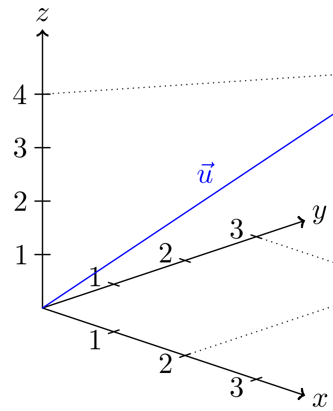
Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- utføre beregninger med tredimensjonale vektorer som er representert både geometrisk og på koordinatform
- bruke og tolke skalar- og vektorproduktet i beregning av avstander, vinkler, areal og volum

0.1 Vektorbegrepet

For å beskrive størrelser i rommet, innfører vi et koordinatsystem der en x- en y- og en z-akse står vinkelrett på hverandre. En vektor i rommet vil angi en lengde langs hver av disse aksene La oss bruke vektoren $\vec{u} = [2, 3, 4]$ som eksempel. Når vi skriver $\vec{u}$ på denne måten, sier vi at vektoren er skrevet på *komponentform* med 2 som x-komponent, 3 som y-komponent og 4 som z-komponent.

For å framstille $\vec{u}$ grafisk tegner vi en pil fra et startpunkt til punktet vi når ved å følge lengdene[1] som vektoren angir.



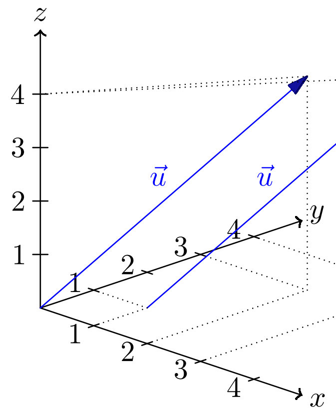
Figur 1: $\vec{u} = [2, 3, 4]$

I figuren over er $\vec{u}$ vist i det som kalles *grunnstillingen*, dette innebærer at den starter i origo. Enhver vektor som starter i grunnstillingen vil ende i punktet med samme koordinater som vektorens komponenter. Hvis man følger en vektor fra et punkt til et annet, har man bevegd seg i en bestemt retning, pilen som tegnes peker i netopp denne retningen.

[1]Hvis en komponent er negativ betyr dette at lengden skal vandres motsatt av akseretningen.

0.1.1 Vektoren mellom to punkt

Det er viktig å innse at en vektor kan befinne seg hvor som helst i koordinatsystemet. Trekker vi for eksempel en pil fra punktet $A = (1, 1, 0)$ til $B = (3, 4, 4)$, vil $\vec{u}$ fra *figur 1* dukke opp igjen, men denne gangen forskjøvet fra grunnstillingen.



Figur 2: Vektoren $\vec{u}$ to forsjellige plasser i rommet

At vi ser noe grafisk er sjeldent et tilstrekkelig bevis, og skal vi sjekke om to vektorer er like bør dette gjøres ved regning. I vårt tilfelle ønsker vi å vite hvilken vektor som bringer oss fra A til B, og da må vi finne differansen mellom koordinatene:

$$[3 - 1, 4 - 1, 4 - 0] = [2, 3, 4]$$

Dermed har vi vist at nettopp nevnte $\vec{u}$ er denne vektoren.

Vektoren mellom to punkt

Vektoren $\vec{u}$ fra punkt $A = (x_1, y_1, z_1)$ til $B = (x_2, y_2, z_2)$ er gitt som

$$\vec{u} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1] \tag{0.1}$$

Eksempel

Finn vektoren $\vec{u}$ mellom punktet $A = (1, 2, 0)$ og $B = (3, 0, 1)$.

Svar:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= [3 - 1, 0 - 2, 1 - 0] \\ &= [2, -2, 1] \end{aligned}$$

0.1.2 Regneregler for vektorer

Av (0.1) innser vi at hvis vektoren mellom A og B er betegnet som $\vec{u}$, finner vi koordinatene til B ved å addere koordinatene til A med komponentene til $\vec{u}$. Dette leder oss til den litt snodige konvensjonen at et punkt addert med en vektor blir et punkt[1].

