1 Følger og rekker

`Regresjonsanalyse` (Regneark)

Analyse av tallfølge skrevet inn i regnearket for å finne en eksplisitt formel.

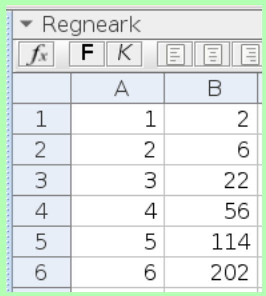
Eksempel

Finn den eksplisitte formelen til følgen

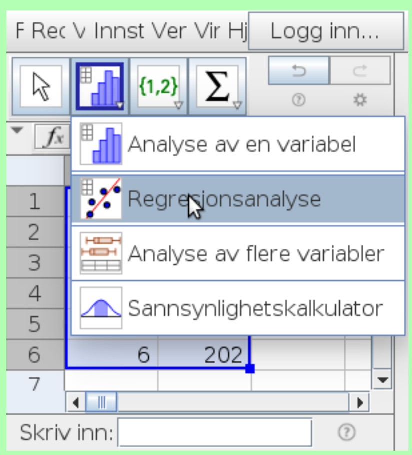
$$2, 6, 22, 56, 114, 202, \ldots$$

Svar:

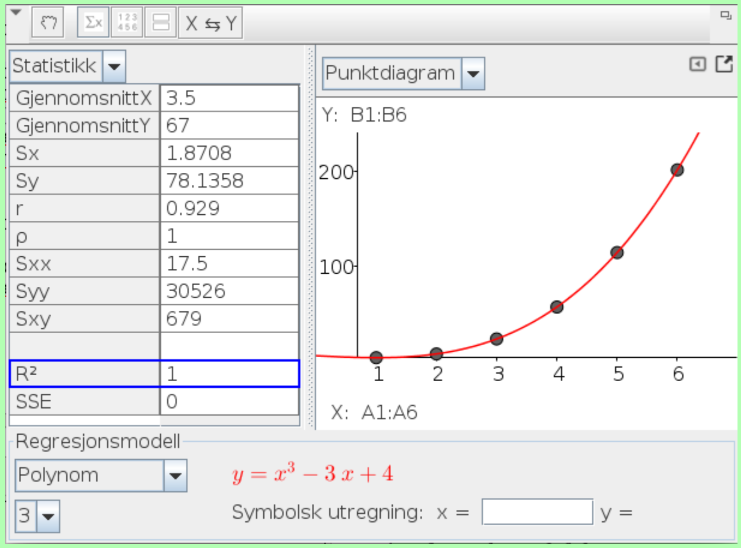
Vi velger `Vis` ▶ `Regneark` og skriver tallene inn i en tabell med leddnummeret i første kolonne og verdien i andre.



Vi markerer så hele tabellen, i verktøymenyen som da dukker opp, velger vi `Regresjonsanalyse`.



På vinduet som da kommer velger vi `Analyser`, og trykker deretter på `Vis statistikk` ( ). I analysevinduet søker vi nå å finne en `Regresjonsmodell` hvor vi får[a] $R^2 = 1$ i statistikkvinduet. I dette tilfellet gir et tredjegradspolynom det vi ønsker:



Av $y = x^3 - 3x + 4$ i figuren over konkluderer vi med at den eksplisitte formelen til følgen er:

$$a_n = n^3 - 3n + 4$$

---

[a] R^2 er et mål på hvor godt modellen samsvarer med inputen, gitt som en skala mellom 0 og 1. 1 betyr fullstendig samsvar.

`Sum( <Uttrykk>, <Variabel>, <Start>, <Slutt> )` (CAS)

Finner summen av en rekke med en løpende variabel på et intervall.

Eksempel

Finn summen av den uendelige rekka

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \ldots$$

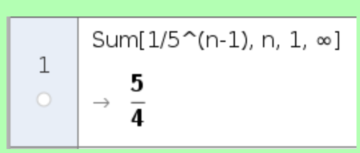
Svar:

Dette er en geometrisk rekke med $k = \frac{1}{5}$ og eksplisitt formel gitt som:

$$a_n = \frac{1}{5^{(n-1)}}$$

for $n \in \mathbb{N}$.

I CAS skriver vi da (∞-tegnet finner du ved å trykke på α-tegnet oppe i høyre hjørne):

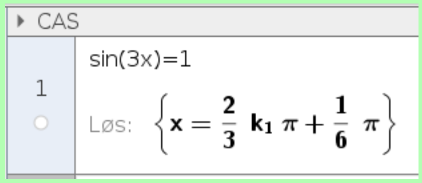


2 Trigonometri

`Løs( <Likning med x> )` (CAS)

Løser en likning med x som ukjent.

