Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- gjøre rede for definisjonen av bestemt integral som grense for en sum og ubestemt integral som antiderivert
- beregne integraler av de sentrale funksjonene ved antiderivasjon og ved hjelp av variabelskifte, ved delbrøkoppspalting med lineære nevnere og ved delvis integrasjon
- tolke det bestemte integralet i modeller av praktiske situasjoner og bruke det til å beregne arealer av plane områder og volumer av omdreiningslegemer

0.1 Bestemt og ubestemt integral

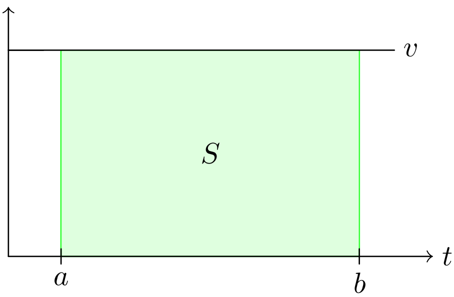
0.1.1 Bestemt integral

Tenk at vi kjører en bil med en fart som til enhver tid t er gitt av en funksjon $v(t)$. Etter en tid $t = b$ ønsker vi å vite lengden S vi har kjørt siden tiden $t = a$.

La oss først si at farten v er en konstant. Lengden vi har kjørt i tidsintervallet $[a, b]$ må da være[1]

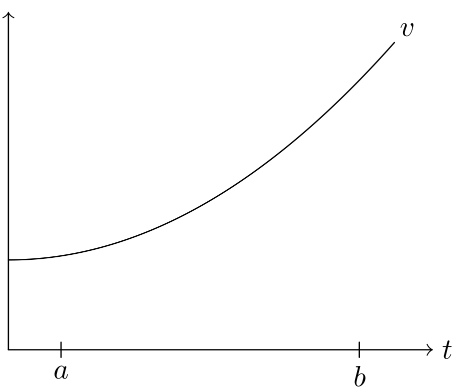
$$S = v \cdot (b - a)$$

Figurativt blir dette arealet til firkanten som er avgrenset av t-aksen, linjene $t = a$, $t = b$ og grafen til v:



Figur 1

Men hvordan kan vi finne S hvis farten er varierende med tiden, som vist i *figur 2*?



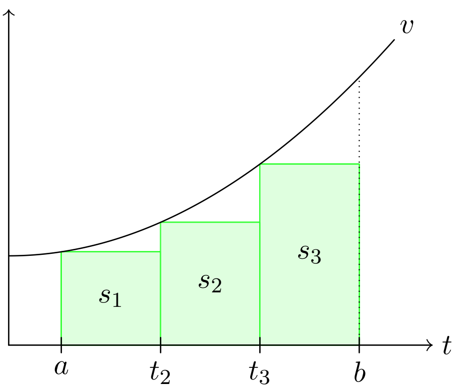
Figur 2

[1]strekning = fart · tid

Én tilnærming er å plukke ut små intervaller hvor vi regner farten som konstant. Vi starter her med å dele grafen inn i tre like brede intervaller, som da får bredden $\Delta t = \frac{b-a}{3}$. Videre bruker vi $v(t)$ i starten av hvert intervall som konstantfart, de tilhørende tidspunktene kaller vi $t_1 = a$, t_2 og t_3. Vi kan nå anslå S som summen av tre strekninger s_1, s_2 og s_3 reist med konstant fart:

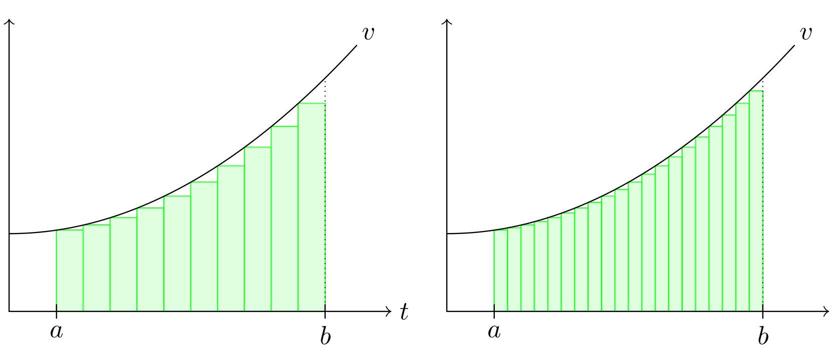
$$
\begin{aligned}
S &\approx s_1 + s_2 + s_3 \\
&\approx v(a)\Delta t + v(t_2)\Delta t + v(t_3)\Delta t \\
&\approx (v(a) + v(t_2) + v(t_3))\Delta t
\end{aligned}
$$

Grafisk har vi tilnærmet S ved å legge sammen arealet av de tre grønne søylene i *figur 3*:



Figur 3

Intuitivt vil vi tenke at jo mindre intervaller vi bruker, jo riktigere blir det å si at farten er konstant over intervallet, og at tilnærmingen da må bli bedre.



a) b)

Figur 4: a) 10 intervaller *b)* 20 intervaller

Så hvorfor ikke lage uendelig mange, uendelig små[1] intervaller? Vi lar antall intervaller være gitt ved tallet n og lar $n \to \infty$. Vi får da at

$$\begin{aligned} S &\approx \lim_{n\to\infty} (v(t_1) + v(t_2) + ... + v(t_n))\Delta t \\ &\approx \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t \end{aligned}$$

hvor $t_i = a + (i-1)\Delta t$ og $\Delta t = \frac{b-a}{n}$ (legg merke til at $t_1 = a$). Faktisk kan det faktisk vises[2] at:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t$$

I R2 kan vi se på dette som selveste definisjonen av *det bestemte integralet*[3] av v over intervallet $[a, b]$.

