Математические модели обработки сигналов

Тема 5: Преобразования Фурье: ДПФ

Лектор: Кривошеин А.В.

Спектр произвольного сигнала

Спектральный анализ — это разложение сигнала на базовые компоненты.

Спектральный анализ в узком смысле — это преобразование Фурье, то есть разложение сигнала на базовые частоты.

Инструментом для проведения спектрального анализа является скалярное произведение.

Величину **скалярного произведения** можно интерпретировать, как **“меру похожести”** двух элементов.

Базовые частоты для различных пространств сигналов основаны на **комплексных гармонических колебаниях**:

$$e^{2\pi i \omega t} = \cos(2\pi\omega t) + i\,\sin(2\pi\omega t).$$

Базовые частоты для $L_2(\mathbb{R})$: $e^{2\pi i \omega t}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Базовые частоты для $\ell_2(\mathbb{Z})$: $\left\{e^{2\pi i \omega n}\right\}_n$, $\omega \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Базовые частоты для $L_2[0, 1]$: $e^{2\pi i m t}, m \in \mathbb{Z}$.

Базовые частоты для $\mathbb{C}^N$: $\mathcal{E}_m = \left(e^{2\pi i m \frac{0}{N}}, e^{2\pi i m \frac{1}{N}}, \ldots, e^{2\pi i m \frac{N-1}{N}}\right)$, $m = 0, \ldots, N-1$ или $m = -\left[\frac{N}{2}\right]+1, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right]$

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

С точки зрения практики, наиболее важным преобразованием является

Дискретное Преобразование Фурье (ДПФ, англ. Discrete Fourier Transform).

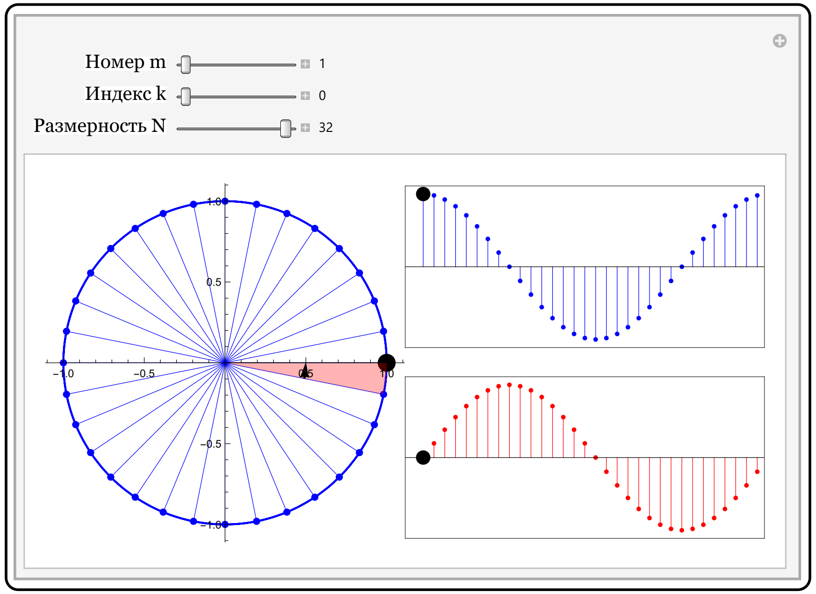
Именно оно предназначено для спектрального или частотного анализа цифровых сигналов.

Базовые частоты для $\mathbb{C}^N$ — это вектора $\mathcal{E}_m = \left(e^{2\pi i m \frac{0}{N}}, e^{2\pi i m \frac{1}{N}}, \ldots e^{2\pi i m \frac{N-2}{N}}, e^{2\pi i m \frac{N-1}{N}}\right), \quad m = 0, \ldots, N-1.$

Они получены дискретизацией комплексных экспонент из $L_2[0, 1]$:

$$e^{2\pi i m t} = \cos(2\pi m t) + i \sin(2\pi m t), \quad t \in [0, 1] \text{ в точках } t = \frac{k}{N}, \; k = 0, \ldots, N-1.$$

Out[ ]=



Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

ДПФ заключается в вычислении скалярных произведений :

$$X[m] := \langle x\,,\ \mathcal{E}_m \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi i \frac{m n}{N}},\ \ m = 0,\ \ldots,\ N-1.$$

Вектор коэффициентов $X\ =\ (X[0],\ \ldots,\ X[N-1])$ называется **спектром сигнала** x.

