Математические модели обработки сигналов

Тема 9: Теорема Котельникова и алиасинг

Лектор: Кривошеин А.В.

Причина искажений?

ДВПФ и Преобразование Фурье

Спектр сигнала $y \in \ell_2(\mathbb{Z})$ — это его ДВПФ:

$$\hat{y}(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\, e^{-2\pi i n \omega}, \quad \text{при этом } \hat{y} \in L_2[0, 1].$$

Спектр (спектральная функция) сигнала $x(t)$ из $L_2(\mathbb{R})$ — это его преобразование Фурье $\hat{x}(\omega)$:

$$\mathcal{F}\, x(\omega) := \hat{x}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, e^{-2\pi i \omega t}\, dt, \quad \omega \in \mathbb{R}, \text{ при этом } \hat{x}(\omega) \in L_2(\mathbb{R}).$$

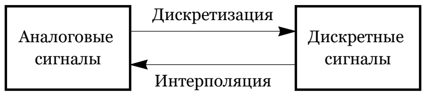
Обратное преобразование Фурье : $\left(\mathcal{F}^{-1}\, \hat{x}\right)(t) := \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\omega)\, e^{2\pi i \omega t}\, d\omega$

Дважды примененное преобразование Фурье : $\mathcal{F}(\mathcal{F}\, x)(t) = x(-t)$.

$$x(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{L}\right) = \begin{cases} 1, & |t| \le \frac{L}{2}; \\ 0 & |t| > \frac{L}{2}. \end{cases} \qquad \hat{x}(\omega) = L\, \operatorname{sinc}(\pi\, \omega\, L).$$

Дискретизация и интерполяция

Мир аналоговых сигналов и мир дискретных сигналов связаны процессами дискретизации и интерполяции (англ. *sampling and interpolation*).



Дискретизацию осуществляет оператор, действующий из некоторого множества функций (например, функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$) в пространство последовательностей $\ell(\mathbb{Z})$ (или в $\mathbb{C}^N$).

При равномерной дискретизации (англ. *uniform sampling, periodic sampling*) аналоговый сигнал $x_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ преобразуется в последовательность отсчётов $\{x[n]\}_n$, по правилу

$$x[n] = x_c(n\,T_s), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

T_s — это период дискретизации (англ. *sampling period*), $F_s = 1 / T_s$ — это частота дискретизации (англ. *sampling frequency*).

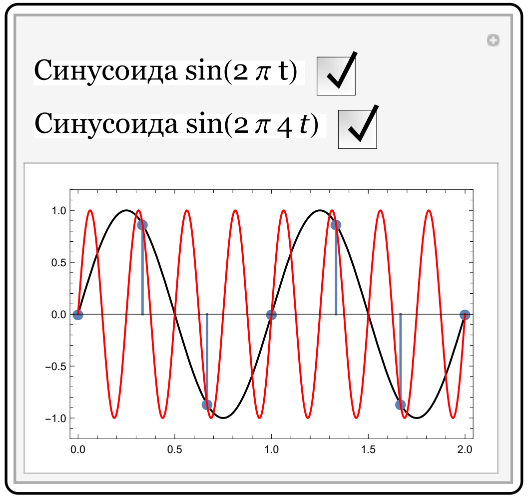
Интерполяцию осуществляет оператор, действующий из некоторого множества последовательностей (или из $\mathbb{C}^N$) в множество функций, определённых на $\mathbb{R}$ или на подмножестве $\mathbb{R}$. Причём эта функция такова, что её значения совпадают со значениями дискретных отсчётов на некоторой сетке.

На практике, процесс дискретизации реализуется с помощью аналого-цифрового преобразователя (АЦП, англ. *analog-to-digital converter*, *A/D converter*). Устройства, интерполирующие дискретный сигнал до непрерывного, называются цифро-аналоговым преобразователем (ЦАП, digital-to-analog converter, DAC).

Обратимость дискретизации

При дискретизации информация о значениях сигнала между дискретными отсчётами теряется. При этом один и тот же дискретный сигнал может быть результатом дискретизации бесконечного числа разных функций.