Eksempel 1



I *Før Kalkulus; Teoridel* brukes $n \in \mathbb{Z}$ som heltallsvariabel, GeoGebra bruker en indeksert k (her $k_1 \in \mathbb{Z}$).

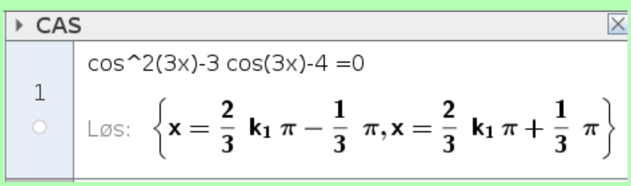
Merk: Du kan også løse ligningen ved å skrive den inn i en celle og deretter trykke på `Løs`.

Eksempel 2

Løs ligningen

$$\cos^2(3x) - 3\cos(3x) - 4 = 0$$

Svar:



Merk: Løsningen kan komprimeres til (forklar for deg selv hvorfor):

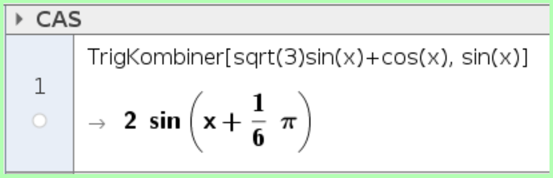
$$x = \frac{1}{3}\pi(2k+1)$$

for $k \in \mathbb{Z}$.

TrigKombiner(<Funksjon>, sin(x))

Skriver om en funksjon på formen $a\sin(kx) + b\cos(kx)$ til et kombinert uttrykk på formen $r\sin(kx + c)$.

Eksempel



RegSin(<Liste>)

Bruker regresjon med en sinusfunksjon for å tilpasse punkt gitt i en liste.