$X[m]$ — это **спектральный отсчёт**, он выражает вклад соответствующей базовой частоты $\mathcal{E}_m$ в сигнал x.

Амплитуда спектра — это вектор из абсолютных значений спектральных отсчётов: $\left(\,|X(0)|,\ \ldots,\ |X(N-1)|\,\right)$.

Фаза спектра — это вектор из углов спектральных отсчётов: $\left(\arg(X[0]),\ \ldots,\ \arg(X[N-1])\right)$.

Для краткости будем писать $X = \mathrm{DFT}(x)$.

Вектора $\mathcal{E}_m = \left(e^{2\pi i \frac{0\cdot m}{N}},\, e^{2\pi i \frac{1\cdot m}{N}},\ \ldots,\, e^{2\pi i \frac{(N-1)\cdot m}{N}}\right) \in \mathbb{C}^N$ образуют **ортогональный базис** в $\mathbb{C}^N$, $m = 0,\ \ldots,\ N-1$.

$$\langle \mathcal{E}_m, \mathcal{E}_k \rangle\ = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{2\pi i \frac{(m-k)}{N}}\right)^n\ = \begin{cases} N, & m = k, \\ \dfrac{1-e^{2\pi i n \frac{(m-k)}{N}\cdot N}}{1-e^{2\pi i \frac{(m-k)}{N}}} & m \neq k \end{cases}\ = \begin{cases} N, & m = k, \\ 0, & m \neq k. \end{cases}$$

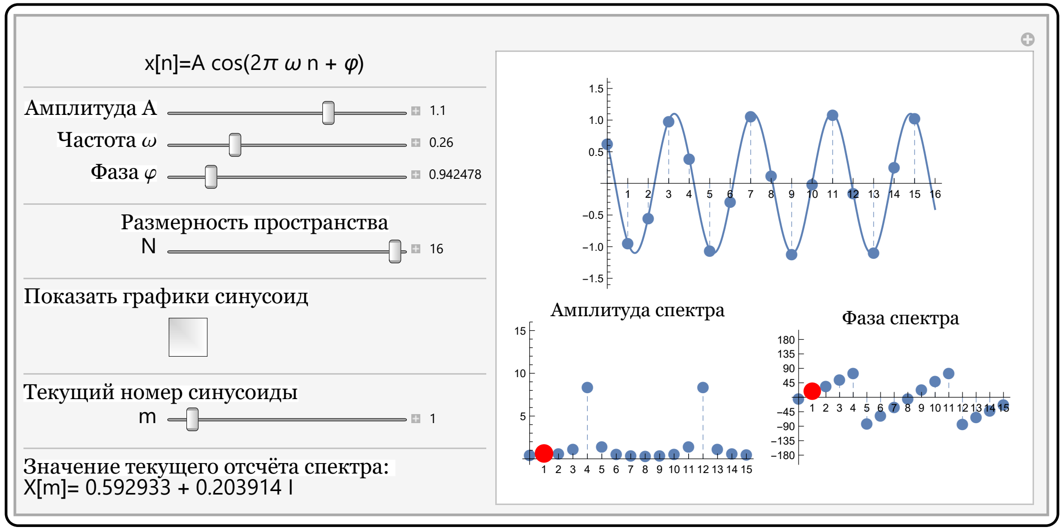
Любой вектор $x \in \mathbb{C}^N$ можно разложить по этому базису:

$$x = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle x, \mathcal{E}_m \rangle}{\langle \mathcal{E}_m, \mathcal{E}_m \rangle}\, \mathcal{E}_m = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \langle x, \mathcal{E}_m \rangle\, \mathcal{E}_m\ = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m]\ \mathcal{E}_m.$$

Это формула восстановления сигнала по спектру.

Пример ДПФ

Применим ДПФ к сигналу вида $x[n] = A\cos(2\pi\omega n + \varphi)$, $n = 0, \ \ldots, N-1$.

