Математические модели обработки сигналов

Тема 15: Кратномасштабный анализ

Лектор: Кривошеин А.В.

Всплеск-анализ

Основная идея теории всплесков как аппарата анализа функций — это **анализ функции в разных масштабах**.

На функцию можно “взглянуть” как бы под микроскопом на разных уровнях приближения. Пусть есть максимально подробное “изображение” функции в максимальном приближении. Уменьшая уровень приближения, “изображение” функции сглаживается, мелкие детали становятся не видны. Причём микроскоп позволяет сохранять разницу между соседними уровнями приближений. Таким образом:

1. Произвольный сигнал f представляется как сумма “грубого” приближения сигнала и уточняющих деталей.

2. “Грубое” приближение является сглаженной копией сигнала (содержащей в основном низкие частоты)

3. Уточняющие детали содержат быстро меняющиеся компоненты сигнала (то есть высокочастотную компоненту).

4. Степень “огрубления” можно изменять добавляя или убирая детали, а алгоритмы расчета автоматически являются быстрыми, за счёт внутренней структуры систем всплесков.

Для характеризации “грубого” приближения сигнала и уточняющих деталей служат две различные функции φ и ψ, которые должны обладать целым рядом свойств.

Функцию φ называют **масштабирующей**, она отвечает за построение приближения сигнала с той или иной точностью (или же с тем или иным масштабом).

Функцию ψ называют **всплеск-функцией**, она отвечает за детали. Её название возникло из-за типичного вида этой функции: она похожа на всплеск - маленькую волну.

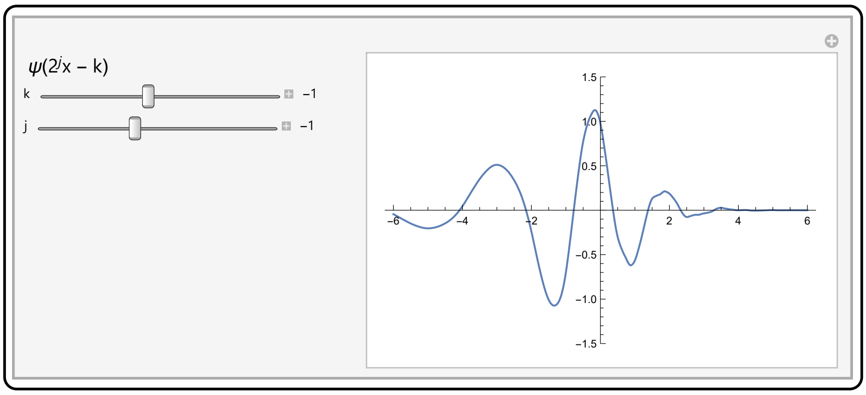
Функции φ и ψ

Будем рассматривать функции φ и ψ из $L_2(\mathbb{R})$.

“Строительные блоки” для построения приближения функции и её деталей — это всевозможные целочисленные сдвиги и двоичные сжатия\растяжения этих функций:

$$\varphi_{j,k}(x) = \varphi\left(2^j x - k\right) = \varphi\left(2^j \left(x - \frac{k}{2^j}\right)\right), \quad \psi_{j,k}(x) = \psi\left(2^j x - k\right),\ j, k \in \mathbb{Z}.$$

График всплеск–функции



За счет сдвигов функции мы можем охватить всю вещественную ось, а за счет сжатий улавливать достаточно быстрые колебания.

Функции φ и ψ

С математической точки зрения, возможность “отслоения” деталей сигнала на разных масштабах обеспечивается тем, что сдвиги и сжатия ψ

$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\,\psi\left(2^j x - k\right),\ j, k \in \mathbb{Z}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$.

То есть любая функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} A_{j,k}\,\psi_{j,k}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle\,\psi_{j,k}(x).$$

Для фиксированного уровня j внутренняя сумма $\sum_{k\in\mathbb{Z}} A_{j,k}\,\psi_{j,k}(x)$ отвечает за вклад в сигнал компонентов, которые меняются с определенной частотой.

Чем больше j, тем более быстро меняющиеся компоненты содержатся в этой сумме.