Eksempel

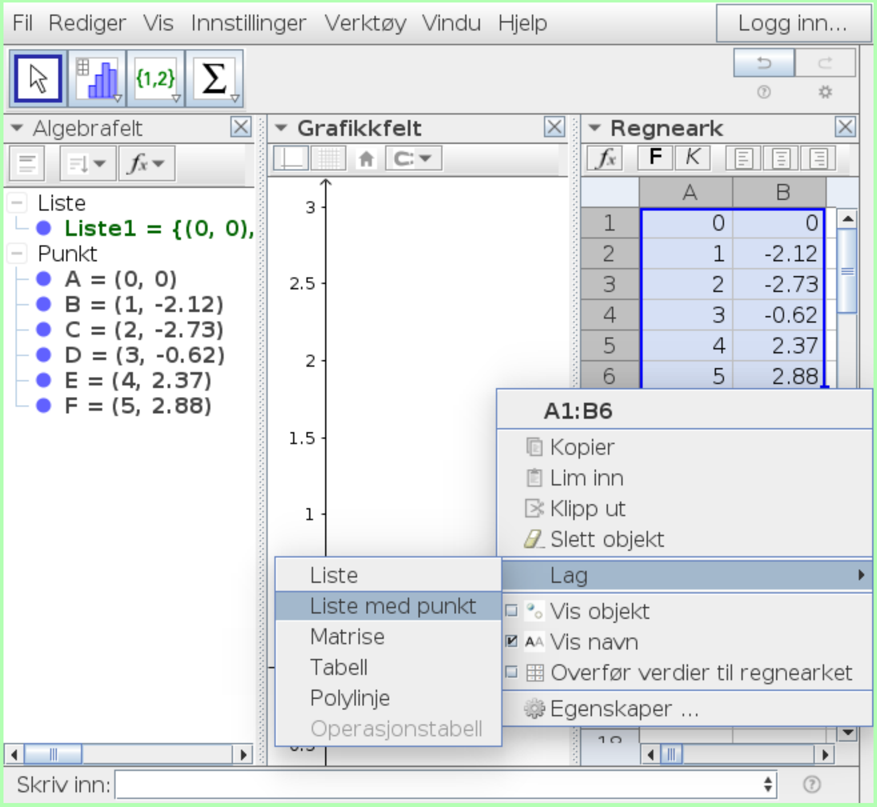
Gitt tabellen

x	$f(x)$
0	0
1	-2.12
2	-2.73
3	-0.62
4	2.37
5	2.88

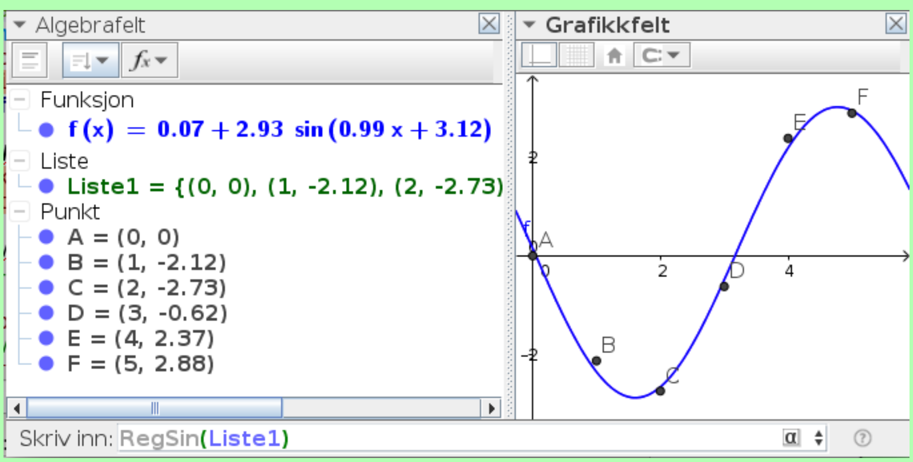
Bruk regresjon for å finne en tilnærming til $f(x)$ uttrykt som en sinusfunksjon.

Svar:

Vi velger **Vis ▶ Regneark** og skriver inn tabellen. Vi markerer så begge kolonner, høyreklikker innenfor markeringsfeltet og velger
Lag ▶ Liste med punkt:



Om vi ønsker at alle punktene skal vises i grafikkfeltet, høyreklikker vi på grafikken og velger `Vis alle objekt`. Deretter skriver vi `RegSin[Liste1]` i kommandolinjen, og får funksjonen `f(x)` i algebrafeltet og grafen til `f` i grafikkfeltet. Denne funksjonen er en tilnærming til $f(x)$ gitt i oppgaven.



3 Vektorer i rommet

`Punkt( <Liste> )`

Lager et punkt med koordinater gitt som liste.

Merk: For å lage punktet (x, y, z) kan man liksågodt skrive `(x,y,z)` i inntastingsfeltet. Skriver man `(x,y,z)` i CAS lager man vektoren $[x, y, z]$.

`Vektor( <Punkt> )`

Lager vektoren fra origo til et gitt punkt.

Merk: I CAS kan man lage vektoren $[x, y, z]$ ved å skrive `(x,y,z)`, dette anbefales.

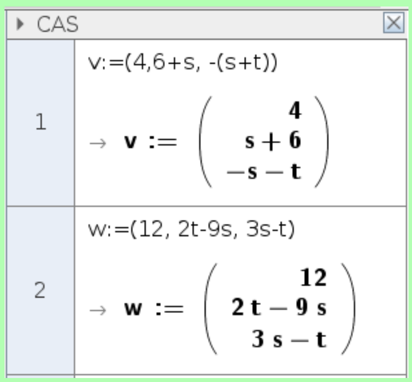
Eksempel

Gitt vektorene $\vec{u} = [-4, 2, 7]$, $\vec{v} = [4, 6 + s, -(s + t)]$ og $\vec{w} = [12, 2t - 9s, 3s - t]$.

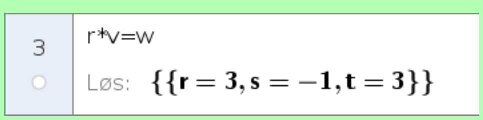
a) Finn s og t slik at $\vec{v} || \vec{w}$.
b) Bestem s slik at $\vec{u} \perp \vec{v}$ når $t = -2$.

Svar:

a) Det er en litt spesiell sak i CAS at en vektor $[x, y, z]$ definert ved å skrive `(x, y, z)` vil ha en bedre funksjonalitet enn hvis den defineres ved `Vektor`-kommandoen. Vi starter derfor med å definere $\vec{v}$ og $\vec{w}$ på følgende måte (se *Definere variabler*):



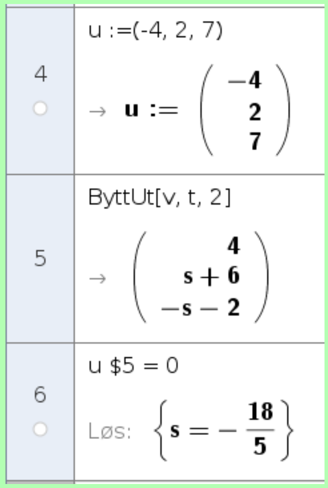
Vi utnytter videre at $\vec{v} || \vec{w}$ hvis $r\vec{v} = \vec{w}$, for en konstant r. Vi skriver denne ligningen inn i CAS og trykker så på `Løs`:



Vi har altså at $s = -1$ og $t = 3$.

b) Skal $\vec{u} \perp \vec{v}$, må vi ha at $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Vi definerer $\vec{u}$ og bruker `ByttUt`-

kommandoen for å sette $t = 2$ i uttrykket til $\vec{v}$. Med det endrede uttrykket løser vi ligningen for skalarprduktet (se kommandoen `Skalarprodukt` på s. ??. CAS fjerner `*` når vi skriver `u*$5`).



`Skalarprodukt( <Vektor>, <Vektor> )`

Finner skalarproduktet av to vektorer.

Merk: For to vektorer u og v kan man like gjerne skrive `u*v`.

`Vektorprodukt( <Vektor>, <Vektor> )` (CAS)

Finner vektorproduktet av to vektorer. (Merk: For to vektorer u og v kan man like gjerne skrive `u⊗v`. Hurtigtast for $\otimes$ er `alt+shift+8`).

`Vinkel( <Vektor>, <Vektor> )`

Gir vinkelen mellom to vektorer. Kan også brukes for vinkel mellom plan/linjer, plan/plan og linje/linje

4 Romgeometrier

`Pyramide( <Punkt>, <Punkt>, ... )`

Framstiller en pyramide i Grafikkfelt 3D. `Pyramide[A,B,C,D]` lager en pyramide med grunnflate A, B, C og toppunkt D, mens `Pyramide[A,B,C,D, E]` har grunnflate A, B, C, D og toppunkt E. Under kategorien *Pyramide* i algebrafaltet finner man en konstant som oppgir volumet til pyramiden.

`Høyde( <Objekt> )`

Gir avstanden fra toppunkt til grunnflate i et objekt.

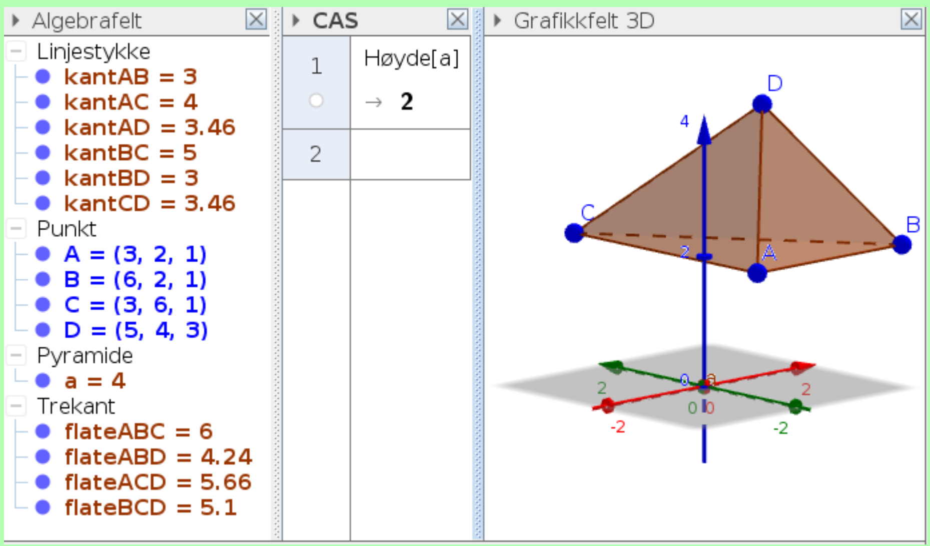
Merk: Avstanden har retning, og derfor kan den noen ganger være negativ. Tallverdien er den geometriske høyden.

Eksempel

Finn volumet og høyden til tetraetedet med grunnflate gitt ved punktene $A = (3, 2, 1)$, $B = (6, 2, 1)$, $C = (3, 6, 1)$ og toppunkt $D = (5, 4, 3)$.

Svar:

Vi skriver inn punktene og bruker deretter kommandoen `Pyramide[A, B, C, D]` for å lage tetraedet a. Algebrafeltet gir oss da at volumet til a er 4. I celle 1 finner vi høyden, som er 2.