Regneregler for vektorer

Gitt vektorene $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$, punktet $A = (x_0,y_0,z_0)$ og en konstant t. Da er

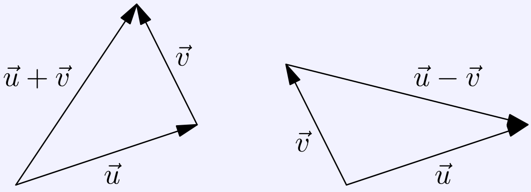
$$A + \vec{u} = (x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) \tag{0.2}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2] \tag{0.3}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2] \tag{0.4}$$

$$t\vec{u} = [tx_1, ty_1, tz_1] \tag{0.5}$$

Figurativt kan vi tegne summen eller differansen av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som



For en vektor $\vec{w}$ har vi videre at

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \tag{0.6}$$

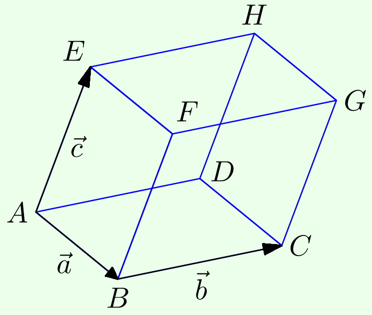
$$\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w} \tag{0.7}$$

$$t(\vec{u} + \vec{v}) = t\vec{u} + t\vec{v} \tag{0.8}$$

[1] I mange matematiske tekster blir punkt og vektorer sett på som det samme.

Eksempel

Et parallellogram er tegnet inn i figuren under.



Vis at midpunktet M til diagonalen AG også er midtpunktet til diagonalen CE.

Svar:

Vektoren $\overrightarrow{AG}$ er gitt som

$$\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Dette betyr at

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \end{aligned}$$

Vi kaller midpunktet til CE for M_1. Da har vi at

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CM_1} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}) \end{aligned}$$

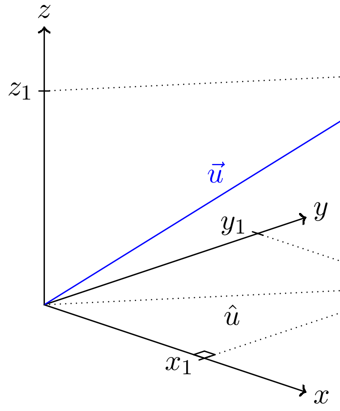
Videre er

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM_1} &= \vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{CM_1} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \overrightarrow{AM} \end{aligned}$$

Dette må bety at $M = M_1$.

0.1.3 Lengden av en vektor

Vi har sett hvordan komponentene bestemmer hvor vi ender når vi følger en vektor, men de angir også den korteste avstanden mellom punktet vi starter fra og punktet vi ender i. For en vektor $\vec{u}$ kaller vi denne asvstanden *lengden* av $\vec{u}$, som vi skriver som $|\vec{u}|$. La oss prøve å finne lengden av en vektor $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$, som skissert i *figur 3*. Grafisk er lengden avstanden fra den butte enden til pilspissen.



Figur 3

Av $|\vec{u}|$ og lengdene z_1 og $\hat{u} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ danner vi en rettvinklet trekant. Av Pytagoras' setning har vi da at lengden av $\vec{u}$ er gitt som

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= \sqrt{\hat{u}^2 + z_1^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \end{aligned}$$

Lengden av en vektor

Lengden $|\vec{u}|$ av en vektor $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ er gitt som

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \tag{0.9}$$

Eksempel

Finn lengden av vektoren $\vec{u} = [-2, 4, 1]$.

Svar:

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{4 + 16 + 1} \\ &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

Eksempel 2

Finn lengden av vektoren $\vec{a} = [-9, 18, 27]$.

Svar:

Ved å bruke (0.5) sparer vi oss for kvadrater av store tall:

$$[-9, 18, 27] = 9[-1, 2, 3]$$

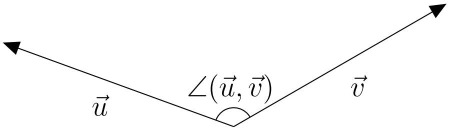
Lengden blir da (se opg. **??**)

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= 9\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} \\ &= 9\sqrt{14}\end{aligned}$$

0.2 Skalarproduktet

Vi skal nå se på definisjonen av en regneoperasjon mellom vektorer som kalles *skalarpruduktet* (også kalt *prikkproduktet* eller *indreproduktet*). Skalarproduktet skiller seg ut ifra mange andre operasjoner fordi det kan regnes ut på to vidt forskjellige måter.

Ved den ene utregningen skal vi anvende vinkelen *utspent* av to vektorer, som er den minste vinkelen mellom to vektorer med samme utgangspunkt. For to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ skriver vi denne som $\angle(\vec{u}, \vec{v})$.



Figur 4: $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ er vinkelen utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

I vektorregning er det vanlig å oppgi vinkelmål i grader, for minst mulige vinkler betyr dette vinkler på intervallet $[0°, 180°]$.

