Vedlegg A: Eksakte sinus- og cosinus-verdier

For å finne eksakte verdier av sinus til et tall x, kan vi sette opp følgende tabell:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

For cosinus setter vi opp mønsteret andre veien:

$\cos x$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0

Erstatter vi $\frac{\sqrt{1}}{2}$ med $\frac{1}{2}$ og $\frac{\sqrt{4}}{2}$ med 1, får vi dette:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Av tabellen over kan vi enkelt finne $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$:

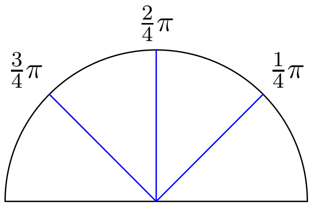
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Vedlegg B: Løsning av trigonometriske ligninger

Når vi har trigonometriske ligninger hvor en løsning ikke ligger i første kvadrant, kan det være litt vanskelig å huske et tall som løser ligningen. Vi skal nå vise en metode du alltid kan bruke, eksemplifisert ved å finne et tall som oppfyller ligningen

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{B1}$$

Siden cosinusverdien er negativ, må én løsning ligge i andre kvadrant. Vi vet at $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ har en løsning i første kvadrant, nemlig $x = \frac{\pi}{4}$. Dette forteller oss faktisk at alle løsninger av $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ er et heltalls multiplum[1] av brøken $\frac{\pi}{4}$. På intervallet $[0, \pi]$ deler vi derfor enhetssirkelen inn i fire like sektorer:



Figur 1: $\frac{3}{4}\pi$ og $\frac{1}{4}\pi$ har samme cosninusverdi.

Av figuren over ser vi at $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, derfor må $x = \frac{3}{4}\pi$ være en løsning av (B1). Og da må også $x = -\frac{3\pi}{4}$ være en løsning (se tilbake til *figur* **??**).

Vedlegg C: Løsning av andregradsligninger

Andregradssuttrykket

$$x^2 + bx + c$$

kan vi skrive som

$$(x + x_1)(x + x_2)$$

hvor $x = -x_1$ og $x = -x_2$ er løsningene av ligningen $x^2 + bc + c = 0$. Dette betyr at

$$\begin{aligned} x^2 + bx + c &= (x + x_1)(x + x_2) \\ &= x^2 + x_1 x + x_2 x + x_1 x_2 \\ &= x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 \end{aligned}$$

Venstre og høyre side i ligningen over er lik for alle x bare hvis

$$x_1 x_2 = c \quad \text{og} \quad x_1 + x_2 = b \tag{C1}$$

[1]Hvis vi for tre tall a, b og c kan skrive at $a = bc$, da er a et multiplum av b.

Eksempel 1

Faktoriser uttrykket $x^2 - 5x + 4$.

Svar:

Siden $(-4)(-1) = 4$ og $(-4) + (-1) = -5$ er kravet fra (C1) oppfylt, og vi kan skrive

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$$

Eksempel 2

Løs ligningen

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Svar:

Siden $(-3)2 = -6$ og $(-3) + 2 = -1$, kan vi skrive

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

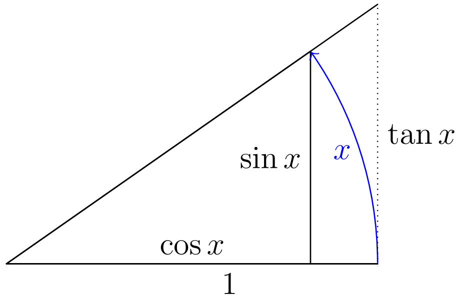
Altså har vi løsningene $x = 3$ eller $x = -2$.

Vedlegg D: Grensen av $\sin x$ og $\cos x - 1$ over x

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Vi nøyer oss med å se på grensen når $x^+ \to 0$, da resonnementet blir helt symmetrisk for $x^-+ \to 0$.

I figuren under ser vi bl. a. en rett trekant med katetene $\cos x$ og $\sin x$. Av formlikhet kan det vises at vi kan lage en forstørret trekant med katetene 1 og $\tan x$.