`Prisme( <Punkt>, <Punkt>, ... )`

Framstiller en prisme i Grafikkfelt 3D. `Prisme[A,B,C,D]` lager en prisme med grunnflate ABC og tak DEF, `Prisme[A,B,C,D,E]` har grunnflate $ABCD$ og tak EFG. F, G og eventelt E blir konstruert av GeoGebra slik at hver sideflate er et parallellogram. Under kategorien *Prisme* i algebrafaltet finner man en konstant som oppgir volumet til pyramiden.

```
Kurve( <Uttrykk>, <Uttrykk>, <Uttrykk>,
<Parametervariabel>, <Start>, <Slutt> )
```

Viser parameteriseringen av en kurve i Grafikkfelt 3D på et gitt intervall. Uttrykkene er henholdsvis uttrykkene for x, y og z-koordinatene, bestemt av en gitt parametervariabel.

Merk: Med mindre et bestemt intervall av kurven er ønsket, er det bedre å skrive parameteriseringen direkte inn i inntastingsfeltet som `A+t*u`, hvor A er et punkt på linja og u er en retningsvektor.

```
Linje( <Punkt>, <Punkt> )
```

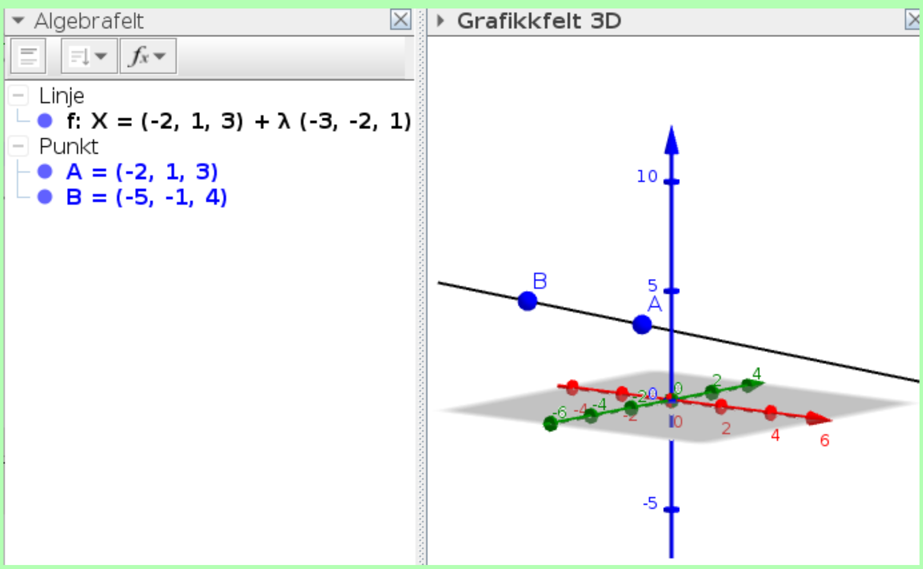
Gir uttrykket til en linje mellom to punkt. Hvis punktene har tre koordinater besår uttrykket av et punkt på linja og en fri variabel λ mulitplisert med en retningsvektor.

Eksempel

Finn parameteriseringen til linjen som går mellom punktet $(-2, 1, 3)$ og $(-5, -1, 4)$.

Svar:

Vi skriver punktene i inntastingsfeltet og får punktene A og B. Etterpå skriver vi `Linje[A, B]` og får da linjen f.



Av dette finner vi at parameteriseringen til linjen er gitt som:

$$f : \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

`Kule( <Punkt>, <Radius> )`

Viser en kule i Grafikkfelt 3D med sentrum i et gitt punkt og med en gitt radius.

Eksempel

En linje l med parameteriseringen

$$l : \begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

skjærer en kule med med sentrum i $(-1, 2, 6)$ og radius lik 3.

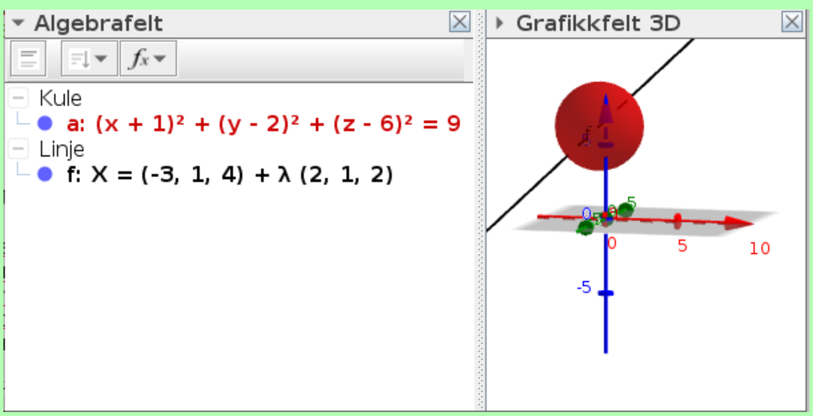
a) Tegn kulen og linjen.
b) Finn skjæringspunktet mellom kulen og linjen.

