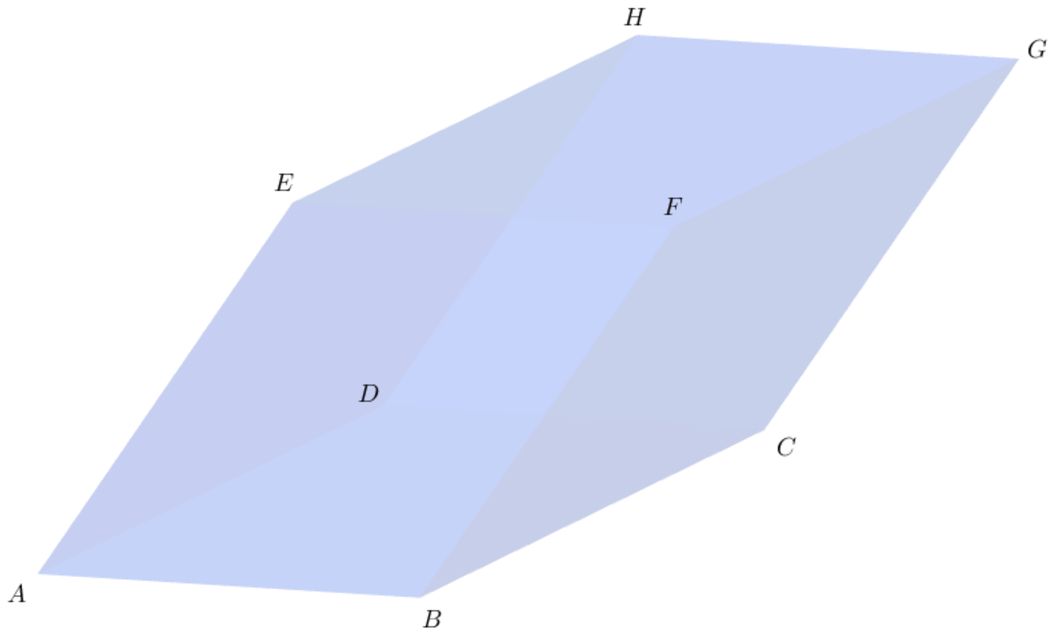
3 Løsning av oppgave 4.63



Vi starter med å tenge parallellepidet. Det ene vi har fått vite er at:

$$AB = 3$$

I et parallellepidet er alle motstående sider paralelle og like lange. Derfor er:

$$AE = CG = 5 \text{ og } AD = BC = 3$$

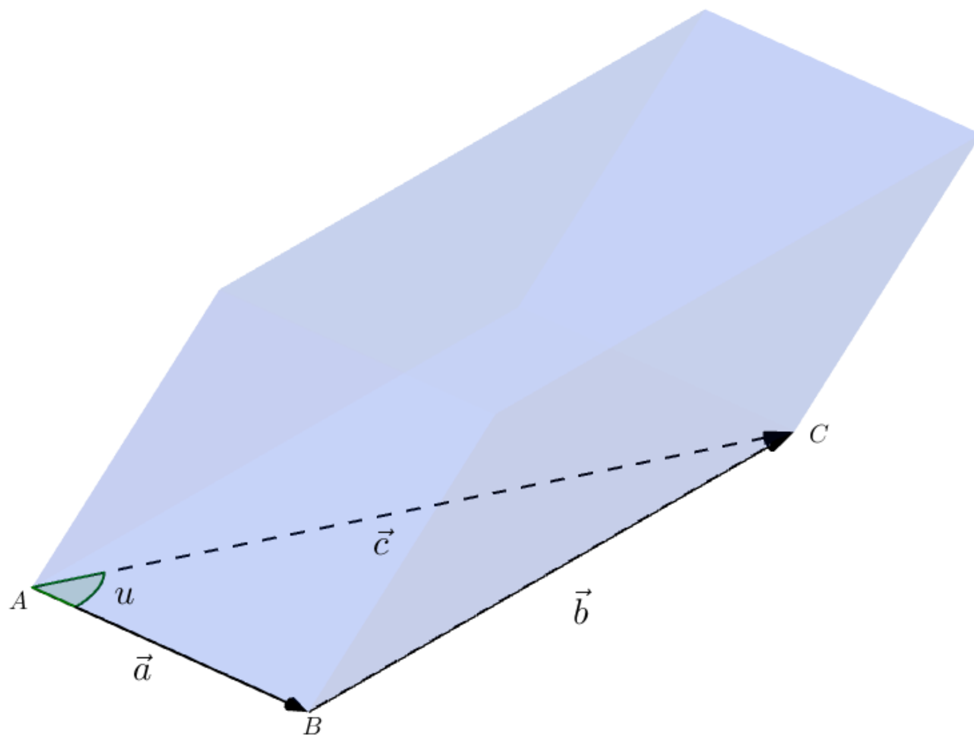
Husk videre at en vektor har en retning og en lengde, men kan befinne seg overalt. Ut ifra figuren ser man for eksemel at $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ osv. La oss definere:

$$\overrightarrow{CG} = \vec{k}$$
$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$$
$$\overrightarrow{BC} = \vec{b}$$

Vi kan da skrive:

$$\angle BAD = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^{o}$$
$$\angle BAE = \angle(\vec{a}, \vec{k}) = 60^{o}$$
$$\angle DAE = \angle(\vec{b}, \vec{k}) = 60^{o}$$

hvor for eksempel $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ leses som *vinkelen utspent av* $\vec{a}$ *og* $\vec{b}$.



a) I tillegg til de vi allerede har definert, kaller vi vektoren mellom A og C for $\vec{c}$. Vinkelen utspent av $\vec{a}$ og $\vec{c}$ kaller vi for u.

Ut ifra figuren kan vi finne at:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \tag{1}$$

Lengden til $\vec{c}$ er gitt som $\sqrt{\vec{c}^{\,2}}$. Vi starter med å regne ut uttrykket inni rottegnet:

$$\begin{aligned}\vec{c}^{\,2} &= (\vec{a} + \vec{b})^2 \\ &= \vec{a}^{\,2} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^{\,2}\end{aligned}$$

Siden vinkelen utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 90^{o}, så er $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Videre vet vi at $|\vec{a}| = 3$ og at $|\vec{b}| = 4$. Generelt har vi for alle vektorer $\vec{v}$ at $\vec{v}^{\,2} = |\vec{v}|^2$. Vi får dermed:

$$\begin{aligned}\vec{c}^{\,2} &= 3^2 + 4^2 \\ |\vec{c}\,|^2 &= 25 \\ |\vec{c}\,| &= 5\end{aligned}$$

Ut ifra definisjonen av skalarproduktet av to vektorer vet vi at:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}\,| \cos u$$

Igjen setter vi inn uttrykket fra (1):