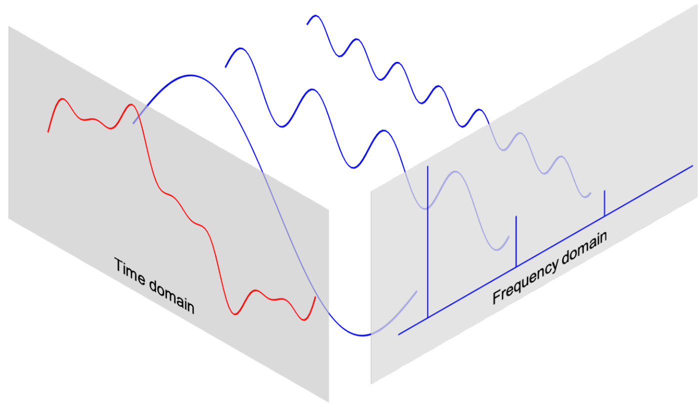


Отметим из графика:

1. амплитуда сигнала x влияет только на амплитуду спектра X.
2. для вещественно-значного сигнала: амплитуда спектра симметрична относительно центра,
   фаза спектра анти-симметрична относительно центра.
3. если $\omega = \frac{m}{N}$ в точности, то и в спектре это точно отражается: отсчеты спектра равны нулю, за исключением $X[m]$ и $X[N-m]$. В других случаях возникает эффект “растекания” спектра (англ. DFT Leakage).

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Суть ДПФ о разложении сигнала в линейную комбинацию базовых частот можно визуализировать следующим образом:



Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Пусть $X = \mathrm{DFT}(x)$. Формально ДПФ — это отображение из $\mathbb{C}^N$ в $\mathbb{C}^N$, оно меняет стандартный базис на базис из векторов

$$\mathcal{E}_m = \left(1,\ e^{2\pi i \frac{m}{N}},\ e^{2\pi i \frac{2m}{N}},\ \ldots,\ e^{2\pi i \frac{(N-1)m}{N}}\right),\ m = 0,\ \ldots,\ N-1.$$

Пусть $x \in \mathbb{C}^N$ вектор-строка, тогда каждый отсчёт спектра имеет вид $X[m] = \langle x, \mathcal{E}_m \rangle = x \cdot \mathcal{E}_m^*$.

Спектр имеет вид: $X = (X[0],\ \ldots,\ X[N-1]) = x\,\mathbb{W}$, где $\mathbb{W} = (\mathcal{E}_0^*, \mathcal{E}_1^*,\ \ldots,\ \mathcal{E}_{N-1}^*)$.

Матрица перехода между базисами $\mathbb{W}$ называется **матрицей ДПФ**.

Общий вид | Примеры

N 4

$$\mathbb{W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{W}\,\overline{\mathbb{W}^{\mathsf{T}}} = 4 I_4$$

Так как вектора $\mathcal{E}_m$ попарно ортогональны, то $\mathbb{W}^* \mathbb{W} = N\, I_N$, то есть $\mathbb{W}^{-1} = \frac{1}{N}\mathbb{W}^*$.

Свойства ДПФ

Линейность: пусть $x, y \in \mathbb{C}^N, X = \mathrm{DFT}(x), Y = \mathrm{DFT}(y) \in \mathbb{C}^N$. Тогда

$$\mathrm{DFT}(a\,x + b\,y) = a\,X + b\,Y, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Так как $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m+n\,N}$, то можно считать, что спектр X периодически продолжен до последовательности и

$$X[k] = X[k \bmod N] \quad \text{для любого } k \in \mathbb{Z}.$$

Симметрия: для вещественного $x \in \mathbb{R}^N \subset \mathbb{C}^N$, ДПФ сигнала x сопряжённо-симметрично, то есть

$$X[N-m] = \overline{X[m]}, \qquad X[-m] = \overline{X[m]}, \text{ так как}$$

$$X[N-m] := \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi i \frac{(N-m)n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi i \frac{(-m)n}{N}} = \overline{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}} = \overline{X[m]}, \quad m = 0, \ldots, N-1.$$

При этом амплитуда спектра симметрична, а фаза спектра анти-симметрична

$$|X[N-m]| = |X[m]|, \qquad \arg(X[N-m]) = -\arg(X[m]).$$

Свойства ДПФ

Равенство Парсеваля (свойство сохранения энергии)