0.2.1 Første definisjon

Fra (0.9) vet vi hvordan å finne lengden av en vektor. Si nå at vi har vektoren $\vec{u} - \vec{v}$, hvor $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$. Da er

$$\vec{u} - \vec{v} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2]$$

Lengden kan dermed skrives som

$$
\begin{aligned}
|\vec{u}-\vec{v}| &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} \\
&= \sqrt{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+y_1^2-2y_1y_2+y_2^2+z_1^2-2z_1z_2+z_2^2}
\end{aligned} \tag{0.10}
$$

Uttrykket på høyre side i ligningen over er skremmende langt. For å komprimere dette og lignende uttrykk, innfører vi skalarproduktet:

Skalarproduktet I

Skalarproduktet av to vektorer $\vec{u}=[x_1,y_1,z_1]$ og $\vec{v}=[x_2,y_2,z_2]$ kan skrives som

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \tag{0.11}$$

For særtilfellet $\vec{u}\cdot\vec{u}$ er

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^{\,2} \tag{0.12}$$

Eksempel

Finn skalarproduktet av vektorene $\vec{a}=[1,2,3]$ og $\vec{b}=[4,-3,$ $-2]$.

Svar:

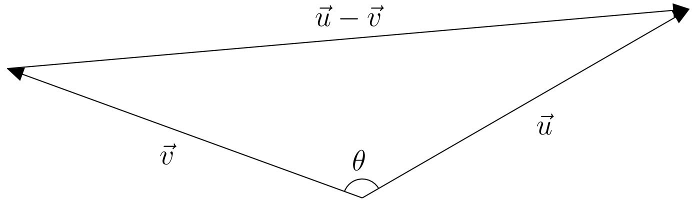
$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= 1\cdot4+2\cdot(-3)+3\cdot(-2) \\
&= -8
\end{aligned}
$$

0.2.2 Andre definisjon

Med den første definisjonen av skalarproduktet kan vi omskrive (0.10) til

$$|\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{\vec{u}^{\,2}-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^{\,2}} \tag{0.13}$$

Videre merker vi oss følgende figur:



Figur 5: $\theta=\angle(\vec{u},\vec{v})$.

Av cosinussetningen[1] og (0.13) har vi at

$$
\begin{aligned}
|(\vec{v}-\vec{u})|^2 &= |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \\
\vec{v}^{\,2} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}^{\,2} &= \vec{v}^{\,2} + \vec{u}^{\,2} - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \\
\vec{u}\cdot\vec{v} &= |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta
\end{aligned}
$$

Skalarproduktet II

Skalarproduktet av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt som

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \tag{0.14}$$

hvor $\theta = \angle(\vec{u},\vec{v})$.

Eksempel 1

En vektor $\vec{a}$ har lengde 3 og en vektor $\vec{b}$ har lengde 2. De utspenner vinkelen 45°. Finn skalarproduktet $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Svar:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= 3\cdot 2\cos(45^\circ) \\
&= 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= 3\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Eksempel 2

Finn vinkelen v utspent av vektorene $\vec{a} = [-5, 4, -3]$ og $\vec{b} = [-2, 5, -5]$.

Svar:

Vi starter med å finne lengdene og skalarproduktene av vektorene:

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + (-3)^2} \\
&= \sqrt{50} \\
&= 5\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

[1] For en trekant med sider a, b og c, hvor a og b utspenner vinkelen v, har vi at

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos v$$

$$
\begin{aligned}
|\vec{b}| &= \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + (-5)^2} \\
&= \sqrt{54} \\
&= 3\sqrt{6} \\
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (-5) \cdot (-2) + 5 \cdot 4 + (-3) \cdot (-5) \\
&= 45
\end{aligned}
$$

Videre har vi at

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}| \cos v \\
45 &= 5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6} \cos v \\
\cos v &= \frac{5 \cdot 9}{5 \cdot 3\sqrt{12}} \\
&= \frac{5 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3}} \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}} \\
&= \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Siden $\cos v = \frac{\sqrt{3}}{2}$, er $v = 30°$.

0.2.3 Regneregler

Den observante leser har allerede lagt merke til at skalarproduktet av vektorer har mye til felles med pruktet av to tall. Dette blir enda mer tydelig når man ser på flere regneoperasjoner mellom vektorer:

Regneregler for skalarproduktet

For vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ har vi at

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u} \\
\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\
(\vec{u} + \vec{v})^2 &= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2
\end{aligned}
$$

Eksempel

Forkort uttrykket

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}^2$$

når du vet at $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.