Svar:

Vi skal her se på to løsningsmetoder. Den første metoden er helt klart den raskeste, men den andre metoden er tatt med for å illustrere bruken av `Kurve`-kommandoen, i tillegg til å presentere en metode som vil sikre oss eksaktverdier.

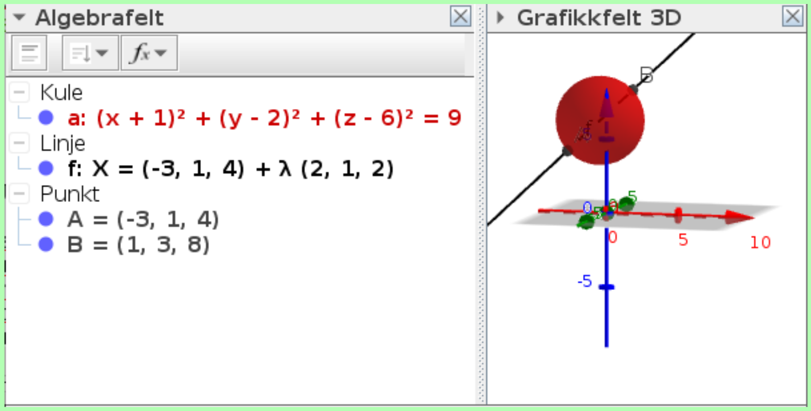
Løsningsmetode 1

a)



Vi starter med å tegne kulen. I inntastingsfeltet skriver vi `Kule[(-1, 2, 6), 3]` og får kulen a i algebrafelt og grafikkfelt 3D. For å tegne linjen, skriver vi `(-3, 1, 4)+t*(2,1,2)` i inntastingsfeltet, resultatet er kurven f.

b)

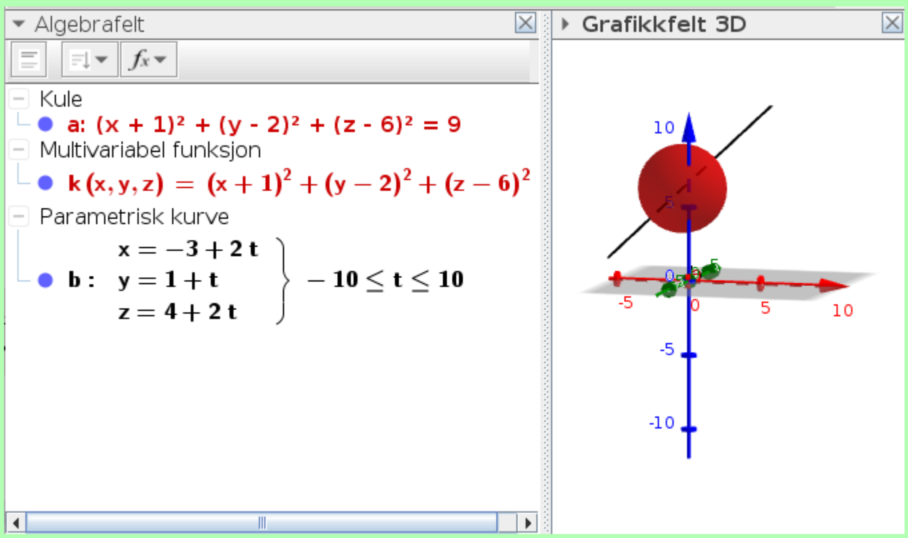


I inntastingsfeltet skriver vi `Skjæring[a, f]` og får de to punktene A og B.

Merk: Hadde vi tegnet linjen ved hjelp av `Kurve`-kommandoen, ville ikke dette funket. `Skjæring` er ikke kompatibel med `Kurve`, og i dette tilfellet heller ikke med CAS.

