Oppgaver for kapittel 0

0.1.1

Ei linje går gjennom punktene $A = (-2, 3, -5)$ og $B = (-1, 1, -4)$.

a) Finn en parameterframstilling for linja.

b) Sjekk om punktene $C = (-4, 7, -7)$ og $D = (-3, 5, 4)$ ligger på linja.

0.1.2

To linjer l og m krysser hverandre i et punkt A. Parameteriseringen til linjene er gitt som

$$l : \begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad m : \begin{cases} x = -7 + 3s \\ y = 5 - 2s \\ z = s \end{cases}$$

Finn koordinatene til A.

0.1.3

Et plan inneholder punktene $(1, 1, -1)$, $(-2, -3, -1)$ og $(5, 6, 1)$.

a) Finn en parameterisering for planet.

b) Sjekk om punktet $(-9, 5, 3)$ ligger i planet.

0.1.4

Et plan har retningsvektoren $[2, 1, -5]$ og inneholder linja gitt ved parameteriseringen

$$l : \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -3 + 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

0.2.1

Et plan er utspent av vektorene $[-4, 2, 0]$ og $[-3, 0, 3]$ og inneholder punket $(-2, 2, 1)$. Finn en ligning for planet.

0.2.2

Et plan α er gitt ved parameteriseringen

$$\alpha : \begin{cases} x = -4 + 2s \\ y = 2 + 3s + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

a) Finn to retningsvektorer for planet.

b) Finn en ligning for planet.

0.2.3

Et plan er gitt ved ligningen

$$10x - 3y - 4z = 0$$

a) Sjekk om punktene $(1, -2, 4)$ og $(4, -2, 1)$ ligger i planet.

b) Finn en parameterframstilling for planet.

0.2.4

Et plan går gjennom origo og inneholder punktet $A = (-2, 1, 1)$. For en gitt t er vektoren $\vec{u} = [3t, 5, t]$ ortogonal med vektoren mellom origo og A. For dette valget av t er $\vec{u}$ også en normalvektor for planet. Finn en ligning for planet.

0.2.5

Ei kule er gitt ved ligningen

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 - 12z + 32 = 0$$

a) Finn sentrum og radiusen til kula.

b) Vis at punktet $A = (1, 3, 8)$ ligger på kuleflaten.

c) Bestem ligningen til tangentplanet til kuleflaten i punktet A.

0.2.6

Ei kule er gitt ved ligningen

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y + z^2 - 10z - 14 = 0$$

a) Finn sentrum S og radiusen r til kula.

b) Sjekk om punktene $A = (4, 1, 6)$ og $B = (-6, -4, 1)$ ligger innenfor, utenfor eller på kuleflaten.

0.3.1

Ei linje l går gjennom punktene $(1, 0, -2)$ og $(2, -2{,}0)$. Finn avstanden mellom l og punktet $(1, -3, 1)$.

0.3.2

Et plan er gitt ved ligningen:

$$-3x + 4y + z - 7 = 0$$

Finn avstanden mellom planet og punktet $(-3{,}2{,}3)$.

0.3.3

To parallelle plan α og β er henholdsvis gitt ved ligningene

$$3x - 2y + z + 12 = 0$$

og

$$3x - 2y + z = 0$$

a) Finn en normalvektor til planene.

b) Finn et punkt som ligger i ett av planene.

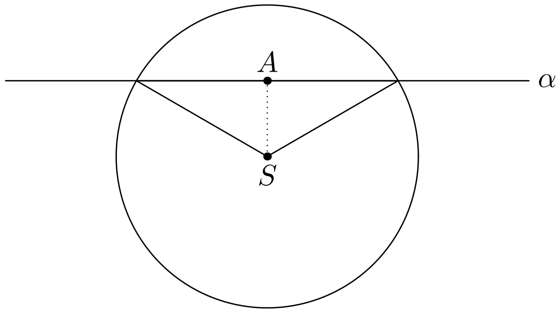
Hint: Velg fritt en verdi for x og y, og løs resulterende ligning for z.

c) Finn avstanden mellom planene.

d) Finn en parameterframstilling for ett av planene.

0.3.4

Når et plan α skjærer en kuleflate med sentrum S, kan vi alltids studere geometrien fra en slik vinkel at planet ligger rett horisontalt. Et snitt av figuren vil da se slik ut:



Punktet A er sentrum i sirkelen hvor kuleflaten skjærer planet, og ved formlikhet kan vi vise (prøv selv!) at linjestykket AS står normalt på α.

La α være gitt ved ligningen

$$2x - y - 2z + 1 = 0$$

Dette planet skjærer en kuleflate gitt ved ligningen

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 23 =$$

a) Hva er avstanden mellom planet og S?

b) Finn en parameterframstilling for linja som går gjennom A og S.

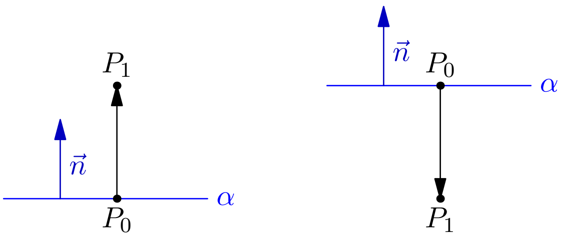
c) Finn koordiantene til de to punktene hvor kuleflaten og linja gjennom AS krysser.

d) Hva er koordinatene til A?

e) Hvor stor er radiusen til sirkelen hvor A er sentrum?

Gruble 0

Vi skal her jobbe oss fram til å vise formelen for avstanden mellom et punkt og et plan (ligning (**??**)).



a) *b)*

På figurene over ser vi skissen av et plan α som er gitt ved ligningen $ax + by + cz + d = 0$. Planet inneholder punktet $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ og har en normalvektor $\vec{n}$. Utenfor planet ligger et punt $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, P_0 er valgt slik at $\overrightarrow{P_0P_1} \parallel \vec{n}$.

a) Forklar hvorfor P_0 oppfyller ligningen

$$d = -(ax_0 + by_0 + cz_0) \tag{I}$$

b) Vis at vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ er gitt som:

$$\overrightarrow{P_0P_1} = [x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0] \tag{II}$$

d) Vis at:

$$\overrightarrow{P_0P_1} \cdot q\vec{n} = \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| |\vec{n}| \cos\theta$$

kan skrives som:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| |\vec{n}| \cos\theta \tag{III}$$

Hint: Bruk (II) og (I).

f) Bruk (III) til å finne formelen for avstanden mellom P_1 og α.