Svar:

$$\begin{aligned}\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}^2 &= \vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2\\ &= \vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2\\ &= \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2\end{aligned}$$

0.3 Vinkelrette og parallelle vektorer

0.3.1 Vinkelrette vektorer

Fra (0.14) kan vi gjøre en viktig observasjon. Hvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står vinkelrett[1] på hverandre, utspenner de vinkelen 90°. I så fall er $\cos\theta=0$, og da blir

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\\ &= 0\end{aligned}$$

Kan vi få $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ om vinkelen mellom $\vec{u}$ og $\vec{v}$ *ikke* er 90°? Fordi $\theta\in[0°,180°]$, er det bare $\theta=90°$ som gir at $\cos\theta=0$. Skal skalarproduktet bli 0 for andre vinkler, må derfor lengden av $\vec{u}$ eller $\vec{v}$ være 0. Den eneste vektoren med denne lengden er *nullvektoren* $\vec{0}=[0,0,0]$, som rett og slett ikke har noen retning[2]. Det er likevel vanlig å definere at nullvektoren står vinkelrett på *alle* vektorer.

[1]"Vinkelrett på" omtales gjerne som "*normalt* på".

[2]Eventuelt kan man hevde at den peker i alle retninger! Forøvrig spiller nullvektoren en minimal rolle i R2-faget.

Vinkelrette vektorer

To vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står vinkelrett (normalt) på hverandre hvis skalarproduktet av dem er null:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v} \tag{0.15}$$

Hvis én av vilkårene i (0.15) er oppfylt, sies $\vec{u}$ og $\vec{v}$ å være *ortogonale*.

Eksempel 1

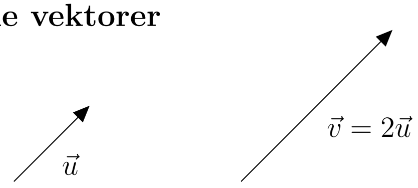
Sjekk om vektorene $\vec{a} = [5, -3, 2]$ og $\vec{b} = [2, 4, 1]$ er ortogonale.

Svar:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= [5, -3, 2] \cdot [2, 4, 1] \\ &= 10 - 12 + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Altså er $\vec{a} \perp \vec{b}$.

0.3.2 Parallelle vektorer



Figur 6: $\vec{u}||\vec{v}$

Hvis en vektor $\vec{v}$ kan skrives som et multiplum[1] av en vektor $\vec{u}$, er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ parallelle. Vi lar figuren over stå som foreløpig forklaring for dette, og går videre til å finne en metode for å teste om to vektorer er parallelle.

Si at vi har vektorene $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$. Tenk nå at forholdstallet mellom hver korresponderende komponent er det samme, altså et tall c:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = c$$

[1] Hvis vi for to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ og en konstant t kan skrive $\vec{v} = t\vec{u}$, sier vi at $\vec{v}$ er et multiplum av $\vec{u}$.

Altså er $x_2 = cx_1$, $y_2 = cy_1$ og $z_2 = cz_1$. Dette betyr at $\vec{v}$ kan skrives som

$$\begin{aligned}\vec{v} &= [cx_1, cy_1, cz_1] \\ &= c[x_1, y_1, z_1] \\ &= c\vec{u}\end{aligned}$$

Og dermed er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ parallelle. Dette skriver vi som $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Hvis forholdtstallet mellom de korresponderende koordinatene *ikke* er det samme, kan vi ikke skrive den ene vektoren som et multiplum av den andre, da er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ *ikke* parallelle.

Parallelle vektorer

To vektorer $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2,y_2,z_2]$ er parallelle hvis forholdet mellom korresponderende komponenter er likt

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \tag{0.16}$$

Eksempel 1

Gitt vektorene $\vec{u} = [1, 2, 3]$ og $\vec{v} = [3, 2(1-t), 11+t]$, finn t slik at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle.

Svar:

Vi starter med å kreve at forholdet mellom korresponderende komponenter er likt. Vi dividerer x- og y-komponenten i $\vec{v}$ med henholdsvis x- og y-komponenten i $\vec{u}$:

$$\begin{aligned}\frac{3}{1} &= \frac{2(1-t)}{2} \\ 3 &= 1-t \\ t &= -2\end{aligned}$$

Siden forholdet mellom de to x-komponentene og de to y-koordinatene er 3, må dette også stemme for z-koordinatene for at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ skal være parallelle:

$$\begin{aligned}\frac{11+t}{3} &= \frac{11+(-2)}{3} \\ &= 3\end{aligned}$$

Altså er $\vec{u} \parallel \vec{v}$ hvis $t = -2$.

Eksempel 2

Finn s og t slik at vektorene $\vec{u} = [-1, 2s, 4]$ og $\vec{v} = [3, 18, 4t + 4]$ er parallelle.