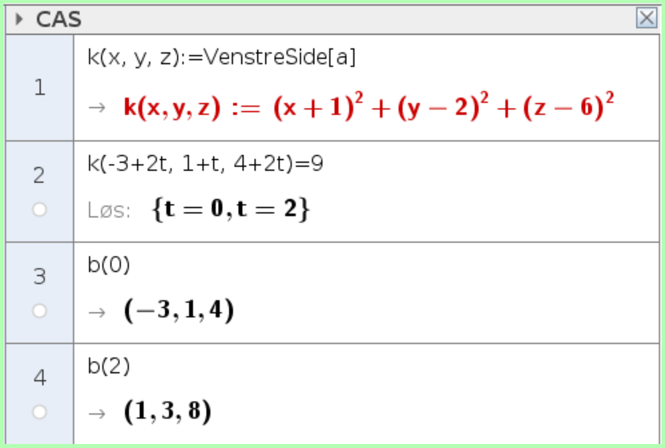
Løsningsmetode 2

a)



For å tegne linjen, skriver vi `Kurve[-3 + 2t, 1 + t, 4 + 2t, t, -10, 10]` i inntastingsfeltet. At $t \in [-10, 10]$ velger vi ut ifra inspeksjon i grafikkfelt 3D. Det gjelder å velge et intervall som viser begge skjæringspunktene mellom kulen og linjen (man kan velge $t \in [-\infty, \infty]$, men da blir ikke kurven vist grafikkfeltet). Resultatet er kurven b.

b) (Se *Høyre- og venstresiden*)



I celle 1 lager vi oss en ny funksjon $k(x, y, z)$ med et uttrykk tilsvarende venstresiden til kuleligningen. For at linjen skal skjære kulen, må parameteriseringen til linjen oppfylle kuleligningen. I celle 2 setter vi derfor uttrykkene for x, y og z fra parameteriseringen inn i k, og krever at dette uttrykket skal bli lik 3^2. Vi trykker så på `Løs`-knappen og får to svar for t. I celle 3 og 4 finner vi punktene for dissse valgene av t.

`Plan( <Punkt>, <Punkt>, <Punkt> )`

Viser et plan i Grafikkfelt 3D, utspent av to av vektorene mellom tre gitte punkt.

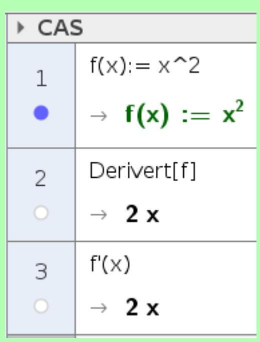
5 Derivasjon og funksjonsdrøfting

`Deriverte( <Funksjon> )`

Gir den deriverte av en funksjon.

Merk: For en definert funksjon $f(x)$, kan man like gjerne skrive `f'(x)`.

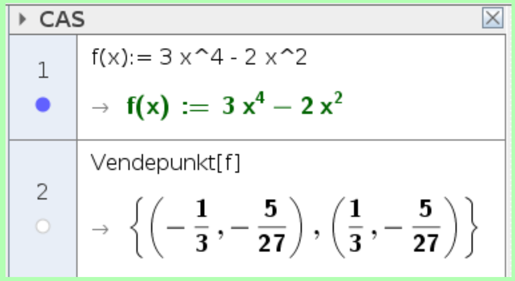
Eksempel



`Vendepunkt( <Polynom> )`

Finner vendepunktene til et polynom.

Eksempel



`Maks( <Funksjon>, <Start x-verdi>, <Slutt x-verdi> )`

Finner absolutt maksimum og maskimalpunkt for en funksjon f på et gitt intervall.

`Min( <Funksjon>, <Start x-verdi>, <Slutt x-verdi> )`

Finner absolutt minimum og minimumspunkt for en funksjon f på et gitt intervall.

`Ekstremalpunkt( <Funksjon>, <Start>, <Slutt>  )`

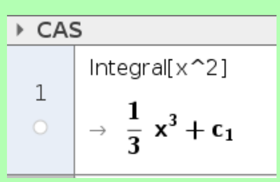
Finner alle lokale ekstremalpunkt og ekstremalverdier for en funksjon f på et gitt intervall.

6 Integrasjon

`Integral( <Funksjon> )`

Gir uttrykket til det ubestemte integralet av en funksjon. (Merk: Hvis kommandoen skrives i inntastingsfeltet, blir konstantleddet utelatt).

Eksempel

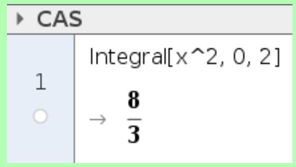


c_1 er en vilkårlig konstant.

Integral(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)

Gir det bestemte integralet av en funksjon på et intervall.

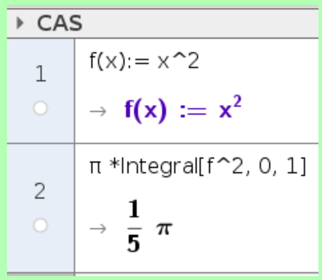
Eksempel 1



Eksempel 2

Finn volumet av omdreiningslegemet til $f(x) = x^2$ på intervallet $[0, 1]$.

