

# Løsningsforslag

Kapittel 1	2
Kapittel 2	9
Kapittel 3	20
Kapittel 4	26
Kapittel 5	29
Kapittel 6	31
Kapittel 7	37

# Kapittel 1

## 1.1.2

a) Vi bruker den eksplisitte formelen for en aritmetisk følge, og får:

$$a_4 = a_1 + d(i - 1)$$

$$30 = 3 + d(4 - 1)$$

$$27 = 3d$$

$$9 = d$$

b) Vi observerer at:

$$a_5 - a_3 = a_1 + d(5 - 1) - (a_1 + d(3 - 1))$$

$$a_5 - a_3 = 2d$$

$$26 - 14 = 2d$$

$$6 = d$$

Videre har vi at:

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$14 = a_1 + 12$$

$$2 = a_1$$

## 1.1.3

a) Vi har at:

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$$

Dermed er det eksplisitte uttrykket gitt som:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{i-1}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3^{1-i} \end{aligned}$$

b) Vi vet at:

$$a_1 \cdot k^{4-1} = a_4$$

$$5 \cdot k^3 = 40$$

$$k^3 = 8$$

$$k = 2$$

Altså får vi:

$$a_n = 5 \cdot 2^{i-1}$$

## 1.2.2

a) Vi observerer at rekka er en aritmetisk rekke med  $a_1 = 7$  og  $d = 6$ . For å finne summen trenger vi verdien til  $a_{10}$ :

$$a_{10} = 7 + 6(10 - 1)$$

$$= 61$$

Summen  $S_{10}$  blir da:

$$\begin{aligned} S_{10} &= 10 \cdot \frac{7+61}{2} \\ &= 340 \end{aligned}$$

**b)** Se a.

### 1.2.3

Rekken er aritmetisk med  $a_1 = 8$  og  $d = 3$ . Vi har at:

$$\begin{aligned} n \frac{8 + (8 + 3(n-1))}{2} &= 435 \\ 3n^2 + 13n - 870 &= 0 \end{aligned}$$

Vi bruker *abc*-formelen og får at  $n \in \{15, -\frac{58}{3}\}$ , hvorav  $n = 15$  er eneste mulige svar.

### 1.2.4

$$\begin{aligned} 3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot \dots \cdot 3^n &= 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 3^n \\ &= 3^{1+2+\dots+n} \\ &= 3^{n \frac{1+n}{2}} \\ &= 3^{\frac{1}{2}n(n+1)} \end{aligned}$$

Som er det vi skulle vise.

### 1.2.5

Rekken er geometrisk, med  $a_1 = 3$  og  $k = 4$ . For å finne summen må vi vite hvor mange ledd rekken består av:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4^{n-1} &= 768 \\ 4^{n-1} &= 256 \\ 4^{n-1} &= 4^4 \\ n-1 &= 4 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

### 1.2.6

**a)** Summen  $S_n$  er gitt som:

$$\begin{aligned} S_n &= 2 \cdot \frac{1-3^k}{1-3} \\ &= 2 \cdot \frac{1-3^k}{-2} \\ &= 3^k - 1 \end{aligned}$$

**b)**

$$\begin{aligned} S_3 &= 3^3 - 1 \\ &= 26 \end{aligned}$$

**c)**

$$3^n - 1 = 728$$

$$3^n = 729$$

$$3^n = 3^6$$

$$n = 6$$

### 1.2.7

a) Når du har spart i 4 måneder betyr det at første innskudd har forrentet seg 4 ganger, andre beløp tre ganger osv. Forrentingen tilsvarer en økning med 1.02. Medregnet det ferske innskuddet blir regnestykket:

$$1000 \cdot 1.02^4 + 1000 \cdot 1.02^3 + 1000 \cdot 1.02^2 + 1000 \cdot 1.02^1 + 1000$$

b) Av oppgave a innse vi at  $P(n)$  er summe av en geometrisk rekke med  $a_1 = 1000$  og  $k = 1.02$ :

$$\begin{aligned} P(n) &= 1000 \cdot \frac{1 - 1.02^n}{1 - 1.02} \\ &= -50000(1 - 1.02^n) \\ &= 50000(1.02^n - 1) \end{aligned}$$

### 1.2.8

a) Dette er en uendelig geometrisk rekke med  $k = \frac{1}{4}$ . Siden  $|k| < 1$  er rekka konvergent.

b) Siden rekka er uendelig geometrisk og konvergent, har rekka en endelig sum  $S_\infty$  gitt ved:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a_1}{1 - k} \\ &= \frac{4}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

### 1.2.9

a)  $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots$  Dette er en geometrisk rekke med  $a_1 = \frac{9}{10}$  og  $k = 10^{-1}$ . b) Fordi  $|k| < 1$  er rekken konvergent. Den uendelige summen er derfor gitt som:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Summen av rekken blir 1, altså er  $0.999\dots = 1$  (!).

### 1.2.10

a) Vi observerer at  $k = x - 2$ . Skal rekka konvergere må altså  $|x - 2| < 1$ . Skal dette være sant må vi ha at:

$$-1 < x - 2$$

$$1 < x$$

og videre at:

$$x - 2 < 1$$

$$x < 3$$

Derfor må vi ha at  $1 < x < 3$ .

b)

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - (x - 2)} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{1}{3(3 - x)} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{2}{18 - 6x} = \frac{2}{9}$$

$$18 - 6x = 9$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$x = \frac{3}{2}$  ligger i konvergensområdet, og er derfor et gyldig svar.

c)

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - (x - 2)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3(3 - x)} = \frac{1}{6}$$

$$3(3 - x) = 6$$

$$x = 1$$

Men  $x = 1$  ligger ikke i konvergensområdet, og er derfor ikke et gyldig svar.  $S_n = \frac{1}{6}$  har derfor ingen løsning.

### 1.3.1

a) Vi sjekker påstanden for  $n = 1$ :

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = 1$$

Påstanden er sann for  $n = 1$ , vi går derfor videre til å sjekke påstanden for  $n = k + 1$ . Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd,  $k$  får vi:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 1 + 1)}{2}$$

$$\frac{k(k + 1)}{2} + k + 1 = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} &= \\ \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} &= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \end{aligned}$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

b) Vi sjekker påstanden for  $n = 1$ :

$$1 = 2^n - 1$$

$$1 = 1$$

Påstanden er sann for  $n = 1$ , vi går derfor videre til å sjekke påstanden for  $n = k + 1$ . Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd  $k$ , får vi:

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k+1-1} = 2^{k+1} - 1$$

$$2^k - 1 + 2^k =$$

$$2 \cdot 2^k - 1 =$$

$$2^{k+1} - 1 = 2^{k+1} - 1$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

c) Vi sjekker påstanden for  $n = 1$ :

$$4 = \frac{4}{3}(4^1 - 1)$$

$$4 = \frac{4}{3} \cdot 3$$

$$4 = 4$$

Påstanden er sann for  $n = 1$ , vi går derfor videre til å sjekke påstanden for  $n = k + 1$ . Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd,  $k$  får vi:

$$4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{k+1} = \frac{4}{3}(4^{k+1} - 1)$$

$$\frac{4}{3}(4^k - 1) + 4^{k+1} =$$

$$\frac{4^{k+1} - 1 + 3 \cdot 4^{k+1}}{3} =$$

$$\frac{4}{3}(4^{k+1} - 1) = \frac{4}{3}(4^{k+1} - 1)$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

d) Vi sjekker påstanden for  $n = 1$ :

$$1 = \frac{1(2 \cdot 1 + 1)(1 + 1)}{6}$$

$$= \frac{6}{6}$$

$$1 = 1$$

Påstanden er sann for  $n = 1$ , vi går derfor videre til å sjekke påstanden for  $n = k + 1$ . Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd  $k$  får vi:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 \dots + (k + 1)^2 = \frac{(k + 1)(2(k + 1) + 1)((k + 1) + 1)}{6}$$

$$\frac{k(2k + 1)(k + 1)}{6} + (k + 1)^2 = \frac{(k + 1)(2k + 3)(k + 2)}{6}$$

$$\frac{k(2k + 1)(k + 1) + 6(k + 1)^2}{6} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6} = \\
& \frac{(k+1)(k(2k+1)+2k+4k+6)}{6} = \\
& \frac{(k+1)(k(2k+3)+4k+6)}{6} = \\
& \frac{(k+1)(k(2k+3)+2(2k+3))}{6} = \\
& \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}
\end{aligned}$$

Og dermed har vi vist det vi skulle.