Svar:

Vi observerer at forholdet mellom x-komponeten i $\vec{v}$ og $\vec{u}$ er $\frac{3}{-1} = -3$. Hvis $\vec{u} \parallel \vec{v}$, er altså $\vec{v} = -3\vec{u}$. Vi kan derfor sette opp følgende ligning for s:

$$\begin{aligned} 18 &= -3(2s) \\ s &= -3 \end{aligned}$$

Videre må vi ha at

$$\begin{aligned} 4t + 4 &= -3(4) \\ t &= -4 \end{aligned}$$

0.4 Determinanter

Vi skal her se på regneoperasjoner mellom vektorer som brukes for å finne *determinanter*. Determinanter spiller en viktig rolle i den matematiske greinen som kalles *lineær algebra*, men for vår del er de mer et middel som skal brukes for å finne *vektorprodukt* i neste seksjon.

2×2 determinanter

Determinanten $\det(\vec{u}, \vec{v})$ av to vektorer $\vec{u} = [a, b]$ og $\vec{v} = [b, c]$ er gitt som

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

Eksempel

Gitt vektorene $\vec{u} = [-1, 3]$ og $\vec{v} = [-2, 4]$. Bestem $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

Svar:

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-1)4 - 3(-2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

3 × 3 determinanter

Determinanten $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ av tre vektorer $\vec{u} = [a, b, c]$, $\vec{v} = [d, e, f]$ og $\vec{w} = [g, h, i]$ er gitt som

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} e & f \\ i & j \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ h & j \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ h & i \end{vmatrix} \qquad (0.17) \\ &= a(ej - fi) - b(dj - fh) + c(di - eh) \qquad (0.18) \end{aligned}$$

Eksempel

Finn $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ til vektorene $\vec{a} = [1, -2, 2], \vec{b} = [2, 2, -3]$ og $\vec{c} = [4, -1, 2]$.

Svar:

Vi skal altså regne ut følgende:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Å gå rundt å huske (0.18) er ikke bare bare, så vi skal her bruke et triks som gjør det enklere for oss å komme fram til høyresiden i (0.17).

Vi starter med å finne tallet i første rad og kolonne, i vårt tilfelle 1. Deretter danner vi en 2×2 determinant ved å utelukke raden og kolonnen dette tallet tilhører:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Når vi ganger 1 med denne determinanten, har vi funnet det første leddet fra (0.17):

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Vi går så over til tallet i første rad og andre kolonne, altså -2, og finner den tilhørende 2×2 determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Når vi setter et minustegn foran -2 ganger denne determinanten, har vi funnet andre ledd fra (0.17):

$$-(-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Vi avslutter med determinanten vi får ved å utelukke første rad og tredje kolonne:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ganger vi denne med tallet som står i både raden og kolonnen som er utelatt, altså 2, får vi siste ledd i (0.17):

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Vi har nå funnet alle ledd vi trenger og kan da skrive

$$\begin{aligned} \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 2 - (-3) \cdot (-1) + 2(2 \cdot 2 - (-3) \cdot 4) + 2(2 \cdot (-1) - 2 \cdot 4) \\ &= 13 \end{aligned}$$

0.5 Vektorproduktet

0.5.1 Definisjon

Vi har sett hvordan vi ved skalarproduktet kan sjekke om to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står normalt på hverandre, men ofte kan vi isteden være interessert i å finne en vektor som står normalt på begge disse. En slik vektor får vi ved *vektorproduktet* (også kalt *kryssproduktet*) av $\vec{u}$ og $\vec{v}$, som vi skriver som $\vec{u} \times \vec{v}$.

Merk: For skalarproduktet får vi en skalar (et tall), mens vi for vektorproduktet får en vektor. Det er derfor veldig viktig å skille symbolet $\cdot$ fra $\times$.

Vektorproduktet

Vektorpruduktet av vektorene $\vec{u} = [a, b, c]$ og $\vec{v} = [d, e, f]$ er gitt som

$$\vec{u} \times \vec{v} = [bf - ce, -(af - cd), ae - bd] \tag{0.19}$$

Eventuelt kan man skrive

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \tag{0.20}$$

hvor $\vec{e}_x = [1, 0, 0], \vec{e}_y = [0, 1, 0]$ og $\vec{e}_z = [0, 0, 1]$.