Bestemt integral I

Det bestemte integralet I av en funksjon $f(x)$ over intervallet $[a, b]$ er gitt som

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{0.1}$$

hvor $x_i = a + (i-1)\Delta x$ og $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Eksempel

Finn det bestemte integralet av $f(x) = x$ på intervallet $x \in [0, 4]$.

Svar:

Vi har her at $f(x_i) = x_i = (i-1)\Delta x$, hvor $\Delta x = \frac{4}{n}$. Setter vi dette inn i (0.1), får vi at

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (i-1)\left(\frac{4}{n}\right)^2$$

[1] Med "uendelig små" menes det at verdien går mot 0. Størrelser som går mot 0 kalles for *infinitesimale størrelser*.

[2] Se side 29 for en grundigere forklaring.

[3] Hvilke bokstaver vi bruker for å indikere størrelser, funksjoner og variabler er selvsagt helt vilkårlig. I oppsummeringen har vi valgt å bruke de mer klassiske bokstavene I, f og x istedenfor S, v og t.

$$
\begin{aligned}
&= 4^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right)\\
&= 4^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{n^2+n}{2} - n\right)\\
&= 16\frac{1}{2}\\
&= 8
\end{aligned}
$$

Merk: I overgangen mellom første og andre linje i ligningen over har vi brukt summen av en aritmetisk rekke.

I kommende seksjoner skal vi finne integraler på en helt annen måte enn i eksempelet over. Læresetningen som sørger for dette er så viktig at den rett og slett kalles *Analysens fundamentalteorem*[1]. Fordi teoremet gir oss en metode som omgår utregning av summer, lønner det seg å skrive integralet på en mer kompakt form[2]:

Bestemt integral II

Det bestemte integralet I av en funksjon $f(x)$ over intervallet $[a, b]$ skrives som

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{0.2}$$

0.1.2 Analysens fundamentalteorem

Tenk igjen at vi kjører med en hastighet gitt av funksjonen $v(t)$, og at strekningen vi har kjørt nå er gitt ved funksjonen $s(t)$. I R1 lærte vi at farten er den deriverte av strekningen, altså at:

$$s'(t) = v(t)$$

Når s er kjent kan vi enkelt finne den totale strekningen S vi har reist på intervallet $t \in [a, b]$:

$$S = s(b) - s(a)$$

[1] Analyse i matematisk sammenheng kan, kort oppsummert, sies å være studien av funksjoner. Teorem er en læresetning som kan bevises.

[2] Man kan sammenligne dette med å erstatte grensesummen i (0.1) med $\int_a^b$, grenseintervallet med dx, og deretter fjerne alle indekser.

Men som vi har sett kan S også beskrives som et bestemt integral:

$$S = \int_a^b v(t)\,dt$$

Denne sammenhengen kan generaliseres til å gjelde for alle kontinuerlige funksjoner:

Analysens fundamentalteorem

Gitt en funksjon $f(x)$ definert på intervallet $[a, b]$. Hvis F er en antiderivert til f, er

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{0.3}$$

Eksempel

Gitt funksjonen $f(x) = e^{\sin x}$. Finn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\,dx$.

Svar:

Siden f er en antiderivert til $f'(x)$, må vi ha at

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\,dx &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) \\ &= e^{\sin\frac{\pi}{2}} - e^{\sin 0} \\ &= e - 1\end{aligned}$$

0.1.3 Ubestemte integral

Vi har hittil sett på det *bestemte* integralet, som har sitt navn fordi integralet er over et intervall der start- og sluttverdien er gitt. Det *ubestemte* integralet til en funksjon $f(x)$ skriver vi derimot som

$$\int_c^x f(t)\,dt$$

Navnet ubestemt kommer av at c er en vilkårlig konstant og at x er en varierende verdi[1].

Hvis vi lar F være en antiderivert til f, har vi fra (0.3) at:

$$\int_c^x f(t)\,dt = F(x) - F(c)$$

Siden c er en konstant, må $-F(c)$ også være det. Denne kalles *integrasjonskonstanten* og omdøpes gjerne til C. Det er også vanlig å forenkle skrivemåten til det ubestemte integralet ved å fjerne grensene og bare skrive $f(x)\,dx$ etter integraltegnet.

Ubestemt integral

Det ubestemte integralet av $f(x)$ er gitt som

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{0.4}$$

Hvor F er en antiderivert til f og C er en vilkårlig konstant.

Merk: Når ikke annet er nevnt, tar vi det heretter for gitt at størrelser skrevet som store bokstaver er vilkårlige konstanter som resultat av integrasjon.

Eksempel 1

Ved derivasjon vet vi at $(x^2)' = 2x$. Bruk dette til å å finne $\int 2x\,dx$.

Svar:

Fra derivasjonen ser vi at x^2 er en antiderivert til $2x$. Vi kan dermed skrive

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

[1] Det kan kanskje se litt rart ut at vi har skrevet $f(t)$ i integralet når vi snakker om $f(x)$, men dette gjøres bare for å skille mellom de to varierende verdiene x og t. x kan være en hvilken som helst verdi, men for det ubestemte integralet ser vi på f for verdiene $t \in [a, x]$, altså $f(t)$. Og da er det ikke x som varierer, men t, derav dt.

Eksempel 2

Ved derivasjon vet vi at $(x^2+3)' = 2x$. Bruk dette til å finne $\int 2x\,dx$.

Svar:

Fra derivasjonen ser vi at x^2+3 er en antiderivert til $2x$. Vi kan dermed skrive

$$\int 2x\,dx = x^2 + 3 + C$$

Men siden C er en vilkårlig konstant, kan vi likságodt lage oss en ny konstant $D = C + 3$, og får da at

$$\int 2x\,dx = x^2 + D$$

Merk: Siden integrasjonskonstanter er vilkårlige, kan vi tillate oss å komprimere flere konstanter til én. I utregningen over kunne vi skrevet C opp igen, underforstått at 3 var ”trekt inn” i denne konstanten:

$$\int 2x\,dx = x^2 + 3 + C = x^2 + C$$

0.2 Integralregning

Å finne bestemte og ubestemte integraler er et stort og viktig felt innenfor matematikken. Analysens fundamentalteorem forteller oss at nøkkelen er å finne en antiderivert til funksjonen vi ønsker å integrere.