Неоднозначность восстановления по отсчётам



Значит, дискретизация, вообще говоря, не обратима. Но в условиях теоремы Котельникова, когда

исходный сигнал не содержит высоких частот,

отсчёты берутся достаточно часто,

то по дискретным отсчётам можно восстановить исходный аналоговый сигнал.

Теорема Котельникова 1933 (Шеннона, 1949)

ТЕОРЕМА Котельникова:

1. $x_c(t)$ непрерывная функция из $L_2(\mathbb{R})$. Спектр $\hat{x}_c(\omega)$ не содержит частот выше F, $\left(\operatorname{supp} \hat{x}_c(\omega) \subset [-F, F]\right)$.

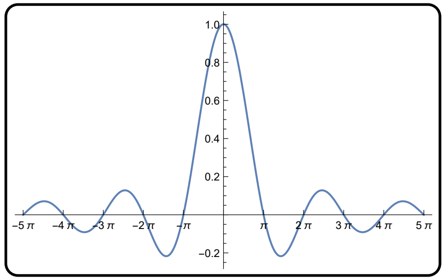
2. Дискретизация сигнала производится с частотой F_s.
То есть $x[n] = x_c(n\,T_s)$, где $T_s = 1/F_s$.

3. $F_s/2 \geq F$.

Тогда $$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(n\,T_s)\,\operatorname{sinc}(\pi F_s t - \pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T_s}(t - n\,T_s)\right),$$

где ряд сходится по норме в $L_2(\mathbb{R})$, а также равномерно и абсолютно.

График sinc–функции



$$\operatorname{sinc}(t) := \frac{\sin t}{t}.$$

Частота Найквиста
$$F_N = F_s/2\,.$$

Свойства sinc-функции

Свойства $\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$:

1) Симметричность относительно нуля (чётность);

2) $\operatorname{sinc}(0) = 1, \quad \operatorname{sinc}(\pi n) = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$;

3) sinc-функция принадлежит $L_2(\mathbb{R})$, но не принадлежит $L_1(\mathbb{R})$.

4) убывает асимптотически как $O\left(\frac{1}{|t|}\right)$ при $|t| \to \infty$.

Сигнал $h \in L_2(\mathbb{R})$, у которых преобразование Фурье имеет компактный носитель, называют **сигналами с финитным спектром** (англ. *bandlimited*), то есть существует такое число F, что $\hat{h}(\omega) = 0$ при $|\omega| \geq F$.

5) sinc-функция является простейшим сигналом с финитным спектром, её преобразованием Фурье является прямоугольная функция. Действительно, известно, что

$\operatorname{rect}(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \operatorname{sinc}(\pi\,\omega)$ и $\mathcal{F}(\mathcal{F}\,h) = h(-\,\cdot)$. А тогда по свойствам преобразования Фурье

$$\mathcal{F}\left(\operatorname{sinc}(\pi F_s\ \cdot)\right)(\xi) = \frac{1}{F_s}\operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{F_s}\right) = \begin{cases} \frac{1}{F_s}, & |\xi| \leq \frac{F_s}{2}; \\ 0 & |\xi| > \frac{F_s}{2}. \end{cases}$$

Итак, для успешного восстановления нужно, чтобы половина частоты дискретизации (или частота Найквиста) была больше, чем наибольшая частота в сигнале: $F_N = F_s / 2 \geq F$.

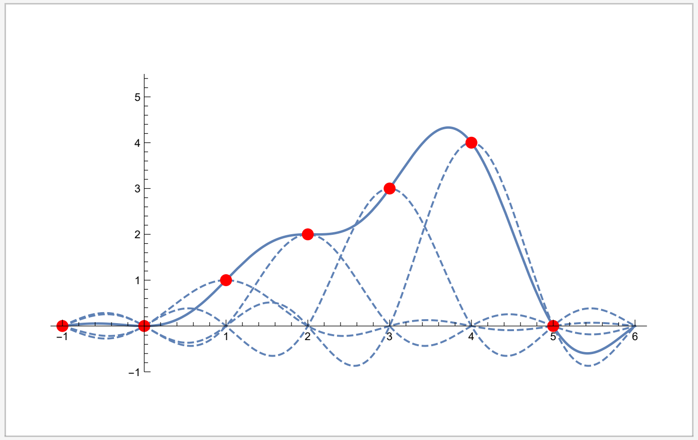
Если в сигнале есть частоты больше половины частоты дискретизации (или частоты Найквиста), то есть $F_N = F_s / 2 < F$, то восстановленный сигнал не будет совпадать с исходным.