Videre har vi at[1]

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \tag{0.21}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \tag{0.22}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) \tag{0.23}$$

[1]Kryssprodukt må regnes ut før skalarprodukt

Eksempel

Gitt vektorene $\vec{a} = [-3, 2, 3]$ og $\vec{b} = [2, -2, 1]$.

a) Finn $\vec{a} \times \vec{b}$.

b) Vis at vektoren du fant i a) står normalt på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Svar:

a) Vi bruker uttrykket fra (0.20), og regner ut følgende 3×3 determinant:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Vi får da at (se gjerne tilbake til eksempelet på side 15)

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{e}_x \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_x(2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2)) - \vec{e}_y(-3 \cdot 1 - 3 \cdot 2) + \vec{e}_z(-3 \cdot (-2) - 2 \cdot 2) \\ &= 8\vec{e}_x + 9\vec{e}_y + 2\vec{e}_z \\ &= [8, 9, 2] \end{aligned}$$

b) To vektorer står normalt på hverandre dersom skalarproduktet av dem er 0:

$$[8, 9, 2] \cdot [-3{,}2{,}3] = -24 + 18 + 6 = 0$$

$$[8, 9, 2] \cdot [2, -2{,}1] = 16 - 18 + 2 = 0$$

Regneregler for vektorproduktet

For vektorene $\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{w}$ og en konstant t har vi at

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \tag{0.24}$$

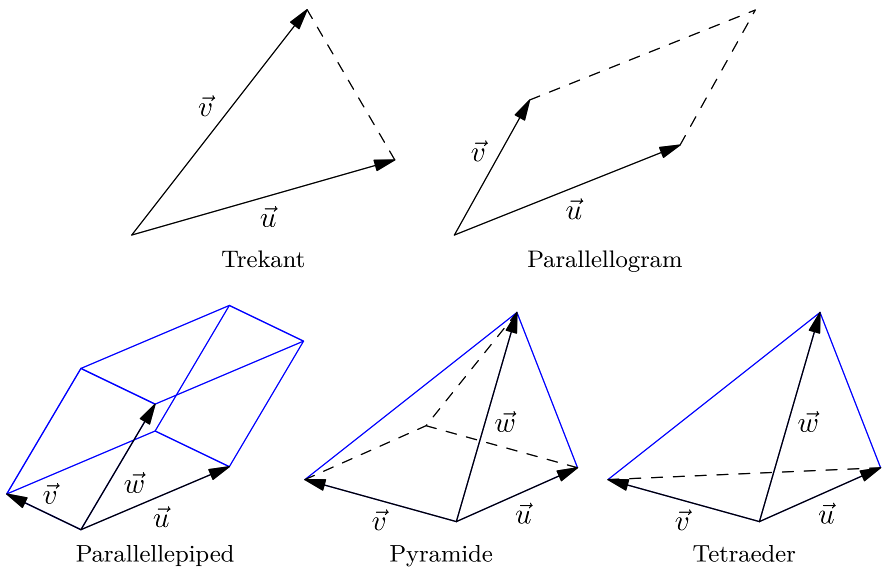
$$\vec{u} \times (t\vec{v}) = t(\vec{u} \times \vec{v}) \tag{0.25}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} \tag{0.26}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u} \cdot \vec{v} \tag{0.27}$$

0.5.2 Vektorprodukt som areal og volum

En anvendelse av vektorproduktet (og skalarproduktet) er å finne arealet og volumet av noen geometriske former som kan sies å være *utspent* av vektorer. Med dette mener vi at to eller tre vektorer som starter i samme utgangspunkt, utgjør grunnlaget for en *trekant*, et *parallellogram*, et *parallellepiped*, en *pyramide* eller et *tetraeder*.



Figur 7: Geometriske former utspent av vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$.

Vektorproduktet som areal og volum

Arealet A av et parallellogram utspent av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt som

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| \tag{0.28}$$

Arealet A av en trekant utspent av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er gitt som

$$A = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| \tag{0.29}$$

Volumet V av parallellepipedet utspent av vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er gitt som

$$V = |\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}\,| \tag{0.30}$$

Volumet V av pyramiden utspent av vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er gitt som

$$V = \frac{1}{3}|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}\,| \tag{0.31}$$

Volumet V til tetraedet utspent av vektorene $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ er gitt som

$$V = \frac{1}{6}|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}\,| \tag{0.32}$$

Forklaringer

Parallelle vektorer et multiplum av hverandre

Vi skal nå vise hvorfor $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ må være et multiplum av hverandre for at de skal være parallelle.

Ligning (0.28) forteller oss at $|\vec{u}\times\vec{v}|$ tilsvarer arealet av parallellogramet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Dette arealet kan bare ha verdien 0 hvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle, og den eneste vektoren med lengde 0 er nullvektoren [0,0,0]. Kombinerer vi dette kravet med (0.19), får vi at

$$[y_1z_2 - z_1y_2, -(x_1z_2 - z_1x_2), x_1y_2 - y_1x_2] = [0, 0, 0]$$

Uttrykket over gir oss tre ligninger

$$y_1z_2 - z_1y_2 = 0$$

$$x_1z_2 - z_1x_2 = 0$$

$$x_1y_2 - y_1x_2 = 0$$

som vi kan omskrive til

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Til slutt kan vi samle alle tre til én ligning:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Altså må forholdet mellom hver korresponderende komponent være likt.

