Løsningsforslag

6.1.1 a) $f'(x) = 20x^4$ **b)** $f(2) - f(0) = 128$

6.1.2 $F(4) - F(1) = 8$

6.1.3
a) Vi bruker kjerneregelen to ganger. Først setter vi $u(x) = \cos^2 x$ og $g(u) = e^u$. Deretter setter vi $h(x) = \cos x$ og $i(h) = h^2$. Vi får da at:

$$\begin{aligned} u'(x) &= i'(h)h'(x) \\ &= 2h \cdot (-\sin x) \\ &= -2\cos x \sin x \end{aligned}$$

Videre har vi da at:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u)u'(x) \\ &= e^u \cdot (-2\cos x \sin x) \\ &= -2\cos x \sin x \, e^{\cos^2 x} \end{aligned}$$

b) Av (2.16) har vi at $2\cos x \sin x = \sin(2x)$, og derfor kan vi skrive:

$$\begin{aligned} \int -\sin(2x)\, e^{\cos^2 x}\, dx &= \int -2\cos x \sin x \, e^{\cos^2 x}\, dx \\ &= \int f'(x)\, dx \\ &= f(x) + C \\ &= e^{\cos^2 x} + C \end{aligned}$$

Overgangen mellom andre og tredje linje følger av definisjonen av det ubestemte integralet.

6.1.4
a) Vi må vise at $\left(x^2 e^x\right)'$ tilsvarer uttrykket i integranden.

$$\begin{aligned} \left(x^2 e^x\right)' &= 2xe^x + x^2 e^x \\ &= xe^x(2 + x) \end{aligned}$$

b) Vi må vise at $\left(e^{\cos x + x^2}\right)'$ tilsvarer uttrykket i integranden:

$$\begin{aligned} \left(e^{\cos x + x^2}\right)' &= e^{\cos x + x^2} \cdot (\cos x + x^2)' \\ &= e^{\cos x + x^2}(-\sin x + 2x) \\ &= -e^{\cos x + x^2}(\sin x - 2x) \end{aligned}$$

6.2.2 Av (2.43) vet vi at perioden $\cos x$ er 2π. Dette betyr at hvis vi for en konstant c har at $a = c$, så er $b = a + 2\pi$. Integralet blir da:

$$\begin{aligned}\int\limits_c^{c+2\pi} (\cos x + d)\,dx &= \Big[\sin x + dx\Big]_c^{c+2\pi} \\ &= \Big[\sin(c+2\pi) + d(c+2\pi) - (\sin c + dc)\Big] \\ &= 2d\pi\end{aligned}$$

Mellom andre og tredje linje har vi brukt det faktum at $\sin(c+2\pi) = \sin c$. Gjennomsnittet kan altså skrives som:

$$\frac{1}{(c+2\pi)-c} \cdot 2d\pi = d$$

6.2.3

a) Vi setter $u = x^2$ og $g(u) = e^u$. Siden $u' = 2x$ får vi:

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2} \\ &= \frac{1}{2}\int u'e^u\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int e^u\,du \\ &= \frac{1}{2}e^u + C \\ &= \frac{1}{2}e^{x^2} + C\end{aligned}$$

b) Vi starter med å finne det ubestemte integralet ved å bruke bytte av variabel. Vi setter $u = 2x^2 - 3$ og $g(u) = e^u$, siden $u' = 4x$ får vi:

$$\begin{aligned}\int 8xe^{2x^2-3}\,dx &= 2\int 4xe^{2x^2-3}\,dx \\ &= 2\int u'e^u\,dx \\ &= 2\int e^u\,du \\ &= 2e^u + C\end{aligned}$$

Det bestemte integralet blir derfor:

$$\begin{aligned}\Big[2e^{2x^2-3}\Big]_1^2 &= 2\Big[e^{2\cdot 2^2-3} - e^{2\cdot 1-3}\Big] \\ &= 2\left[e^5 - e^{-1}\right]\end{aligned}$$

c) Vi setter $u = \cos x$ og $g(u) = u$. Siden $u' = -\sin x$, får vi:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx &= -\int \frac{u'}{u}\,dx \\ &= \int \frac{1}{u}\,du \\ &= -\ln u + C \\ &= -\ln(\cos x) + C\end{aligned}$$

d) Vi setter $u = \cos x$ og $g(u) = \frac{1}{u^3}$. Siden $u' = -\sin x$, får vi:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx &= \int \frac{-u'}{u^3}\,dx \\ &= -\int u^{-3}\,dx \\ &= \frac{1}{2}u^{-2} + C\end{aligned}$$

Siden $u(0) = \cos 0 = 1$ og $u(\frac{\pi}{3}) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2^{-1}$ blir det bestemte integralet:

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}u^{-2}\right]_1^{2^{-1}} &= \frac{1}{2}\left[(2^{-1})^{-2} - 1^{-2}\right] \\ &= \frac{1}{2}[4-1] \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

f) Vi setter $u = 3x^2 + 4x + 3$ og $g(u) = \frac{1}{u}$, og får da:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{3x^2+4x+3}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{6x+4}{3x^2+4x+3}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int u^{-1}\,du \\ &= \frac{1}{2}\ln u \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(3x^2+4x+3\right)\end{aligned}$$