Также, на практике используется разложение

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{0,k}\rangle\,\varphi_{0,k}(x) + \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle\,\psi_{j,k}(x).$$

где первая сумма отвечает за “грубое” приближения сигнала.

Одним из простейших базисов всплесков являются **всплески Хаара**. Для изложения основных идей, лежащих в основе теории всплесков, будем использовать всплески Хаара.

Напоминание основных понятий

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}$, и пусть $\|\cdot\|$ — это норма в $\mathcal{H}$, порождённая скалярным произведением.

Ряд из элементов $x_n \in \mathcal{H}$: $S = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ – **сходится**,

если $\|S - S_N\| \to 0$, при $N \to \infty$, где $S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$.

Систему элементов $\{e_n, \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}$ называют **базисом (Шаудера)**, если для каждого $x \in \mathcal{H}$ существует единственная последовательность чисел $\{\lambda_n\}$ такая, что $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n$. Если при этом $\{e_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ ортонормированная система, то это ОНБ.

Пусть элементы $x_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$, попарно ортогональны. Тогда сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ равносильна сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$, при этом $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\|^2$ (Теорема Пифагора).

Ортогональным дополнением подпространства U в $\mathcal{H}$ называется множество

$U^{\perp} = \{x \in \mathcal{H}: \ \langle x, \ y \rangle = 0, \ \forall \ y \in U\}$ —

также является подпространством в $\mathcal{H}$ и $U \bigcap U^{\perp} = \{0\}$.

При этом гильбертово пространство $\mathcal{H}$ представимо в виде прямой суммы: $\mathcal{H} = U \oplus U^{\perp}$, то есть каждый элемент $x \in \mathcal{H}$ представим единственным образом в виде $x = y + z$, где $y \in U$, $z \in U^{\perp}$.

Оператор проектирования

Для (замкнутого) подпространства W в $\mathcal{H}$, ортогональная проекция $\mathcal{H}$ на W это оператор $\mathcal{P} : \mathcal{H} \to W$ для которого

$$\mathcal{P}\,x = x, \quad \text{если} \ \ x \in W, \quad \text{и} \ \ \mathcal{P}\,x = 0, \quad \text{если} \ \ x \in W^{\perp}.$$

Пусть W замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Пусть в W есть ОНБ $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Определим оператор $P_W : \mathcal{H} \to W$ следующим образом: для элемента x из $\mathcal{H}$ оператор действует по правилу

$$P_W(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle x, \ e_n \rangle \, e_n.$$

Свойства оператора P_W.

1. $P_W(x) \in W$.
2. Оператор P_W является ортогональной проекцией $\mathcal{H}$ на W: если $x \in W$, то $P_W(x) = x$, если $x \in W^{\perp}$, то $P_W(x) = 0$.
3. $P_W(x)$ является элементом наилучшего приближения x в W и $P_W(x)$ единственный такой элемент, то есть $\|x - P_W(x)\| = \min\limits_{y \in W} \|x - y\|$.
4. $x - P_W(x) \perp W$
5. $\|P_W(x)\| \leq \|x\|$
6. Оператор P_W линейный и непрерывный

КМА Хаара: пространство V_0

Основная структура при построении всплесков — это **Кратномасштабный Анализ** (КМА, англ. MRA, Multiresolution Analysis, Стефан Малла, Ив Мейер, 1986).

КМА — это математический микроскоп, он позволяет взглянуть на любую функцию в различных масштабах.

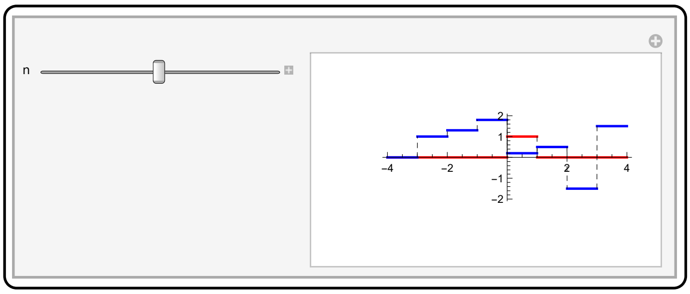
Технически, КМА — это последовательность вложенных подпространств V_j, с помощью которых можно точнее и точнее приближать функции из $L_2(\mathbb{R})$.

