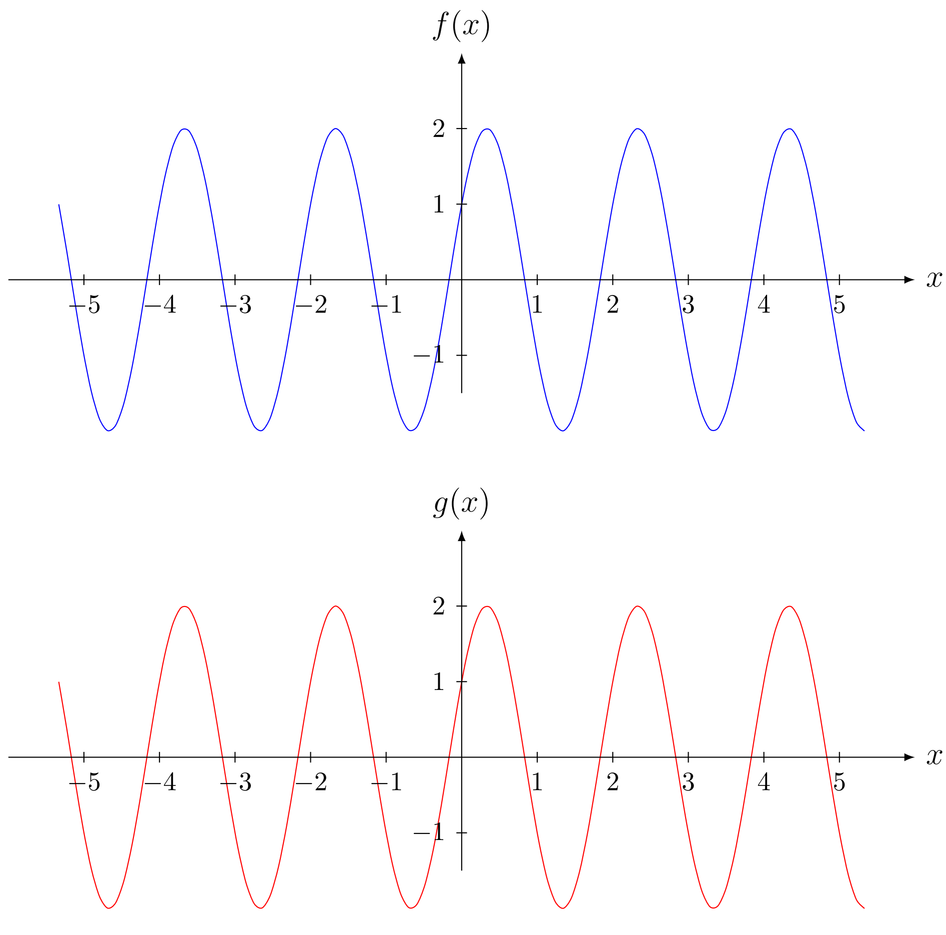
Sinus og cosinus kombinert

Vi skal nå se på funksjoner av typen

$$f(x) = a\cos kx + b\sin kx$$

og hvordan vi kan skrive om disse til én enkelt sinusfunksjon.

Under ser vi grafene til $f(x) = \cos(\pi x) + \sqrt{3}\sin(\pi x)$ og $g(x) = 2\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right)$:



Figur 4

Disse grafene ser jo fullstendig identiske ut, og det er de også. Saken er at vi kan omskrive f til g eller omvendt:

Sinus og cosinus kombinert

Vi kan skrive:

$$a \cos kx + b \sin kx = r \sin(kx + c)$$

der $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ og hvor:

$$\cos c = \frac{b}{r}$$

$$\sin c = \frac{a}{r}$$

Eksempel

Skriv om $\sqrt{3} \sin(\pi x) - \cos(\pi x)$ til et sinusuttrykk.