Bulengden x må alltid være større enn $\sin x$, altså må vi ha at

$$\frac{\sin x}{x} < 1 \tag{D1}$$

Videre observerer vi at trekanten med $\tan x$ som høyde og 1 som grunnlinje må ha et større areal enn sektoren til x. Fordi x utgjør $\frac{x}{2\pi}$ av omkretsen til enhetssirkelen, må den utgjøre den samme brøkdelen av arealet (forklar for deg selv hvorfor!). Arealet til enhetssirkelen er π, og da er arealet til sektoren $\pi \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$. Vi kan derfor skrive

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x &< \frac{1}{2}\tan x \\ x &< \frac{\sin x}{\cos x} \\ \cos x &< \frac{\sin x}{x} \end{aligned} \tag{D2}$$

Fra (D1) og (D2) har vi at

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Når x går mot 0, går $\cos x$ mot 1. I denne grensen blir altså $\frac{\sin x}{x}$ klemt i mellom et tall uendelig nærme (men mindre enn) 1 på den ene siden og 1 på den andre. Derfor må vi ha at

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Siden $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, har vi at

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x - 1)}{x} \frac{(\cos x + 1)}{(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} \\ &= \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x + 1}\right) \\ &= 1 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vedlegg E: Funksjonsdrøfting

Merk: Et tall c kan omtales som et punkt i funskjonsdrøftinger.

Maksimum og minimum

Gitt en funksjon $f(x)$:

Absolutt maksimum og absolutt minimum:

- f har absolutt maksimum $f(c)$ hvis $f(c) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f$.
- f har absolutt minimum $f(c)$ hvis $f(c) \leq f(x)$ for alle $x \in D_f$.

Lokalt maksimum og absolutt minimum:

- f har et lokalt maksimum $f(c)$ hvis det finnes et åpent intervall I om c slik at $f(c) \geq f(x)$ for $x \in I$.
- f har et lokalt minimum $f(c)$ hvis det finnes et åpent intervall I om c slik at $f(c) \leq f(x)$ for $x \in I$.

Ekstremalverdi og ekstremalpunkt

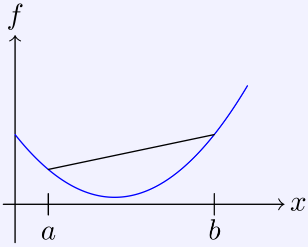
Gitt en funksjon $f(x)$ med maksimum/minimum $f(c)$. Da er

- $f(c)$ en ekstremalverdi for f.
- c et ekstremalpunkt for f. Nærmere bestemt et maksimalpunkt/minimumspunkt for f.
- $(c, f(c))$ et toppunkt/bunnpunkt for f.

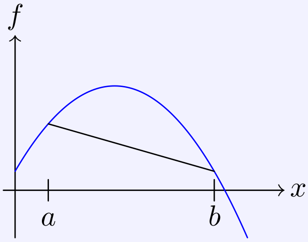
Konvekse og konkave funksjoner

Gitt en kontinuerlig funksjon $f(x)$.

Hvis hele linja mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ ligger over grafen til f på intervallet $[a, b]$, er f konveks for $x \in [a, b]$.



Hvis hele linja mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ ligger under grafen til f på intervallet $[a, b]$, er f konkav for $x \in [a, b]$.



Infleksjonspunkt og vendepunkt

For en kontinuerlig funksjon $f(x)$ har vi at

- Hvis $f''(c) = 0$ og f'' skifter fortegn i c, er c et *infleksjonspunkt* for f.
- Hvis c er er infleksjonspunkt for f, er $(c, f(x))$ et *vendepunkt*.
- Hvis f'' går fra positiv til negativ, går f fra konveks til konkav (og omvendt).

Eksempel

Gitt funksjonen

$$f(x) = \sin x \quad , \quad x \in [-2, 4]$$

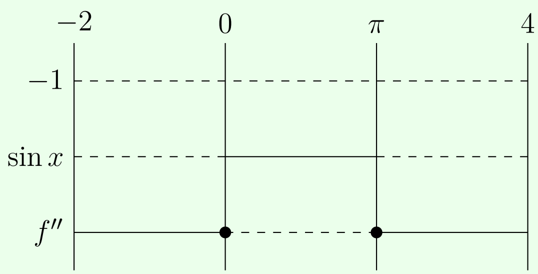
a) Finn infleksjonspunktene til f.
b) Finn vendepunktene til f.

Svar:

a) Infleksjonspunktene finner vi der hvor $f''(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ (\sin x)'' &= 0 \\ -\sin x &= 0 \end{aligned}$$

Av $x \in D_f$ er det $x = 0$ og $x = \pi$ som oppfyller kravet fra ligningen over. For å finne ut om f'' skifter fortegn i disse punktene, setter vi opp et fortegnsskjema:



f'' går altså fra positiv til negativ i $x = 0$ og fra negativ til positiv i $x = \pi$. Dette betyr at f går fra konveks til konkav i $x = 0$ og fra konkav til konveks i $x = \pi$.