**Merk:** Faktorisering er en treningsak, men observer hvordan vi i overgangen mellom linje 5 og 6 framkalte leddet  $2k+3$ . Hvis man ikke kommer i mål med ren faktorisering, kan man selvfølgelig etter linje 4 vise at  $k(2k+1)+6(k+1) = (2k+3)(k+2)$  ved å skrive ut uttrykkene på begge sider.

### 1.3.2

Vi sjekker påstanden for  $n = 1$ :

$$1(1^2 + 2) = 1 \cdot 3$$

Påstanden er sann for  $n = 1$ , vi går derfor videre til å sjekke påstanden for  $n = k + 1$ . Når vi antar at formelen stemmer for  $n = k$ , får vi:

$$\begin{aligned}
(k+1)((k+1)^2 + 2) &= (k+1)(k^2 + 2k + 3) \\
&= (k+1)(k(k+2) + 3)
\end{aligned}$$

Antakelsen vår sier at  $k(k+2)$  er delelig med 3, noe tallet 3 også er. Faktoren  $(k(k+2) + 3)$  er derfor delelig med 3, mens  $(k+1)$  er et heltall. Uttrykket i ligningen over er derfor delelig med 3.

### 1.3.3

a) Vi sjekker påstanden for  $n = 1$ :

$$\begin{aligned}
\frac{(2 \cdot 1)!}{(2 \cdot 1 - 1)!} &= 2^1 \cdot 1! \\
\frac{1 \cdot 2}{1} &= 2 \\
2 &= 2
\end{aligned}$$

Påstanden er sann for  $n = 1$ , vi går derfor videre til å sjekke påstanden for  $n = k + 1$ . Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd  $k$ , får vi:

$$\begin{aligned}
\frac{1 \cdot 2}{1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \dots \cdot \frac{(2(k+1))!}{(2(k+1) - 1)!} &= 2^{k+1}(k+1)! \\
2^k k! \frac{(2(k+1))!}{(2k+1)!} &= \\
2^k k! \frac{(2k+1)!(2k+2)}{(2k+1)!} &=
\end{aligned}$$

$$2^{k+1}k!(k+1) =$$

$$2^{k+1}(k+1)! = 2^{k+1}(k+1)!$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

**b)** Venstresiden kan enklere skrives som:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2(k+1)$$

For  $n = 1$ :

$$2 = 2^1 \cdot 1!$$

$$2 = 2$$

For  $n = k + 1$ :

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2(k+1) = 2^{k+1}(k+1)!$$

$$2^k k! \cdot 2(k+1) =$$

$$2^{k+1}(k+1)! = 2^{k+1}(k+1)!$$

### Gruble 1

**a)** Summen av de  $n$  første oddetallene tilsvarende  $n^2$  (se f. eks 1.2.1b), derfor kan vi skrive kvadratene som summer av oddetall.

**b)** Vi får  $n$  enere,  $n - 1$  treere,  $n - 2$  femmere og så videre. Den isolerte  $n$ -en på høyresiden representerer de  $n$  enerene, mens summen representerer bidragene fra alle de andre oddetallene (skriv opp hvis du synes det er vanskelig å se).

**c)**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i^2 &= n + \sum_{i=1}^n (n-i)(2i+1) \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= n + \sum_{i=1}^n (2in + n - 2i^2 - i) \\ \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n 2i^2 &= n + \sum_{i=1}^n ((2n-1)i + n) \\ \sum_{i=1}^n 3i^2 &= n + n^2 + (2n-1)\frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{2n(1+n) + (2n-1)n(n+1)}{6} \\ &= \frac{(2n + (2n-1)n)(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(2 + (2n-1))(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} \end{aligned}$$



## Kapittel 2

*Så lenge ikke annet er nevnt, tas det for gitt at  $n \in \mathbb{Z}$ .*

### 2.1.2

a)

$$\begin{aligned} 60^\circ &= \frac{60\pi}{180} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 15^\circ &= \frac{15\pi}{180} \\ &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

### 2.1.3

a)

$$\begin{aligned} \frac{11\pi}{12} &= \frac{11\pi}{12} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \\ &= 165^\circ \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{11\pi}{6} &= \frac{11\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \\ &= 330^\circ \end{aligned}$$

### 2.2.1

I enhetssirkelen er  $|\cos x|$  og  $|\sin x|$  katetene i en rettvinklete trekant med en hypotenus med lengde lik 1. Av Pythagoras' setning får man da at:

$$\begin{aligned} |\cos x|^2 + |\sin x|^2 &= 1 \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \end{aligned}$$

### 2.2.2

a)

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{0}{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \tan x &= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

**2.2.6**

Vi har at:

$$\begin{aligned}
 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 1 \\
 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 1 - \frac{3}{4} \\
 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \\
 &= \pm\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Siden  $\frac{\pi}{6}$  ligger i første kvadrant, må sinusverdien være positiv, og altså lik  $\frac{1}{2}$ .

**2.2.7**a) Vi legger merke til at  $2x = x + x$ , av (2.10) har vi da at:

$$\begin{aligned}
 \sin(2x) &= \sin(x + x) \\
 &= \sin x \cos x + \cos x \sin x \\
 &= 2 \cos x \sin x
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

**2.2.8**Vi legger til og trekker ifra  $\frac{\pi}{2}$  i argumentet:

$$\cos\left(3x - \frac{7\pi}{2}\right) = \cos\left(3x - \frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Fra (2.18) har vi da at:

$$\begin{aligned}
 \cos\left(3x - \frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(3x - \frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= \sin(3x + 2\pi) \\
 &= \sin(3x)
 \end{aligned}$$

**2.2.9**

Av (2.20) vet vi at vi kan skrive:

$$f(x) = r \sin(2x + c)$$

hvor  $r$  er gitt som:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

mens  $c$  er gitt ved ligningssettet:

$$\begin{aligned} \cos c &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin c &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

En  $c$  som oppfyller dette er  $c = \frac{\pi}{6}$ .

Altså får vi:

$$\cos(2x) + \sqrt{3} \sin(2x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

**2.3.1**

a) Siden  $\cos 0 = \frac{\pi}{2}$  har vi fra (2.24) at:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \vee \quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

Men siden  $n$  er et vilkårlig heltall, kan vi alltid trekke ut  $2\pi$  fra leddet  $2\pi n$  uten at løsningen er forandret. Gjør vi dette kan vi skrive:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} + 2\pi n &= -\frac{\pi}{2} + \pi + \pi + 2\pi n \\ &= \frac{\pi}{2} + \pi(2n + 1) \end{aligned}$$

Vi ser da at vi kan skrive de to løsningene som  $\frac{\pi}{2}$  pluss enten et partalls antall  $\pi$  eller et oddetalls antall  $\pi$ . Altså kan vi skrive begge løsningene kombinert som  $\frac{\pi}{2}$  pluss alle heltalls antall  $\pi$ :

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

b) Siden  $\sin 0 = 0$  har vi fra (2.29) at:

$$x = 2\pi n \quad \vee \quad x = \pi + 2\pi n$$

Men siden  $x = \pi + 2\pi = \pi(2n + 1)$ , kan vi med samme argumentasjon som i opg. a) skrive:

$$x = \pi n$$

**2.3.2**

a)

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x &= \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{aligned}$$

b) Av opg. 2.3.1 a) vet vi at:

$$\frac{\pi}{3}x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$x = \frac{3}{2}(1 + 2n)$$