0.2.1 Integralet av utvalge funksjoner

Vi skal etterhvert se at å finne integraler ofte krever spesielle metoder, men noen grunnleggende relasjoner bør vi huske:

Ubestemte integraler

For konstantene k og C har vi at

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \tag{0.5}$$

$$\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx \tag{0.6}$$

$$\int x^k\, dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C \qquad (k \neq -1) \tag{0.7}$$

$$\int \sin(kx)\, dx = -\frac{1}{k} \cos(kx) + C \tag{0.8}$$

$$\int \cos(kx)\, dx = \frac{1}{k} \sin(kx) + C \tag{0.9}$$

$$\int e^{kx}\, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C \tag{0.10}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + C \tag{0.11}$$

$$\int \frac{1}{x+k}\, dx = \ln|x+k| + C \tag{0.12}$$

Eksempel 1

Finn det bestemte integralet $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8}{1-\sin^2 x}\, dx$.

Svar:

Vi starter med å observere at $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$. I tillegg vet vi fra (0.6) at konstanten 8 kan trekkes utenfor integralet. Vi kan derfor skrive integralet vårt som

$$8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

Fra (0.11) vet vi at $\tan x$ er en antiderivert til $\frac{1}{\cos^2 x}$. Når vi har funnet en antiderivert fører vi gjerne slik[1]:

$$8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = 8\big[\tan x\big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$
\begin{aligned}
&= 8\left[\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right] \\
&= 8[1-0] \\
&= 8
\end{aligned}
$$

Merk: Bruken av klammeparantes er bare en annen måte å skrive (0.3) på.

---

[1] Forklar for deg selv hvorfor vi ikke trenger å ta hensyn til konstanten når vi skal finne et bestemt integral.

Eksempel 2

Finn det ubestemte integralet $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^4} + \sqrt[3]{x}\right) dx$.

Svar:

Vi utnytter at $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$ og at $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Ved (0.5) og (0.7) kan vi skrive:

$$
\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{x^4} + \sqrt[3]{x}\right) dx &= \int \left(x^{-4} + x^{\frac{1}{3}}\right) dx \\
&= \frac{1}{-4+1} x^{-4+1} + \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + C \\
&= -\frac{1}{3} x^{-3} + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C
\end{aligned}
$$

0.2.2 Bytte av variabel

Vi skal nå se på en metode som kalles *bytte av variabel*[1] (også kalt *substutisjon*). Med denne kan vi ofte forenkle integralregningen betraktelig.

Bytte av variabel

Gitt funksjonene $f(x)$, $u(x)$ og $g(u)$. Hvis $\int f(x)\,dx$ kan skrives om til $\int g(u)u'\,dx$, kan integralet løses med u som variabel:

$$\int g(u)u'\,dx = \int g(u)\,du \tag{0.13}$$

Eksempel 1

Finn det ubestemte integralet

$$\int 8x\sin\left(4x^2\right)\,dx$$

Svar:

Vi setter $u(x) = 4x^2$ og $g(u) = \sin u$. Dermed blir $u' = 8x$, og da er

$$\begin{aligned}\int 8x\sin\left(4x^2\right)\,dx &= \int u'g(u)\,dx \\ &= \int g(u)\,du \\ &= \int \sin u\,du \\ &= -\cos u + C \\ &= -\cos\left(4x^2\right) + C\end{aligned}$$

Merk: Når integralet vi skal finne er mhp. x, er det viktig at sluttuttrykket har x som eneste variabel.

[1] Det er flere framgangsmåter for denne metoden. Den vi her presenterer er, etter forfatterens mening, den raskeste for integraler som er pensum i R2. For mer avanserte integraler bør man kjenne til framgangsmåten presentert i *vedlegg* **??**.

Eksempel 2

Finn det bestemte integralet

$$\int_0^2 x^2 e^{2x^3}\, dx$$

Svar:

Vi setter $u(x) = 2x^3$ og $g(u) = e^u$, da blir $u' = 6x^2$. I integralet vi skal løse mangler vi altså faktoren 6 for å kunne anvende oss av (0.13). Men vi kan alltids gange integralet vårt med 1, skrevet som $\frac{6}{6}$. Da kan vi trekke 6-tallet vi ønsker inn i integralet, og la resten av brøken forbli utenfor:

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2 e^{2x^3}\, dx &= \frac{6}{6}\int_0^2 x^2 e^{2x^3}\, dx \\ &= \frac{1}{6}\int_0^2 6x^2 e^{2x^3}\, dx \end{aligned}$$

Nå ligger alt til rette for å bytte variabel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}\int_0^2 6x^2 e^{2x^3}\, dx &= \frac{1}{6}\int_0^2 u' g(u)\, dx \\ &= \frac{1}{6}\int_0^2 g(u)\, du \\ &= \frac{1}{6}\int_0^2 e^u\, du \\ &= \frac{1}{6}\left[e^u\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{6}\left[e^{2x^3}\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{6}\left(e2 \cdot 2^3 - e^{2\cdot 0^2}\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(e^{16} - 1\right) \end{aligned}$$

Det finnes også en alternativ måte for å regne ut bestemte integral ved bytte av variabel, se *vedlegg* **??** for denne.

