Oppgaver for kapittel 0

0.1.1

I fysikken sier man at når et legeme er i fritt fall, er tyngdekraften den eneste kraften som utfører et arbeid på legemet. Hvis vi innfører en y-akse med positiv retning rett opp, vil tyndeakselerasjonen g virke i negativ retning. Akselerasjonen a på legemet kan vi derfor skrive som

$$a = -g$$

Vi lar videre $y(t)$ betegne legemets posisjon til enhver tid t. Vi kan da skrive farten som y' og akselerasjonen som y''. Altså har vi at

$$y'' = -g \tag{I}$$

a) Finn dene generelle løsningen av (I).

b) Ofte kaller man startfarten til et legeme for v_0. Finn løsningen til (I) når du vet at $y(0) = 0$ og $y'(0) = v_0$.

0.2.1

Vis at vi for enhver funksjon $f(x)$ har at

$$\left(y(x)e^{F(x)}\right)' = y'(x)e^{F(x)} + f(x)y(x)e^{F(x)}$$

hvor F er en antiderivert til f.

0.2.2

Løs ligningen:

a) $y' + 4y = 8$ **b)** $y' + \dfrac{1}{x}y - \cos x = 0$

c) $y' + \dfrac{3}{x}y = 6x + 2$ **d)** $y' + 3x^2y = (1 + 3x^2)e^x$

0.3.1

Finn den generelle løsningen av ligningen:

a) $y' = ye^x \cos x$ **b)** $y' = \dfrac{1}{y}3x^2(y^2 + 1)$

0.3.2

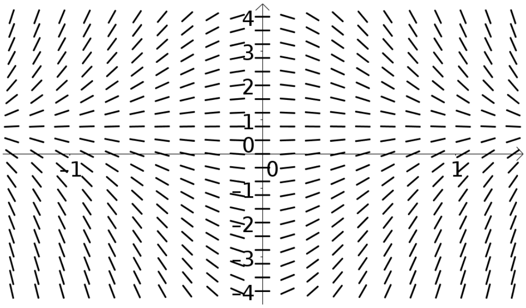
Løs ligningen:

a) $xy' - y = 2x^2y \quad , \quad y(1) = 1$

b) $2\sqrt{x}y' = \cos^2 y \quad , \quad y(4) = \frac{\pi}{4}$

0.4.1

Figuren under viser et retningsdiagram for en differensialligning.



a) Skisser integralkurven som går gjennom punket $(0, 4)$ og integralkurven som går gjennom punktet $(0, -4)$.

b) Bruk figuren til å anslå stigningstallet til alle integralkurvene for $x = 0$.

Integralkurvene er løsninger av ligningen $y' + 4xy = 3x$.

c) Bruk ligningen til å verifisere anslaget fra oppgave b).

b) Finn stigningstallet i punktene $(-3, 5)$ og $(4, 2)$.

0.5.1

Finn den generelle løsningen av ligningen:

a) $y'' - y' - 2y = 0$

b) $2y'' - 12y' + 18y = 0$

c) $y'' - 4y' + 13y = 0$

0.5.2

Finn løsningen av differensialligningen:

a) $y'' - 2y' - 15y = 0 \quad , \quad y(0) = -1, y'(0) = 2$

b) $y'' + 10y' + 25y = 0 \quad , \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$

c) $y'' - 2y' + 5y = 0 \quad , \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$

0.6.1

I året 2015 var tallet på en populasjon 100 millioner. Fra og med dette året er det forventet at folkeveksten vil være proporsjonal med folketallet.

a) Sett opp en differensialligning som beskriver situasjonen over.

b) I 2016 var folketallet 101 millioner. Bruk denne informasjonen til å finne uttrykket $y(t)$ som gir folketallet (i millioner) t år etter 2015.

0.6.2

En gjenstand med temperaturen T befinner seg i et rom med temperaturen T_r. Det antas at temperaturen til gjenstanden er likt fordelt hele tiden og at romtemperaturen ikke blir påvirket av gjenstandens temperatur. Når T er høyere enn T_r kan vi bruke *Newtons avkjølingslov* for å tilnærme hvordan T vil utvikle seg med tiden t:

$$T' = -k(T - T_r)$$

k er en konstant som må bestemmes ut ifra gjenstandens termodynamiske egenskaper.

a) Finn den generelle løsningen av ligningen over.

En gjenstand med temperaturen 95 °C blir plassert i et rom med temperaturen 15 °C. Vi bruker Newtons avkjølingslov til å anslå gjenstandens temperatur T etter t minutter. k har verdien $\frac{\ln 2}{5}$.

b) Finn et uttrykk for T.

c) Bestem $T(15)$.

d) Hva skjer når vi lar tiden gå mot uendelig?

0.6.3

Gitt en funksjon $y(t)$ på formen

$$y(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

hvor a, b og ω er konstanter (når t er en tidsvariabel, kaller vi gjerne ω for *vinkelfrekvensen*). Vis at vi for alle fjør-masse systemer uten demping har at

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

0.6.4

En klosse med masse $m = 1$ henger vertikalt i en fjør med fjørkonstant $k = 25$. Klossen strekkes slik at den forflyttes en lengde 0.5 fra likevektspunktet $y = 0$, og blir etterpå sluppet. La $y(t)$ være forflytningen relativt til likevektspunktet tiden t etter at bevegelsen har startet.

a) Finn et uttrykk for y.

b) Finn perioden til y.

Klossen og fjøren blir plassert i en omgivelse der dempingskonstanten er funnet å være $q = 6$. Ved et tidspunkt satt til $t = 0$ passerer klossen likevektspunktet med en fart $y'(0) = 4$.

c) Finn det nye uttrykket for y.

Gruble 0

a) Vis at vi kan omskrive et fjør-masse system med demping til ligningen

$$y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = 0 \tag{I}$$

hvor $2\alpha = \frac{b}{m}$ og $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

b) Vis at løsningen av den karakteristiske ligningen av (I) kan skrives som

$$r = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

c) For de tre tilfellene $\alpha > \omega$, $\alpha = \omega$ og $\alpha < \omega$, hvilket uttrykk antar løsningen av (I)?

Hint: Se (**??**)-(**??**).

d) La $y(t)$ være løsningen av (I). Forklar hvorfor $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. (Ta det for gitt at $\lim_{t\to\infty} te^{-at} = 0$ når $a > 0$).