Løsningsforslag

3.1.1 Se eksempel s. **??**
3.1.2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= [3-1, 2-(-1), 1-(-2)] \\ &= [2, 3, 3] \\ \left|\overrightarrow{AB}\right| &= \sqrt{20}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= [0-1, 5-(-1), 6-(-2)] \\ &= [-1, 6, 8] \\ \left|\overrightarrow{AC}\right| &= \sqrt{101}\end{aligned}$$

Siden $\sqrt{101} > \sqrt{20}$ er B nærmest A.

3.1.3
a)

$$\begin{aligned}|\vec{u}| &= \sqrt{(ad)^2 + (bd)^2 + (bd)^2} \\ &= \sqrt{a^2d^2 + b^2d^2 + c^2d^2} \\ &= \sqrt{d^2(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= d\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\end{aligned}$$

b) Som i opg. a) kan vi også her skrive

$$|\vec{u}| = \sqrt{d^2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

men siden d^2 er et positivt tall, mens d er negativ, har vi at:

$$d \neq \sqrt{d^2}$$

istedenfor er:

$$|d| = \sqrt{d^2}$$

derfor kan vi skrive:

$$|\vec{u}| = |d|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

3.2.1

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= [ad, bd, cd] \cdot [eh, fh, gh] \\ &= adeh + bdfh + cdgh \\ &= dh(ae + bf + cg)\end{aligned}$$

3.2.2
a) Se eksempel s. **??**
b) Se eksempel s. **??**
c)

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \left[\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right] \cdot \vec{b} = [512, -128, 64] \\ &= \frac{1}{5}[1, 3, -1] \cdot 64[8, -2, 1] \\ &= \frac{64}{5}(8 - 6 - 1) \\ &= \frac{64}{5}\end{aligned}$$

3.2.3
a) Se eksempel s. **??** **b)** Se eksempel s. **??**
3.2.4 Finn vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ når:
a) $\vec{a} = [5, -5, 2]$ og $\vec{b} = [3, -4, 5]$

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= \sqrt{5^2 + (-5)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{54} \\ &= \sqrt{9 \cdot 6} \\ &= 3\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{b}| &= \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{50} \\ &= \sqrt{25 \cdot 2} \\ &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= [5, -5, 2] \cdot \vec{b} = [3, -4, 5] \\ &= 15 + 20 + 10 \\ &= 45\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \\ &= \frac{45}{3\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{2}} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Dette betyr at $\theta = 30°$.
3.2.5
a) Se eksempel s. **??**
b)

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c}^2 \\ &= 1^2 + 0 + \vec{a} \cdot \vec{c} + 0 + 2^2 + 0 + \vec{c} \cdot \vec{a} + 0 + 5^2 \\ &= 2(15 + \vec{a} \cdot \vec{c})\end{aligned}$$

3.3.1
a) Se eksempel s. **??**
b) Se eksempel s. **??**
b) Se eksempel s. **??**
3.3.2

a) Se eksempel s. **??**
b) Vi krever at:

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= 0 \\ [-5,-1,6]\cdot[t,t^2,1] &= 0 \\ -5t - t^2 + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Siden $(-2)\cdot(-3) = 6$ og $-2+(-3) = -5$ kan vi skrive at:

$$(t-2)(t-3) = 0$$

Kravet er dermed oppfylt hvis $t \in \{2,3\}$.
3.3.3 a) Vi regner fort ut at forholdet mellom både førstekomponentene og andrekomponenten er 2, men at forholdet mellom tredjekomponentene er $-\frac{1}{2}$. Vektorene er derfor ikke parallelle.
b) Vi observerer at:

$$\vec{b} = \frac{3}{7}[-3,5,2]$$

dermed er $\vec{b}$ et multiplum av $\vec{a}$ og da er $\vec{a}||\vec{b}$.
3.3.4
a) Vi bruker forholdet mellom første- og tredjekomponententene for å sette opp en ligning for t:

$$\begin{aligned} -\frac{t+3}{3} &= -\frac{16}{8} \\ t+3 &= 6 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