Eksempel 3

Buelengden til grafen til en funksjon $f(x)$ på intervallet $[a,b]$ er gitt som

$$\int_a^b \sqrt{1+(f')^2}\,dx \tag{I}$$

Finn lengden til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} \qquad , \qquad x \in [0,5]$$

Svar:

Vi har at

$$f' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

Og videre at

$$(f')^2 = \frac{1}{4}x$$

Det ubestemte integralet i (I) blir da

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{4}x}\,dx$$

Vi setter $u = 1 + \frac{1}{4}x$ og $g(u) = u^{\frac{1}{2}}$. Da er $u' = \frac{1}{4}$. Nå har vi at

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+\frac{1}{4}x}\,dx &= 4\int u^{\frac{1}{2}}u'\,dx \\
&= 4\int u^{\frac{1}{2}}\,du \\
&= \frac{8}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}$$

Altså er

$$\int_0^5 \sqrt{1+(f')^2}\,dx = \frac{8}{3}\left[\left(1+\frac{1}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{8}{3}\left(\left(1+\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right) \\
&= \frac{8}{3}\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right) \\
&= \frac{8}{3}\left(\frac{27}{8}-1\right) \\
&= \frac{19}{3}
\end{aligned}
$$

Merk: En litt lettere utrekning kunne vi fått ved å observere at

$$\sqrt{1+\frac{1}{4}x} = \frac{1}{2}\sqrt{4+x}$$

Med denne omskrivingen kunne vi valgt substutisjonen $u = 4 + x$, og dermed fått at $u' = 1$.

0.2.3 Delvis integrasjon

Hvis vi ikke finner et passende bytte av variabel for å løse et integral, kan vi isteden prøve med *delvis integrasjon*. Vi starter med å utlede ligningen som legger grunnlaget for metoden.

Gitt produktet av to funksjoner $u(x)$ og $v(x)$, altså uv. Av produktregelen ved derivasjon (se (**??**)) har vi at

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Videre integrerer[1] vi begge sider av ligningen over mhp. x:

$$
\begin{aligned}
\int (uv)'\,dx &= \int \left(u'v + uv'\right)\,dx \\
uv &= \int \left(u'v + uv'\right)\,dx \\
uv - \int u'v\,dx &= \int uv'\,dx
\end{aligned}
$$

[1] Når vi har flere ubestemte itegraler, trenger vi bare ta med integrasjonskonstanten for én av dem. Derfor er ikke konstanten fra integrasjonen av $(uv)'$ tatt med.

Delvis integrasjon

For to funksjoner $u(x)$ og $v(x)$ har vi at

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx \tag{0.14}$$

Eksempel 1

Integrer funksjonen $f(x) = x \ln x$.

Svar:

Vi observerer at $f(x)$ er sammensatt av x og $\ln x$. Trikset bak delvis integrasjon er å sette én av disse til å være funksjonen $u(x)$ og den andre til å være den deriverte av $v(x)$, altså $v'(x)$. Da har vi en ligning som i (0.14) og kan (forhåpentligvis) bruke denne til å finne integralet vi søker.

Vi må integrere v' for å finne v og derivere u for å finne u'. Siden $\ln x$ er lett å derivere, men vanskelig å integrere, setter vi

$$\begin{aligned} u &= \ln x \\ v' &= x \end{aligned}$$

Da må vi ha at[1]

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{x} \\ v &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Altså kan vi skrive (rekkefølgen på v' og u har selvsagt ingenting å si i (0.14))

$$\begin{aligned} \int x \ln x \, dx &= \int v'u \, dx \\ &= uv - \int u'v \, dx \\ &= \ln x \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x \, dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C \end{aligned}$$

[1]Hvorfor ikke $v = \frac{1}{2}x^2 + C$? Vi hadde jo da fått samme v'.

Hvis vi lar V betegne en antiderivert til v', kan vi skrive $v = V + C$. Av (0.14) har vi da at

$$\begin{aligned}
\int uv'\,dx &= u(V+C) - \int u'(V+C)\,dx \\
&= u(V+C) - \int u'V\,dx - \int Cu'\,dx \\
&= uV + Cu - \int u'V\,dx - Cu \\
&= uV - \int u'V\,dx
\end{aligned}$$

Vi har endt opp med et uttrykk hvor C ikke lenger deltar. Vi får altså det samme svaret uansett hva verdien til C er, og da velger vi selvsagt fra starten av at $C = 0$.

Eksempel 2

Integrer funksjonen $f(x) = \ln x$.

Svar:

Vi starter med å skrive $f(x) = \ln x \cdot 1$, og setter

$$\begin{aligned} u &= \ln x \\ v' &= 1 \end{aligned}$$

Vi får da at

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{x} \\ v &= x \end{aligned}$$

$\int f \, dx$ finner vi nå ved delvis integrasjon:

$$\begin{aligned} \int \ln x \cdot 1 \, dx &= \int uv' \, dx \\ &= uv - \int u'v \, dx \\ &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln x - x + C \\ &= x(\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

0.2.4 Delbrøksoppspaltning

Gitt integralet

$$\int \frac{4x+5}{(x+1)(x+2)} \, dx$$

Etter litt testing vil vi finne at både delvis integrasjon og bytte av variabel kommer til kort i vår søken etter en antiderivert. Hva vi heller kan gjøre, er å ta i bruk *delbrøksoppspaltning*.

Vi merker oss da at integranden[1] er en brøk med nevneren $(x+1)(x+2)$. Dette betyr at den kan skrives som to separate brøker med $(x+1)$ og $(x+2)$ som nevnere:

$$\frac{4x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \tag{0.15}$$

[1] For $\int f(x) \, dx$ sier vi at f er *integranden*.

A og B er to konstanter, vår oppgave blir nå å bestemme verdien til disse.

