Lengden av en vektor

Lengden $|\vec{u}|$ til en vektor $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ er gitt som:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \tag{0.1}$$

Eksempel

Finn lengden av vektoren $\vec{u} = [-2, 4, 1]$.

Svar:

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{4 + 16 + 1} \\ &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

Vektoren mellom to punkt

Vektoren $\vec{u}$ fra punkt $A = (x_1, y_1, z_1)$ til $B = (x_2, y_2, z_2)$ er gitt som:

$$\vec{u} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$$

Eksempel

Finn vektoren $\vec{u}$ mellom punktet $A = (1, 2, 0)$ og $B = (3, 0, 1)$

Svar:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= [3 - 1, 0 - 2, 1 - 0] \\ &= [2, -2, 1] \end{aligned}$$

Skalarproduktet I

Skalarproduktet av to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ kan skrives som:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \tag{0.2}$$

For særtilfellet $\vec{u} \cdot \vec{u}$ kan man skrive:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 \tag{0.3}$$

Eksempel

Finn skalarproduktet av vektorene $\vec{a} = [1, 2, 3]$ og $\vec{b} = [4, -3, -2]$

Svar:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-2) \\ &= -8 \end{aligned}$$

Skalarproduktet II

Skalarproduktet av to vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ er gitt som:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta \tag{0.4}$$

hvor $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ er vinkelen utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Eksempel 1

En vektor $\vec{a}$ har lengde 3 og en vektor $\vec{b}$ har lengde 2. De ustspenner vinkelen 45°. Finn skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Svar:

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= 3 \cdot 2 \cos 45^\circ \\
&= 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= 3\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Eksempel 2

Finn vinkelen v utspent av vektorene $\vec{a} = [-5, 4, -3]$ og $\vec{b} = [-2, 5, -5]$.

Svar:

Vi starter med å finne lengdene og skalarproduktene av vektorene:

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + (-3)^2} \\
&= \sqrt{50} \\
&= 5\sqrt{2} \\
|\vec{b}| &= \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + (-5)^2} \\
&= \sqrt{54} \\
&= 3\sqrt{6} \\
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (-5) \cdot (-2) + 5 \cdot 4 + (-3) \cdot (-5) \\
&= 45
\end{aligned}
$$

Vi har videre at:

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}| \cos v \\
45 &= 5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6} \cos v \\
\cos v &= \frac{5 \cdot 9}{5 \cdot 3\sqrt{12}} \\
&= \frac{5 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3}} \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}} \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Siden $\cos v = \frac{\sqrt{3}}{2}$, må $v = 60°$.

Vinkelrette vektorer

To vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står vinkelrette på hverandre dersom skalarproduktet av dem blir null:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 90° \iff \vec{u} \perp \vec{v}$$

Parallelle vektorer

De to vektorenen $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2,y_2,z_2]$ er parallelle dersom forholdet mellom alle korresponderende koordinater er det samme:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Eventuelt:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

Om én av disse er oppfylt, skriver vi $\vec{u} \,||\, \vec{v}$.

Eksempel

Gitt vektorene $\vec{u} = [1, 2, 3]$ og $\vec{v} = [3, 2(1 - t), 11 + t]$, finn t slik at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle.

Svar: Vi starter her med å kreve at:

$$\frac{3}{1} = \frac{2(1-t)}{2}$$
$$3 = 1 - t$$
$$t = -2$$

Siden forholdet mellom de to x-koordinatene og de to y-koordinatene er 3, må dette også stemme for z-koordinatene for at $\vec{u}$ og $\vec{b}$ skal være parallelle:

$$\frac{11+t}{3} = \frac{11+(-2)}{3}$$
$$= 3$$

Siden forholdet mellom alle korresponderende koordinater er 3 dersom $t = -2$, er dette et riktig valg av t.