Videre må det finnes tre tall a, b og c slik at

$$\vec{u} = [ax_2, by_2, cz_3]$$

Skal $\vec{u}$ være parallell med $\vec{v}$ har vi følgende krav:

$$\frac{ax_2}{x_2} = \frac{by_2}{y_2} = \frac{cz_2}{z_2}$$

Forkorter vi disse brøkene, finner vi at $a = b = c$. Da er

$$\begin{aligned}\vec{u} &= [ax_2, ay_2, az_2]\\ &= a[x_2, y_2, z_2]\\ &= a\vec{u}\end{aligned}$$

Herav må $\vec{u}$ og $\vec{v}$ være et multiplum av hverandre skal vi ha at $\vec{u}||\vec{v}$.

Vektorproduktet

Hensikten med vektorproduktet er å innføre en regneoperasjon som gir oss en vektor $\vec{w} = [x, y, z]$ som står normalt på to andre vektorer $\vec{u} = [a, b, c]$ og $\vec{v} = [d, e, f]$. For at dette skal være sant, vet vi av (0.15) at

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{w} &= 0\\ ax + by + cz &= 0\\ ax + by &= -cz\end{aligned} \tag{0.33}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{w} &= 0\\ dx + ey + fz &= 0\\ dx + ey &= -fz\end{aligned} \tag{0.34}$$

Vi har altså to forskjellige ligninger som kan hjelpe oss med å finne de tre ukjente størrelsene x, y og z. Dette kalles at man har en ligning med *én fri variabel*. Hvis vi velger z som fri variabel betyr dette kort fortalt at vi kan finne et uttrykk for x og y som vil oppfylle (0.33) og (0.34) for et hvilket som helst valg av z.

Vi starter med å finne et uttrykk for x. Først multipliserer vi (0.34) med $\frac{b}{e}$, og subtraherer deretter venstre- og høyresiden fra denne ligningen med henholdsvis venstre- og høyresiden fra ligning (0.33):

$$\begin{aligned}ax + by - \left(\frac{bdx}{e} + by\right) &= -cz - \left(-\frac{bfz}{e}\right)\\ ax - \frac{bdx}{e} &= -cz - \left(-\frac{bfz}{e}\right)\end{aligned}$$

Hvis vi videre multipliserer med e, og deretter antar at $ae - bd \neq 0$, får vi at

$$\begin{aligned}aex - bdx &= bfz - cez\\ (ae - bd)x &= (bf - ce)z\end{aligned}$$

$$x = \frac{bf - ce}{ae - bd} z \tag{0.35}$$

Med omtrent samme framgangsmåte og identisk antakelse finner vi et uttrykk for y:

$$\begin{aligned} ax + by - \left(ax + \frac{aey}{d} \right) &= -cz - \left(-\frac{afz}{d} \right) \\ (bd - ae)y &= (af - cd)z \\ y &= \frac{af - cd}{bd - ae} z \end{aligned} \tag{0.36}$$

Som nevnt kan z velges fritt, og vi ser av (0.35) og (0.36) at valget $z = ae - bd$ gir oss følgende fine uttrykk:

$$\begin{aligned} x &= bf - ce \\ y &= -(af - cd) \\ z &= ae - bd \end{aligned}$$

Dette samsvarer med (0.19).

For å komme fram til likhetene over har vi antatt at $z = ae - bd \neq 0$, men det er fristende å sjekke om uttrykkene vi nettopp har funnet oppfyller (0.33) og (0.34) også når $z = ae - bd = 0$:

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ a(bf - ce) + -b(af - cd) &= 0 \\ -(ae - bd)c &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx + ey &= 0 \\ d(bf - ce) - e(af - cd) &= 0 \\ -(ae - db)f &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Med z som fri variabel er altså (0.33) og (0.34) oppfylt for alle $z = ae - bd$, dermed har vi funnet et uttrykk som alltid vil gi oss en vektor $\vec{w}$ som er ortogonal med både $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Så lenge man bruker uttrykkene fra (0.35) og (0.36), vil $\vec{w}$ være parallell med vektoren gitt ved (0.19), uansett valg av z. I tillegg kan vi få uttrykket fra (0.19) også om vi velger x eller y som fri variabel (det får bli opp til leseren å konstatere disse to påstandene). Av dette kan vi konkludere med at alle vektorer som står ortogonalt på både $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle med vektoren gitt ved (0.19).