Faktoriseringen av uttrykket over gjør det lettere å identifisere hvilke  $x$  som ligger i intervallet  $[0, 5]$ . Dette er  $x = \frac{3}{2}$  og  $x = \frac{9}{2}$ .

c)

$$2 \sin(3x) = 1$$

$$\sin(3x) = \frac{1}{2}$$

Vinklene  $\frac{\pi}{6}$  og  $\frac{5\pi}{6}$  har sinusverdien  $\frac{1}{2}$ , altså har vi at:

$$3x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

$$x = \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right)$$

eller at:

$$3x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

$$x = \frac{1}{3} \left( \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right)$$

d) Siden  $-\frac{\pi}{3}$  og  $-\frac{2\pi}{3}$  har sinusverdien, har vi at:

$$2x - \pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

$$x = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right)$$

$$= \frac{\pi}{3}(1 + 3n)$$

eller at:

$$2x - \pi = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$

$$x = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right)$$

$$= \frac{\pi}{6}(1 + 6n)$$

e)

$$2\sqrt{3} \tan\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$\tan\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Siden  $\frac{\pi}{6}$  har  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  som tangensverdi, har vi at:

$$4x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$x = \frac{1}{4} \left( \pi n - \frac{\pi}{3} \right)$$

### 2.3.3

a

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$$

$$\frac{\sqrt{3} \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n$$

b)

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -\sqrt{3}$$

$$\tan x = -\sqrt{3}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$$

c)

$$\cos(2x) + \sin(2x) = 0$$

$$\tan(2x) = -1$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{1}{2} \left( \pi n - \frac{\pi}{4} \right)$$

### 2.3.4

a) Vi omskriver ligningen til sinusligningen

$$r \sin(x + c) = \sqrt{2}$$

hvor:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

og der  $c$  oppfyller ligningssettet:

$$\cos c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

 $c = \frac{\pi}{4}$  oppfyller kravene over ( $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ), altså får vi:

$$\sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}$$

$$\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

Altså må:

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

b) Vi omskriver ligningen til sinusligningen

$$r \sin\left(\frac{x}{2\pi} + c\right) = 1$$

hvor:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

og der  $c$  oppfyller ligningssettet:

$$\begin{aligned} \cos c &= -\frac{1}{2} \\ \sin c &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$c = \frac{2\pi}{3}$  oppfyller kravene over, altså får vi:

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{x}{2\pi} + \frac{2\pi}{3}\right) &= 1 \\ \sin\left(\frac{x}{2\pi} + \frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vi må altså enten ha at:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2\pi} + \frac{2\pi}{3} &= \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ \frac{x}{2\pi} &= -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x &= \pi^2(4n - 1) \end{aligned}$$

eller at:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2\pi} + \frac{2\pi}{3} &= \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \\ \frac{x}{2\pi} &= \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x &= 2\pi\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \end{aligned}$$

### 2.4.1

a) Vi løser andregradsligningen mhp.  $\sin x$ , og får at:

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = -1$$

I tilfellet av at  $\sin x = \frac{1}{2}$ , må:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad \vee \quad \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

I tilfellet av at  $\sin x = -1$ , må:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

b) Vi løser andregradsligningen mhp.  $\cos(3x)$ , og får at:

$$\cos(3x) = -4 \quad \vee \quad x = 1$$

I tilfellet av at  $\cos(3x) = -4$  har ligningen ingen reell løsning. I tilfellet av at  $\cos(3x) = -1$ , må:

$$x = \frac{\pi + 2\pi n}{3}$$

c) Vi løser andregradsligningen mhp.  $\cos x$ , og får at:

$$\cos x = -4 \quad \vee \quad x = 1$$

I tilfellet av at  $\cos x = -4$  har ligningen ingen reell løsning. I tilfellet av at  $\sin x = -1$ , må:

$$x = 2\pi n$$

d) Vi løser andregradsligningen mhp.  $\tan(\pi x)$ , og får at:

$$\tan(\pi x) = \sqrt{3}$$

Altså må:

$$x = \frac{1}{3} + n$$

## 2.4.2

a)

$$-\cos^2 x + 15 \sin^2 x = 3(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$12 \sin^2 x = 4 \cos^2 x$$

$$\frac{12 \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{4 \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$12 \tan^2 x = 4$$

$$\tan^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Siden  $\operatorname{atan} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$  og  $\operatorname{atan} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ , får vi at:

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$$

b) Vi starter med å multipliserer ligningen med 2, og får:

$$2 \cos^2 \left(\frac{x}{4}\right) - 4 \sin^2 \left(\frac{x}{4}\right) = -1$$

$$2 \cos^2 \left(\frac{x}{4}\right) - 4 \sin^2 \left(\frac{x}{4}\right) = -1 \left( \cos^2 \left(\frac{1}{4}\right) + \sin^2 \left(\frac{1}{4}\right) \right)$$

$$-3 \sin^2 \left(\frac{x}{4}\right) = -3 \cos^2 \left(\frac{x}{4}\right)$$

$$\tan^2 \left(\frac{x}{4}\right) = 1$$

$$\tan\left(\frac{x}{4}\right) = \pm 1$$

Siden  $\tan 1 = \frac{\pi}{4}$  og  $\tan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ , får vi at:

$$\begin{aligned}\frac{x}{4} &= \pm \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x &= \pm \pi + 4\pi n\end{aligned}$$

Det er helt greit slå seg til ro med svaret over (på en eksamen vil dette gi full uttelling), men vi skal likevel foreta en operasjon som gjør at uttrykket blir enda mer kompakt:

Siden vi av leddet  $4\pi n$  kan trekke ut så mange multiplum av  $4\pi$  vi måtte ønske, kan vi for løsningen hvor  $\pi$  har negativt fortegn skrive:

$$\begin{aligned}x &= -\pi + 4\pi + 4\pi n \\ x &= \pi + 2\pi + 4\pi n \\ &= \pi + 2\pi(2n + 1)\end{aligned}$$

Videre utfører vi en enkel faktorisering av løsningen der  $\pi$  er positiv:

$$x = \pi + 2\pi(2n)$$

Av de to uttrykkene over innser vi at  $x$  kan skrives som  $\pi$  pluss  $2\pi$  ganget med et vilkårlig oddetall eller et vilkårlig partall, altså alle heltall! Derfor får vi at:

$$x = \pi + 2\pi n$$

### 2.5.1

a) Når  $a > 0$  må  $f$  må ha sin største verdi når cosinusverdien er lik 1, altså når:

$$\cos(kx + c) = 1$$

Av (2.25) får vi da at:

$$kx + c = 2\pi n$$

Videre må  $f$  ha sin minste verdi når cosinusverdien er lik  $-1$ , altså når:

$$\cos(kx + c) = -1$$

Av (2.26) får vi da at:

$$kx + c = 2\pi n$$

b) Når  $a < 0$  får vi bare det omvendte av situasjonen i opg. a).

### 2.5.2

a) Perioden  $P$  finner vi av relasjonen:

$$k = \frac{2\pi}{P}$$

som gir:

$$P = \frac{2\pi}{k}$$



$$= \frac{2\pi}{3}$$

b) Maksimumsverdien  $f_{maks}$  er amplituden addert med konstantleddet:

$$\begin{aligned} f_{maks} &= 5 + 4 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Minimumsverdien  $f_{min}$  er konstantleddet fratrukket amplituden:

$$\begin{aligned} f_{min} &= 4 - 5 \\ &= -1 \end{aligned}$$

c)  $f$  må ha sitt maksimum når cosinusverdien blir  $-1$ , dette skjer når:

$$\begin{aligned} 3x + \frac{\pi}{12} &= \pi + 2\pi n \\ 3x &= \pi - \frac{\pi}{12} + 2\pi n \\ x &= \frac{1}{3} \left( 2\pi n - \frac{\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

Videre må  $f$  ha sitt minimum når cosinusverdien blir  $1$ , altså når:

$$\begin{aligned} 3x + \frac{\pi}{12} &= 2\pi n \\ 3x &= 2\pi n - \frac{\pi}{12} \\ x &= \frac{1}{3} \left( 2\pi n - \frac{\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

### 2.5.3

a) Når  $a > 0$  må  $f$  ha sin største verdi når sinusverdien er lik  $1$ , altså når:

$$\sin(kx + c) = 1$$

Av (2.30) får vi da at:

$$kx + c = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

Videre må  $f$  ha sin minste verdi når sinusverdien er lik  $-1$ , altså når:

$$\sin(kx + c) = -1$$

Av (2.31) får vi da at:

$$kx + c = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

b) Når  $a < 0$  får vi bare det omvendte av situasjonen i opg. a).