Иллюстрация восстановления сигнала

Пусть $x[n] = \{\dots, \mathbf{0}, 1, 2, 3, 4, 0, \dots.\}$ и период дискретизации равен $F_s = 1$.

Тогда $x_c(t) = 1 \cdot \mathrm{sinc}(\pi\,(t-1)) + 2 \cdot \mathrm{sinc}(\pi\,(t-2)) + 3 \cdot \mathrm{sinc}(\pi\,(t-3)) + 4 \cdot \mathrm{sinc}(\pi\,(t-4))$

Показать sinc–функции



Сигнал $x[n]$ — конечен по длительности.

Восстановленный аналоговый сигнал $x_c(t)$ имеет неограниченную длительность, амплитуда колебаний на бесконечности стремится к нулю.

Пример применения теоремы Котельникова

Пусть $x_c(t) = \operatorname{sinc}(2\pi t) + \operatorname{sinc}(4\pi\ (t-1))$.

$x_c \in L_2(\mathbb{R})$ и спектр функции x_c не содержит частот выше $F = 2$, $(\operatorname{supp}\hat{x}_c(\omega) \subset [-2, 2])$, так как

$$\hat{x}_c(\omega) = \frac{1}{4}\left(2\,\chi_{[-1,1]}(\omega) + \chi_{[-2,2]}(\omega)\,e^{-2\pi i\omega}\right).$$

Приближения формулы Котельникова : $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} x_c(n\,T_s)\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T_s}(t - n\,T_s)\right)$

Спектр при дискретизации (пример)

Рассмотрим сигнал вида $x_c(t) = \text{sinc}^2(\pi\ t/3), x_c(t) \in L_2(\mathbb{R})$.
График спектра этого сигнала имеет вид треугольника с носителем на отрезке $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ и высотой 3.

Максимальная частота сигнала $F = 1/3$.

Проведём дискретизацию сигнала с периодом дискретизации $F_s = 1$: $x[n] = \text{sinc}^2(\pi\ n/3)$.

Частота Найквиста равна $F_N = 1/2$.

Функция и спектр | Последовательность и спектр | Восстановление

Спектр последовательности $\{x[n]\}_n$ имеет вид того же треугольника, повторяющегося с периодом 1.

Условия теоремы Котельникова выполняются, восстановление успешно.

Спектр при дискретизации (пример)

Что же будет происходить со спектром в случае, когда частота дискретизации недостаточна?

Следующий пример иллюстрирует **эффект наложения спектра**.

Когда частота Найквиста становится меньше максимальной частоты сигнала, то в спектре дискретного сигнала треугольники перекрывают друг друга. Появление искажённых частот не позволяет в точности восстановить сигнал.

Спектр при дискретизации (теория)

Установим связь между спектрами аналогового сигнала $x_c(t)$ и его дискретизации $\{x[n]\}$.

Пусть $x_c(t) \in L_2(\mathbb{R})$ непрерывный сигнал и частоты сигнала лежат внутри отрезка $\operatorname{supp} \hat{x}_c(\omega) \subset [-F, F]$, $x = \{x[n]\}$, где $x[n] = x_c(n\, T_s)$. Тогда связь между спектрами $x_c(t)$ и $\{x[n]\}$ следующая

$$\hat{x}(\omega) = F_s \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_c(F_s(\omega + k)).$$

Доказательство : $x[n] = x_c(n\, T_s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_c(\omega)\, e^{2 \pi i \omega n T_s}\, d\omega =$ (формула обратного ПФ)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{k F_s}^{(k+1) F_s} \hat{x}_c(\omega)\, e^{2 \pi i \omega n T_s}\, d\omega = \quad \text{(аддитивность интеграла)}, \quad \omega' := \omega - k\, F_s$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{0}^{F_s} \hat{x}_c(\omega + k\, F_s)\, e^{2 \pi i (\omega + k F_s) n T_s}\, d\omega = \quad \text{(замена переменной)}$$

$$\int_{0}^{F_s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_c(\omega + k\, F_s)\, e^{2 \pi i \omega n T_s}\, d\omega = \quad \text{(сумма конечна)} \quad \omega' := \omega\, T_s = \frac{\omega}{F_s}, \quad \omega = F_s\, \omega'$$

$$\int_{0}^{1} \left(F_s \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_c(F_s(\omega + k)) \right) e^{2 \pi i \omega n}\, d\omega\, . \quad \text{(замена переменной)}$$

Итак, $\{x[n]\}$ — это обратное ДВПФ для функции $F_s \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_c(F_s(\omega + k))$, которая из $L_2[0, 1]$. Значит,

$$\{x[n]\} \overset{\text{ДВПФ}}{\longleftrightarrow} \hat{x}(\omega) = F_s \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_c(F_s(\omega + k))\, .$$

Спектр при дискретизации (теория)

Итак, связь между спектрами : $\hat{x}(\omega) = F_s \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{x}_c(F_s(\omega + k)) = F_s \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{x}_c(F_s\,\omega + F_s\,k)$.

То есть $\hat{x}(\omega)$ является суммой сдвинутых сжатых\растянутых копий спектра $\hat{x}_c(\omega)$.

А именно, рассмотрим исходный спектр $\hat{x}_c(\omega)$. Формируем его копии сдвигами на частоты $k\,F_s$, $k \in \mathbb{Z}$,

получим последовательность функций $\hat{x}_c(\omega + F_s\,k)$. Суммируя по $k \in \mathbb{Z}$, получим размноженный исходный спектр:

$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{x}_c(\omega + F_s\,k)$. Это периодическая функция с периодом F_s.

Чтобы довести до $\hat{x}(\omega)$ осталось домножить на F_s и сжать в F_s раз аргумент, чтобы функция стала 1-периодичной.

В случае, когда $\frac{F_s}{2} \geq F$, то **перекрываний** копий спектра $\hat{x}_c(\omega)$ при размножении **не происходит**.

Тогда $\hat{x}(\omega)$ — это периодическое продолжение функции $\hat{x}_c(\omega)$ сжатой в F_s раз. Например, для интервала частот $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ верно, что

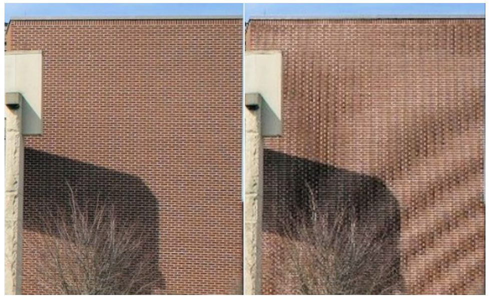
$$\hat{x}(\omega) = F_s\,\hat{x}_c(F_s\,\omega), \quad \text{при } \omega \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}].$$

В случае, когда $\frac{F_s}{2} < F$, возникает **эффект наложения частот (aliasing, алиасинг)** спектра $\hat{x}_c(\omega)$ при размножении.

Out[•]=

Демонстрация алиасинга

Wagon-wheel effect на видео и алиасинг в изображениях.



Звук: для частоты дискретизации 8000Гц синусоиды с частотой 500Гц и 7500Гц звучат одинаково.

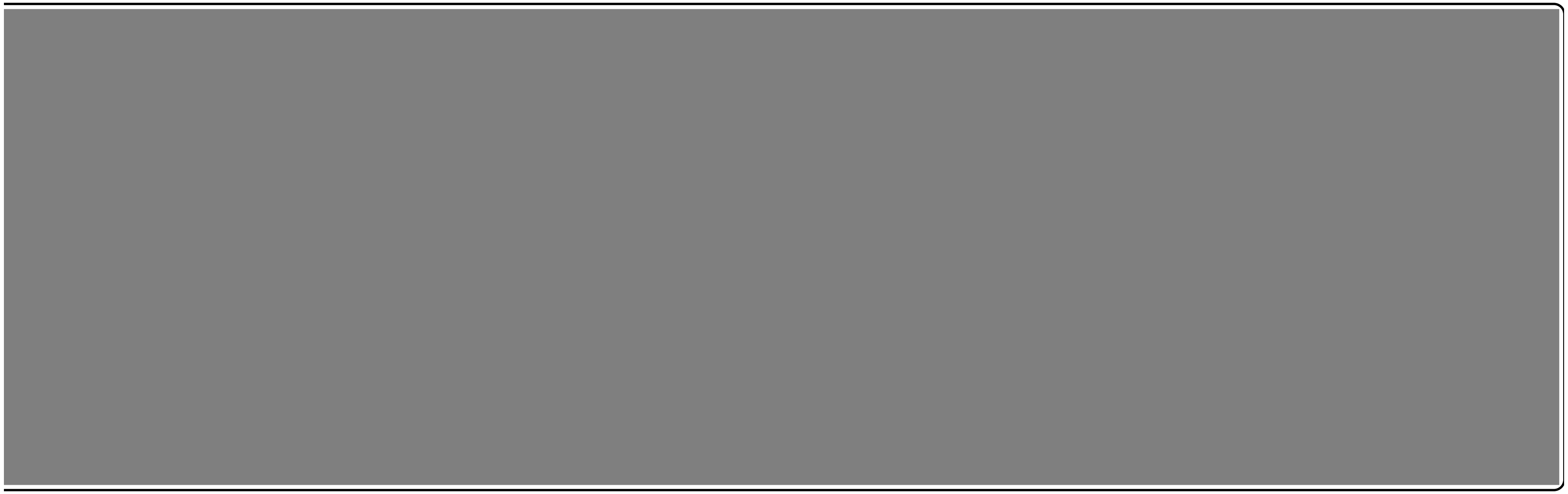
Эффект наложения частот (звук)

Восстановление спектра исходного сигнала

Если нет перекрывания спектров, то исходный спектр $\hat{x}_c(\omega)$ может быть восстановлен по $\hat{x}(\omega)$.

Вырежем из $\hat{x}(\omega) = F_s \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \hat{x}_c(\, F_s(\omega - k))$ центральную часть, умножив на rect(t).

Out[▪]=



Именно так восстанавливается сигнал в формуле Котельникова.

Применим преобразование Фурье к $x_c(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\ \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T_s}(t - n\,T_s)\right)$:

$$\hat{x}_c(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-2\pi i n T_s \omega}\, \frac{1}{F_s}\, \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{F_s}\right) = \hat{x}(\omega\, T_s)\, \frac{1}{F_s}\, \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{F_s}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{x}_c(\,\omega - F_s\, k)\, \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{F_s}\right)$$

При перекрывании спектров исходный сигнал не может быть точно восстановлен по его отсчётам. Также и спектр исходного сигнала никак не может быть восстановлен по спектру последовательности из-за наличия искажений.

Как избежать наложения частот?

На практике абсолютная точность восстановления сигнала не достижима. Причины:

- в природе нет сигналов с финитным спектром;
- восстановление возможно только с помощью частичных сумм ряда;
- восстановление возможно только на конечном по длительности промежутке времени;
- sinc-функции имеют медленное затухание на бесконечности.

Однако, теорема Котельникова даёт условия для дискретизации без алиасинга.

Рассмотрим случай, когда полезная часть спектра сигнала сосредоточена около нулевой частоты и есть высокочастотный шум. Два варианта действий:

Вариант 1: выбрать такую частоту дискретизации, чтобы и полезная часть спектра и шум были записаны без искажений, а затем использовать цифровой фильтр, который подавит шум. На практике, чем выше частота дискретизации, тем выше стоимость этого устройства оцифровки. Часто, нет априорной информации о распределении частот в сигнале.

Подбор подходящей частоты дискретизации

Как избежать наложения частот?

Вариант 2: в аналоговом сигнале подавить ненужные частоты, а затем провести дискретизацию. Подавить высокие частоты можно фильтром низких частот.

Фильтрование спектра

При записи аудио CD звуковой сигнал оцифровывается с частотой дискретизации 44,1 кГц. Частота Найквиста равна 22,05 кГц, и верхняя граница частоты звукового сигнала составляет 22,05 кГц (что целиком покрывает слышимый человеком диапазон звуков). Для того, чтобы избежать искажений при оцифровке звука, необходимо подавить все частоты выше 22 кГц.

Фильтровать или не фильтровать?

При фильтрации сигнала фильтром, отсекающим высокие частоты, мы теряем часть частотной информации. Но это всё же лучше, чем проводить дискретизацию без этого фильтра. При фильтрации часть информации сохраняется не тронутой алиасингом, а часть теряется, в то время как без фильтрации вся информация может быть подвергнута искажениям.

Сравнения дискретизации с/без фильтрации

Обнаружение алиасинга по ДПФ

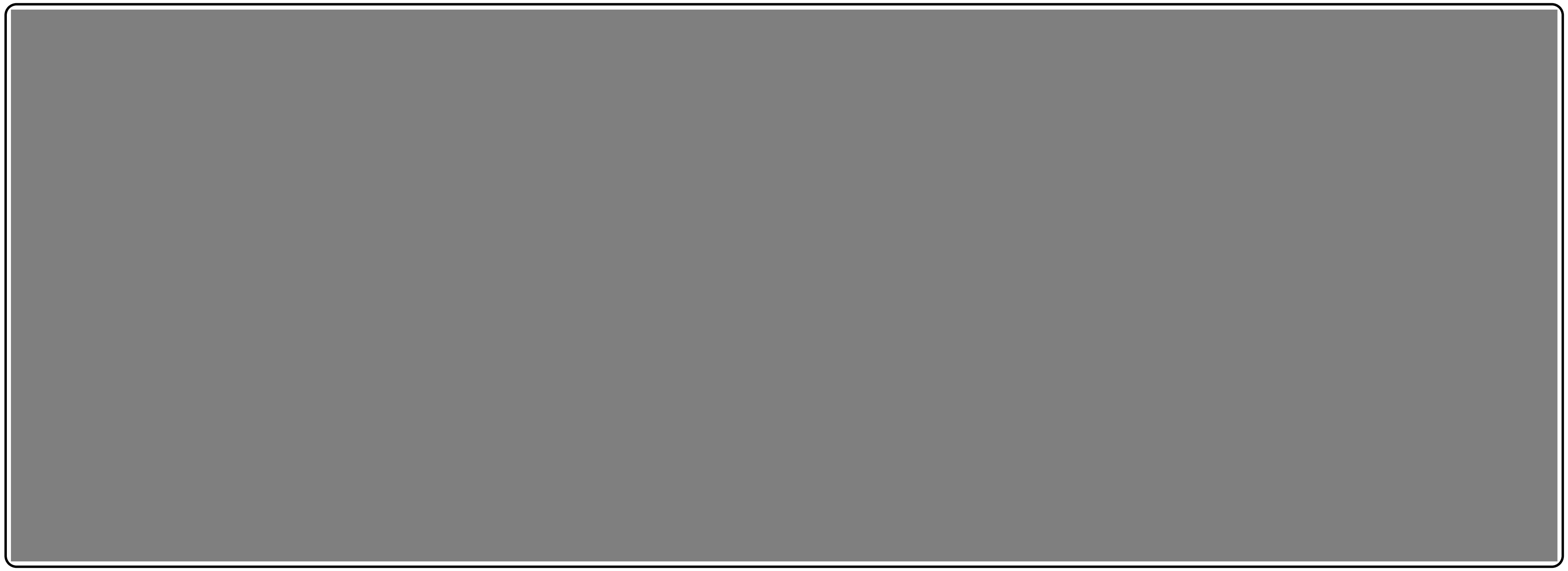
Если заранее неизвестно распределение частот в сигнале, можно ли понять, есть ли в сигнале частоты выше частоты Найквиста, а значит возникнет ли эффект наложения частот?

Если при дискретизации можно изменять частоту F_s, то ДПФ может помочь в этом вопросе.

Рассмотрим графики амплитуд ДПФ сигналов с разными частотами дискретизации. Если некоторые спектральные компоненты сигнала **перемещаются по частотам**, то это говорит о наличии алиасинга.

Это перемещение частотных компонент по графику ДПФ проиллюстрировано ниже. По оси Ox отложены реальные частоты от $-\frac{F_s}{2}$ до $\frac{F_s}{2}$ (то есть нормализованная частота умноженная на частоту дискретизации F_s). По графикам амплитуд видно, что частотные компоненты в виде треугольников перемещаются по спектру при малых частотах дискретизации, что говорит о наличии алиасинга.

Обнаружения алиасинга по ДПФ



Интерполяция

Теорема Котельникова является специальным видом интерполяции, то есть преобразованием дискретного сигнала в аналоговый.

$$x_I(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi (t - n T_s)}{T_s}\right).$$

При подстановке $t = n T_s$, получим $x_I(n T_s) = x[n]$, в силу свойств функции sinc (а именно $\operatorname{sinc}(\pi n) = \delta_{o,n}$). Таким образом, функция $x_I(t)$ интерполирует последовательность x. Кроме того, если последовательность x является результатом дискретизации некоторой функции $x_c(t)$, то $x_I(n T_s) = x_c(n T_s)$, в любом случае, выполняется теорема Котельникова или нет.

В этом случае спектр функции x_I связан с ДВПФ последовательности $\{x[n]\}$ так:

$$\hat{x}_I(\omega) = \frac{1}{F_s} \hat{x}\left(\frac{\omega}{F_s}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{F_s}\right).$$

Интерполяция

Рассмотрим иную схему интерполяции: положим функцию равной $x[n]$ при $t = n\, T_s$ и равной некоторой линейной комбинации соседних значений, когда t между отсчётами. Общий вид такой локальной интерполяции такой

$$x_I(t) = \sum_n x[n]\, I\left(\frac{t - n\, T_s}{T_s}\right)$$

где $I(t)$ интерполяционная функция. Интерполяционная функция такова, что

$$I(0) = 1$$

$$I(k) = 0, \text{ для } k \neq 0.$$

В частотной области:

$$\mathcal{F}\, x_I(\omega) = \frac{1}{F_s}\, \hat{x}\left(\frac{\omega}{F_s}\right) \hat{I}\left(\frac{\omega}{F_s}\right)$$

Примеры:

Интерполяция нулевого порядка : $I_0(t) = \operatorname{rect}(t)$

Интерполяция первого порядка : $I_1(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{при } |t| < 1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