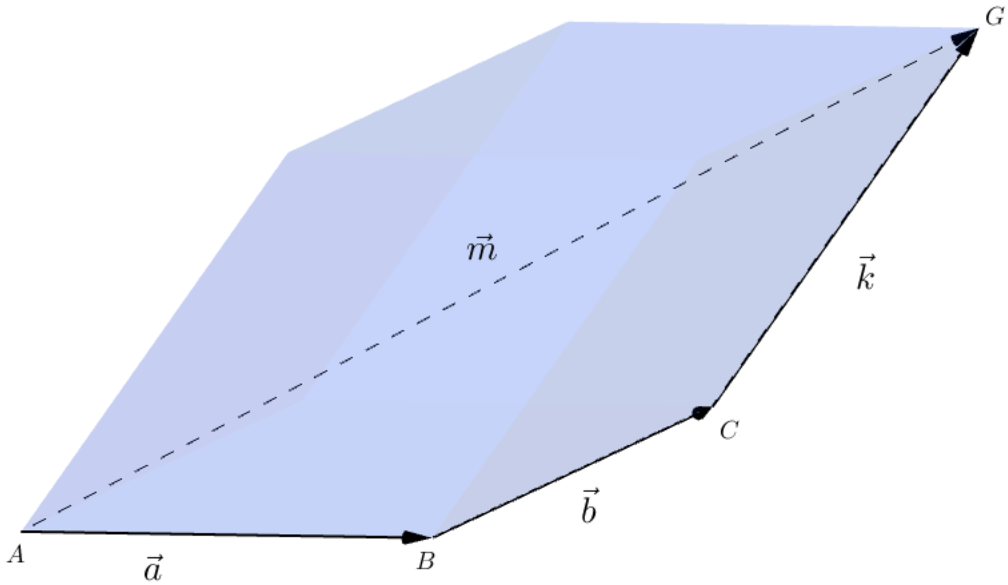
$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{c} &= |\vec{a}||\vec{c}| \cos u \\
\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= 3 \cdot 5 \cos u \\
\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} &= 15 \cos u \\
3^2 &= 15 \cos u \\
\frac{9}{15} &= \cos u
\end{aligned}
$$

Over har vi nok en gang utnyttet at $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Når vi søker vinkelen til en vektor, bruker vi bare vinkler i intervallet $v \in [0, 180^o]$. Dermed blir :

$$u = \cos^{-1}\left(\frac{9}{15}\right) \approx 51.1^o$$

b)



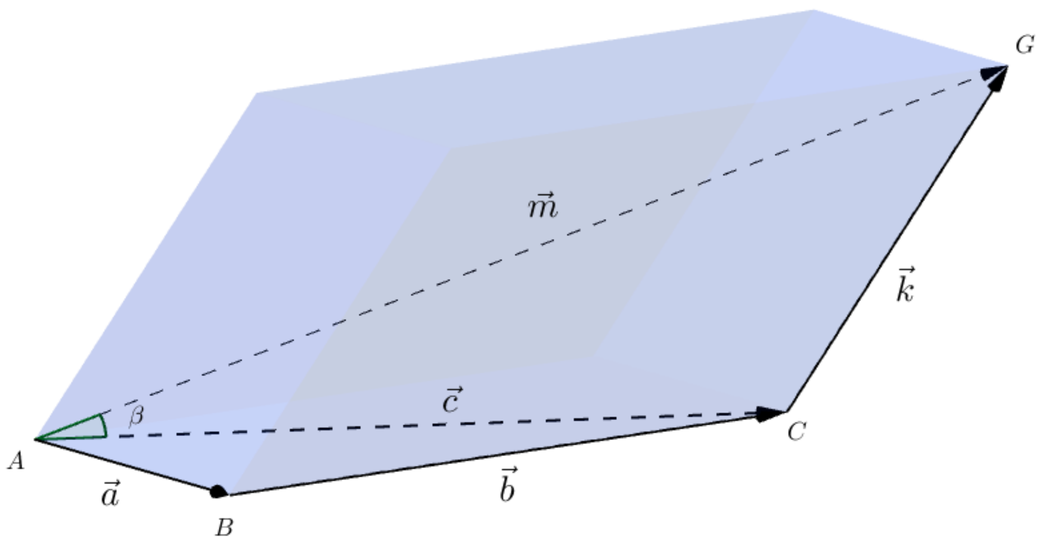
Vi observerer at:

$$\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{k} \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{m}^{\,2} &= \left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{k}\right)^2 \\
&= \vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{2}+\vec{k}^{\,2}+2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{k}+\vec{k}\cdot\vec{b}\right) \\
&= 3^2+4^2+5^2+2\left(|\vec{a}||\vec{k}|\cos 60+|\vec{k}||\vec{b}|\cos 60\right) \\
&= 50+2\left(3\cdot 5\cdot\frac{1}{2}+4\cdot 5\cdot\frac{1}{2}\right) \\
&= 85
\end{aligned}
$$