### 2.5.4

a)

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\pi}{k} \\ &= \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$= 4$$

b)  $f$  har maksimumspunkter der hvor sinusverdien er lik  $-1$ , altså når:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}x &= -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x &= 4n - 1\end{aligned}$$

På intervallet  $x \in [-3, 3]$  vil  $x = -1$  og  $x = 3$  oppfylle ligningen over.  $f_{maks}$  vil i alle tilfeller være lik 3, derfor blir toppunktene  $(-1, 3)$  og  $(3, 3)$ .

c)

$$\begin{aligned}-2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1 &= 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Av (2.29) kan vi enten ha at:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}x &= \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x &= \frac{1}{3}(1 + 12n)\end{aligned}$$

eller at:

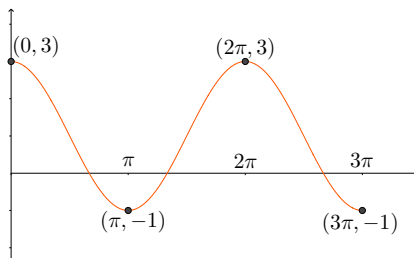
$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}x &= \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x &= \frac{1}{3}(5 + 12n)\end{aligned}$$

På intervallet  $x \in [-3, 3]$  vil  $x = -\frac{7}{3}$ ,  $x = \frac{5}{3}$  og  $x = \frac{1}{3}$  oppfylle én av de to ligningene over, dette er altså nullpunktene til  $f$ .

d) Vi markerer nullpunktene og toppunktene og skisserer sinuskurven som går mellom disse på intervallet  $x \in [-3, 3]$ .

### 2.5.5

Perioden til  $f$  tilsvarer den horisontale avstanden mellom toppunktene, som er  $2\pi$ . Amplituden er vertikalavstanden mellom likevektslinja og toppunktene, som altså er 2. Bunnpunktene ligger en halv bølgelengde unna toppunktene, og siden amplituden er 2, må bunnpunktene ha  $y$ -verdien  $1 - 2 = -1$ .



### Gruble 2

Fordi forholdet  $\frac{a}{b}$  er det samme som  $\frac{\sin x}{\tan x}$ , må det finnes et tall  $c$  som er slik at:

$$c \sin x = a \quad (\text{I})$$

$$c \cos x = b \quad (\text{II})$$

Kvadrerer vi begge ligninger og legger dem sammen, får vi:

$$(c \sin x)^2 + (c \cos x)^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Setter vi dette tilbake i (I) og (II), finner vi at:

$$\sin x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos x = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## Kapittel 3

**3.1.1** Se eksempel s. ??

**3.1.2**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= [3 - 1, 2 - (-1), 1 - (-2)] \\ &= [2, 3, 3] \\ |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{20}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= [0 - 1, 5 - (-1), 6 - (-2)] \\ &= [-1, 6, 8] \\ |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{101}\end{aligned}$$

Siden  $\sqrt{101} > \sqrt{20}$  er  $B$  nærmest  $A$ .

**3.1.3**

a)

$$\begin{aligned}|\vec{u}| &= \sqrt{(ad)^2 + (bd)^2 + (cd)^2} \\ &= \sqrt{a^2d^2 + b^2d^2 + c^2d^2} \\ &= \sqrt{d^2(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= d\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\end{aligned}$$

b) Som i opg. a) kan vi også her skrive

$$|\vec{u}| = \sqrt{d^2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

men siden  $d^2$  er et positivt tall, mens  $d$  er negativ, har vi at:

$$d \neq \sqrt{d^2}$$

istedenfor er:

$$|d| = \sqrt{d^2}$$

derfor kan vi skrive:

$$|\vec{u}| = |d|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

**3.2.1**

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= [ad, bd, cd] \cdot [eh, fh, gh] \\ &= adeh + bdfh + cdgh \\ &= dh(ae + bf + cg)\end{aligned}$$

**3.2.2**

a) Se eksempel s. ??

b) Se eksempel s. ??

c)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left[ \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5} \right] \cdot \vec{b} = [512, -128, 64]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5}[1, 3, -1] \cdot 64[8, -2, 1] \\
&= \frac{64}{5}(8 - 6 - 1) \\
&= \frac{64}{5}
\end{aligned}$$

### 3.2.3

a) Se eksempel s. ?? b) Se eksempel s. ??

3.2.4 Finn vinkelen mellom  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  når:

a)  $\vec{a} = [5, -5, 2]$  og  $\vec{b} = [3, -4, 5]$

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{5^2 + (-5)^2 + 2^2} \\
&= \sqrt{54} \\
&= \sqrt{9 \cdot 6} \\
&= 3\sqrt{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\vec{b}| &= \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} \\
&= \sqrt{50} \\
&= \sqrt{25 \cdot 2} \\
&= 5\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= [5, -5, 2] \cdot [3, -4, 5] \\
&= 15 + 20 + 10 \\
&= 45
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \\
&= \frac{45}{3\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{2}} \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Dette betyr at  $\theta = 30^\circ$ .

### 3.2.5

a) Se eksempel s. ??

b)

$$\begin{aligned}
(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\
&= \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c}^2 \\
&= 1^2 + 0 + \vec{a} \cdot \vec{c} + 0 + 2^2 + 0 + \vec{c} \cdot \vec{a} + 0 + 5^2 \\
&= 2(15 + \vec{a} \cdot \vec{c})
\end{aligned}$$

### 3.3.1

a) Se eksempel s. ??

b) Se eksempel s. ??

b) Se eksempel s. ??

### 3.3.2

a) Se eksempel s. ??

b) Vi krever at:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \\
[-5, -1, 6] \cdot [t, t^2, 1] &= 0 \\
-5t - t^2 + 6 &= 0
\end{aligned}$$

Siden  $(-2) \cdot (-3) = 6$  og  $-2 + (-3) = -5$  kan vi skrive at:

$$(t - 2)(t - 3) = 0$$

Kravet er dermed oppfylt hvis  $t \in \{2, 3\}$ .

**3.3.3 a)** Vi regner fort ut at forholdet mellom både førstekomponentene og andrekomponenten er 2, men at forholdet mellom tredjekomponentene er  $-\frac{1}{2}$ . Vektorene er derfor ikke parallelle.

b) Vi observerer at:

$$\vec{b} = \frac{3}{7}[-3, 5, 2]$$

dermed er  $\vec{b}$  et multiplum av  $\vec{a}$  og da er  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

### 3.3.4

a) Vi bruker forholdet mellom første- og tredjekomponentene for å sette opp en ligning for  $t$ :

$$\begin{aligned}
-\frac{t+3}{3} &= -\frac{16}{8} \\
t+3 &= 6 \\
t &= 3
\end{aligned}$$

Forholdet mellom andrekomponentene blir da:

$$\frac{1-3}{1} = -2$$

Forholdet er  $-2$  for alle komponentene når  $t = 3$  og da er  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

b) Også her bruker vi første- og tredjekomponentene for å sette opp en ligning for  $t$ , fordi vi da får isolert det kvadratiske leddet:

$$-\frac{t^2+2}{3} = -\frac{(5t^2+3)}{8}$$

$$8t^2 + 16 = 15t^2 + 9$$

$$7x^2 = 7$$

$$x = \pm 1$$

Når  $t = 1$  er forholdet mellom både førstkomponentene og tredjekomponentene lik

$$-\frac{1^2 + 2}{3} = -1$$

Og forholdet mellom andrekomponentene er:

$$\frac{1}{1} = 1$$

For  $t = 1$  er altså  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  ikke parallelle. Vi ser derimot fort at forholdet mellom hver av komponentene blir  $-1$  når  $t = -1$ , for dette valget av  $t$  er derfor  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

