1.1.2

a) Vi bruker den eksplisitte fomelen for en aritmetisk følge, og får:

$$\begin{aligned} a_4 &= a_1 + d(i-1) \\ 30 &= 3 + d(4-1) \\ 27 &= 3d \\ 9 &= d \end{aligned}$$

b) Vi observerer at:

$$\begin{aligned} a_5 - a_3 &= a_1 + d(5-1) - (a_1 + d(3-1)) \\ a_5 - a_3 &= 2d \\ 26 - 14 &= 2d \\ 6 &= d \end{aligned}$$

Videre har vi at:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + 2d \\ 14 &= a_1 + 12 \\ 2 &= a_1 \end{aligned}$$

1.1.3

a) Vi har at:

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$$

Dermed er det eksplisitte uttrykket gitt som:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{i-1}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3^{1-i} \end{aligned}$$

b) Vi vet at:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot k^{4-1} &= a_4 \\ 5 \cdot k^3 &= 40 \\ k^3 &= 8 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

Altså får vi:

$$a_n = 5 \cdot 2^{i-1}$$

1.2.2

a) Vi observerer at rekka er en aritmetisk rekke med $a_1 = 7$ og $d = 6$. For å finne summen trenger vi verdien til a_{10}:

$$\begin{aligned} a_{10} &= 7 + 6(10 - 1) \\ &= 61 \end{aligned}$$

Summen S_{10} blir da:

$$\begin{aligned} S_{10} &= 10 \cdot \frac{7 + 61}{2} \\ &= 340 \end{aligned}$$

b) Se a.

1.2.3

Rekken er aritmetisk med $a_1 = 8$ og $d = 3$. Vi har at:

$$\begin{aligned} n\frac{8 + (8 + 3(n - 1))}{2} &= 435 \\ 3n^2 + 13n - 870 &= 0 \end{aligned}$$

Vi bruker *abc*-formelen og får at $n \in \{15, -\frac{58}{3}\}$, hvorav $n = 15$ er eneste mulige svar.

1.2.4

$$\begin{aligned} 3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 3^n &= 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \ldots \cdot 3^n \\ &= 3^{1+2+\ldots+n} \\ &= 3^{n\frac{1+n}{2}} \\ &= 3^{\frac{1}{2}n(n+1)} \end{aligned}$$

Som er det vi skulle vise.

1.2.5

Rekken er geometrisk, med $a_1 = 3$ og $k = 4$. For å finne summen må vi vite hvor mange ledd rekken består av:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4^{n-1} &= 768 \\ 4^{n-1} &= 256 \\ 4^{n-1} &= 4^4 \\ n - 1 &= 4 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

1.2.6
a) Summen S_n er gitt som:

$$\begin{aligned} S_n &= 2 \cdot \frac{1-3^k}{1-3} \\ &= 2 \cdot \frac{1-3^k}{-2} \\ &= 3^k - 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} S_3 &= 3^3 - 1 \\ &= 26 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 3^n - 1 &= 728 \\ 3^n &= 729 \\ 3^n &= 3^6 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

1.2.7
a) Når du har spart i 4 måneder betyr det at første innskudd har forrentet seg 4 ganger, andre beløp tre ganger osv. Forrentingen tilsvarer en økning med 1.02. Medregnet det ferske innskuddet blir regnestykket:

$$1000 \cdot 1.02^4 + 1000 \cdot 1.02^3 + 1000 \cdot 1.02^2 + 1000 \cdot 1.02^1 + 1000$$

b) Av oppgave a innse vi at $P(n)$ er summe av en geometrisk rekke med $a_1 = 1000$ og $k = 1.02$:

$$\begin{aligned} P(n) &= 1000 \cdot \frac{1-1.02^n}{1-1.02} \\ &= -50000(1-1.02^n) \\ &= 50000(1.02^n - 1) \end{aligned}$$

1.2.8

a) Dette er en uendelig geometrisk rekke med $k = \frac{1}{4}$. Siden $|k| < 1$ er rekka konvergent.

b) Siden rekka er uendelig geometrisk og konvergent, har rekka en endelig sum S_∞ gitt ved:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a_1}{1-k} \\ &= \frac{4}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

1.2.9

a) $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots$. Dette er en geometrisk rekke med $a_1 = \frac{9}{10}$ og $k = 10^{-1}$. **b)** Fordi $|k| < 1$ er rekken konvergent. Den uendelige summen er derfor gitt som:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Summen av rekken blir 1, altså er $0.999... = 1$ (!).

1.2.10

a) Vi observerer at $k = x - 2$. Skal rekka konvergere må altså $|x - 2| < 1$. Skal dette være sant må vi ha at:

$$\begin{aligned} -1 &< x - 2 \\ 1 &< x \end{aligned}$$

og videre at:

$$\begin{aligned} x - 2 &< 1 \\ x &< 3 \end{aligned}$$

Derfor må vi ha at $1 < x < 3$.

b)

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{3}}{1-(x-2)} &= \frac{2}{9}\\ \frac{1}{3(3-x)} &= \frac{2}{9}\\ \frac{2}{18-6x} &= \frac{2}{9}\\ 18-6x &= 9\\ x &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$x = \frac{3}{2}$ ligger i konvergensområdet, og er derfor et gyldig svar.

c)

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{3}}{1-(x-2)} &= \frac{1}{6}\\ \frac{1}{3(3-x)} &= \frac{1}{6}\\ 3(3-x) &= 6\\ x &= 1\end{aligned}$$

Men $x = 1$ ligger ikke i konvergensområdet, og er derfor ikke et gyldig svar. $S_n = \frac{1}{6}$ har derfor ingen løsning.