Vedlegg F: Lagranges identitet

Vi ønsker å vise Lagranges identitet for to vektorer $\vec{a} = [a_1,a_2,a_3]$ og $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

La oss starte med å skrive ut venstresiden. Vi ser at dette blir en tung oppgave, men kan lette litt på trykket ved å skrive:

$$c_{ij} = a_i b_j$$

Vi får da at

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}\times\vec{b}|^2 &= (c_{23}-c_{32})^2+(c_{31}-c_{13})^2+(c_{12}-c_{21})^2 \\
&= c_{23}^2-2c_{23}c_{32}+c_{32}^2+c_{31}^2-2c_{31}c_{13}+c_{13}^2+c_{12}^2-2c_{12}c_{21}+c_{21}^2 \quad \text{(F1)}
\end{aligned}
$$

Tiden er nå inne for å observere to ting:

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 &= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \\
&= c_{11}^2+c_{12}^2+c_{13}^2+c_{21}^2+c_{22}^2+c_{23}^2+c_{31}^2+c_{32}^2+c_{33}^2 \qquad \text{(F2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 &= (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\
&= (c_{11}+c_{22}+c_{33})^2 \\
&= (c_{11}+c_{22})^2+2(c_{11}+c_{22})c_{33}+c_{33}^2 \\
&= c_{11}^2+c_{22}^2+c_{33}^2+2c_{11}c_{22}+2c_{11}c_{33}+2c_{22}c_{33} \qquad \text{(F3)}
\end{aligned}
$$

Vi legger nå merke til at $c_{ii}c_{jj}=c_{ij}c_{ij}$. Om vi studerer høyresidene til (F1), (F2) og (F3), ser vi at vi kan skrive

$$\text{(F1)} = \text{(F2)} - \text{(F3)}$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

Vedlegg G: Bytte av variabel ved Leibniz-notasjon

En annen måte å utføre bytte av variabel på, er å anvende seg av *Leibniz-notasjon*. For en funksjon $u(x)$ skriver man da at

$$u' = \frac{du}{dx}$$

du og dx betegner infinitesimale størrelser av u og x, begge størrelsene går altså mot 0. Dette er bare en annen måte å skrive ligning (**??**) på, så strengt tatt kan vi ikke behandle høyresiden som en vanlig brøk. Men hvis vi *likevel* gjør det, kan vi skrive

$$dx = \frac{du}{u'}$$

Og når vi først er i gang med manipulasjoner som egentlig ikke gir mening, kan vi sette dette uttrykket inn i et integral vi ønsker å løse:

Eksempel

Finn det ubestemte integralet

$$\int x^4 e^{x^5}\,dx$$

Svar:

Vi setter $u = x^5$, og får da at

$$\begin{aligned} u' &= \frac{du}{dx} \\ 5x^4 &= \frac{du}{dx} \\ dx &= \frac{du}{5x^4} \end{aligned}$$

Setter vi dette inn i integralet, kan vi skrive

$$\begin{aligned} \int x^4 e^{x^5}\,dx &= \int x^4 e^u \,\frac{du}{5x^4} \\ &= \frac{1}{5}\int e^u\,du \\ &= \frac{1}{5}e^u\,du \\ &= \frac{1}{5} + e^u + C \\ &= \frac{1}{5}e^{x^5} + C \end{aligned}$$

Kommentar: I eksempelet over kom vi fram til rett svar, selv om regneoperasjonene med de infinitesimale størrelsene ikke kan forsvares rent matematisk. Derimot kan det vises matematisk at denne metoden alltid vil gi oss korrekte uttrykk! Å bruke regneoperasjoner som i seg selv er meningsløse, men som beviselig fører til riktige uttrykk, kalles *formell regning*.

Vedlegg H: Bytte av variabel for bestemt integral

Bytte av variabel for bestemt integral

Gitt funksjonene $u(x)$ og $g(u)$. Da har vi at

$$\int_a^b g(u)u'\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,du \tag{0.1}$$

Eksempel 1

Finn det bestemte integralet

$$\int_1^2 \frac{6x^2+4x}{x^3+x^2}\,dx$$

Svar:

Vi setter $u(x) = x^3 + x^2$ og $g(u) = \frac{1}{u}$. Da blir $u' = 3x^2 + 2x$, og vi kan skrive

$$\begin{aligned}
\int \frac{6x^2+4x}{x^3+x^2}\,dx &= 2\int (3x^2+2x)\frac{1}{x^3+x^2}\,dx \\
&= 2\int u'\frac{1}{u}\,dx \\
&= 2\int \frac{1}{u}\,du \\
&= 2\ln|u| + C
\end{aligned}$$

Siden $u(1) = 1^3 + 1^2 = 2$ og $u(2) = 2^3 + 2^2 = 12$, får vi at

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{6x^2+4x}{x^3+x^2}\,dx &= \left[2\ln|u|\right]_2^{12} \\
&= 2(\ln 12 - \ln 2) \\
&= 2\ln\left(\frac{12}{2}\right) \\
&= 2\ln 6
\end{aligned}$$