**3.3.5**  $\vec{u} = [4, 6 + s, -(s + t)]$  og  $\vec{v} = [\frac{12}{7}, \frac{2t-9s}{7}, \frac{3s-t}{7}]$  Vi starter med å observere at:

$$\vec{v} = \frac{1}{7}[12, 2t - 9s, 3s - t]$$

Vi definerer  $\vec{w} = [12, 2t - 9s, 3s - t]$ . Skal vi ha at  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ , må vi også ha at  $\vec{u} \parallel \vec{w}$ . Siden forholdet mellom førstekomponentene til  $\vec{u}$  og  $\vec{w}$  er 3, krever vi at  $\vec{u} = 3\vec{w}$ . Da kan vi sette opp følgende ligningssystem:

$$2t - 9s = 3(6 + s) \tag{I}$$

$$3s - t = -3(s + t) \tag{II}$$

Av II får vi at:

$$3s - t = -3s - 3t$$

$$2t = -6s$$

$$t = -3s$$

Setter vi  $t = -3s$  inn i (II) får vi:

$$2(-3s) - 9s = 18 + 3s$$

$$-6s - 9s = 18 + 3s$$

$$-18s = 18$$

$$s = -1$$

Altså er  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  parallelle hvis  $s = -1$  og  $t = -3s = 3$ .

### 3.4.1

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ae & be \\ cf & df \end{vmatrix} &= aedf - becf \\ &= ef(ad - bc) \\ &= ef \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} i \end{aligned}$$

??

b) Arealet er gitt som tallverdien til  $\det(\vec{a}, \vec{b})$ :

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}, \vec{b}) &= \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 24 & -16 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 8 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 16((-1) \cdot (-2) - 2 \cdot 3) \\ &= 16 \cdot (-4) \\ &= -64\end{aligned}$$

Arealet er altså 64.

### 3.4.2

Hvis  $\vec{u}||\vec{v}$  betyr dette at hvis vi skriver  $\vec{u} = [a, b, c]$ , så kan vi skrive  $\vec{v} = d[a, b, c]$ . Vi får da at:

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a & b & c \\ da & db & dc \end{vmatrix} \\ &= d\vec{e}_x \begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix} - d\vec{e}_y \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + d\vec{e}_z \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

Resultatet fra 3.4.1 er her brukt i andre linje for å forenkle regningen av  $2 \times 2$  determinantene.

### 3.4.4

a) Arealet til grunnflaten tilsvarer lengden av vektoren  $\vec{a} \times \vec{b}$ :

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= [(-2) \cdot 1 - 1 \cdot (-3), -(2 \cdot 1 - 1 \cdot 3), 2 \cdot (-3) - (-2) \cdot 3] \\ &= [-2 + 3, -(2 - 3), -6 + 6] \\ &= [1, 1, 0]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{a} \times \vec{b}| &= \sqrt{1^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

b) Av (??) vet vi at volumet  $V$  er gitt som:

$$V = \frac{1}{6} |\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}|$$

Vi har at:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} &= [1, 1, 0] \cdot [2, -3, 2] \\ &= 2 - 3 &= -1\end{aligned}$$

Og dermed er  $V = \frac{1}{6}$ .

### 3.4.5



**a)** Diagonalen til grunnflaten kan uttrykkes som vektoren  $\vec{a} + \vec{b}$ , og lengden blir da (husk at  $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ ):

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})} \\ &= \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}} \\ &= \sqrt{3^2 + 0 + 4^2} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

## Kapittel 4

4.1.1 Se eksempel s. ??

4.1.2 Vi bruker kravet for  $x$  og  $z$ -koordinaten for å sette opp et ligningssystem:

$$-3 - 2t = -7 - 3s \quad (\text{I})$$

$$1 - t = s \quad (\text{II})$$

Av (II) har vi et uttrykk for  $s$ . Setter vi dette inn i (I) får vi:

$$-3 - 2t = -7 + 3(1 - t)$$

$$-3 - 2t = -7 + 3 - 3t$$

$$t = -1$$

Altså er  $t = -1$  og  $s = 2$ . For disse verdiene gir begge parameteriseringene punktet  $A = (-1, 1, 2)$ .

4.1.3 Se eksempel s. 108

4.1.4 Se eksempel s. 109

4.2.1 Se eksempel s. 111

### 4.2.2

a) Av parameteriseringen ser vi at to retningsvektorer må være  $[2, 3, 0]$  og  $[0, 2, -1]$ .

b) En normalvektor for planet er gitt ved vektorproduktet av retningsvektorene:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= \vec{e}_x \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_x(-3 - 0) - \vec{e}_x(-2 - 0) + \vec{e}_z(4 - 0) \\ &= [-3, -2, 4] \end{aligned}$$

Av parameteriseringen ser vi at  $(-4, 2, 1)$  er et punkt i planet, derfor kan vi skrive:

$$-3(x - (-4)) + 2(y - 2) + 4(z - 1) = 0$$

$$-3x - 12 - 2y - 4 + 4z - 4 = 0$$

$$-3x - 2y + 4z - 20 = 0$$

### 4.2.4

Vi krever at:

$$(-2, 1, 1) \cdot [3t, 5, t] = 0$$

$$-6t + 5 + t = 0$$

$$t = 1$$

Altså er  $[3, 5, 1]$  en retningsvektor for planet. Ligningen til planet blir da:

$$3(x - (-2)) + 5(y - 1) + (z - 1) = 0$$

$$3x + 5y + z = 0$$

**4.2.5** Se eksempel s. 115

#### 4.2.6

a) Vi starter med å skrive de fullstendige kvadratene:

$$x^2 - 6x = (x^2 - 3)^2 - 3^2$$

$$y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1^2$$

$$z^2 - 10z = (z - 5)^2 - 5^2$$

Vi kan derfor skrive:

$$(x^2 - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 - 14 - 9 - 1 - 25 = 0$$

$$(x^2 - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 = 49$$

$$(x^2 - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 = 7^2$$

Altså har kula sentrom i  $S = (3, -1, 5)$  og radius  $r = 7$ .

b) Vi setter koordinatene til  $A$  faktoriserende venstresiden av kuleligningen og får:

$$(4 - 3)^2 + (1 + 1)^2 + (6 - 5)^2 = 6$$

Ligningen over representerer den kvadrerte avstanden mellom  $S$  og  $A$ , siden  $6 < 49$  må  $A$  ligge inni kula.

For  $B$  får vi:

$$(-6 - 3)^2 + (-4 + 1)^2 + (1 - 5)^2 = 106$$

Siden  $106 > 49$  ligger  $B$  utenfor kula.

#### 4.3.3

a) Av ligningen ser vi at  $[3, -2, 1]$  er en normalvektor.

b) I ligningen for  $\beta$  ser vi at hvis  $x = y = 0$ , så må også  $z = 0$ .  $\beta$  inneholder derfor origo.

c) Avstanden  $h$  mellom  $\alpha$  og  $\beta$  må tilsvare avstande mellom  $\alpha$  og et punkt i  $\beta$ . Vi bruker svaret fra b) og får:

$$\begin{aligned} h &= \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 12|}{|[3, -2, 1]|} \\ &= \frac{12}{\sqrt{9 + 4 + 1}} \\ &= \frac{12}{\sqrt{14}} \end{aligned}$$

#### 4.3.4

a) For å finne  $S$  skriver vi de fullstendige kvadratene:

$$x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 3^2$$

$$y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 2^2$$

$$z^2 = z^2$$

Kuleligningen kan vi derfor skrive som:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 - 23 - 3^2 - 2^2 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 36$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 6^2$$

Altså har vi  $S = (3, -2, 0)$ .

b) Av ligningen til planet ser vi at  $[2, -1, -2]$  er en normalvektor for  $\alpha$ . Dette må være en retningsvektor for linja som går gjennom  $A$  og  $S$ , som dermed kan parameteriseres ved:

$$l : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -2t \end{cases}$$

c) *Løsningsmetode 1:* Linja og kuleflata skjærer der parameteriseringen til linja oppfyller kuleligningen:

$$((3 + 2t) - 3)^2 + ((-2 - t) + 2)^2 + (-2t - 0)^2 = 36$$

$$(2t)^2 + (-t)^2 + (-2t)^2 = 36$$

$$9t^2 = 36$$

$$t^2 = 4$$

$$t = \pm 2$$

For  $t = -2$  gir parameteriseringen punktet  $(-1, 0, 4)$  mens for  $t = 2$  får vi punktet  $(7, -4, -4)$ .

