Parameteriseringen av et plan i rommet

Et plan α med parameteriseringen

$$\alpha : \begin{cases} x = x_0 + a_1 s + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 s + b_2 t \\ z = z_0 + c_1 s + c_2 t \end{cases}$$

inneholder punktet $P = (x_1, y_1, z_1)$ og to ikke-parallelle vektorer $\vec{u} = [a_1, b_1, c_1]$ og $\vec{v} = [a_2, b_2, c_3]$.

Eksempel

Et plan α er gitt ved ligningen:

$$3x - y - 2z + 6 = 0$$

a) Finn en parameterisering til planet
b) Finn et punkt som ligger i planet.

Svar:

a) For å finne en parameterisering for et plan gitt av en ligning, står vi fritt til selv å velge to av x, y og z som frie variabler, hvor den gjenstående bestemmes ut ifra disse. Vi velger her $x = s$ og $z = t$, og får:

$$3s - y - 2t + 6 = 0$$
$$y = 3s + 2t - 6$$

Parameteriseringen blir da:

$$a : \begin{cases} x = s \\ y = -6 + 3s + 2t \\ z = t \end{cases}$$

b) Ut ifra parameteriseringen ser vi at et punkt i planet må være $(0, -6, 0)$

Linje i rommet

En linje l med parameteriseringen

$$l : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

går gjennom punktet $A = (x_0, y_0, z_0)$ og har retningsvektor $\vec{r} = [a, b, c]$. Parameteriseringen er et uttrykk for et vilkårlig punkt på linja.

Eksempel

En linje går gjennom punktene $A = (-2, 2, 1)$ og $B = (2, 4, 1)$. Finn en parameterisering for linja a som går gjennom A og B.

Svar:

Vektoren $\overrightarrow{AB}$ er en retningsvektor for linja:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= [2 - (-2), 4 - 2, 1 - 1] \\ &= [4, 2, 0] \\ &= 2[2, 1, 0] \end{aligned}$$

Vi bruker nå den forkortede retningsvektoren i kombinasjon med A, og får:

$$a : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

Plan i rommet I

Et plan med normalvektor $n = [a, b, c]$ kan uttrykkes ved ligningen:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

hvor $A = (x_0, y_0, z_0)$ er et vilkårlig punkt i planet.

Eventuelt kan man skrive:

$$ax + by + zc + d = 0$$

hvor $-(ax_0 + by_0 + cz_0) = d$.

Eksempel

Et plan er utspent av vektorene $\vec{u} = [1, -2, 2]$ og $\vec{v} = [-3, 1, 2]$, og inneholder punktet $A = (1, 3, 1)$. Finn en ligning for planet.

Svar:

En normalvektor til planet kan vi finne ved:

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-2 \cdot 1 - 3 \cdot 2)\vec{e}_1 - (1 \cdot 1 - (-3) \cdot 2)\vec{e}_2 + (1 \cdot 3 - (-2) \cdot (-3))\vec{e}_3 \\ &= [-6, -7, -3]\end{aligned}$$

Vi har nå en normalvektor og et punkt i planet, og får dermed ligningen:

$$\begin{gathered}-6(x - 1) - 7(y - 3) - 3(z - 1) = 0 \\ -6x + 6 - 7y + 21 - 3z + 3 = 0 \\ -6x - 7y - 3z + 30 = 0\end{gathered}$$

Kuleligningen

Ligningen for en kule med radius r og sentrum $S = [x_0, y_0, z_0]$ er gitt ved:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \tag{0.1}$$

Eksempel

Finn sentrum og radius til kuleflaten beskrevet ved ligningen:

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 4z - 19 = 0$$

Svar:

For å løse denne oppgaven må vi finne de fullstendige kvadratene:

$$x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 3^2$$
$$y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 2^2$$
$$z^2 - 4z = (z - 2)^2 - 2^2$$

Dermed får vi:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - 4z - 19 &= 0 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 - 3^2 - 2^2 - 2^2 - 19 &= 0 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 &= 36 \\ &= 6^2 \end{aligned}$$

Kula har altså sentrum i punktet $(3, -2, 2)$ og radius lik 6.

Avstand mellom punkt og linje

Den korteste avstanden h mellom et punkt B og en linje gitt av punktet A og retningsvektoren $\vec{r}$, er gitt ved uttrykket:

$$h = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{r}\right|}{|\vec{r}|} \tag{0.2}$$

Avstand mellom punkt og plan

Den korteste avstanden h mellom et punkt $A = (x_0, y_0, z_0)$ og et plan beskrevet av ligningen $ax + bx + cx + d = 0$, er gitt som:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Eventuelt:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{|\vec{n}|}$$

hvor $\vec{n} = [a, b, c]$ er normalvektoren til planet.

`Skalarprodukt[<Vektor>, <Vektor>]`

Finner skalarproduktet av to vektorer. (Merk: For to vektorer u og v kan man like gjerne skrive u*v).

`Vektorprodukt[ <Vektor>, <Vektor> ]` (CAS)

Finner vektorproduktet av to vektorer.

`Pyramide[<Punkt>, <Punkt>, ...]`

Fremstiller en pyramide i Grafikkfelt 3D. `Pyramide[A,B,C,D]` lager en pyramide med grunnflate A, B, C og toppunkt D, mens `Pyramide[A,B,C,D, E]` har grunnflate A, B, C, D og toppunkt E. Under kategorien *Pyramide* i algebrafaltet finner man en konstant som oppgir volumet til pyramiden.

`Prisme[<Punkt>, <Punkt>, ...]`

Fremstiller en prisme i Grafikkfelt 3D. `Prisme[A,B,C,D]` lager en prisme med grunnflate ABC og tak DEF, `Prisme[A,B,C,D, E]` har grunnflate $ABCD$ og tak EFG. F, G og eventelt E blir konstruert av GeoGebra slik at hver sideflate er et parallellogram. Under kategorien *Prisme* i algebrafaltet finner man en konstant som oppgir volumet til pyramiden.

`Kurve[ <Uttrykk>, <Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt> ]`

Viser parameteriseringen av en kurve i Grafikkfelt 3D på et gitt intervall. Uttrykkene er henholdsvis uttrykkene for x, y og z-koordinatene, bestemt av en gitt parametervariabel.

`Kule[ <Punkt>, <Radius>]`

Viser en kule i Grafikkfelt 3D med sentrum i et gitt punkt og med en gitt radius.

`Plan[ <Punkt>, <Punkt>, <Punkt> ]`

Viser et plan i Grafikkfelt 3D, utspent av to av vektorene mellom tre gitte punkt.

`Prisme[<Punkt>, <Punkt>, ...]`

Fremstiller en prisme i Grafikkfelt 3D. `Prisme[A,B,C,D]` lager en prisme med grunnflate ABC og tak DEF, `Prisme[A,B,C,D, E]` har grunnflate $ABCD$ og tak EFG. F, G og eventelt E blir konstruert av GeoGebra slik at hver sideflate er et parallellogram. Under kategorien *Prisme* i algebrafaltet finner man en konstant som oppgir volumet til pyramiden.