1.3.1

a) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1(1+1)}{2}\\ 1 &= 1\end{aligned}$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k+1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd, k får vi:

$$\begin{aligned}1+2+3+\ldots+(k+1) &= \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}\\ \frac{k(k+1)}{2}+k+1 &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\\ \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} &=\\ \frac{(k+1)(k+2)}{2} &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

b) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= 2^n - 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k + 1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd k, får vi:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k+1-1} &= 2^{k+1} - 1 \\ 2^k - 1 + 2^k &= \\ 2 \cdot 2^k - 1 &= \\ 2^{k+1} - 1 &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

c) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{4}{3}(4^1 - 1) \\ 4 &= \frac{4}{3} \cdot 3 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k + 1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd, k får vi:

$$\begin{aligned} 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{k+1} &= \frac{4}{3}(4^{k+1} - 1) \\ \frac{4}{3}(4^k - 1) + 4^{k+1} &= \\ \frac{4^{k+1} - 1 + 3 \cdot 4^{k+1}}{3} &= \\ \frac{4}{3}(4^{k+1} - 1) &= \frac{4}{3}(4^{k+1} - 1) \end{aligned}$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

d) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1(2 \cdot 1 + 1)(1 + 1)}{6} \\ &= \frac{6}{6} \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k + 1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd k får vi:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^3 ... + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(2(k+1)+1)((k+1)+1)}{6} \\
\frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6} \\
\frac{k(2k+1)(k+1) + 6(k+1)^2}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1)}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k(2k+1) + 2k + 4k + 6)}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k(2k+3) + 4k + 6)}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k(2k+3) + 2(2k+3)}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} &= \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}
\end{aligned}$$

Og dermed har vi vist det vi skulle.

Merk: Faktorisering er en treningsak, men observer hvordan vi i overgangen mellom linje 5 og 6 framkalte leddet $2k + 3$. Hvis man ikke kommer i mål med ren faktorisering, kan man selvfølgelig etter linje 4 vise at $k(2k+1)+6(k+1) = (2k+3)(k+2)$ ved å skrive ut uttrykkene på begge sider.

1.3.2

Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$1(1^2 + 2) = 1 \cdot 3$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k + 1$. Når vi antar at formelen stemmer for $n = k$, får vi:

$$\begin{aligned}
(k+1)((k+1)^2 + 2) &= (k+1)(k^2 + 2k + 3) \\
&= (k+1)(k(k+2) + 3)
\end{aligned}$$

Antakelsen vår sier at $k(k + 2)$ er delelig med 3, noe tallet 3 også er. Faktoren $(k(k + 2) + 3)$ er derfor delelig med 3, mens $(k + 1)$ er et heltall. Uttrykket i ligningen over er derfor delelig med 3.

1.3.3

a) Vi sjekker påstanden for $n = 1$:

$$\frac{(2 \cdot 1)!}{(2 \cdot 1 - 1)!} = 2^1 \cdot 1!$$
$$\frac{1 \cdot 2}{1} = 2$$
$$2 = 2$$

Påstanden er sann for $n = 1$, vi går derfor videre til å sjekke påstanden for $n = k + 1$. Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd k, får vi:

$$\frac{1 \cdot 2}{1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \ldots \cdot \frac{(2(k+1))!}{(2(k+1)-1)!} = 2^{k+1}(k+1)!$$
$$2^k k! \frac{(2(k+1))!}{(2k+1)!} =$$
$$2^k k! \frac{(2k+1)!(2k+2)}{(2k+1)!} =$$
$$2^{k+1} k!(k+1) =$$
$$2^{k+1}(k+1)! = 2^{k+1}(k+1)!$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

b) Venstresiden kan enklere skrives som:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2(k+1)$$

For $n = 1$:

$$2 = 2^1 \cdot 1!$$
$$2 = 2$$

For $n = k + 1$:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2(k+1) = 2^{k+1}(k+1)!$$
$$2^k k! \cdot 2(k+1) =$$
$$2^{k+1}(k+1)! = 2^{k+1}(k+1)!$$

Gruble 1

a) Summen av de n første oddetallene tilsvarer n^2 (se f. eks 1.2.1b), derfor kan vi skrive kvadratene som summer av oddetall.

b) Vi får n enere, $n-1$ treere, $n-2$ femmere og så videre. Den isolerte n-en på høyresiden representerer de n enerene, mens summen representerer bidragene fra alle de andre oddetallene (skriv opp hvis du syns det er vanskelig å se).

c)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= n + \sum_{i=1}^{n} (n-i)(2i+1) \\
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= n + \sum_{i=1}^{n} (2in + n - 2i^2 - i) \\
\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2i^2 &= n + \sum_{i=1}^{n} ((2n-1)i + n) \\
\sum_{i=1}^{n} 3i^2 &= n + n^2 + (2n-1)\frac{n(n+1)}{2} \\
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{2n(1+n) + (2n-1)n(n+1)}{6} \\
&= \frac{(2n + (2n-1)n)(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(2 + (2n-1))(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}
\end{aligned}$$