Vi starter med å gange begge sider av (0.15) med fellesnevneren:

$$\frac{4x+5}{(x+1)(x+2)}(x+1)(x+2) = \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}\right)(x+1)(x+2)$$
$$4x+5 = A(x+2) + B(x+1)$$

For det rette valget av A og B er uttrykkene over like for alle verdier av x. Når $x = -1$, har vi bare A som ukjent:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-1) + 5 &= A(-1+2) + B(-1+1) \\ 1 &= A \end{aligned}$$

Og ved å sette $x = -2$, finner vi B:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-2) + 5 &= A(-2+2) + B(-2+1) \\ -3 &= -B \\ 3 &= B \end{aligned}$$

Nå kan vi altså skrive

$$\frac{4x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+2}$$

Dette er to brøker vi kan å integrere[1] (se (0.12)):

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+5}{(x+1)(x+2)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+2}\right) dx \\ &= \ln|x+1| + 3\ln|x+2| \end{aligned}$$

[1] *Obs!* I søken etter A og B valgte vi verdiene $x = -1$ og $x = -2$. I ligningene hvor vi satte inn disse verdiene var dette helt uskyldig, men i integralet må vi være observante. Vi får nemlig 0 i nevner hvis én av disse verdiene ligger i intervallet vi skal integere over. Er det snakk om et bestemt integral må vi derfor passe på at dette ikke er tilfelle.

Integrasjon ved delbrøksoppspaltning

For integraler på formen

$$\int \frac{a + bx + cx^2 + ...}{(x-d)(x-e)(x-f)...}\,dx$$

hvor $a, b, c, ...$ er konstanter, skriver vi om integranden til

$$\frac{A}{(x-d)} + \frac{B}{(x-e)} + \frac{C}{(x-f)} + ...$$

og finner så de ukjente konstantene $A, B, C, ...$

Eksempel 1

Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{3x^2 + 3x + 2}{x^3 - x}\,dx$$

Svar:

Vi starter med å faktorisere nevneren i integranden, og får at

$$\frac{3x^2 + 3x + 2}{x^3 - x} = \frac{3x^2 + 3x + 2}{x(x+1)(x-1)}$$

Denne brøken ønsker vi å skrive som

$$\frac{3x^2 + 3x + 2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

For å finne A, B og C, omskriver vi ligningen ved å gange med fellesnevneren $x(x+1)(x-1)$:

$$3x^2 + 3x + 2 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$$

Ligningen må holde for alle verdier av x. Vi setter først $x = 0$, og får at

$$\begin{aligned} 2 &= A \cdot (-1) \\ -2 &= A \end{aligned}$$

Videre setter vi $x = -1$:

$$3 \cdot (-1)^2 + 3(-1) + 2 = B \cdot (-1)(-1-1)$$

$$1 = B$$

Til slutt setter vi $x = 1$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 2 &= C(1+1) \\ 4 &= C \end{aligned}$$

Integralet vi skal finne kan vi derfor skrive som

$$\int \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x-1} \right) dx = -2\ln|x| + \ln|x+1| + 4\ln|x-1| + D$$

Eksempel 2

Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 + x - 4}{x^2 + x - 2}\, dx$$

Svar:

Hvis telleren har potenser av høyere orden[1] enn nevneren, må vi starte med en polynomdivisjon:

$$\begin{aligned} &(x^3 + 5x^2 + x - 4) : (x^2 + x - 2) = x + 4 + \frac{-x+4}{x^2+x-2} \\ &\underline{-(x^3 + x^2 - 2x)} \\ &\quad 4x^2 + 3x - 4 \\ &\quad \underline{-\,(4x^2 + 4x - 8)} \\ &\qquad -x + 4 \end{aligned}$$

Vi observerer videre at nevneren i brøken kan omskrives til $(x-1)(x+2)$, for to konstanter A og B har vi altså at

$$\begin{aligned} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} &= \frac{-x+4}{x^2+x-2} \\ A(x+2) + B(x-1) &= -x + 4 \end{aligned}$$

Når $x = -2$, får vi at

$$\begin{aligned} B(-2-1) &= -(-2) + 4 \\ B &= -2 \end{aligned}$$

Og når $x = 1$, er

$$A(1+2) = -1+4$$
$$A = 1$$

Integralet blir derfor

$$\int \left(x + 4 + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 4x + \ln|x-1| - 2\ln|x+2| + C$$

---

[1]Her har telleren tre som høyeste orden, mens nevneren har to.

0.3 Areal og volum

0.3.1 Avgrenset areal

Som antydet i *delseksjon 0.1.1* er det en sterk sammenheng[1] mellom det bestemte integralet av en funksjon $f(x)$ på intervallet $[a, b]$ og arealet avgrenset av grafen til f, x-aksen og linjene $x = a$ og $x = b$. Sistnevnte størrelse skal vi for enkelhetsskyld kalle *arealet avgrenset av f for $x \in [a, b]$*:

---

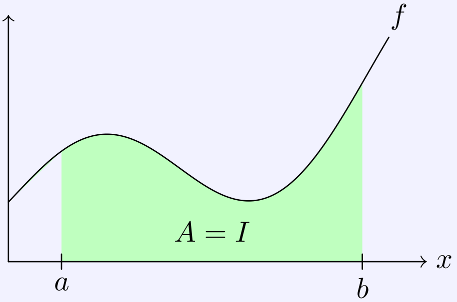
[1]Se s. 29-31 for nærmere forklaring.

Integral som areal I

Gitt en kontinuerlig funksjon $f(x)$ og to tall a og b der $a < b$.

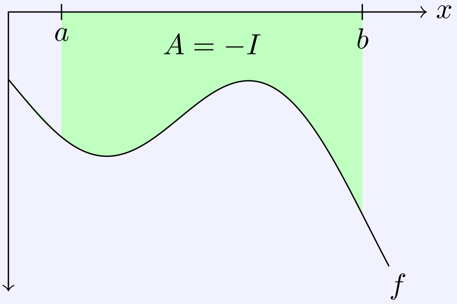
Hvis $f \geq 0$ for $x \in [a, b]$, er arealet A avgrenset av f på dette intervallet gitt som

$$A = \int_a^b f\,dx$$



Hvis $f \leq 0$ for $x \in [a, b]$, er arealet A avgrenset av f på dette intervallet gitt som

$$A = -\int_a^b f\,dx$$



Areal avgrenset av to funksjoner

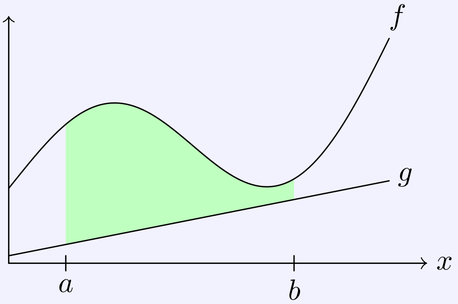
Noen ganger ønsker vi også å finne arealet avgrenset av to funksjoner. Da må vi sørge for at vi har tilstrekkelig med informasjon om disse før vi utfører integrasjonen:

Integral som areal II

Gitt to kontinuerlige funksjoner $f(x)$ og $g(x)$ og tre tall a, b og c der $a < c < b$.

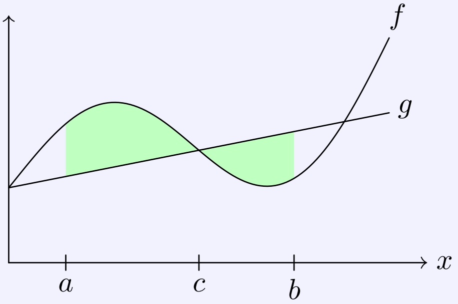
Hvis $f > g$ for $x \in [a, b]$, er arealet A avgrenset mellom f og g på dette intervallet gitt ved

$$A = \int_a^b (f - g)\, dx \tag{0.16}$$



Hvis $f \geq g$ for $x \in [a, c]$ og $g \geq f$ for $x \in [c, b]$, er arealet A avgrenset mellom f og g for $x \in [a, b]$ gitt ved

$$A = \int_a^c (f - g)\, dx + \int_c^b (g - f)\, dx \tag{0.17}$$



Eksempel

Gitt funksjonene $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ og $g(x) = 2x - 1$. Vi har da at $f \geq g$ for $x \leq 1$ og at $g \geq f$ for $x \geq 1$. Finn arealet A avgrenset av f og g for $x \in [0, 2]$.

Svar:

Ut ifra informasjonen over er arealet gitt ved ligningen

$$A = \int\limits_0^1 (f - g)\, dx + \int\limits_1^2 (g - f)\, dx$$

Vi starter med å regne ut de to integralene hver for seg:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 (f - g)\, dx &= \left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - (x^2 - x)\right]_0^1 \\
&= -\left[\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + (x^2 - x)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right) + (1^2 - 1) \\
&\qquad - \left(\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right) + (0^2 - 0)\right) \\
&= \frac{2}{\pi} \\
\int\limits_1^2 (g - f)\, dx &= \left[(x^2 - x) + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_1^2 \\
&= (2^2 - 2) + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right) \\
&\qquad - \left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right) - (1^2 - 1)\right) \\
&= 2 - \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

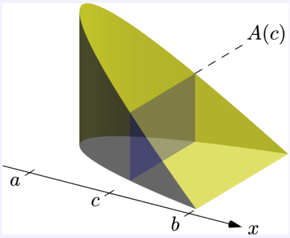
Summen av disse to integralene er 2, som altså er arealet.

0.3.2 Volumet av en figur

Vi har sett hvordan integraler kan brukes til å finne arealer, men de kan også brukes til å finne volumer:

Integral som volum

Gitt en tredimensjonal figur plassert i et koordinatsystem, med endepunktene satt til verdiene a og b langs x-aksen.



La videre $A(x)$ være tverrsnittsarealet av figuren for verdien x. Volumet V av figuren er da gitt som

$$V = \int_a^b A\,dx \tag{0.18}$$

Eksempel

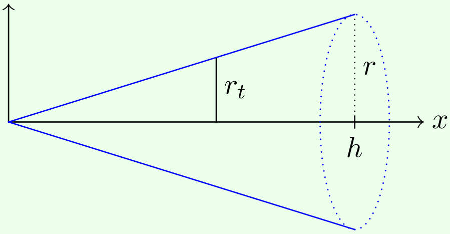
Vis at volumet V av ei rett kjegle er gitt som

$$V = \frac{1}{3}\pi h r^2$$

hvor r er radiusen til grunnflata og h er høgden til kjegla.

Svar:

Vi plasserer kjegla inn i et koordinatsystem med høyden langs x-aksen og spissen plassert i origo.



Radiusen $r_t(x)$ kan beskrives som en rett linje med stigningstall $\frac{r}{h}$:

$$r_t(x) = \frac{r}{h}x$$

Arealet $A(x)$ av tverrsnittet blir da

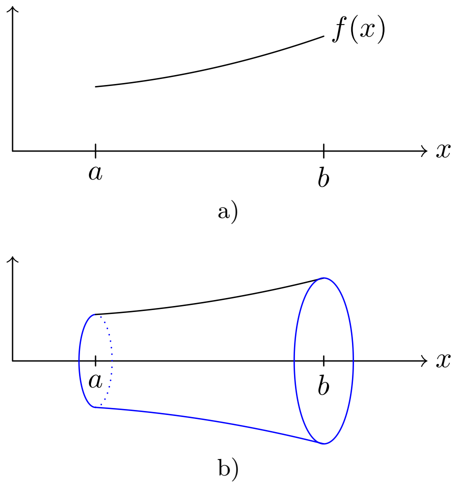
$$\begin{aligned} A(x) &= \pi r_t^2 \\ &= \pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 x^2 \end{aligned}$$

Altså er volumet av kjegla gitt som

$$\begin{aligned} \int_0^h A\,dx &= \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 x^2\,dx \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2\,dx \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h \\ &= \frac{1}{3}\pi h r^2 \end{aligned}$$

0.3.3 Volum av omdreiningslegemer

Si vi har en funksjon $f(x)$ gitt på intervallet $[a,b]$, med en graf som vist i *figur 5a*. Tenk nå at vi dreier linjestykket 360° om x-aksen. Formen vi da har "skjært" ut, vist i *figur 5b*, er det vi kaller *omdreiningslegemet* til $f(x)$ på intervallet $[a,b]$.



Figur 5: a) Grafen til f. *b)* Omdreiningslegemet til f.

Tverrsnittet (langs x-aksen) til en slik figur er alltid sirkelformet, tverrsnittsarealet er derfor πr^2, hvor $r(x)$ er radiusen til tverrsnittet. Men siden radiusen tilsvarer høyden fra x-aksen opp til f, er $r = f$. Av (0.18) kan vi da skrive

$$V = \int_a^b A\,dx = \int_a^b \pi f^2\,dx = \pi \int_a^b f^2\,dx$$

Volum av omdreiningslegemer

Volumet V av omdreiningslegemet til $f(x)$ på intervallet $[a,b]$ er gitt som

$$V = \pi \int_a^b f^2\,dx \tag{0.19}$$

Eksempel

Gitt funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x}$$

finn volumet av omdreiningslegeet til f på intervallet $[1, 3]$.

Svar:

Volumet vi søker er gitt som

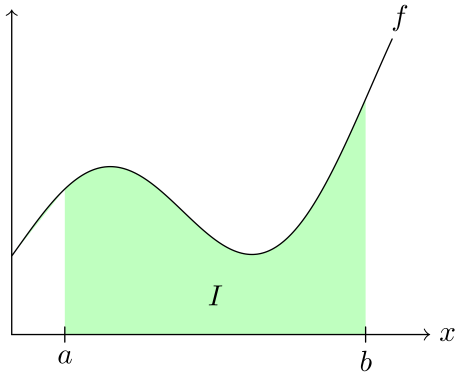
$$\begin{aligned}
\pi \int_1^3 f^2 \, dx &= \pi \int_1^3 \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx \\
&= \pi \int_1^3 x \, dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3 \\
&= \frac{\pi}{2}[9-1] \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

Forklaringer

Bestemt integral

På side 2 - 5 brukte vi en funksjon $v(t)$ som ga oss en hastighet for enhver tid t. Vi presenterte da integralet som en tilnærming av hvor langt man hadde beveget seg over et tidsintervall $t \in [a, b]$. Når vi nå skal studere integralet helt generelt, starter vi isteden med en geometrisk definisjon av integralet:

Gitt en funksjon $f(x)$ som er positiv og kontinuerlig for alle $x \in [a, b]$. Integralet I tilsvarer arealet avgrenset av x-aksen, linjene $x = a$ og $x = b$ og grafen til f.



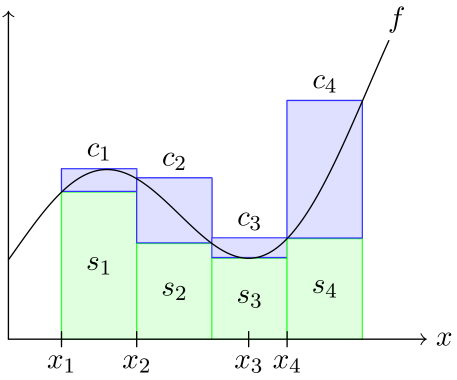
Figur 6: Integralet I tilsvarer det avgrensede arealet i grønt.

La oss ta utgangspunkt i funksjonen $f(x)$, med en graf som vist i *figur 6*. Vårt mål er nå å finne I.

Vi starter med å splitte $[a, b]$ inn i n mindre delintervaller, alle med bredden $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. I tillegg lar vi x_i for $i \in \{1, 2, ..., n\}$ betegne den x-verdien som er slik at $f(x_i)$ er den laveste verdien til f på delintervall nr. i.

Arealet avgrenset av delintervallet og f tilnærmer vi som $s_i = f(x_i)\Delta x$, da har vi at (se *figur 7*)

$$
\begin{aligned}
I &\geq s_1 + s_2 + ... + s_i \\
I &\geq f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x \\
I &\geq \sum_{i=i}^{n} f(x_i)\Delta x
\end{aligned}
$$



Figur 7: Arealene av s_i markert som grønne søyler og arealene av c_i markert som blå søyler. Bredden til hver søyle er $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (her er $n = 4$).

Videre må det finnes et tall $h_i \in [0, 1)$ som er slik at $f(x_i + h_i\Delta x)$ er den høyeste verdien til f på delintervallet. Vi lar c_i betegne arealet til søylen med Δx som bredde og $f(x_i + h_i\Delta x) - f(x_i)$ som høyde:

$$c_i = (f(x_i + h_i\Delta x) - f(x_i))\Delta x$$

Hvis vi legger til alle c_i i det første estimatet vårt, får vi en tilnærming som må være større eller lik det egentlige arealet. Derfor kan vi skrive

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \leq I \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x + \sum_{i=1}^{n} c_i$$

Én av c-verdiene må være større eller lik alle andre c-verdier. Vi lar m betegne indeksen til nettopp denne c-verdien. Da må vi ha at

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} c_i \leq nc_m$$

Men når $n \to \infty$, går summen nc_m mot 0:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} nc_m &= \lim_{n\to\infty} n(f(x_m + h_m\Delta x) - f(x_m))\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} n(f(x_m + h_m\Delta x) - f(x_m))\frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} (f(x_m + h_m\Delta x) - f(x_m))(b-a) \\
&= \lim_{n\to\infty} (f(x_m) - f(x_m))(b-a) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Følgelig er $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 0$, og da er

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \leq I \leq \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x + \sum_{i=1}^{n} c_i\right) \tag{0.20}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \leq I \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{0.21}$$

$$I = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{0.22}$$

Det vi har kommet fram til nå er vel og bra, men skal vi regne ut et integral blir det slitsomt å inspisere $f(x)$ på uendelig mange delintervaller for å finne de laveste funksjonsverdiene i hver av dem! Vi merker oss derfor at venstresiden i (0.20), i vårt tilfelle, representerer det kraftigste underestimatet av I, mens høyresiden er det kraftigste overestimatet. I (0.20)-(0.22) har vi vist at begge disse estimatene går mot I når $n \to \infty$, dette betyr at vi for andre valg av x_i på hvert intervall også kommer fram til ønsket resultat. Regneteknisk vil det ofte være lurt å velge $x_i = a+(i-1)\Delta x$ for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, slik som i (0.1).

Integral som areal for negative funksjoner

Hva nå om vi isteden skulle finne arealet avgrenset av x-aksen, linjene $x = a$ og $x = b$ og grafen til $g(x) = -f(x)$?

Grafene til f og g er fullstendig symmetriske om x-aksen, dette må bety at arealet A de avgrenser på et intervall må være helt likt. Og vi vet at

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} -g(x_i)\Delta x \\ &= -\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x \end{aligned}$$

Av dette kan vi utvide den geometriske definisjonen av integralet:

Gitt en funksjon $f(x)$ som er negativ og kontiunerlig for alle $x \in [a, b]$. Integralet I multiplisert med -1 tilsvarer arealet avgrenset av x-aksen, linjene $x = a$ og $x = b$ og grafen til f.

Analysens fundamentalteorem

Vi ønsker å vise at integralet I av en funksjon $f(x)$ på intervallet $[a, b]$ er gitt som

$$I = F(b) - F(a)$$

hvor F er en antiderivert til f. For å vise dette skal vi anvende oss av (0.1). Spesielt verdt å merke seg er at $x_1 = a$ og at $x_{n+1} = b$.

Fra tidligere vet vi at den deriverte av en funksjon $f(x)$ er gitt som

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Med vår $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ kan vi omskrive grensen:

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La $F(x)$ være en antiderivert til $f(x)$, da er

$$F'(x) = f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Vi erstatter f i (0.1) med uttrykket over, og får at

$$I = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i + \Delta x) - F(x_i)}{\Delta x} \Delta x$$

Fordi $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, har vi videre at

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) \\ &= \lim_{n \to \infty} (F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + ... + F(x_{n+1}) - F(x_n)) \end{aligned}$$

Av dette legger vi merke til at alle $F(x_i)$ kansellerer hverandre, bortsett fra i endepunktene. Vi sitter altså igjen med summen

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \to \infty} (-F(x_1) + F(x_{n+1})) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Integralet av utvalgte funksjoner

(0.5) og (0.6) følger direkte av (**??**) og (**??**).

Ut ifra definisjonen av det ubestemte integralet (se (0.4)) har vi at

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

hvis $F' = f$. For alle ubestemte integraler gitt i (0.7)-(0.11) kan dette sjekkes via enkle derivasjonoperasjoner og er derfor overlatt til leseren.

Bytte av variabel

Gitt en funksjon $F(x)$ som vil anta samme verdier som $G(u(x))$:

$$F(x) = G(u) \tag{0.23}$$

La oss nå skrive $F'(x)$ som $f(x)$ og $G'(u)$ som $g(u)$. For to konstanter C og D må vi ha at

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

og

$$\int g(u)\,du = G(u) + D$$

Det må derfor finnes en konstant E som er slik at

$$\int f(x)\,dx + E = \int g(u)\,du$$

Men av kjerneregelen (**??**) har vi følgende relasjon:

$$f(x) = g(u)u'$$

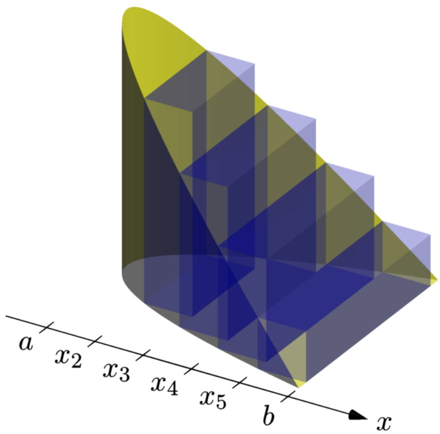
Vi kan derfor skrive

$$\int g(u)u'\,dx + E = \int g(u)\,du$$

Når vi utfører integrasjonen på enten venstre eller høyre side, får vi en ny konstant som vi kan slå sammen med E. I praksis kan vi derfor utelate E, noe som er gjort i (0.13).

Volumet av geometrier

Vi setter geometrien vår inn i et koordinatsystem, og tar for gitt at vi har en funksjon $A(x)$ som gir oss tverrsnittsarealet for alle gyldige x.



Figur 8: Volumet av geometrien (gul) tilnærmes ved summen av hver $A(x_i)\Delta x$ (blå).

Vi deler $[a, b]$ inn i n delintervaller, der hvert intervall har lengden $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ og startverdi $x_i = a + (i-1)\Delta x$ for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Vi tilnærmer volumet til geometrien ved å legge sammen volumene på formen $A(x_i)\Delta x$. Når vi lar n gå mot uendelig vil summen gå mot volumet til gjenstanden[1], dette kan vi skrive som

$$\begin{aligned} V &= \lim_{x\to\infty} \left(A(x_0)\Delta x + A(x_1)\Delta x + \dots + A(x_n)\Delta x\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(A(x_0) + A(x_1) + \dots + A(x_n)\right)\Delta x \\ &= \lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x \end{aligned}$$

Uttrykket over er analogt til definisjonen av det bestemte integralet fra ligning (0.1).

[1] Argumentasjonen for denne påstanden blir identisk med den gitt i forklaringen for det bestemte integralet (se side 29).