Базовой при построении КМА Хаара является масштабирующая функция Хаара

$$\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R})$ **пространство $\boldsymbol{V_0}$** кусочно-постоянных функций на отрезках вида $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Система $\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x-n)$, $n \in \mathbb{Z}$, образует ортонормированный базис в пространстве V_0.

Сдвиги функции φ и пространство V_0



Тогда для любой $f \in V_0$: $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{0,k} \rangle \varphi_{0,k}$ или $V_0 = \overline{\text{span}\{\varphi_{0,k},\ k \in \mathbb{Z}\}}$.

$\text{span}\{\varphi_{0,k},\ k \in \mathbb{Z}\} := \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_{0,k},\ \ \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}$, то всевозможные линейные комбинации.

Также говорят, что пространство V_0 порождено целочисленными сдвигами функции φ.

КМА Хаара: пространство V_1

Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R})$ **пространство V_1** кусочно-постоянных функций на отрезках вида $\left[\frac{k}{2},\ \frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right),\ k\in\mathbb{Z}$.

Если сжать функцию Хаара в два раза, то система сдвигов функции $\varphi(2\,x)$ на полуцелые числа $\frac{n}{2}$

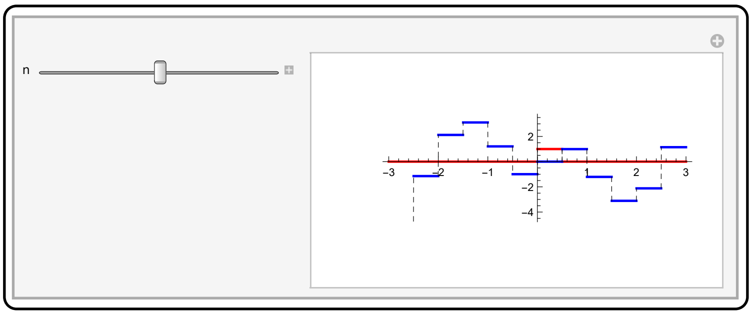
(то есть система функций $\varphi(2\,(x\,-\,n/2))\ =\ \varphi\,(2\,x\,-\,n),\,n\in\mathbb{Z}$) также образует ортогональную систему.

Нормируем функции из этой системы:

$$\varphi_{1,n}\ :=\ \sqrt{2}\ \varphi\left(2^1\,x\,-\,n\right),\qquad \|\sqrt{2}\ \varphi\,(2\cdot\,-\,n)\,\|^2=2\int_{\mathbb{R}}\varphi^2(2\,x-n)\,dx\ =\ 1.$$

Таким образом, система функций $\{\varphi_{1,n}\}$ образует ортонормированный базис в V_1.

Сдвиги функции $\varphi(2x)$ и пространство V_1



Тогда для любой $f\in V_1$: $\quad f=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,\ \varphi_{1,k}\rangle\,\varphi_{1,k}$ или $\quad V_1=\overline{\operatorname{span}\{\varphi_{1,k},\ k\ \in\mathbb{Z}\}}.$

Также говорят, что пространство V_1 порождено целочисленными сдвигами функции $\varphi_{1,0}$.

КМА Хаара: основное свойство

Ключевое свойство КМА: пространство V_1 является масштабированной (сжатой) копией пространства V_0. То есть

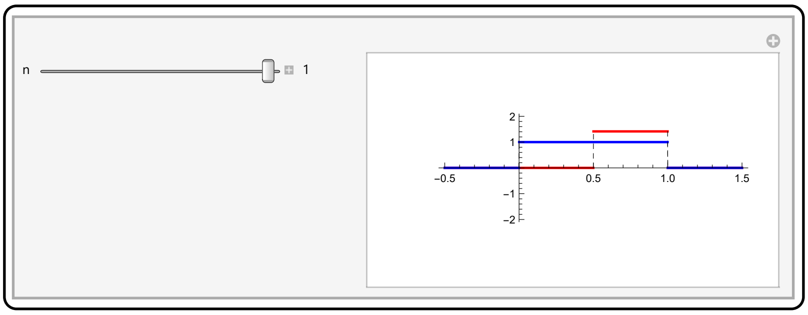
$$f(x) \in V_0 \quad \Leftrightarrow \quad f(2x) \in V_1 .$$

Кроме того $V_0 \subset V_1$, поскольку любая кусочно-постоянная функция на отрезках длины 1, является кусочно-постоянной на отрезках длины $\frac{1}{2}$.