Svar:

Vi starter med å finne r:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Videre krever vi at:

$$\cos c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin c = -\frac{1}{2}$$

Tallet $c = -\frac{\pi}{6}$ oppfyller dette kravet, og dermed har vi funnet at:

$$\sqrt{3} \sin(\pi x) - \cos(\pi x) = 2 \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$$

I kapittel ref!! så vi på mange forskjellige trigonometriske ligninger. Nå som vi har lært å kombinere sinus- og cosiunusuttrykk skal vi her se på en siste variant:

$\boldsymbol{a \sin kx + b \cos kx = d}$

Ligningen

$$a \sin kx + b \cos kx = d$$

hvor a, b og c er konstanter kan løses ved å omforme venstresiden til et rent sinusuttrykk og deretter løse den resulterende sinusligningen.

Eksempel

Løs ligningen

$$\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$$

Svar:

Vi starter med å finne det kombinerte sinusuttrykket for venstresiden av ligningen:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{1^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos c &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin c &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$c = \frac{\pi}{4}$ oppfyller kravene over, og vi kan derfor skrive:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \\ \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) &= 1 \end{aligned}$$

Altså har vi at:

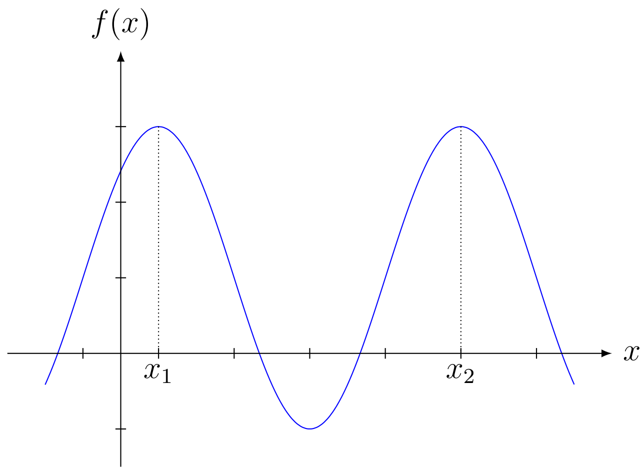
$$\begin{aligned} 3x + \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \end{aligned}$$

0.2 Forklaringer

Tallet k

Vi skal nå vise hvorfor vi har relasjonen $k = \dfrac{2\pi}{P}$.

La oss tenke oss en cosinus- eller sinusfunksjon med $kx + c$ som argument. Si videre at x_1 og x_2 er x-verdien til to naboliggende toppunkt.



Figur 5

Siden et nytt toppunkt kommer for hver gang vi legger til 2π i argumentet, vet vi at:

$$\begin{aligned} kx_1 + c + 2\pi &= kx_2 + c \\ k(x_2 - x_1) &= 2\pi \\ k &= \frac{2\pi}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

Siden $x_2 - x_1$ er det vi kaller for perioden P, har vi vist det vi skulle.

Sinus og cosinus kombinert

Vi har uttrykket:

$$a \cos kx + b \sin kx \tag{0.2}$$

Videre vet vi at (se (**??**))

$$r \sin(kx + c) = r \sin c \cos kx + r \cos c \sin kx \tag{0.3}$$

Uttrykkene fra ligning (0.2) og (0.3) er like hvis:

$$a = r \sin c \tag{0.4}$$
$$b = r \cos c \tag{0.5}$$

Kvadrerer vi ligning (0.4) og (0.5), får vi:

$$a^2 = r^2 \sin^2 c \tag{0.6}$$
$$b^2 = r^2 \cos^2 c \tag{0.7}$$

Hvis vi nå legger sammen ligning (0.6) og (0.7), finner vi et uttrykk for a:

$$\begin{aligned}
r^2 \sin^2 c + r^2 \cos^2 c &= a^2 + b^2 \\
r^2(\sin^2 c + \cos^2 c) &= a^2 + b^2 \\
r^2 &= a^2 + b^2 \\
r &= \pm\sqrt{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

Dersom vi velger den positive løsningen for r, får vi at:

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\
\cos c &= \frac{b}{r} \\
\sin c &= \frac{a}{r}
\end{aligned}$$