Oppgaver for kapittel 0

0.1.1

a) Skriv opp de tre første partallene. Lag en rekursiv og en eksplisitt formel for det i-te partallet.

b) Skriv opp de tre første oddetallene. Lag en eksplisitt formel for det i-te oddetallet.

0.1.2

Finn det eksplisitte uttrykket til den aritmetiske følgen når du vet at

a) $a_1 = 3$ og $a_4 = 30$

b) $a_1 = 5$ og $a_{11} = -25$

c) $a_3 = 14$ og $a_5 = 26$

0.1.3

Finn det eksplisitte uttrykket til den geometriske følgen når du vet at

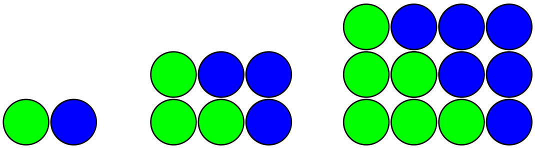
a) $a_1 = \frac{1}{2}$ og $a_2 = \frac{1}{6}$

b) $a_1 = 5$ og $a_4 = 40$

0.2.1

a) Bruk figuren under til å forklare at summen S_n av de n første naturlige tallene er gitt ved

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$



$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$

b) Skriv opp summen av det første, de to første og de tre første oddetallene. Bruk en lignende figur som i oppgave a) til å vise at summen S_n av de n første oddetallene er

$$S_n = n^2$$

0.2.2

Finn S_{10} for rekkene:

a) $7 + 13 + 19 + 25 + \ldots$ **b)** $1 + 9 + 17 + 25 + \ldots$

0.2.3

Gitt rekken

$$8 + 11 + 14 + \ldots$$

For hvilken n er summen av rekken lik 435?

0.2.4

Bruk summen av en aritmetisk rekke til å vise at ligningen gitt i *Eksempel 3* på s. **??** er sann.

0.2.5

Gitt rekken

$$3 + 12 + 48 + \ldots + 768$$

Finn summen av rekken.

0.2.6

En geometrisk rekke har $a_1 = 2$ og $k = 3$.

a) Vis at summen S_n kan skrives som:

$$S_n = 3^n - 1$$

b) Regn ut summen for de tre første leddene.

c) For hvilken n er $S_n = 728$?

0.2.7

Du ønsker å spare penger i en bank som gir 2 % månedlig rente. Du sparer ved å foreta et innskudd den 1. i hver måned, og du starter 01.01.2017.

a) Skriv rekken som viser hvor mye penger du har i banken 01.05.2017. Innskuddet 01.05 skal tas med.

b) Sett opp et uttrykk $P(n)$ som viser hvor mye penger du har i banken n måneder etter 01.01.2017, medregnet innskuddet samme måned.

0.2.8

Gitt den uendelige rekken

$$4 + 1 + \frac{1}{4} + \ldots$$

a) Forklar hvorfor rekken er konvergent.

b) Finn summen av den uendelige rekken.

0.2.9

a) Skriv det uendelige desimaltallet 0.999... som en uendelig geometrisk rekke.

b) Forklar hvorfor rekken er konvergent og bruk dette faktumet til å finne summen av rekken.

0.2.10

Gitt den uendelige rekken

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(x-2) + \frac{1}{3}(x-2)^2 + \dots$$

a) For hvilke x er rekken konvergent?

b) For hvilken x er $S_n = \frac{2}{9}$?

c) For hvilken x er $S_n = \frac{1}{6}$?

0.3.1

Vis ved induksjon at for alle $n \in \mathbb{N}$ er

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

c) $4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n = \dfrac{4}{3}(4^n - 1)$

d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$

0.3.2

Vis ved induksjon at $n(n^2+2)$ er delelig med 3 for alle $n \in \mathbb{N}$.

0.3.3

a) Vis ved induksjon at:

$$\frac{1 \cdot 2}{1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \dots \cdot \frac{(2n)!}{(2n-1)!} = 2^n n!$$

Hint: $(2(k+1))! = (2k+1)!(2k+2)$.

b) Hvordan kan venstresiden i a) skrives enklere? Utfør induksjonsbeviset på nytt etter forenklingen.

Gruble 0

Målet med denne oppgaven er å, uten bruk av induksjon, vise at summen av n kvadrater er gitt ved følgende formel:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} \tag{I}$$

a) Forklar hvorfor vi kan skrive

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots = 1 + (1+3) + (1+3+5) + \ldots$$

Hint: se opg. 0.2.1 b).

b) Ut ifra det du fant i a), forklar at

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = n + \sum_{i=1}^{n} (n-i)(2i+1)$$

c) Skriv ut alle kjente summer fra b) og løs ligningen med hensyn på $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2$, du skal da komme fram til (I).