Forholdet mellom andrekomponentene blir da:

$$\frac{1-3}{1} = -2$$

Forholdet er -2 for alle komponentene når $t = 3$ og da er $\vec{a}||\vec{b}$.
b) Også her bruker vi første- og tredjekomponententene for å sette opp en ligning for t, fordi vi da får isolert det kvadratiske leddet:

$$\begin{aligned} -\frac{t^2+2}{3} &= -\frac{(5t^2+3)}{8} \\ 8t^2+16 &= 15t^2+9 \\ 7x^2 &= 7 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Når $t = 1$ er forholdet mellom både førstkomponentene og tredjekomponentene lik

$$-\frac{1^2+2}{3} = -1$$

Og forholdet mellom andrekomponentene er:

$$\frac{1}{1} = 1$$

For $t = 1$ er altså $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke parallelle. Vi ser derimot fort at forholdet mellom hver av komponentene blir -1 når $t = -1$, for dette valget av t er derfor $\vec{a}||\vec{b}$.

3.3.5 $\vec{u} = [4, 6+s, -(s+t)]$ og $\vec{v} = \left[\frac{12}{7}, \frac{2t-9s}{7}, \frac{3s-t}{7}\right]$ Vi starter med å observere at:

$$\vec{v} = \frac{1}{7}[12, 2t-9s, 3s-t]$$

Vi definerer $\vec{w} = [12, 2t-9s, 3s-t]$. Skal vi ha at $\vec{u}||\vec{v}$, må vi også hat at $\vec{u}||\vec{w}$. Siden forholdet mellom førstekomponentene til $\vec{u}$ og $\vec{w}$ er 3, krever vi at $\vec{u} = 3\vec{w}$. Da kan vi sette opp følgende ligningssystem:

$$2t - 9s = 3(6+s) \qquad \text{(I)}$$

$$3s - t = -3(s+t) \qquad \text{(II)}$$

Av II får vi at:

$$\begin{aligned} 3s - t &= -3s - 3t \\ 2t &= -6s \\ t &= -3s \end{aligned}$$

Setter vi $t = -3s$ inn i (II) får vi:

$$\begin{aligned} 2(-3s) - 9s &= 18 + 3s \\ -6s - 9s &= 18 + 3s \\ -18s &= 18 \\ s &= -1 \end{aligned}$$

Altså er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ parallelle hvis $s = -1$ og $t = -3s = 3$.

3.4.1

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ae & be \\ cf & df \end{vmatrix} &= aedf - becf \\ &= ef(ad - bc) \\ &= ef \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} i \end{aligned}$$

??

b) Arelet er gitt som tallverdien til $\det(\vec{a}, \vec{b})$:

$$\begin{aligned} \det(\vec{a}, \vec{b}) &= \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 24 & -16 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 8 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 16((-1) \cdot (-2) - 2 \cdot 3) \\ &= 16 \cdot (-4) \\ &= -64 \end{aligned}$$

Arealet er altså 64.

3.4.2

Hvis $\vec{u}||\vec{v}$ betyr dette at hvis vi skriver $\vec{u} = [a, b, c]$, så kan vi skrive $\vec{v} = d[a, b, c]$. Vi får da at:

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a & b & c \\ da & db & dc \end{vmatrix} \\ &= d\vec{e}_x \begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix} - d\vec{e}_y \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + d\vec{e}_x \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

Resultatet fra 3.4.1 er her brukt i andre linje for å forenkle regningen av 2×2 determinantene.

3.4.4

a) Arealet til grunnflaten tilsvarer lengden av vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= [(-2) \cdot 1 - 1 \cdot (-3), -(2 \cdot 1 - 1 \cdot 3), 2 \cdot (-3) - (-2) \cdot 3] \\ &= [-2 + 3, -(2 - 3), -6 + 6] \\ &= [1, 1, 0]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{a} \times \vec{b}| &= \sqrt{1^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

b) Av (??) vet vi at volumet V er gitt som:

$$V = \frac{1}{6}|\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}|$$

Vi har at:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} &= [1, 1, 0] \cdot [2, -3, 2] \\ &= 2 - 3 \qquad = -1\end{aligned}$$

Og dermed er $V = \frac{1}{6}$.

3.4.5

a) Diagonalen til grunnflaten kan uttrykkes som vektoren $\vec{a} + \vec{b}$, og lengden blir da (husk at $|\vec{u}|^2 = \vec{u}^2$):

$$\begin{aligned}|\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2} \\ &= \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 0 + 4^2} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$