При этом $\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,0} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[n]\,\varphi_{1,n}$

где $h[0] = h[1] = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Это соотношение называют **масштабирующим**, то есть функция, порождающая базис для более “грубого” масштаба, представляется в виде линейной комбинации сдвигов функции, порождающей базис более “мелкого” масштаба.

Масштабирующее свойство $\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1)$



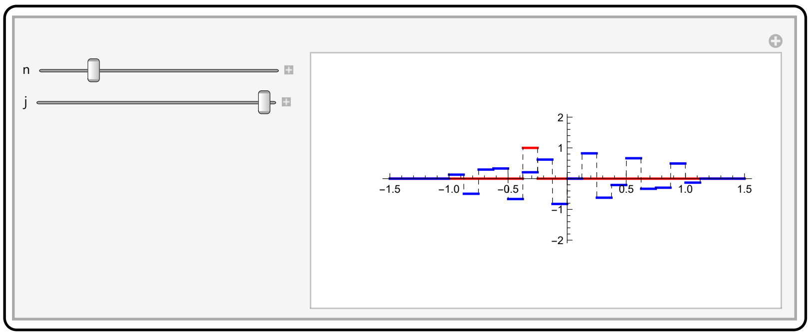
КМА Хаара: пространство V_j

Процесс построения **пространств V_j** можно продолжать и далее.

Пространство $V_j \subset L_2(\mathbb{R})$ — это пространство кусочно-постоянных функций на отрезках вида $\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^j}\right), k \in \mathbb{Z}$. Функции Хаара сжаты в 2^j раз, и система сдвигов функции $\varphi_{j,0} = 2^{j/2}\,\varphi\left(2^j x\right)$ на числа $\frac{n}{2^j}$ (то есть система функций $\varphi\left(2^j\left(x - n/2^j\right)\right) = \varphi\left(2^j x - n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$) образует ортонормированный базис в V_j .

Тогда для любой $f \in V_j$: $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k}\rangle\, \varphi_{j,k}$ или $V_j = \overline{\operatorname{span}\{\varphi_{j,k},\ k \in \mathbb{Z}\}}$.

Сдвиги функции $\varphi(2^j x)$ и пространство V_j



Также говорят, что пространство V_j порождено системой функций $\varphi_{j,n}$. Аналогично, имеет место и цепочка вложений $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_j$ и свойство $f(x) \in V_0 \iff f\left(2^j x\right) \in V_j$.

Продолжая процесс до бесконечности , получим бесконечную последовательность вложенных подпространств $V_j \subset L_2(\mathbb{R})$

$$V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_j \subset \ldots$$

Аналогично, можно ввести эти пространства и для отрицательных j.

$$V_{-j} \subset \ldots V_{-1} \subset V_0 \subset \ldots$$

КМА Хаара: пространства V_j

Пространство V_j имеет ортонормированный базис $\{\varphi_{j,n}\}$ и состоит из кусочно-постоянных функций. Известно, что такие функции образуют всюду плотное множество в $L_2(\mathbb{R})$, то есть любую функцию из $L_2(\mathbb{R})$ можно сколь угодно близко приблизить некоторой кусочно-постоянной функцией. Или, для любой $f \in L_2(\mathbb{R})$ и $\varepsilon > 0$ существует такой номер $j \in \mathbb{N}$ и кусочно-постоянная функция $g \in V_j$, что

$$\|f - g\| < \varepsilon.$$

Коротко, этот факт можно записать

$$\overline{\bigcup_{j=0}^{+\infty} V_j} = L_2(\mathbb{R}).$$

Аналогично, можно ввести эти пространства и для отрицательных j. Причем, продолжая этот процесс до $-\infty$, ясно, что