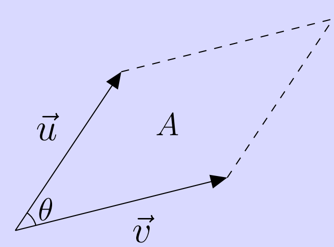
2×2 determinanter

Determinanten $\det(\vec{u}, \vec{v})$ av to vektorer $\vec{u} = [a, b]$ og $\vec{v} = [b, c]$ er gitt som:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$
$$= ad - bc$$

Videre har vi at at absoluttverdien til $\det(\vec{u}, \vec{v})$ tilsvarer arealet av parallellogrammet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$:

$$A = |ad - bc| \tag{0.5}$$



3×3 determinanter

Determinanten $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ av tre vektorer $\vec{u} = [a, b, c]$ og $\vec{v} = [d, e, f]$ og $\vec{w} = [g, h, i]$ er gitt som:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{vmatrix} \tag{0.6}$$

$$= a \begin{vmatrix} e & f \\ i & j \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ h & j \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ h & i \end{vmatrix} \tag{0.7}$$

$$= a(ej - fi) - b(dj - fh) + c(di - eh) \tag{0.8}$$

3×3 determinanter som volum

Tallverdien til $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ tilsvarer arealet A til parallellepidetet utspent av $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

$$A = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \tag{0.9}$$

Vektorproduktet

Vektorpruduktet av vektorene $\vec{u} = [a, b, c]$ og $\vec{v} = [d, e, f]$ er gitt som:

$$\vec{u} \times \vec{v} = [bf - ce, -(af - cd), ae - bd] \tag{0.10}$$

Eventuelt kan man skrive:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \tag{0.11}$$

hvor $\vec{e}_x = [1, 0, 0], \vec{e}_y = [0, 1, 0]$ og $\vec{e}_z = [0, 0, 1]$.

Videre har vi at (kryssprodukt må regnes ut før skalarprodukt):

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \tag{0.12}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \tag{0.13}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) \tag{0.14}$$

Eksempel

Regn ut vektorproduktet av de to vektorene $\vec{a} = [-3, 2, 3]$ og $\vec{b} = [2, -2, 1]$.

Svar:

Vi bruker uttrykket fra (0.11) og regner ut følgende 3×3 determinant:

$$\vec{a} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

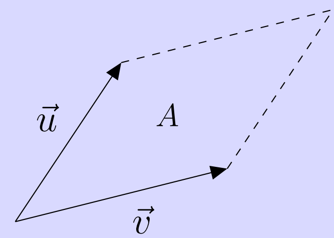
Vi får da (se gjerne tilbake til eksempelet på side **??**):

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{v} &= \vec{e}_x(2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2)) - \vec{e}_y(-3 \cdot 1 - 3 \cdot 2) + \vec{e}_z(-3 \cdot (-2) - 2 \cdot 2) \\ &= 8\vec{e}_x + 9\vec{e}_y + 2\vec{e}_z \\ &= [8, 9, 2] \end{aligned}$$

Vektorproduktet som areal

Arealet A til et parallellogram utspent av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt som:

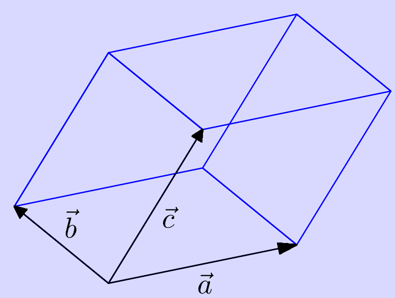
$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$



Vektorproduktet som volum

Volumet V til parallellepipedet bestående av vektorene $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$ er gitt som:

$$V = |\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}|$$



Figur 1

`Determinant[ <Matrise> ]`

Finner determinanten til en matrise.

Eksempel

Regn ut:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Svar:

```
CAS
1  Determinant[{{1, -2, 2},{2, 2, -3},{4, -1, 2}}]
   → 13
```