Oppgaver for kapittel 0

0.1.1

Finn lengden av vektorene:

a) $[-2, 1, 5]$ **b)** $[\sqrt{3}, 2, \sqrt{2}]$

0.1.2

Hvilket av punktene $B = (3, -2, 1)$ og $C = (0, 5, 6)$ ligger nærmest punktet $A = (1, -1, -2)$?

0.1.3

Gitt vektoren

$$\vec{u} = [ad, bd, cd]$$

a) Vis at

$$|\vec{u}| = d\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

når $d > 0$.

b) Forklar at

$$|\vec{u}| = |d|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

når $d < 0$.

0.2.1

Gitt vektorene

$$\vec{u} = [ad, bd, cd] \text{ og } \vec{v} = [eh, fh, gh]$$

Vis at

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = dh(ae + bf + cg)$$

0.2.2

Finn skalarproduktet av vektorene:

a) $\vec{a} = [2, 4, 6]$ og $\vec{b} = [-5, 0, -1]$

b) $\vec{a} = [-9, 1, 5]$ og $\vec{b} = [-2, 1, -2]$

c) $\vec{a} = \left[\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right]$ og $\vec{b} = [512, -128, 64]$. *Tips:* Bruk resultatet fra opg. 0.2.1.

0.2.3

Finn skalarproduktet av $\vec{a}$ og $\vec{b}$, som utspenner vinkelen θ, når du vet at

a) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$ og $\theta = 60°$

b) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$ og $\theta = 150°$

0.2.4

Finn vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ når

a) $\vec{a} = [5, -5, 2]$ og $\vec{b} = [3, -4, 5]$

b) $\vec{a} = [2, -1, -3]$ og $\vec{b} = [-1, -3, -2]$

c) $\vec{a} = [-1, -2, 2]$ og $\vec{b} = [-3, 5, -4]$

0.2.5

Forkort uttrykkene når du vet at $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ og $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

a) $\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + 3(\vec{a} + \vec{b})^2$

b) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$

0.3.1

Sjekk om $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale når

a) $\vec{a} = [2, 4, -2]$ og $\vec{b} = [3, 1, 1]$

b) $\vec{a} = [-18, 12, 9]$ og $\vec{b} = [1, -2, 1]$

c) $\vec{a} = [5, 5, -1]$ og $\vec{b} = [5, -4, 5]$

0.3.2

Gitt vektoren

$$\vec{u} = [-5, -1, 6]$$

Finn t slik at $\vec{u} \perp \vec{v}$ når

a) $\vec{v} = [t, 3t, 2]$

b) $\vec{v} = [t, t^2, 1]$

0.3.3

Sjekk om $\vec{a} \parallel \vec{b}$ når

a) $\vec{a} = [8, 4, -2]$ og $\vec{b} = [4, 2, 4]$

b) $\vec{a} = [-3, 5, 2]$ og $\vec{b} = \left[-\frac{9}{7}, \frac{15}{7}, \frac{6}{7}\right]$

0.3.4

Gitt vektoren

$$\vec{a} = [-3, 1, 8]$$

Om mulig, finn t slik at $\vec{a} \parallel \vec{b}$ når

a) $\vec{b} = [t + 3, 1 - t, -16]$

b) $\vec{b} = [t^2 + 2, t, -(5t^2 + 3)]$

0.3.5

Finn s og t slik at $\vec{u} = [4, 6 + s, -(s + t)]$ og $\vec{v} = \left[\frac{12}{7}, \frac{2t-9s}{7}, \frac{3s-t}{7}\right]$ er parallelle.

0.4.1

Vis at

$$\begin{vmatrix} ae & be \\ cf & df \end{vmatrix} = ef \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

0.4.2

Vis at hvis $\vec{u}||\vec{v}$, så er $\vec{u} \times \vec{v} = 0$

0.4.3

For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er *Lagranges identitet* gitt som

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

Bruk identiteten og definisjonen av skalarproduktet til å vise at

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

0.4.4

Et tetraeted er utspent av vektorene $\vec{a} = [2, -2, 1]$, $\vec{b} = [3, -3, 1]$ og $\vec{c} = [2, -3, 2]$, hvor $\vec{a}$ og $\vec{b}$ utspenner grunnflaten.

a) Vis at arealet av grunnflaten er $\sqrt{2}$.

b) Vis at volumet av tetraetedet er $\frac{1}{6}$.

0.4.5

Et parallellepidet er utspent av vektorene $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$. Vi har at $|a| = 3$, $\vec{b}| = 4$ og $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ og at grunnflaten er utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

a) Finn lengden av diagonalen til grunnflaten.

La θ være vinkelen mellom $\vec{a} \times \vec{b}$ og $\vec{c}$ og la $\theta \in [0°, 90°]$.

b) Lag en tegning og forklar hvorfor høyden h i parallellepipedet er gitt som

$$h = |\vec{c}| \cos\theta$$

d) Forklar hvorfor volumet V av parallellepidetet kan skrives som

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}||c| \cos\theta$$

0.4.6

Gitt vektorene $\vec{u} = [a, b, c]$, $\vec{v} = [d, e, f]$ og $\vec{w} = [g, h, i]$. Vis at

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Tre pyramider er utspent av vektorene $\vec{u} = [a, b, c]$, $\vec{v} = [d, e, f]$ og $\vec{w} = [g, h, i]$. Grunnflatene til pyramidene er henholdsvis utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$, $\vec{u}$ og $\vec{w}$ og $\vec{v}$ og $\vec{w}$. Hva er uttrykket til volumet av pyramidene?

Gruble 0

Vis at tallverdien til $\det(\vec{u}, \vec{v})$ tilsvarer arealet A av parallellogrammet (i planet) utspent av $\vec{u} = [a, b]$ og $\vec{v} = [c, d]$:

$$A = |\det(\vec{u}, \vec{v})|$$