Svar:



I celle 1 definerer vi $f(x)$. Volumet er gitt som $\pi \int_0^1 (f(x))^2 \, dx$, som vi finner i celle 2.

7 Differensialligninger

LøsODE(<Likning>) (CAS)

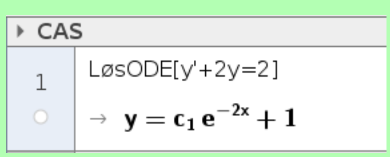
Finner generell løsning av en gitt differensialligning av første eller andre orden.

Eksempel 1

Løs ligningen:

$$y' + 2y = 2$$

Svar:



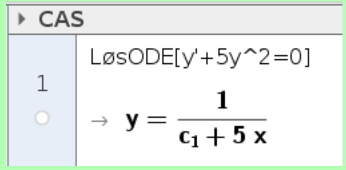
c_1 er en vilkårlig konstant.

Eksempel 2

Løs ligningen:

$$y' + 5y^2 = 0$$

Svar:



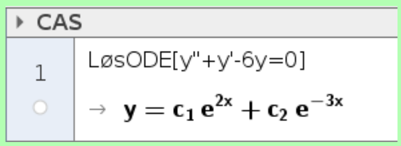
c_1 er en vilkårlig konstant.

Eksempel 3

Løs ligningen:

$$y'' + y' - 6y = 0$$

Svar:



c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter.

LøsODE(<Likning>, <Punkt på f>, <Punkt på f'>) (CAS)

Finner løsningen av en gitt differensialligning av første eller andre orden, for randverdier gitt som punkter.

Eksempel 1

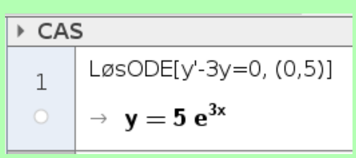
Finn løsningen av ligningen

$$y' - 3y = 0$$

med randbetingelsen $y(0) = 5$.

Svar:

Randbetingelsen gir oss punktet $(x_0, y(x_0)) = (0, 5)$:



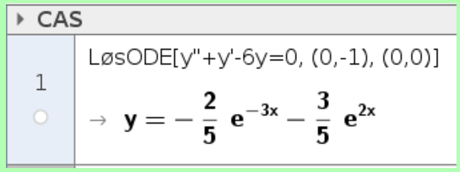
Eksempel 2

Løs ligningen:

$$y'' + y - 6 = 0 \quad , \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$$

Svar:

Punktet på y er $(0, -1)$ og punktet på y' er (0,0). Løsningen kan vi da finne via CAS:



`Retningsdiagram( f(x,y) )` (Inntastingsfelt)

Lager et retningsdiagram for en differensialligning hvor $f(x,y) = y'$.

Eksempel

Gitt differensialligningen

$$y' + xy = x$$

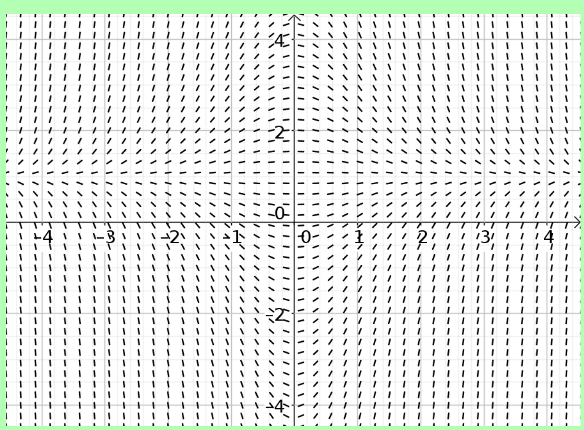
a) Tegn et retningsdiagram for løsningene av ligningen.
b) Tegn integralkurven for løsningen som krysser vertikalaksen når $y = 2$.

Svar:

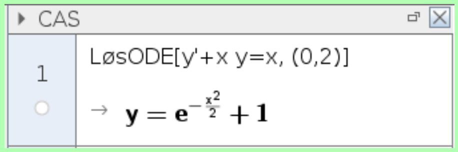
a) Vi starter med å finne y':

$$y' = x - xy$$

I inntastingsfeltet skvriver vi så `Retnigsdiagram[x-x y]` og får dette bildet i grafikkfeltet (*Obs*! x og y må skilles med mellomrom eller gangetegn):



b) Vi starter med å løse ligningen for punktet $(0, 2)$:



Trykker vi på den hvite markøren (som blir blå) i celle 1, vil en funksjon bli definert og vist i grafikkfeltet: