Løsningsforslag til utvalgte oppgaver

5.1.1
c) Vi setter $u = -2\cos x$ og $v = \sin x$, og finner at:

$$\begin{aligned} u' &= 2\sin x \\ v' &= -\cos x \end{aligned}$$

Av produktregelen får vi at:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'v + uv' \\ &= 2\sin x \sin x + (-2\cos x)\cos x \\ &= 2(\sin x^2 - \cos x^2) \end{aligned}$$

d) Vi setter $u = \tan x$ og $g(u) = u^{\frac{1}{2}}$. Vi har da at:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ g'(u) &= \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Av kjerneregelen får vi:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u)u'(x) \\ &= \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{2\tan^{\frac{1}{2}} x \cos^2 x} \end{aligned}$$

5.1.2
a) Vi setter $u(x) = \cos x$ og $g(u) = \ln u$. Vi får da:

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\sin x \\ g'(u) &= \frac{1}{u} \end{aligned}$$

Av kjerneregelen kan vi da skrive:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u)u'(x) \\ &= \frac{1}{u}(-\sin x) \\ &= -\frac{\sin x}{\cos x} \\ &= -\tan x \end{aligned}$$

b) Vi kan skrive (se (2.16)):

$$f(x) = -\sin(2x)$$

Av kjerneregelen får vi da at:

$$f'(x) = -2\cos(2x)$$

5.2.1 Se eksempel s. 127

5.2.2
a) Vi starter med å finne $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -a\sin(kx+c)\cdot k \\ f''(x) &= -ak^2\cos(kx+c) \end{aligned}$$

Skal $f''(x)=0$, må $\cos(kx+c)=0$ og da blir $f=d$. Siden alle punkt der $f''(x)=0$ er infleksjonspunkt, må alle vendepunktene ligge på linje $y=d$.

b) Infleksjonspunktene er alle verdier av x der $f''(x) = 0$. Fra opg. a) vet vi at detter er tilfelle når $\cos(kx+c)=0$, altså når:

$$\begin{aligned} kx+c &= \pm\frac{\pi}{2}+2\pi n \\ kx &= \pm\frac{\pi}{2}+2\pi n - c \\ x &= \frac{1}{2k}(\pi+4\pi n+2c) \end{aligned}$$

5.3.1
a) Av kjerneregelen får vi at:

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2xe^{x^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Siden $F'(x)=f(x)$ er F en antiderivert av f.

b) Se opg. a).