6.2.4

Av (2.17) og (2.16) kan vi skrive:

$$\int \sin(2x)e^{1-\cos^2 x}\,dx = \int 2\sin x\cos x\, e^{\sin^2 x}$$

Vi setter så $u = \sin x$ og $g(u) = 2ue^{u^2}$. Siden $u' = \cos x$ kan vi skrive:

$$\begin{aligned}\int 2\sin x\cos x\, e^{\sin^2 x}\,dx &= 2\int uu'e^{u^2}\,dx \\ &= 2\int ue^{u^2}\,dx\end{aligned}$$

Vi setter nå $v = u^2$ og $h(v) = e^v$. Siden $v' = 2u$ får vi:

$$\begin{aligned}2\int ue^{u^2}\,dx &= \int v'e^v\,dx \\ &= \int e^v\,dx \\ &= e^v + C \\ &= e^{u^2} + C \\ &= e^{\sin^2 x} + C\end{aligned}$$

6.2.5
b) Vi setter $u = \ln x$ og $v' = x^{\frac{1}{2}}$ og får da at $u' = x^{-1}$ og $v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x}\ln x\,dx &= \int uv'\,dx \\
&= uv - \int u'v\,dx \\
&= \ln x \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \int x^{-1}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C
\end{aligned}$$

c) Vi setter $u = \ln x$ og $v' = x^{-2}$, og får da at $u' = x^{-1}$ og $v = -x^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\int \ln x\, x^{-2}\,dx &= \int uv'\,dx \\
&= uv - \int u'v\,dx \\
&= \ln x\,(-x^{-1}) - \int x^{-1}(-x)^{-1}\,dx \\
&= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2}\,dx \\
&= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C \\
&= -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C
\end{aligned}$$

Det bestemte integralet blir da:

$$\begin{aligned}
\left[-\frac{1}{x}(\ln|x| + 1)\right]_1^e &= -\left[\frac{1}{e}(\ln e + 1) - \frac{1}{1}(\ln 1 + 1)\right] \\
&= -\left[\frac{2}{e} - 1\right] \\
&= 1 - \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

6.2.6 Vi setter $u = \sin x$ og $v' = \sin x$, og får da at $u' = \cos x$ og $v = -\cos x$:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x\,dx &= \sin x(-\cos x) - \int \cos x(-\cos x) \\
&= -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx \\
&= -\sin x\cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx \\
2\int \sin^2 x\,dx &= -\sin x\cos x + \int 1\,dx \\
\int \sin^2 x\,dx &= \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C
\end{aligned}$$

6.2.7 a) Vi starter med å faktorisere nevneren i integranden:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Altså kan vi skrive:

$$\frac{13-4x}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$
$$13 - 4x = A(x-3) + B(x-2)$$

Når $x = 3$ får vi:

$$\begin{aligned} 13 - 4 \cdot 3 &= B(3-2) \\ 1 &= B \end{aligned}$$

Og når $x = 2$ får vi:

$$\begin{aligned} 12 - 4 \cdot 2 &= A(2-3) \\ 5 &= -A \\ -5 &= A \end{aligned}$$

Det ubestemte integralet vi ønsker å løse kan derfor skrives som:

$$\int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x-2} \right) dx = \ln(x-3) - 5\ln(x-2) + C$$

Det bestemte integralet blir da:

$$\begin{aligned} \Big[\ln|x-3| - 5\ln|x-2| \Big]_4^5 &= \ln|5-3| - 5\ln|5-2| - (\ln|4-3| - 5\ln|4-2|) \\ &= \ln 2 - 5\ln 3 - \ln 1 + 5\ln 2 \\ &= 6\ln 2 - 5\ln 3 \end{aligned}$$

6.2.8 Se eksempel s. 151

6.4.1
a) Tverrsnittet langs x-aksen blir en sirkel med høyde $\sqrt{r^2 - x^2}$. Tverrsnittsarealet blir derfor

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi \sqrt{r^2 - x^2}^{\,2} \\ &= \pi(r^2 - x^2) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx \\ &= \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2 \right) dx \\ &= \pi \left[xr^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-r}^{r} \\ &= \frac{\pi}{3} \left(3rr^2 - r^3 - (3(-r)r^2 - (-r)^3) \right) \\ &= \frac{\pi}{3}(3r^3 - r^3 + 3r^3 - r^3) \\ &= \frac{4\pi}{3} r^3 \end{aligned}$$

6.4.2 a)
Volumet V er gitt ved ligningen:

$$
\begin{aligned}
V &= \int\limits_0^1 f^2 \, dx \\
&= \int\limits_0^1 \left(e^x\right)^2 \, dx \\
&= \int\limits_0^1 e^{2x} \, dx
\end{aligned}
$$

Vi setter $u = 2x$ og $g(u) = e^u$, da blir $u' = 2$:

$$
\begin{aligned}
\int e^{2x} \, dx &= \frac{1}{2} \int 2e^{2x} \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int u' e^u \, du \\
&= \frac{1}{2} e^u + C
\end{aligned}
$$

Siden $u(0) = 0$ og $u(1) = 2$ blir det bestemte integralet:

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2} e^u\right]_0^2 &= \frac{1}{2}\left[e^2 - e^0\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[e^2 - 1\right]
\end{aligned}
$$