7.1.1 a)

$$
\begin{aligned}
\int y''\,dt &= \int -g\,dt \\
\int y'\,dt &= -\int (gt + C)\,dt \\
y &= -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
y(0) &= -\frac{1}{2}g \cdot 0 + C \cdot 0 + D \\
0 &= D
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y'(0) &= -g \cdot 0 + C \\
v_0 &= C
\end{aligned}
$$

Den spesifikke løsningen er derfor $y = v_0 - \frac{1}{2}gt^2$, ofte nevnt som én av *veiformlene* i fysikk.

7.2.1
Av kjerneregelen ved derivasjon har vi at:

$$\left(e^{F(x)}\right)' = e^{F(x)} f(x)$$

Av produktregelen ved derivasjon har vi da at:

$$\left(y(x)e^{F(x)}\right)' = y'(x)e^{F(x)} + y(x)e^{F(x)} f(x)$$

Altså har vi vist det vi skulle.

7.2.2 a) Vi har at:

$$\int 4\,dx = 4x + C$$

Den integrerende faktoren er derfor e^{4x} =:

$$
\begin{aligned}
(y' + 4y)e^{4x} &= 8e^{4x} \\
\left(ye^{4x}\right)' &= 8e^{4x} \\
\int \left(ye^{4x}\right)'\,dx &= \int 8e^{4x}\,dx \\
ye^{4x} &= 2e^{4x} + C \\
y &= 2 + Ce^{-4x}
\end{aligned}
$$

b) Vi har at:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

Den integrerende faktoren er derfor $e^{\ln x} = x$:

$$\begin{aligned}
\left(y' + \frac{1}{x}y\right)x &= x\cos x \\
(yx)' &= x\cos x \\
\int (yx)'\,dx &= \int x\cos x\,dx \\
yx &= x\sin x + \int \sin x\,dx \\
yx &= x\sin x - \cos x + C \\
y &= \sin x + x^{-1}(\cos x + C)
\end{aligned}$$

c) Vi har at:

$$\int \frac{3}{x}\,dx = 3\ln x + C$$

Den integrerende faktoren er derfor $e^{3\ln x} = x^3$:

$$\begin{aligned}
y'x^3 + \frac{3}{x}yx^3 &= x^3(15x+4) \\
\left(yx^3\right)' &= (15x^4 + 4x^3) \\
\int \left(yx^3\right)'\,dx &= \int (15x^4 + 4x^3)\,dx \\
yx^3 &= 3x^5 + x^3 + C \\
y &= 3x^2 + x + Cx^{-3}
\end{aligned}$$

d) Vi har at:

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

Den integrerende faktoren er derfor e^{x^3}:

$$\begin{aligned}
(y' + 3x^2y)e^{x^3} &= (1+3x^2)e^x e^{x^3} \\
\left(ye^{x^3}\right)' &= (1+3x^2)e^{x^3+x} \\
\int \left(ye^{x^3}\right)'\,dx &= \int (1+3x^2)e^{x^3+x}\,dx
\end{aligned}$$

Vi setter $u = x^3 + x$, og får at:

$$\begin{aligned}
ye^{x^3} &= \int u'e^u\,dx \\
&= \int e^u\,du \\
&= e^u \\
ye^{x^3} &= e^{x^3+x} + C \\
y &= e^x + Ce^{-x^3}
\end{aligned}$$

7.6.1
a) Hvis vi lar y betegne folketallet, får vi ligningen:

$$y' = ky$$

hvor $k > 0$ siden y hele tiden er voksende.

b) Den generelle løsningen av ligningen i a) er $y = Ce^{kt}$. Videre har vi at:

$$\begin{aligned} y(0) &= Ce^{k\cdot 0} \\ 100 &= C \end{aligned}$$

og at:

$$\begin{aligned} y(1) &= 100e^{k\cdot 1} \\ \ln 101 &= \ln\left(100e^{k}\right) \\ \ln 101 &= \ln 100 + \ln e^{k} \\ \ln\left(\frac{101}{100}\right) &= k \end{aligned}$$

Altså kan vi skrive:

$$\begin{aligned} y &= 100e^{\ln\left(\frac{101}{100}\right)t} \\ &= 100 \cdot 1.01^{t} \end{aligned}$$