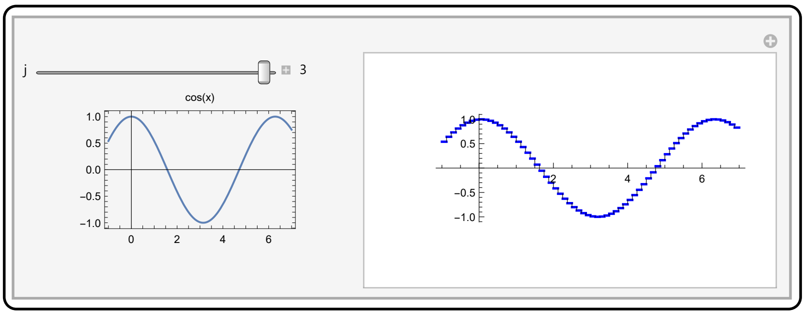
$$\bigcap_{j=-\infty}^{0} V_j = \{0\},$$

поскольку в предельном пространстве должны содержаться функции постоянные на всей оси и содержащиеся в $L_2(\mathbb{R})$, а это только тождественно равная нулю функция.

КМА Хаара: оператор P_j

Построенная последовательность вложенных подпространств $\ldots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_j \subset \ldots$, в некотором смысле работает как микроскоп, обладающий неограниченной разрешающей способностью, который все функции “видит” в кусочно-постоянном виде.

Приближения с помощью $\mathrm{V_j}$



$L_2(\mathbb{R})$ гильбертово пространство, V_j его подпространства, и каждое из них снабжено ортонормированным базисом, тогда **наилучшее приближение** произвольной функции f с помощью пространства V_j — это **ортогональная проекция** f с на пространство V_j, определяемая как

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f,\ \varphi_{j,k}\rangle\ \varphi_{j,k}.$$

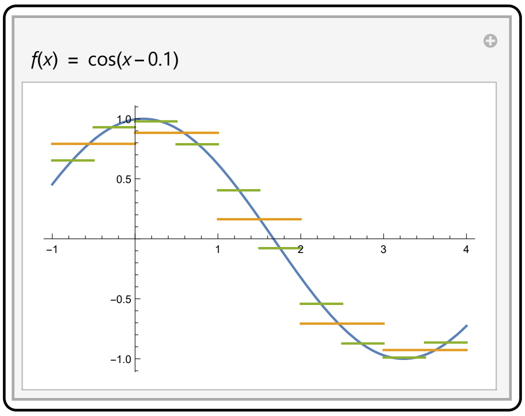
Оператор проектирования из $L_2(\mathbb{R})$ на V_j – это $P_j : L_2(\mathbb{R}) \to V_j$,

$$P_j(f)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f,\ \varphi_{j,k}\rangle\ \varphi_{j,k}(x).$$

Отметим, что для каждого фиксированного x сумма на самом деле конечна и состоит из одного слагаемого, поскольку носители функций $\varphi_{j,k}$ не пересекаются.

КМА Хаара: оператор P_j

Приближение функции в V_0 и V_1



Ясно, что чем больше j, тем точнее проекция $P_j(f)$ приближает функцию f. При переходе от $P_j(f)$ к $P_{j+1}(f)$ появляются дополнительные уточняющие детали.

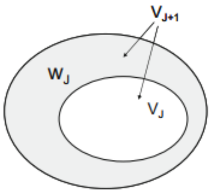
Недостатком КМА на данном этапе является то, что переходя от приближения $P_j(f)$ к $P_{j+1}(f)$ целиком меняется ортонормированный базис по которому идет разложение.

$$P_j(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \, \varphi_{j,k}, \quad P_{j+1}(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j+1,k} \rangle \, \varphi_{j+1,k}.$$

Гораздо более удобно было бы, если бы к базису пространства V_j можно было бы добавить некоторый набор функций и получить базис пространства V_{j+1}. Структура построенного КМА позволяет это сделать.