*Løsningsmetode 2:* Vi har funnet at  $[2, -1, -2]$  er en retningsvektor for linja gjennom  $A$  og  $S$ , denne vektoren har lengde 3. Vi kan derfor lage oss en retningsvektor med lengde 1 ved å skrive  $\frac{1}{3}[2, -1, -2]$ . Siden avstanden mellom  $S$  og de to punktene vi søker er lik radiusen 6, må de være gitt ved uttrykket

$$S \pm 6 \cdot \frac{1}{3}[2, -1, -2] = S \pm 2[2, -1, -2]$$

Regner man ut dette får man (selvølgelig) samme svar som for *Løsningsmetode 1*.

d) Se eksempel s. 112 eller bruk lignende resonnement som *Løsningsmetode 2* i opg. c).

e) Radiusen  $R$  til sirkelen, radiusen  $r$  til kula og linjestykket  $AS$  utgjør en rettvinklet trekant. Av Pytagoras' setning har vi da at:

$$R^2 = r^2 - |\overrightarrow{AS}|^2$$

$$= 6^2 - 3^2$$

$$= 36 - 9$$

$$= 27$$

$$R = \pm\sqrt{27}$$

$R$  har altså lengden  $\sqrt{27}$ .

## Kapittel 5

### 5.1.1

c) Vi setter  $u = -2 \cos x$  og  $v = \sin x$ , og finner at:

$$u' = 2 \sin x$$

$$v' = -\cos x$$

Av produktregelen får vi at:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'v + uv' \\ &= 2 \sin x \sin x + (-2 \cos x) \cos x \\ &= 2(\sin^2 x - \cos^2 x) \end{aligned}$$

d) Vi setter  $u = \tan x$  og  $g(u) = u^{\frac{1}{2}}$ . Vi har da at:

$$u'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$g'(u) = \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}}$$

Av kjerneregelen får vi:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u)u'(x) \\ &= \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{2 \tan^{\frac{1}{2}} x \cos^2 x} \end{aligned}$$

### 5.1.2

a) Vi setter  $u(x) = \cos x$  og  $g(u) = \ln u$ . Vi får da:

$$u'(x) = -\sin x$$

$$g'(u) = \frac{1}{u}$$

Av kjerneregelen kan vi da skrive:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u)u'(x) \\ &= \frac{1}{u}(-\sin x) \\ &= -\frac{\sin x}{\cos x} \\ &= -\tan x \end{aligned}$$

b) Vi kan skrive (se (2.16)):

$$f(x) = -\sin(2x)$$

Av kjerneregelen får vi da at:

$$f'(x) = -2 \cos(2x)$$

### 5.2.1 Se eksempel s. 137

#### 5.2.2

a) Vi starter med å finne  $f''(x)$ :

$$\begin{aligned}f'(x) &= -a \sin(kx + c) \cdot k \\f''(x) &= -ak^2 \cos(kx + c)\end{aligned}$$

Skal  $f''(x) = 0$ , må  $\cos(kx + c) = 0$  og da blir  $f = d$ . Siden alle punkt der  $f''(x) = 0$  er infleksjonspunkt, må alle vendepunktene ligge på linje  $y = d$ .

b) Infleksjonspunktene er alle verdier av  $x$  der  $f''(x) = 0$ . Fra opg. a) vet vi at dette er tilfelle når  $\cos(kx + c) = 0$ , altså når:

$$\begin{aligned}kx + c &= \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\kx &= \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n - c \\x &= \frac{1}{2k}(\pi + 4\pi n + 2c)\end{aligned}$$

#### 5.3.1

a) Av kjerneregelen får vi at:

$$\begin{aligned}F'(x) &= 2xe^{x^2} \\&= f(x)\end{aligned}$$

Siden  $F'(x) = f(x)$  er  $F$  en antiderivert av  $f$ .

b) Se opg. a).

## Kapittel 6

**6.1.1 a)**  $f'(x) = 20x^4$  **b)**  $f(2) - f(0) = 128$

**6.1.2**  $F(4) - F(1) = 8$

### 6.1.3

**a)** Vi bruker kjerneregelen to ganger. Først setter vi  $u(x) = \cos^2 x$  og  $g(u) = e^u$ . Deretter setter vi  $h(x) = \cos x$  og  $i(h) = h^2$ . Vi får da at:

$$\begin{aligned} u'(x) &= i'(h)h'(x) \\ &= 2h \cdot (-\sin x) \\ &= -2\cos x \sin x \end{aligned}$$

Videre har vi da at:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u)u'(x) \\ &= e^u \cdot (-2\cos x \sin x) \\ &= -2\cos x \sin x e^{\cos^2 x} \end{aligned}$$

**b)** Av (2.16) har vi at  $2\cos x \sin x = \sin(2x)$ , og derfor kan vi skrive:

$$\begin{aligned} \int -\sin(2x) e^{\cos^2 x} dx &= \int -2\cos x \sin x e^{\cos^2 x} dx \\ &= \int f'(x) dx \\ &= f(x) + C \\ &= e^{\cos^2 x} + C \end{aligned}$$

Overgangen mellom andre og tredje linje følger av definisjonen av det ubestemte integralet.

### 6.1.4

**a)** Vi må vise at  $(x^2 e^x)'$  tilsvarer uttrykket i integranden.

$$\begin{aligned} (x^2 e^x)' &= 2xe^x + x^2 e^x \\ &= xe^x(2 + x) \end{aligned}$$

**b)** Vi må vise at  $(e^{\cos x + x^2})'$  tilsvarer uttrykket i integranden:

$$\begin{aligned} (e^{\cos x + x^2})' &= e^{\cos x + x^2} \cdot (\cos x + x^2)' \\ &= e^{\cos x + x^2} (-\sin x + 2x) \\ &= -e^{\cos x + x^2} (\sin x - 2x) \end{aligned}$$

**6.2.2** Av (2.44) vet vi at perioden  $\cos x$  er  $2\pi$ . Dette betyr at hvis vi for en konstant  $c$  har at  $a = c$ , så er  $b = a + 2\pi$ . Integralet blir da:

$$\int_c^{c+2\pi} (\cos x + d) dx = \left[ \sin x + dx \right]_c^{c+2\pi}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \sin(c + 2\pi) + d(c + 2\pi) - (\sin c + dc) \right] \\
&= 2d\pi
\end{aligned}$$

Mellom andre og tredje linje har vi brukt det faktum at  $\sin(c + 2\pi) = \sin c$ . Gjennomsnittet kan altså skrives som:

$$\frac{1}{(c + 2\pi) - c} \cdot 2d\pi = d$$

### 6.2.3

a) Vi setter  $u = x^2$  og  $g(u) = e^u$ . Siden  $u' = 2x$  får vi:

$$\begin{aligned}
\int x e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} \\
&= \frac{1}{2} \int u' e^u dx \\
&= \frac{1}{2} \int e^u du \\
&= \frac{1}{2} e^u + C \\
&= \frac{1}{2} e^{x^2} + C
\end{aligned}$$

b) Vi starter med å finne det ubestemte integralet ved å bruke bytte av variabel. Vi setter  $u = 2x^2 - 3$  og  $g(u) = e^u$ , siden  $u' = 4x$  får vi:

$$\begin{aligned}
\int 8x e^{2x^2-3} dx &= 2 \int 4x e^{2x^2-3} dx \\
&= 2 \int u' e^u dx \\
&= 2 \int e^u du \\
&= 2e^u + C
\end{aligned}$$