7.6.2 a)

$$\begin{aligned} T' + kT &= kT_a \\ T'e^{kt} + kTe^{kt} &= kT_ae^{kt} \\ \left(Te^{kt}\right)' &= kT_ae^{kt} \\ \int \left(Te^{kt}\right)'\, dt &= \int kT_ae^{kt}\, dt \\ Te^{kt} &= T_ae^{kt} + C \\ T &= T_a + Ce^{-kt} \end{aligned}$$

b) Siden $T(0) = 95$ og $T_a = 15$, har vi at:

$$\begin{aligned} T(0) &= 15 + Ce^{-k\cdot 0} \\ 95 &= 15 + C \\ 80 &= C \end{aligned}$$

Altså får vi at:

$$T = 15 + 80e^{-\frac{\ln 2}{5}t}$$

c)

$$\begin{aligned} T(15) &= 15 + 80e^{-\frac{\ln 2}{5}\cdot 15} \\ &= 15 + 80e^{-3\ln 2} \\ &= 15 + 80 \cdot 2^{-3} \\ &= 25 \end{aligned}$$

d) $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-kt} = 0$, derfor vil temperaturen til gjenstanden gå må mot romtemperaturen.

7.3.1
a) Se eksempel s. **??** og opg. b)

b)

$$\begin{aligned}
2\sqrt{x}y' &= \cos^2 y \\
\frac{y'}{\cos^2 y} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
\int \frac{y'}{\cos^2 y}\,dx &= \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \\
\int \frac{1}{\cos^2 y}\,dy &= \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}} \\
\tan y &= \sqrt{x} + C \\
y &= \operatorname{atan}(\sqrt{x} + C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(4) &= \operatorname{atan}(\sqrt{4} + C) \\
\frac{\pi}{4} &= \operatorname{atan}(2 + C)
\end{aligned}$$

Siden $\operatorname{atan} 1 = \frac{\pi}{4}$ må $C = -1$, altså har vi at:

$$y = \operatorname{atan}(\sqrt{x} + 1)$$

7.6.3
Et fjør-masse system uten demping er beskrevet av ligningen

$$my'' + ky = 0$$

hvor $k > 0$. Den karakteristiske ligningen blir da:

$$\begin{aligned}
mr^2 + k &= 0 \\
r^2 &= -\frac{k}{m} \\
r &= \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}
\end{aligned}$$

For to konstanter C og D er derfor den generelle løsningen gitt som:

$$y = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Og dermed har vi vist det vi skulle.

??
Et fjør-masse system med demping er beskrevet av ligningen

$$my'' + by' + ky = 0$$

Som vi kan omskrive til

$$y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

Setter vi $\frac{b}{m} = 2\alpha$ og $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$ får vi

$$y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = 0$$

som var det vi skulle vise.

b) Den karakteistiske ligninen blir:

$$r^2 + 2\alpha r + \omega^2 = 0$$

Løser vi denne ved abc-formelen får vi:

$$\begin{aligned} r &= \frac{-2\alpha \pm \sqrt{(2\alpha)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \omega^2}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2\alpha \pm 2\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}{2 \cdot 1} \\ &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

c)

- Når $\alpha > \omega$ får den karakteristiske ligningen to reelle løsninger siden uttrykket i kvadratroten blir et tall større enn 0. Løsningen av differensialligningen er dermed gitt ved (7.12).
- Når $\alpha = \omega$ får den karakteristiske ligningen én reell løsning siden uttrykket i kvadratroten blir 0. Løsningen av differensialligningen er dermed gitt ved (7.13).
- Når $\alpha < \omega$ får den karakteristiske ligningen to komplekse løsninger siden uttrykket i kvadratroten blir et negativt tall forskjellig fra 0. Løsningen av differensialligningen er dermed gitt ved (7.14).

d) Vi faktoriserer den karakteristiske ligningen for enklere å avsløre oppførselen til uttrykket:

$$-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} = -\alpha \pm \alpha\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\alpha^2}}$$

Siden m, q og k alle er positive tall forskjellige fra null, må også α og ω være det. Av ligningen over ser vi at hvis $\alpha > \omega$, blir løsningen av den karakteristiske ligningen lik $-\alpha$ pluss/minus et tall som er mindre enn α. Altså må begge løsninger bli negative og y blir da synkende for alle $t > 0$. Videre ser vi at hvis $\alpha = \omega$, blir løsningen av den karakteristiske ligningen lik $-\alpha$. y består da av et ledd som er synkende for alle t og et ledd som går mot 0 når $t \to \infty$. Til slutt ser vi at når $\alpha < \omega$, gir rotutrykket opphav til en kompleks løsning. y består da av et sinus og cosinusuttrykk, som begge er multiplisert med $e^{-\alpha t}$. Også da vil altså y gå mot 0 når $t \to \infty$.