Løsningsforslag til utvalgte oppgaver

4.1.1 Se eksempel s. **??**

4.1.2 Vi bruker kravet for x og z-koordinaten for å sette opp et ligningssystem:

$$\begin{aligned} -3-2t &= -7-3s \qquad &\text{(I)} \\ 1-t &= s \qquad &\text{(II)} \end{aligned}$$

Av (II) har vi et uttrykk for s. Setter vi dette inn i (I) får vi:

$$\begin{aligned} -3-2t &= -7+3(1-t) \\ -3-2t &= -7+3-3t \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Altså er $t=-1$ og $s=2$. For disse verdiene gir begge parameteriseringene punktet $A=(-1,1,2)$.

4.1.3 Se eksempel s. 101

4.1.4 Se eksempel s. 102

4.2.1 Se eksempel s. 104

4.2.2
a) Av parameteriseringen ser vi at to retningsvektorer må være $[2,3,0]$ og $[0,2,-1]$.

b) En normalvektor for planet er gitt ved vektorproduktet av retningsvektorene:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= \vec{e}_x \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_x(-3-0) - \vec{e}_x(-2-0) + \vec{e}_z(4-0) \\ &= [-3,-2,4] \end{aligned}$$

Av parameteriseringen ser vi at $(-4,2,1)$ er et punkt i planet, derfor kan vi skrive:

$$\begin{aligned} -3(x-(-4))+2(y-2)+4(z-1) &= 0 \\ -3x-12-2y-4+4z-4 &= 0 \\ -3x-2y+4z-20 &= 0 \end{aligned}$$

4.2.4
Vi krever at:

$$\begin{aligned} (-2,1,1)\cdot[3t,5,t] &= 0 \\ -6t+5+t &= 0 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Altså er $[3,5,1]$ en retningsvektor for planet. Ligningen til planet blir da:

$$\begin{aligned} 3(x-(-2))+5(y-1)+(z-1) &= 0 \\ 3x+5y+z &= 0 \end{aligned}$$

4.2.5 Se eksempel s. 108

4.2.6

a) Vi starter med å skrive de fullstendige kvadratene:

$$\begin{aligned}x^2 - 6x &= (x^2 - 3)^2 - 3^2\\ y^2 + 2y &= (y + 1)^2 - 1^2\\ z^2 - 10z &= (z - 5)^2 - 5^2\end{aligned}$$

Vi kan derfor skrive:

$$\begin{aligned}(x^2 - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 - 14 - 9 - 1 - 25 &= 0\\ (x^2 - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 &= 49\\ (x^2 - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 &= 7^2\end{aligned}$$

Altså har kula sentrom i $S = (3, -1, 5)$ og radius $r = 7$.

b) Vi setter koordinatene til A faktoriserte venstresiden av kuleligningen og får:

$$(4 - 3)^2 + (1 + 1)^2 + (6 - 5)^2 = 6$$

Ligningen over representerer den kvadrerte avstanden mellom S og A, siden $6 < 49$ må A ligge inni kula.

For B får vi:

$$(-6 - 3)^2 + (-4 + 1)^2 + (1 - 5)^2 = 106$$

Siden $106 > 49$ ligger B utenfor kula.

4.3.3

a) Av ligningen ser vi at $[3, -2, 1]$ er en normalvektor.

b) I ligningen for β ser vi at hvis $x = y = 0$, så må også $z = 0$. β inneholder derfor origo.

c) Avstanden h mellom α og β må tilsvare avstande mellom α og et punkt i β. Vi bruker svaret fra b) og får:

$$\begin{aligned}h &= \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 12|}{|[3, -2, 1]|}\\ &= \frac{12}{\sqrt{9 + 4 + 1}}\\ &= \frac{12}{\sqrt{14}}\end{aligned}$$

4.3.4

a) For å finne S skriver vi de fullstendige kvadratene:

$$\begin{aligned}x^2 - 6x &= (x - 3)^2 - 3^2\\ y^2 + 4y &= (y + 2)^2 - 2^2\\ z^2 &= z^2\end{aligned}$$

Kuleligningen kan vi derfor skrive som:

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 - 23 - 3^2 - 2^2 &= 0\\ (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 &= 36\\ (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 &= 6^2\end{aligned}$$

Altså har vi $S = (3, -2, 0)$.

b) Av ligningen til planet ser vi at $[2, -1, -2]$ er en normalvektor for α. Dette må være en retningsvektor for linja som går gjennom A og S, som dermed kan parameteriseres ved:

$$l : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -2t \end{cases}$$

c) *Løsningsmetode 1:* Linja og kuleflata skjærer der parameteriseringen til linja oppfyler kuleligningen:

$$\begin{aligned} ((3+2t)-3)^2 + ((-2-t)+2)^2 + (-2t-0)^2 &= 36 \\ (2t)^2 + (-t)^2 + (-2t)^2 &= 36 \\ 9t^2 &= 36 \\ t^2 &= 4 \\ t &= \pm 2 \end{aligned}$$

For $t = -2$ gir parameteriseringen punktet $(-1, 0, 4)$ mens for $t = 2$ får vi punktet $(7, -4, -4)$.

Løsningsmetode 2: Vi har funnet at $[2, -1, -2]$ er en retningsvektor for linja gjennom A og S, denne vektoren har lengde 3. Vi kan derfor lage oss en retningsvektor med lengde 1 ved å skrive $\frac{1}{3}[2, -1, 2]$. Siden avstanden mellom S og de to punktene vi søker er lik radiusen 6, må de være gitt ved uttrykket

$$S \pm 6 \cdot \frac{1}{2}[2, -1, -2] = S \pm 2[2, -1, -2]$$

Regner man ut dette får man (selvølgelig) samme svar som for *Løsningsmetode 1.*

d) Se eksempel s. 105 eller bruk lignende resonnement som *Løsningsmetode 2* i opg. c).

e) Radiusen R til sirkelen, radiusen r til kula og linjestykket AS utgjør en rettvinklet trekant. Av Pytagoras' setning har vi da at:

$$\begin{aligned} R^2 &= r^2 - |\overrightarrow{AS}|^2 \\ &= 6^2 - 3^2 \\ &= 36 - 9 \\ &= 27 \\ R &= \pm\sqrt{27} \end{aligned}$$

R har altså lengden $\sqrt{27}$.