КМА Хаара: оператор P_j^W

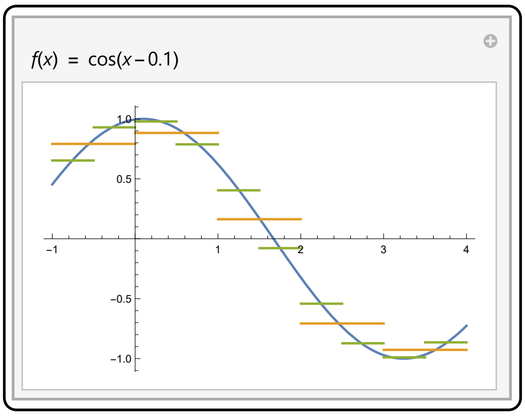
Обозначим за W_j ортогональное дополнение к пространству V_j в V_{j+1}, то есть
$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad V_j \perp W_j.$



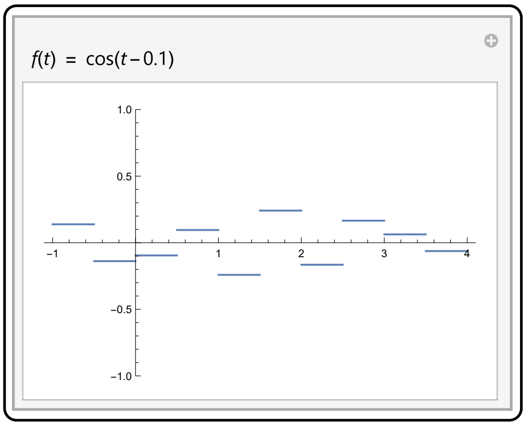
Обозначим за $P_j^W(f)$ ортогональную проекцию f на W_j.

Формула $P_{j+1}(f) = P_j(f) + P_j^W(f)$ соответствует этому ортогональному разложению пространства V_{j+1}. То есть более точное приближение $P_{j+1}(f)$ является суммой более грубого приближения $P_j(f)$ и деталей $P_j^W(f)$.

Приближение функции в V_0 и V_1



Разность приближений в V_0 и V_1



КМА Хаара: всплеск-функция

Рассмотрим пространства V_0 и W_0 и найдём в пространстве W_0 базис, состоящий из сдвигов одной функции.

Для любой функции $\psi \in W_0 \subset V_1$ есть разложение по ОНБ в V_1:

$$\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\varphi_{1,k}.$$

Но $V_0 \perp W_0$ и тогда $\langle\psi, \varphi_{0,n}\rangle = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. При этом

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,1}.$$

Тогда соотношение $\langle\psi, \varphi_{0,n}\rangle = 0$ можно записать так

$$\left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\varphi_{1,k},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,2n} + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,2n+1}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{2n} + c_{2n+1}) = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Эти система уравнений имеет бесконечно много решений (собственно, множество всех решений составляет пространство W_0). Рассмотрим самое простое из них, а именно $c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,0} - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,1} = \varphi(2x) - \varphi(2x-1), \quad \text{или} \quad \psi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1/2) \\ -1 & x \in [-1/2, 1) \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

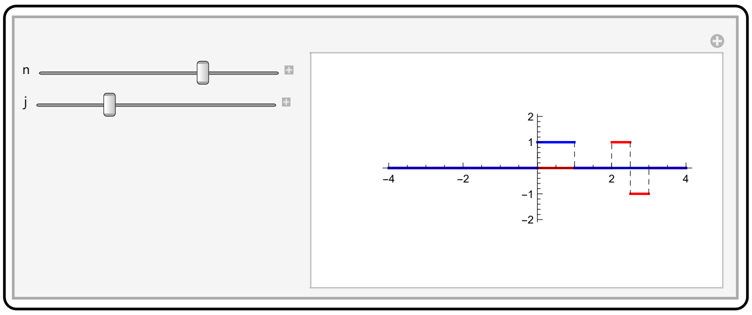
КМА Хаара: всплеск-функция

Для построения ортонормированного базиса W_0 мы и используем эту функцию ψ:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2) \\ -1, & x \in [1/2, 1) \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Её называют всплеском Хаара. Функция ψ кусочно-постоянна на отрезках длины $1/2$ и значит лежит в пространстве V_1.