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left|X[m]\right|^2 .$$

Обратное ДПФ : $x = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m]\ \mathcal{E}_m$ или $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m]\ e^{2\pi i \frac{m n}{N}},\ n = 0,\ \ldots,\ N-1.$

Связь прямого и обратного ДПФ:

$$x[n] = \frac{1}{N} \overline{\sum_{m=0}^{N-1} \overline{X[m]}\ e^{-2\pi i \frac{m n}{N}}},\ n = 0,\ \ldots,\ N-1.$$

Или $x = \frac{1}{N} \overline{\mathrm{DFT}\,(\overline{X})}.$

Это соотношение полезно, поскольку для вычисления ДПФ есть быстрый алгоритм. А значит, и для обратного ДПФ он также применим.

Быстрое преобразование Фурье

Для вычисления ДПФ необходимо перемножить вектор из $\mathbb{C}^N$ на матрицу ДПФ размера $N \times N$.

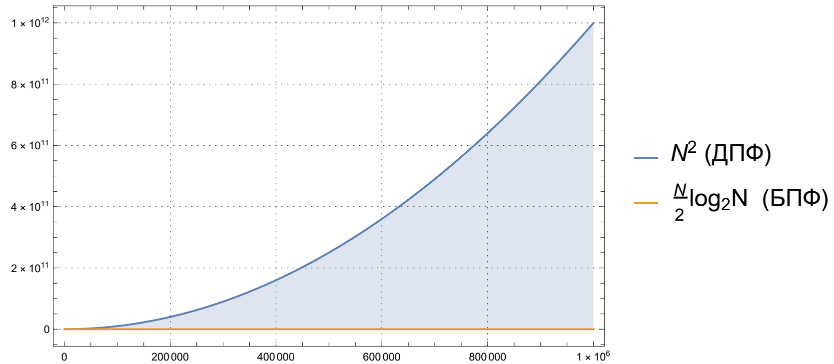
Число операций для ДПФ равно $O(N^2)$.

Алгоритм БПФ (J. Cooley, J. Tukey, 1965): позволяет сократить число операций до $O(N(p_1 + \ldots + p_n))$ где $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$.

В частности, если N — это степень 2, то до $O(N \log_2 N)$.

К примеру, если $N = 2^{10} = 1024$, то число комплексных умножений для ДПФ $N^2 = 2^{20} = 1\,048\,576$,

а для БПФ — $\frac{N}{2} \log_2 N = 5120$,то есть меньше в 200 раз.



БПФ изменяет способ вычисления ДПФ, сводя ДПФ для исходного сигнала к двум ДПФ для половинок исходного сигнала.

Суть БПФ

Существуют различные реализации БПФ. Рассмотрим идею на примере деления отсчетов пополам.

Пусть $x \in \mathbb{C}^N$ и N — это чётное число. Разделим сумму ДПФ на две

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi i \frac{m n}{N}} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]\, e^{-2\pi i \frac{2nm}{N}} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]\, e^{-2\pi i \frac{(2n+1)m}{N}}.$$

Обозначим $y[n] = x[2n]$ и $z[n] = x[2n+1]$, и вынесем из второй суммы множитель $e^{-2\pi i \frac{m}{N}}$

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N/2-1} y[n]\, e^{-2\pi i \frac{nm}{N/2}} + e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \sum_{n=0}^{N/2-1} z[n]\, e^{-2\pi i \frac{nm}{N/2}}.$$

Первое слагаемое — это ДПФ от $y \in \mathbb{C}^{N/2}$, второе — это ДПФ от $z \in \mathbb{C}^{N/2}$.

$$X[m] = Y[m] + e^{-2\pi i \frac{m}{N}} Z[m], \quad m = 0, \ldots, N/2-1.$$

Из периодичности: $Y[m] = Y[m-N/2]$, $Z[m] = Z[m-N/2]$, $m = N/2, \ldots, N-1$, тогда

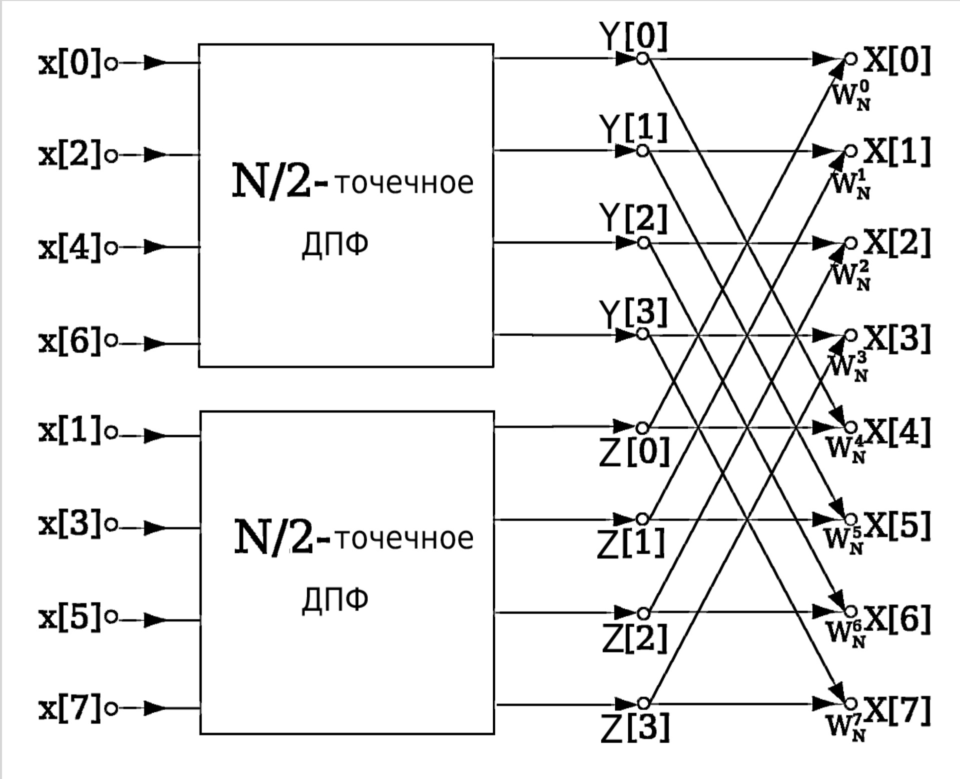
$$X[m] = Y[m-N/2] + e^{-2\pi i \frac{m}{N}} Z[m-N/2] =$$
$$= Y[m-N/2] - e^{-2\pi i \frac{1}{N}(m-N/2)} Z[m-N/2], \quad m = N/2, \ldots, N-1.$$

Число операций: $2\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \frac{N}{2} = \frac{N(N+1)}{2}$.

Такое деление можно продолжать и далее. Наибольший выигрыш, если $N = 2^k$.

Суть БПФ (схема)

Сведение к N/2 ДПФ



Связь ДПФ с реальной частотой

Рассмотрим сигнал x длины N.

Спектральный отсчёт $X[m]$ отвечает за величину вклада базовой частоты $\mathcal{E}_m$ в сигнал x.

Но каким образом эта частота связана с “реальной частотой”, то есть с числом колебаний в секунду?

Для ответа необходимо знать период дискретизации T_s сек/отсчет, с которым был получен дискретный сигнал x.

Пусть $x[n] = x_c(n\,T_s)$, где $x_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — это исходный сигнал, $n = 0, \ldots, N-1$.

Тогда общая длина той части сигнала x_c, которая использовалась при дискретизации, равна $N\,T_s$ секунд.

Рассмотрим комплексную экспоненту, период которой равен $N\,T_s$ секунд, он укладывается ровно 1 раз в длину сигнала:

$$e_1(t) = \exp\left(2\,\pi\,i\,\frac{t}{N\,T_s}\right) = \exp\left(2\,\pi\,i\,\frac{F_s}{N}\,t\right).$$

Её частота равна $\frac{F_s}{N}$, а её дискретизация имеет вид

$$e_1(n\,T_s) = \exp\left(2\,\pi\,i\,\frac{n\,T_s}{N\,T_s}\right) = \exp\left(2\,\pi\,i\,\frac{n}{N}\right) = \mathcal{E}_1[n].$$

Дискретизацией является вектор $\mathcal{E}_1$ и ему соответствует реальная частота $F_s\,\frac{1}{N}$.

Связь ДПФ с реальной частотой

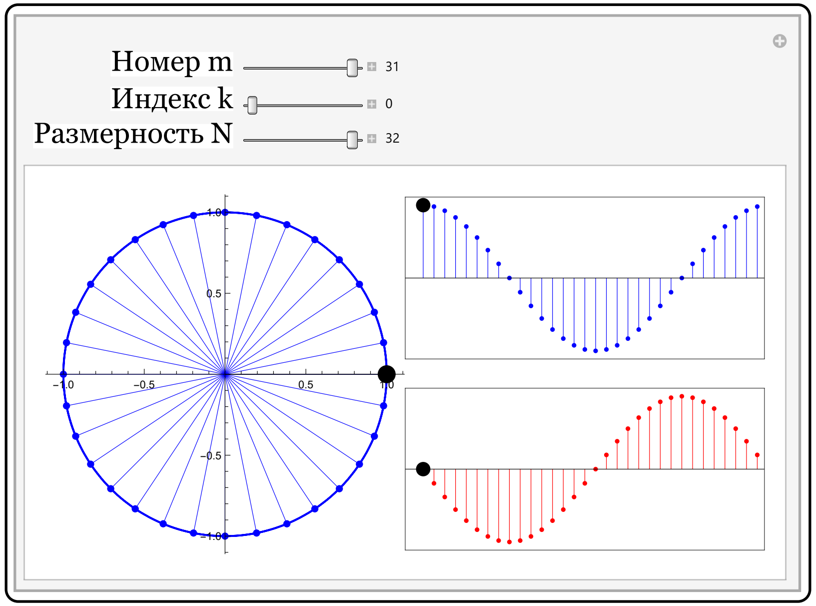
Аналогично, у комплексной экспоненты $e_m(t) = \exp\left(2\,\pi\,i\,m\,\frac{F_s}{N}\,t\right)$ для $m = -\left[\frac{N}{2}\right] + 1, \;\ldots,\; \left[\frac{N}{2}\right], m \neq 0,$

период будет равен $\frac{N\,T_s}{|m|}$ секунд и он укладывается ровно $|m|$ раз в общую длину сигнала.

Дискретизацией этой экспоненты будет вектор $\mathcal{E}_m$, соответствующая этому вектору реальная частота равна $F_s\,\frac{m}{N}$.

Для $m < 0$ вектору $\mathcal{E}_m$ соответствует отрицательна реальная частота $F_s\,\frac{m}{N}$.

Это оправдано, тем, что, например, из вида графиков для векторов $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_{-1}$ можно заключить, что они улавливают одну и ту же частоту колебаний. Их реальные частоты по модулю действительно полагаются равными.



Если $F_s =$ 100Гц, $N = 10$, то гармонические колебания $\mathcal{E}_m$ ($m = 0, \;\ldots, 9$) соответствуют частотам

$0, 10, 20, 30, 40, 50, -40, -30, -20, -10$ Гц.

Нормализованная частота

Для сопоставления реальных частот векторам $\mathcal{E}_m$ удобно использовать нормализованные частоты.

Нормализованная частота для вектора $\mathcal{E}_m$ равна $\frac{m}{N}$, $m = -\left[\frac{N}{2}\right] + 1, \ \ldots, \left[\frac{N}{2}\right]$.

Реальная частота для вектора $\mathcal{E}_m$ равна $F_s \frac{m}{N}$.

Нормализованные частоты принимают значения в промежутке $\left(-\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}\right]$.

Реальные частоты принимают значения в промежутке $\left(-\frac{F_s}{2}, \ \frac{F_s}{2}\right]$.

Если $N = 10$, то гармонические колебания $\mathcal{E}_m$ $(m = 0, \ \ldots, 9)$ соответствуют нормализованным частотам

$$0, \ \frac{1}{10}, \ \frac{2}{10}, \ \frac{3}{10}, \ \frac{4}{10}, \ \frac{5}{10} \ -\frac{4}{10}, \ -\frac{3}{10}, \ -\frac{2}{10}, \ -\frac{1}{10}.$$

Расстояние между спектральными отсчетами в реальных частотах равно $\frac{F_s}{N}$Гц. Этой величины соответствует частотное разрешение ДПФ, то есть мы не сможем различить две реальных частоты в сигнале, если они расположены ближе, чем $\frac{F_s}{N}$Гц.