Det bestemte integralet blir derfor:

$$\begin{aligned}
\left[ 2e^{2x^2-3} \right]_1^2 &= 2 \left[ e^{2 \cdot 2^2-3} - e^{2 \cdot 1-3} \right] \\
&= 2 \left[ e^5 - e^{-1} \right]
\end{aligned}$$

c) Vi setter  $u = \cos x$  og  $g(u) = u$ . Siden  $u' = -\sin x$ , får vi:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\cos x} dx &= - \int \frac{u'}{u} dx \\
&= \int \frac{1}{u} du \\
&= -\ln u + C \\
&= -\ln(\cos x) + C
\end{aligned}$$

d) Vi setter  $u = \cos x$  og  $g(u) = \frac{1}{u^3}$ . Siden  $u' = -\sin x$ , får vi:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{-u'}{u^3} dx$$



$$\begin{aligned}
&= - \int u^{-3} dx \\
&= \frac{1}{2} u^{-2} + C
\end{aligned}$$

Siden  $u(0) = \cos 0 = 1$  og  $u(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = 2^{-1}$  blir det bestemte integralet:

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{1}{2} u^{-2} \right]_1^{2^{-1}} &= \frac{1}{2} [(2^{-1})^{-2} - 1^{-2}] \\
&= \frac{1}{2} [4 - 1] \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

f) Vi setter  $u = 3x^2 + 4x + 3$  og  $g(u) = \frac{1}{u}$ , og får da:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+2}{3x^2+4x+3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{6x+4}{3x^2+4x+3} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{u'}{u} dx \\
&= \frac{1}{2} \int u^{-1} du \\
&= \frac{1}{2} \ln u \\
&= \frac{1}{2} \ln (3x^2 + 4x + 3)
\end{aligned}$$

#### 6.2.4

Av (2.17) og (2.16) kan vi skrive:

$$\int \sin(2x) e^{1-\cos^2 x} dx = \int 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x}$$

Vi setter så  $u = \sin x$  og  $g(u) = 2ue^{u^2}$ . Siden  $u' = \cos x$  kan vi skrive:

$$\begin{aligned}
\int 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x} dx &= 2 \int uu' e^{u^2} dx \\
&= 2 \int ue^{u^2} dx
\end{aligned}$$

Vi setter nå  $v = u^2$  og  $h(v) = e^v$ . Siden  $v' = 2u$  får vi:

$$\begin{aligned}
2 \int ue^{u^2} dx &= \int v' e^v dx \\
&= \int e^v dv \\
&= e^v + C \\
&= e^{u^2} + C \\
&= e^{\sin^2 x} + C
\end{aligned}$$

#### 6.2.5

b) Vi setter  $u = \ln x$  og  $v' = x^{\frac{1}{2}}$  og får da at  $u' = x^{-1}$  og  $v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ :

$$\int \sqrt{x} \ln x dx = \int uv' dx$$

$$\begin{aligned}
&= uv - \int u'v \, dx \\
&= \ln x \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \int x^{-1} \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 2) + C
\end{aligned}$$

c) Vi setter  $u = \ln x$  og  $v' = x^{-2}$ , og får da at  $u' = x^{-1}$  og  $v = -x^{-1}$ .

$$\begin{aligned}
\int \ln x \, x^{-2} \, dx &= \int uv' \, dx \\
&= uv - \int u'v \, dx \\
&= \ln x (-x^{-1}) - \int x^{-1}(-x)^{-1} \, dx \\
&= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} \, dx \\
&= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C \\
&= -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C
\end{aligned}$$

Det bestemte integralet blir da:

$$\begin{aligned}
\left[ -\frac{1}{x}(\ln |x| + 1) \right]_1^e &= -\left[ \frac{1}{e}(\ln e + 1) - \frac{1}{1}(\ln 1 + 1) \right] \\
&= -\left[ \frac{2}{e} - 1 \right] \\
&= 1 - \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

**6.2.6** Vi setter  $u = \sin x$  og  $v' = \sin x$ , og får da at  $u' = \cos x$  og  $v = -\cos x$ :

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \, dx &= \sin x(-\cos x) - \int \cos x(-\cos x) \\
&= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\
&= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx \\
2 \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int 1 \, dx \\
\int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C
\end{aligned}$$

**6.2.7 a)** Vi starter med å faktorisere nevneren i integranden:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Altså kan vi skrive:

$$\frac{13-4x}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$13-4x = A(x-3) + B(x-2)$$

Når  $x = 3$  får vi:

$$13-4 \cdot 3 = B(3-2)$$

$$1 = B$$

Og når  $x = 2$  får vi:

$$12-4 \cdot 2 = A(2-3)$$

$$5 = -A$$

$$-5 = A$$

Det ubestemte integralet vi ønsker å løse kan derfor skrives som:

$$\int \left( \frac{1}{x-3} - \frac{5}{x-2} \right) dx = \ln(x-3) - 5 \ln(x-2) + C$$

Det bestemte integralet blir da:

$$\left[ \ln|x-3| - 5 \ln|x-2| \right]_4^5 = \ln|5-3| - 5 \ln|5-2| - (\ln|4-3| - 5 \ln|4-2|)$$

$$= \ln 2 - 5 \ln 3 - \ln 1 + 5 \ln 2$$

$$= 6 \ln 2 - 5 \ln 3$$

### 6.2.8 Se eksempel s. 163

#### 6.4.1

a) Tverrsnittet langs  $x$ -aksen blir en sirkel med høyde  $\sqrt{r^2 - x^2}$ . Tverrsnittsarealet blir derfor

$$A(x) = \pi \sqrt{r^2 - x^2}^2$$

$$= \pi(r^2 - x^2)$$

b)

$$V = \int_{-r}^r A(x) dx$$

$$= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[ xr^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-r}^r$$

$$= \frac{\pi}{3} (3rr^2 - r^3 - (3(-r)r^2 - (-r)^3))$$

$$= \frac{\pi}{3} (3r^3 - r^3 + 3r^3 - r^3)$$

$$= \frac{4\pi}{3} r^3$$

#### 6.4.2 a)

Volumet  $V$  er gitt ved ligningen:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 f^2 dx \\ &= \int_0^1 (e^x)^2 dx \\ &= \int_0^1 e^{2x} dx \end{aligned}$$

Vi setter  $u = 2x$  og  $g(u) = e^u$ , da blir  $u' = 2$ :

$$\begin{aligned} \int e^{2x} dx &= \frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int u' e^u du \\ &= \frac{1}{2} e^u + C \end{aligned}$$

Siden  $u(0) = 0$  og  $u(1) = 2$  blir det bestemte integralet:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2} e^u \right]_0^2 &= \frac{1}{2} [e^2 - e^0] \\ &= \frac{1}{2} [e^2 - 1] \end{aligned}$$

## Kapittel 7

### 7.1.1 a)

$$\begin{aligned}\int y'' dt &= \int -g dt \\ \int y' dt &= - \int (gt + C) dt \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}y(0) &= -\frac{1}{2}g \cdot 0 + C \cdot 0 + D \\ 0 &= D\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'(0) &= -g \cdot 0 + C \\ v_0 &= C\end{aligned}$$

Den spesifikke løsningen er derfor  $y = v_0 - \frac{1}{2}gt^2$ , ofte nevnt som én av *veiformlene* i fysikk.

### 7.2.1

Av kjerneregelen ved derivasjon har vi at:

$$(e^{F(x)})' = e^{F(x)} f(x)$$

Av produktregelen ved derivasjon har vi da at:

$$(y(x)e^{F(x)})' = y'(x)e^{F(x)} + y(x)e^{F(x)}f(x)$$

Altså har vi vist det vi skulle.