Lengden av vektorproduktet

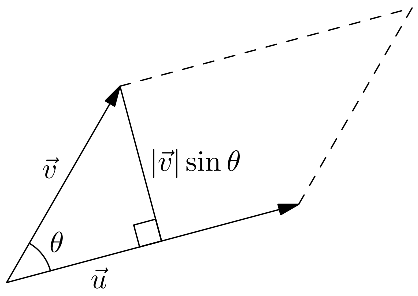
For å komme fram til det vi ønsker, skal vi benytte oss av *Lagranges identitet*[1]. Denne sier at vi for to vektorer $\vec{v}$ og $\vec{u}$ har at

$$|\vec{v} \times \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{u}\,)^2 \qquad \text{(Lagranges identitet)}$$

Ved å anvende (0.14) og (**??**) kan vi derfor skrive

$$\begin{aligned}
|\vec{v} \times \vec{u}|^2 &= |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{u})^2 \\
|\vec{v} \times \vec{u}|^2 &= |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 \cos^2\theta \\
|\vec{v} \times \vec{u}|^2 &= |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 (1 - \cos^2\theta) \\
|\vec{v} \times \vec{u}| &= |\vec{v}||\vec{u}| \sin\theta
\end{aligned}$$

Vektorproduktet som areal

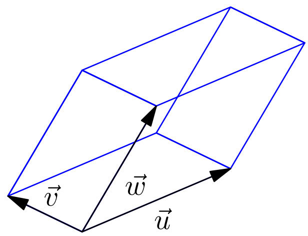


Figur 8: Parallellogram med grunnlinje $|\vec{u}|$ og høyde $|\vec{v}| \sin\theta$.

Arealet av et paralellogram er gitt som grunnlinja ganger høyden. For et parallellogram utspent av vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$, tilsvarer dette produktet $|\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta$, som er det samme som lengden $|\vec{u} \times \vec{v}|$. Arealet av trekanten utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er halvparten av arealet av parallellogrammet.

[1]Den spesielt interesserte finner utledningen for identieten i *vedlegg* **??**

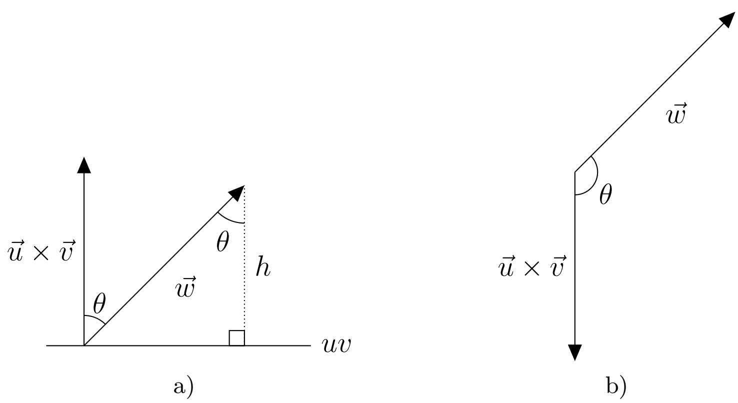
Vektorproduktet som volum



Figur 9

Volumet V av et parallellepidet tilsvarer grunnflaten A ganger høyden h:

$$V = Ah \tag{0.37}$$



Figur 10

I *figur 9* er grunnflaten A utspent av vektorene $\vec{v}$ og $\vec{v}$, og vi vet fra (0.28) at

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| \tag{0.38}$$

La θ være vinkelen mellom $\vec{u} \times \vec{v}$ og $\vec{w}$. Hvis $90° \geq \theta \geq 0$, får vi en figur som skissert i *figur 10a*. Da er høyden h gitt som

$$h = |\vec{w}\,| \cos\theta$$

Er derimot $180° \geq \theta > 90°$, får vi en figur som skissert i *figur 10b*. Da er

$$h = -|\vec{w}\,| \cos\theta$$

For alle $\theta \in [0°, 180°]$ kan vi derfor skrive

$$h = \big||\vec{w}\,| \cos\theta\big| \tag{0.39}$$

Av (0.37), (0.38), (0.39) og definisjonen av skalarproduktet har vi derfor at

$$\begin{aligned} \left|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}\,\right| &= \left||\vec{u} \times \vec{v}||\vec{v}\,|\cos\theta\right| \\ &= Ah \\ &= V \end{aligned}$$

Av klassisk geometri har vi videre at

- volumet av pyramiden utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er $\frac{1}{3}$ av volumet av parallellepipedet.
- volumet av tetraedet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er $\frac{1}{6}$ av volumet av parallellepipedet.