Метрики качества алгоритмов

Одной из распространённых мер для вычисления “величины” шума по отношению к полезному сигналу в зашумлённом сигнале является **отношение Сигнал-Шум** (англ. Signal-to-Noise Ratio, SNR).

SNR равно отношению усреднённой энергии полезного сигнала к усреднённой энергии шума в сигнале. Пусть $x,\ w \in \mathbb{R}^N$, x — это полезный сигнал, w — это шум. Тогда SNR имеет вид

$$\mathrm{SNR} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2}{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |w[n]|^2},$$

Чаще всего это отношение считают в логарифмической шкале.

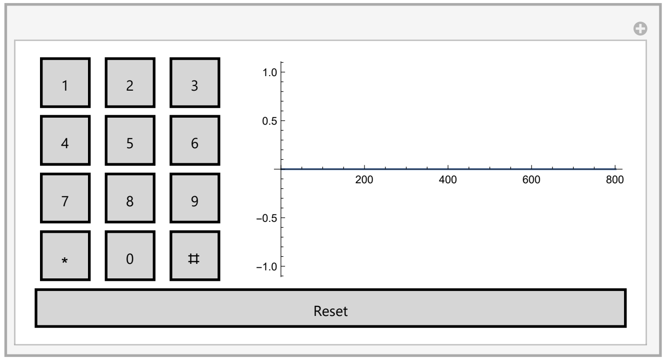
$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{db}} = 10 \log_{10}\left(\frac{\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} |w[n]|^2}\right),$$

DTMF

Рассмотрим технологию двухтонального многочастотного аналогового сигнала (англ. *Dual-Tone Multi-Frequency*, DTMF), используемую для набора телефонного номера. Сопоставим каждому символу две частоты в соответствии со следующей таблицей

	1209 Гц	1336 Гц	1477 Гц
697 Гц	1	2	3
770 Гц	4	5	6
852 Гц	7	8	9
941 Гц	*	0	♯

DTMF



Глядя на график, очень трудно определить нажатые цифры. Однако, ДПФ может выявить частоты содержащиеся в сигнале. Пусть например нажаты цифры 1, 5 и 9. Тогда сформируется следующий сигнал.

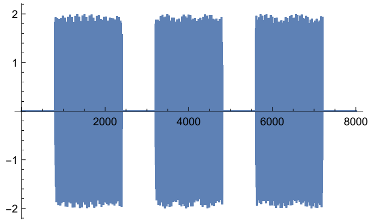
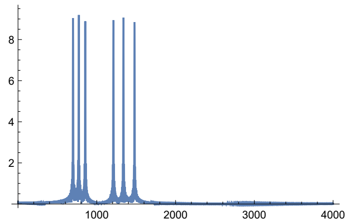


График его спектра выглядит так



В файле 1.1.0 DFT_1D_on.ipynb содержится задача, связанная с DTMF.

На что же влияет фаза спектра?

Амплитуда спектрального отсчёта $|X[m]|$ характеризует величину вклада базовой частоты $\mathcal{E}_m$ в сигнал.
Рассмотрим следующее равенство для выявления смысла фаз спектральных отсчётов:

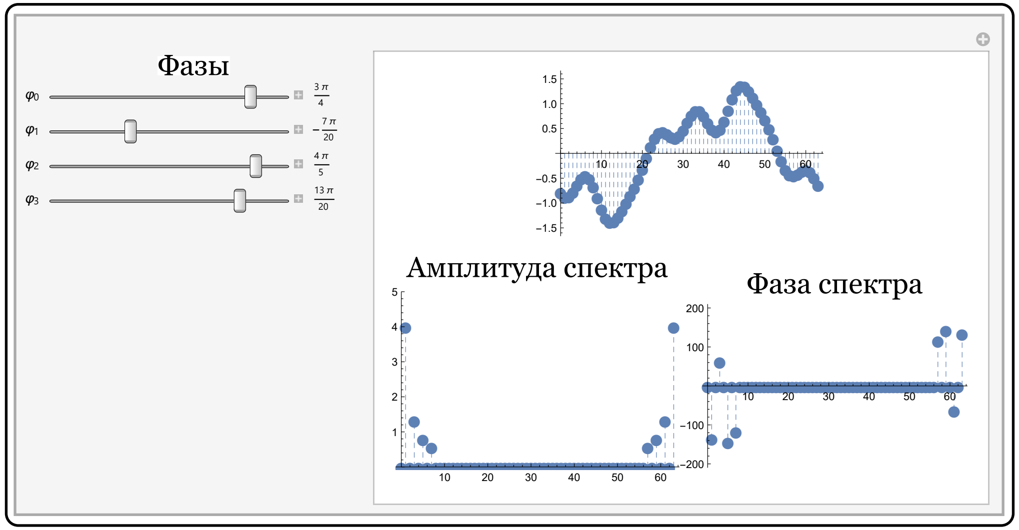
$$x = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X[m]\ \mathcal{E}_m = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \left|X[m]\right| e^{i\arg(X[m])}\,\mathcal{E}_m = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\left|X[m]\right| \left\{e^{-i\left(2\pi m \frac{n}{N} - \arg(X[m])\right)}\right\}_{n=0,N-1}.$$

То есть сигнал формируется как линейная комбинация базовых частот, фазы отвечают за сдвиг базовых частот по временной оси в ту или иную сторону, это влияет на форму сигнала. Для примера рассмотрим сигнал:

$$x[n] = \sum_{i=0}^{3}\frac{1}{2i+1}\cos\left(2\pi\frac{(2i+1)n}{64} + \varphi_i\right) = \sum_{i=0}^{3}\frac{1}{2(2i+1)}\left(e^{i\varphi_i}e^{2\pi i\frac{(2i+1)n}{64}} + e^{-i\varphi_i}e^{-2\pi i\frac{(2i+1)n}{64}}\right),\quad n = 0,\ \ldots,\ 63.$$

Влияние фазы на сигнал

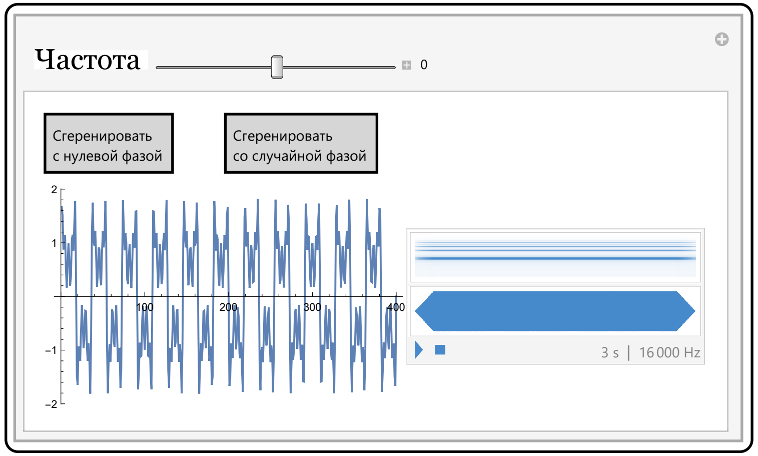
Out[ ]=



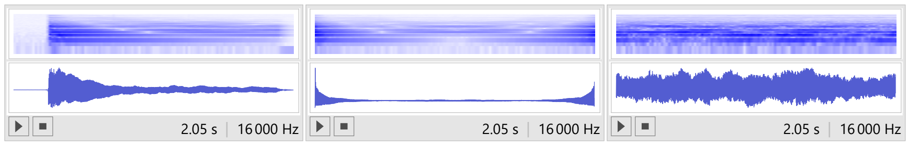
Влияние фазы спектра на форму сигнала

Фаза спектра влияет на форму сигнала. Однако, звук с постоянными частотными характеристиками звучит одинаково вне зависимости от фаз.

Симуляция кларнета



Для сигнала, чьи частотные характеристики меняются со временем, изменение фазы спектра сильно влияет на звук.



Исходный звук   Нулевая фаза   Случайная фаза