7.2.2 a) Vi har at:

$$\int 4 dx = 4x + C$$

Den integrerende faktoren er derfor  $e^{4x} =$ :

$$\begin{aligned}(y' + 4y)e^{4x} &= 8e^{4x} \\ (ye^{4x})' &= 8e^{4x} \\ \int (ye^{4x})' dx &= \int 8e^{4x} dx \\ ye^{4x} &= 2e^{4x} + C \\ y &= 2 + Ce^{-4x}\end{aligned}$$

b) Vi har at:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

Den integrerende faktoren er derfor  $e^{\ln x} = x$ :

$$\begin{aligned}\left(y' + \frac{1}{x}y\right)x &= x \cos x \\ (yx)' &= x \cos x \\ \int (yx)' dx &= \int x \cos x dx \\ yx &= x \sin x + \int \sin x dx \\ yx &= x \sin x - \cos x + C \\ y &= \sin x + x^{-1}(\cos x + C)\end{aligned}$$

c) Vi har at:

$$\int \frac{3}{x} dx = 3 \ln x + C$$

Den integrerende faktoren er derfor  $e^{3 \ln x} = x^3$ :

$$\begin{aligned}y'x^3 + \frac{3}{x}yx^3 &= x^3(15x + 4) \\ (yx^3)' &= (15x^4 + 4x^3) \\ \int (yx^3)' dx &= \int (15x^4 + 4x^3) dx \\ yx^3 &= 3x^5 + x^3 + C \\ y &= 3x^2 + x + Cx^{-3}\end{aligned}$$

d) Vi har at:

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

Den integrerende faktoren er derfor  $e^{x^3}$ :

$$\begin{aligned}(y' + 3x^2y)e^{x^3} &= (1 + 3x^2)e^x e^{x^3} \\ (ye^{x^3})' &= (1 + 3x^2)e^{x^3+x} \\ \int (ye^{x^3})' dx &= \int (1 + 3x^2)e^{x^3+x} dx\end{aligned}$$

Vi setter  $u = x^3 + x$ , og får at:

$$\begin{aligned}ye^{x^3} &= \int u' e^u dx \\ &= \int e^u du \\ &= e^u \\ ye^{x^3} &= e^{x^3+x} + C \\ y &= e^x + Ce^{-x^3}\end{aligned}$$

**7.6.1**

a) Hvis vi lar  $y$  betegne folketallet, får vi ligningen:

$$y' = ky$$

hvor  $k > 0$  siden  $y$  hele tiden er voksende.

b) Den generelle løsningen av ligningen i a) er  $y = Ce^{kt}$ . Videre har vi at:

$$y(0) = Ce^{k \cdot 0}$$

$$100 = C$$

og at:

$$y(1) = 100e^{k \cdot 1}$$

$$\ln 101 = \ln (100e^k)$$

$$\ln 101 = \ln 100 + \ln e^k$$

$$\ln \left( \frac{101}{100} \right) = k$$

Altså kan vi skrive:

$$y = 100e^{\ln\left(\frac{101}{100}\right)t}$$

$$= 100 \cdot 1.01^t$$

**7.6.2 a)**

$$T' + kT = kT_a$$

$$T' e^{kt} + kT e^{kt} = kT_a e^{kt}$$

$$(Te^{kt})' = kT_a e^{kt}$$

$$\int (Te^{kt})' dt = \int kT_a e^{kt} dt$$

$$Te^{kt} = T_a e^{kt} + C$$

$$T = T_a + Ce^{-kt}$$

b) Siden  $T(0) = 95$  og  $T_a = 15$ , har vi at:

$$T(0) = 15 + Ce^{-k \cdot 0}$$

$$95 = 15 + C$$

$$80 = C$$

Altså får vi at:

$$T = 15 + 80e^{-\frac{\ln 2}{5}t}$$

c)

$$T(15) = 15 + 80e^{-\frac{\ln 2}{5} \cdot 15}$$

$$= 15 + 80e^{-3 \ln 2}$$

$$= 15 + 80 \cdot 2^{-3}$$

$$= 25$$

d)  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-kt} = 0$ , derfor vil temperaturen til gjenstanden gå mot romtemperaturen.

### 7.3.1

a) Se eksempel s. ?? og opg. b)

b)

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x}y' &= \cos^2 y \\ \frac{y'}{\cos^2 y} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \int \frac{y'}{\cos^2 y} dx &= \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ \int \frac{1}{\cos^2 y} dy &= \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} \\ \tan y &= \sqrt{x} + C \\ y &= \operatorname{atan}(\sqrt{x} + C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(4) &= \operatorname{atan}(\sqrt{4} + C) \\ \frac{\pi}{4} &= \operatorname{atan}(2 + C) \end{aligned}$$

Siden  $\operatorname{atan} 1 = \frac{\pi}{4}$  må  $C = -1$ , altså har vi at:

$$y = \operatorname{atan}(\sqrt{x} + 1)$$

### 7.6.3

Et fjør-masse system uten damping er beskrevet av ligningen

$$my'' + ky = 0$$

hvor  $k > 0$ . Den karakteristiske ligningen blir da:

$$\begin{aligned} mr^2 + k &= 0 \\ r^2 &= -\frac{k}{m} \\ r &= \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

For to konstanter  $C$  og  $D$  er derfor den generelle løsningen gitt som:

$$y = C \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Og dermed har vi vist det vi skulle.

??

Et fjør-masse system med damping er beskrevet av ligningen

$$my'' + by' + ky = 0$$



Som vi kan omskrive til

$$y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

Setter vi  $\frac{b}{m} = 2\alpha$  og  $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$  får vi

$$y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = 0$$

som var det vi skulle vise.

b) Den karakteristiske ligningen blir:

$$r^2 + 2\alpha r + \omega^2 = 0$$

Løser vi denne ved abc-formelen får vi:

$$\begin{aligned} r &= \frac{-2\alpha \pm \sqrt{(2\alpha)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \omega^2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2\alpha \pm 2\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}{2 \cdot 1} \\ &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

c)

- Når  $\alpha > \omega$  får den karakteristiske ligningen to reelle løsninger siden uttrykket i kvadratroten blir et tall større enn 0. Løsningen av differensialligningen er dermed gitt ved (7.12).
- Når  $\alpha = \omega$  får den karakteristiske ligningen én reell løsning siden uttrykket i kvadratroten blir 0. Løsningen av differensialligningen er dermed gitt ved (7.13).
- Når  $\alpha < \omega$  får den karakteristiske ligningen to komplekse løsninger siden uttrykket i kvadratroten blir et negativt tall forskjellig fra 0. Løsningen av differensialligningen er dermed gitt ved (7.14).

d) Vi faktorerer den karakteristiske ligningen for enklere å avsløre oppførselen til uttrykket:

$$-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} = -\alpha \pm \alpha \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\alpha^2}}$$

Siden  $m$ ,  $q$  og  $k$  alle er positive tall forskjellige fra null, må også  $\alpha$  og  $\omega$  være det. Av ligningen over ser vi at hvis  $\alpha > \omega$ , blir løsningen av den karakteristiske ligningen lik  $-\alpha$  pluss/minus et tall som er mindre enn  $\alpha$ . Altså må begge løsninger bli negative og  $y$  blir da synkende for alle  $t > 0$ . Videre ser vi at hvis  $\alpha = \omega$ , blir løsningen av den karakteristiske ligningen lik  $-\alpha$ .  $y$  består da av et ledd som er synkende for alle  $t$  og et ledd som går mot 0 når  $t \rightarrow \infty$ . Til slutt ser vi at når  $\alpha < \omega$ , gir rotuttrykket opphav til en kompleks løsning.  $y$  består da av et sinus og cosinusuttrykk, som begge er multiplisert med  $e^{-\alpha t}$ . Også da vil altså  $y$  gå mot 0 når  $t \rightarrow \infty$ .