Altså er $|\vec{m}| = \sqrt{85}$.

c)



Av definisjonen for skalarproduktet skal vi ha at:

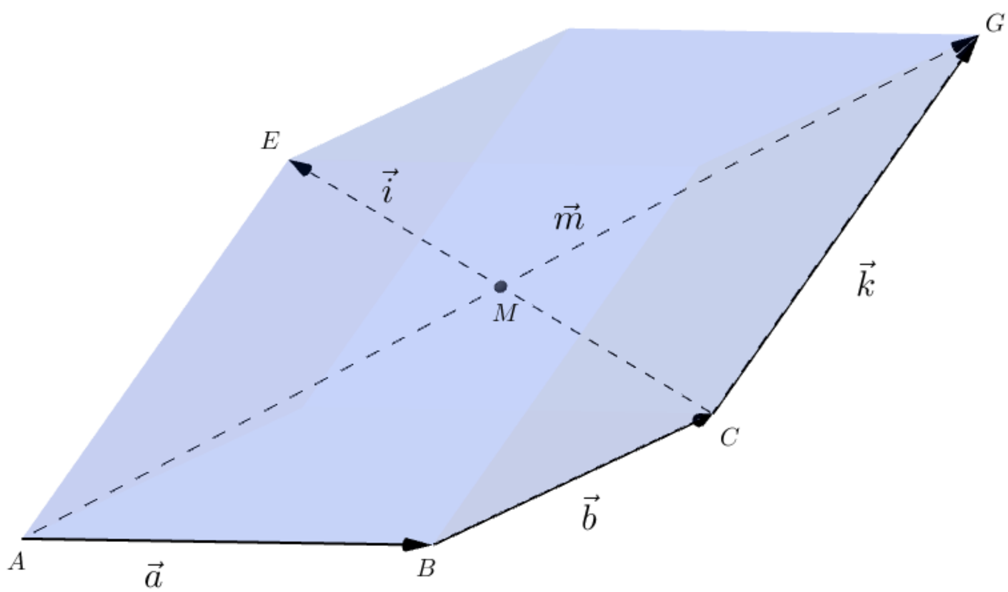
$$\vec{c}\cdot\vec{m} = |\vec{c}|\cdot|\vec{m}|\cos\beta$$

Vi erstatter så $\vec{m}$ med uttrykket fra ligning (2):

$$
\begin{aligned}
\vec{c}\cdot\vec{m} &= |\vec{c}|\cdot|\vec{m}|\cos\beta \\
\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{k}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) &= 5\sqrt{85}\cos\beta \\
\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{k}+\vec{b}^2+\vec{b}\cdot\vec{k} &= 5\sqrt{85}\cos\beta \\
3^2+7.5+4^2+10 &= 5\sqrt{85}\cos\beta \\
\frac{8.5}{\sqrt{85}} &= \cos\beta
\end{aligned}
$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{8.5}{\sqrt{85}}\right)$$
$$\approx 22.8^{\mathrm{o}}$$

d)



Når vi står i punkt C kan vi komme til punkt E ved å gå følgende rute:

$$\overrightarrow{CE} = \vec{i} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{k} \tag{3}$$

For å komme fra punkt C til punkt M kan man gå denne ruten:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= -\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{m} \\ &= -\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\left(\vec{a}\vec{b} + \vec{k}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} \\ &= \frac{1}{2}\,\vec{i}\end{aligned}$$

Og dermed har vi vist at M ligger på linja til CE.

e) Vi krever at:

$$\vec{i} \cdot \vec{m} = 0$$

Ligningen over omskriver vi ved hjelp av ligning (2) og (3):

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{i} \cdot \vec{m} &= \left(-\vec{a} - \vec{b} + \vec{k}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{k}\right) \\
&= -\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{k}^2 \\
&= -3^2 - 4^2 + 5^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Og dermed er kravet oppfylt.