КМА Хаара φ и ψ



КМА Хаара: пространство W_0

Можно показать, что система $\{\psi_{0,n},\ n \in \mathbb{Z}\}$ является ортонормированным базисом для W_0,
Сначала установим, что система $\{\varphi_{0,n},\ \psi_{0,n},\ \ n \in \mathbb{Z}\}$ — это ОНБ для V_1. Функции $\varphi_{0,n},\ \psi_{0,n}$ попарно ортогональны и любая базисная функция $\varphi_{1,n}(x)$ пространства V_1 может быть выражена через $\varphi_{0,n},\ \psi_{0,n}$:

$$\varphi_{1,0}(x) = \frac{\varphi_{0,0}(x) + \psi_{0,0}(x)}{\sqrt{2}}, \quad \varphi_{1,1}(x) = \frac{\varphi_{0,0}(x) - \psi_{0,0}(x)}{\sqrt{2}},$$

Выражения для остальных $\varphi_{1,n}(x)$ получаются сдвигами на n.

Поскольку $\{\varphi_{0,n},\ \psi_{0,n},\ \ n \in \mathbb{Z}\}$ — это ОНБ для V_1, а $\{\varphi_{0,n},\ n \in \mathbb{Z}\}$ — это ОНБ для V_0,
то $\{\psi_{0,n},\ n \in \mathbb{Z}\}$ является ОНБ для W_0, в силу того что W_0 — это ортогональное дополнение V_0 в V_1.

При этом формуле

$P_1(f) = P_0(f) + P_0^W(f)$ или $V_1 = V_0 \oplus W_0$ соответствует разложение

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f,\ \varphi_{1,k}\rangle\ \varphi_{1,k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f,\ \varphi_{0,k}\rangle\ \varphi_{0,k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f,\ \psi_{0,k}\rangle\ \psi_{0,k}.$$

КМА Хаара: пространства W_j

Аналогичным образом

$$V_{j+1} = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \ldots \oplus W_j,$$

и

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j+1,k} \rangle \varphi_{j+1,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{0,k} \rangle \varphi_{0,k} + \sum_{i=0}^{j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{i,k} \rangle \psi_{i,k}, \quad \forall f \in L_2(\mathbb{R}).$$

И более того, $L_2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \ldots \oplus W_j \oplus \ldots = V_0 \oplus \bigoplus_{j=0}^{+\infty} W_j.$

При этом ортонормированный базис $L_2(\mathbb{R})$ состоит из функций $\{\varphi_{0,n}, \psi_{j,n}, \; j = 0, 1 \ldots, n \in \mathbb{Z}\}$ и

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{0,k} \rangle \varphi_{0,k} + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

КМА Хаара: пространства W_j

Построение пространств W_j можно осуществить и для отрицательных j точно также. То есть

$$V_0 = V_{-j} \oplus W_{-j} \oplus W_{-j+1} \ldots \oplus W_{-1},$$

И более того, $V_0 = \bigoplus_{j=-\infty}^{-1} W_j$.

Таким образом,

$$L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j$$

и система функций $\{\psi_{j,n},\ j,\ n \in \mathbb{Z}\}$ образует ортонормированный базис пространства $L_2(\mathbb{R})$.
То есть для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$, выполнено

$$f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f,\ \psi_{j,k} \rangle\ \psi_{j,k}.$$

Ортогональный КМА

Ортогональным КМА для пространства $L_2(\mathbb{R})$ называется последовательность замкнутых подпространств $\{V_j\}$, обладающая свойствами:

КМА1. Они вложены друг в друга $\ldots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \ldots$

КМА2. Замыкание их объединения совпадает с $L_2(\mathbb{R})$: $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R})$.

КМА3. Пересечение всех подпространств состоит из нулевой функции: $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

КМА4. Масштабируемость: $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$.

КМА5. Существует функция $\varphi(x) \in V_0$ с компактным носителем, что ее целочисленные сдвиги $\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x-n)$ образуют ОНБ в пространства V_0.