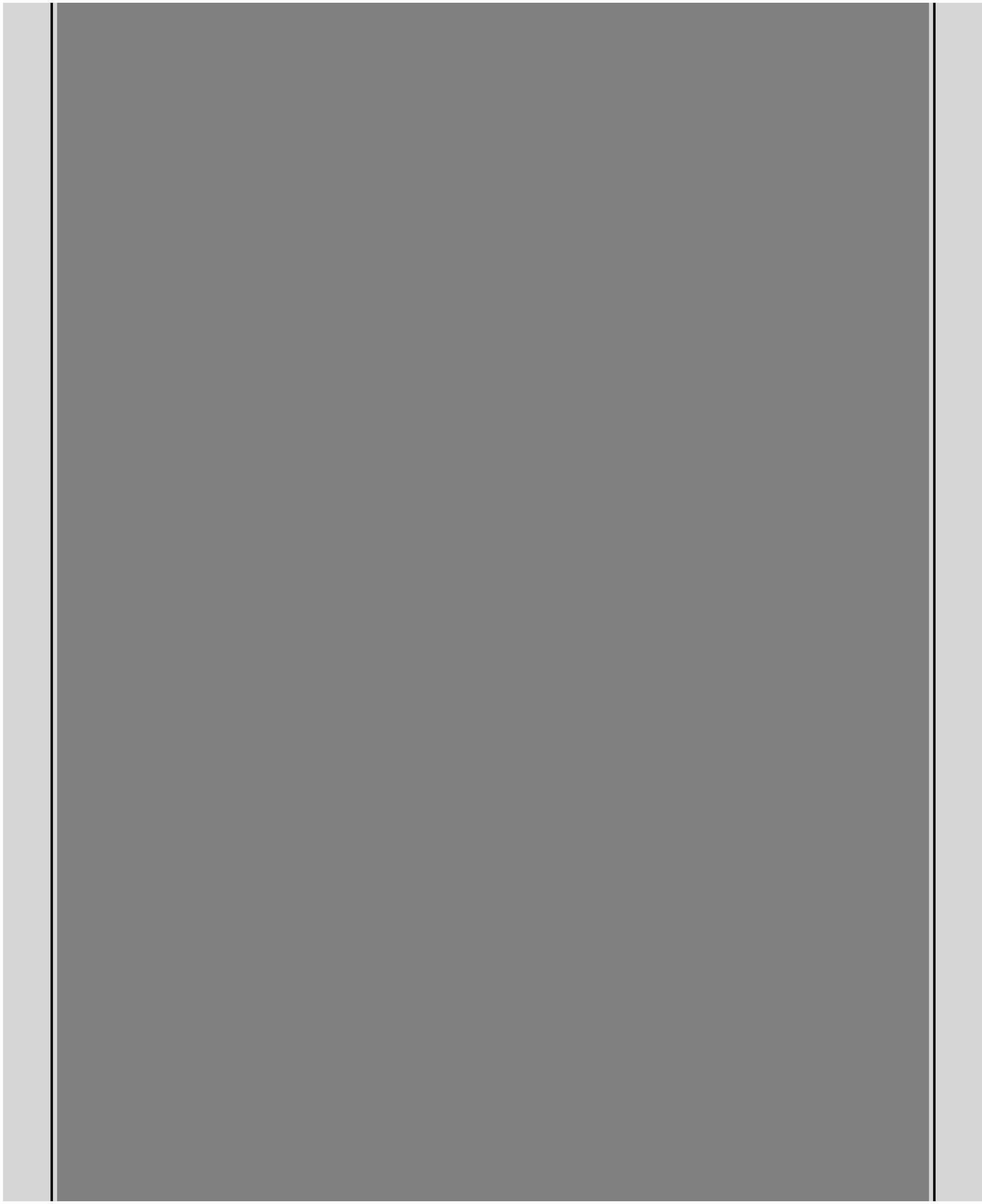
Интерполяция

0–го порядка | 1–го порядка

Интерполяция первого порядка

Интерполяция первого порядка

Out[◦]=



Дискретизация и интерполяция

Линейная интерполяция дискретизации с/без фильтрации в частотной области

Out[ ]=

Спектр в этом примере построен из функции Гаусса и треугольников, и имеет явный вид

$$\hat{x}_c(\omega) \;=\; e^{-\omega^2/2} \;+\; I_1(2\,\omega - 5) \;+\; I_1(2\,\omega + 5)$$

Тогда сам сигнал имеет вид (по свойствам преобразования Фурье)

$$x_c(t) \;=\; \sqrt{2\,\pi}\;\, e^{-2\,\pi^2\,t^2} \;+ \mathrm{sinc}^2\!\left(\frac{\pi\,t}{2}\right)\cos(5\,\pi\,t)$$

Во временной области связь графика сигнала и его линейная интерполяции по дискретизации проиллюстрирована ниже.

Линейная интерполяция дискретизации во временной области

Чтобы избежать искажений при восстановлении сигнала интерполяцией 1-го порядка надо брать частоту дискретизации значительно выше, чем удвоенная максимальная частота в сигнале.