$V_0 = \overline{\operatorname{span}\{\varphi_{0,k},\ k \in \mathbb{Z}\}}$. В силу масштабируемости $V_j = \overline{\operatorname{span}\{\varphi_{j,k},\ k \in \mathbb{Z}\}}$.

Основное свойство функции φ: поскольку $\varphi \in V_0 \subset V_1$, то φ раскладывается по базису пространства V_1, то есть φ представима в виде линейной комбинации собственных сдвинутых, сжатых копий

$$\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n]\ \varphi_{1,n} = \sqrt{2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n]\ \varphi(2x-n).$$

Это соотношение называется **масштабирующим уравнением**. Функции φ из $L_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющие масштабирующему уравнению для некоторой конечной последовательности h называются **масштабирующей функцией** (англ. scaling, refinable function). Последовательность h называется **масштабирующей маской.**

Всплеск-функцию можно получить из масштабирующей функции в виде

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^n\, \overline{h[1-n]}\, \varphi_{1,n} =: \sum_{k\in\mathbb{Z}} g[n]\, \varphi_{1,n},$$

где последовательность g называют **всплеск-маской.**

Всплеск Хаара

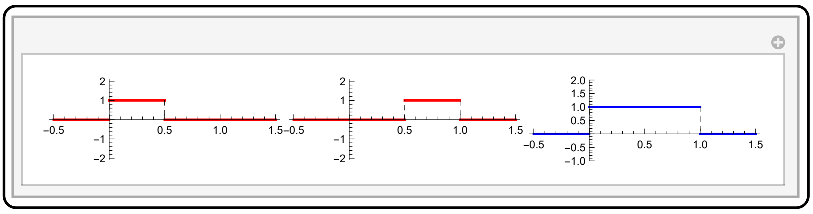
Функция Хаара $\varphi(x) = \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$,

удовлетворяет масштабирующему уравнению с $h[0] = h[1] = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h[n]\,\varphi_{1,n},$$

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^n\,\overline{h[1-n]}\,\varphi_{1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,0} - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,1}.$$

Масштабирующая фукция Хаара $\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1)$



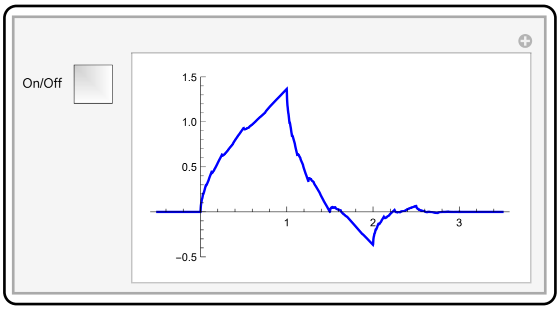
Пример φ

Масштабирующая функция Добеши второго порядка удовлетворяет масштабирующему уравнению с коэффициентами

$$h[0] = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{3}\right), \quad h[1] = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(3+\sqrt{3}\right),$$

$$h[2] = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(3-\sqrt{3}\right), \quad h[3] = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{3}\right).$$

Масштабирующая фукция Добеши $\varphi(x)$



Для этой функции нет аналитического выражения, график строится с помощью итерационных процедур. Также, известно, что целочисленные сдвиги этой функции образуют ортонормированную систему.

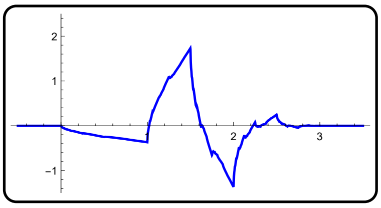
Пример ψ

Всплески Добеши второго порядка строятся по коэффициентам

$$g[0] = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{3}\right),\ g[1] = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(3-\sqrt{3}\right),$$

$$g[2] = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(3+\sqrt{3}\right),\ g[3] = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{3}\right).$$

Всплеск фукция Добеши $\psi(x)$



Для этой функции нет аналитического выражения, график строится с помощью итерационных процедур. Также, известно, что целочисленные сдвиги этой функции образуют ортонормированную систему.