Математические модели обработки сигналов

Тема 17: Построение КМА и всплеск-фильтров

Лектор: Кривошеин А.В.

Построение КМА

Ортогональным КМА для пространства $L_2(\mathbb{R})$ называется последовательность замкнутых подпространств $\{V_j\}$, обладающая свойствами:

КМА1. Они вложены друг в друга $\ldots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \ldots$

КМА2. Замыкание их объединения совпадает с $L_2(\mathbb{R})$: $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R})$.

КМА3. Пересечение всех подпространств состоит из нулевой функции: $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

КМА4. Масштабируемость: $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$.

КМА5. Существует функция $\varphi(x) \in V_0$ с компактным носителем, что ее целочисленные сдвиги $\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x-n)$ образуют ОНБ в пространства V_0.

$V_0 = \overline{\operatorname{span}\{\varphi_{0,k},\ k \in \mathbb{Z}\}}$. В силу масштабируемости $V_j = \overline{\operatorname{span}\{\varphi_{j,k},\ k \in \mathbb{Z}\}}$.

Основное свойство функции φ: поскольку $\varphi \in V_0 \subset V_1$,

то φ раскладывается по базису пространства V_1,

то есть φ представима в виде линейной комбинации собственных сдвинутых, сжатых копий

$$\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n]\ \varphi_{1,n} = \sqrt{2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n]\ \varphi(2x-n).$$

Это уравнение относительно функции φ называют **масштабирующим уравнением**.

Построение КМА

Наиболее ограничительными свойствами КМА являются **КМА5 и КМА1.**

Рассмотрим масштабирующее уравнению в частотной области, применив к нему преобразование Фурье

$$\hat{\varphi}(\omega) = \mathcal{F}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n]\ \ \varphi_{1,n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n]\ \ \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-2\pi i n \frac{\omega}{2}} = \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)\ \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

где $\hat{h}(\omega) \ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n]\ e^{-2\pi i n \omega}$.

Это равенство можно итерировать:

$$\hat{\varphi}(\omega) = \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{h}\left(\frac{\omega}{4}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{4}\right) =. \ldots = \prod_{j=1}^{\infty}\hat{h}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\hat{\varphi}(0).$$

То есть по масштабирующей маске h можно построить функцию φ.

Если маска h как последовательность конечна, то $\hat{h}(\omega)$ является тригонометрическим полиномом, а функция φ имеет компактный носитель.

Ортогональный КМА: условия ортогональности

Теорема. Функции $\varphi_{0,n}$ образуют ортонормированную систему тогда и только тогда, когда

$$\Phi(\omega) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\,\hat{\varphi}(\omega + n)|^2 = 1\,.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\langle\varphi, \varphi_{0,n}\rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi)\,\overline{\hat{\varphi}(\xi)\,e^{2\pi i n \xi}}\,d\xi =$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{k}^{k+1} |\hat{\varphi}(\xi)|^2\,e^{-2\pi i n\xi}\,d\xi = \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2\,e^{-2\pi i n\xi}\,d\xi = C_n(\Phi) = \delta_{0,n}.$$

где $C_n(\Phi)$ обозначают коэффициенты Фурье функции Φ. Значит $\Phi = 1$. •

Ортогональный КМА: условия ортогональности

Теорема. Если функции $\varphi_{0,n}$ образуют ортонормированную систему, то маска удовлетворяет равенству

$$\left|\hat{h}(\omega)\right|^2 + \left|\hat{h}\left(\omega + \tfrac{1}{2}\right)\right|^2 = 1\,.$$

Доказательство. Из масштабирующего уравнения в частотной области $\hat{\varphi}(\omega) = \hat{h}(\frac{\omega}{2})\ \hat{\varphi}(\frac{\omega}{2})$,

$$1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2\,k)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 1 + 2\,k)|^2 =$$

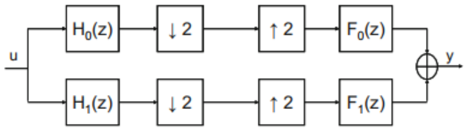
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\right)\right|^2 \left|\hat{h}\left(\frac{\xi}{2} + k\right)\right|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} + k\right)\right|^2 \left|\hat{h}\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} + k\right)\right|^2$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\right)\right|^2 \left|\hat{h}\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2} + k\right)\right|^2 \left|\hat{h}\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right)\right|^2 = \left|\hat{h}(\omega)\right|^2 + \left|\hat{h}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)\right|^2 . \bullet$$

Достаточные условия для ортонормированности сдвигов также известны, хотя несколько более сложны.

ДВП: банк фильтров

Общая схема ДВП



Проанализируем схему и найдём условия, при которых входной сигнал проходит через схему без изменений.

К входному сигналу применяется две системы: дискретная свёртка с фильтром + down-sampling:

$$x \;\to\; x^h = h * x \;\to\; x^h \downarrow 2 \;\to\; A[k] = x^h[2\,k],$$

$$x \;\to\; x^g = g * x \;\to\; x^g \downarrow 2 \;\to\; D[k] = x^g[2\,k].$$

Полученные компоненты будем обозначать $A[k]$, $D[k]$ (от англ. Approximation и Details).

Результат работы этой схемы разложения сигнала на компоненты в явном виде следующий

$$A[k] := x^h[2\,k] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{h[n]}\, x[n+2\,k] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h^*[n]\, x[2\,k-n] = h^* * x[2\,k]\,,$$

$$D[k] := x^g[2\,k] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{g[n]}\, x[n+2\,k] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g^*[n]\, x[2\,k-n] = g^* * x[2\,k].$$

где $\overline{h[-n]} =: h^*[n]$, $\overline{g[-n]} =: g^*[n]$.

ДВП: банк фильтров

С точки зрения спектров:

$$\hat{h}^*(\omega) = \overline{\hat{h}(\omega)}, \quad \hat{g}^*(\omega) = \overline{\hat{g}(\omega)},$$

$$(h^* * x)^\wedge(\omega) = \hat{x}(\omega)\,\overline{\hat{h}(\omega)}, \quad (g^* * x)^\wedge(\omega) = \hat{x}(\omega)\,\overline{\hat{g}(\omega)},$$

Установим связь спектров входного сигнала и его down-sampling.

Пусть $u = \{u[n]\} \in \ell_1(\mathbb{Z})$ — это входная последовательность и $y[n] = u[2\,n]$. Формулы спектра $\hat{y}(\omega)$ и $\hat{y}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)$ имеют вид

$$\hat{y}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n]\, e^{-2\pi i n \omega},$$

$$\hat{y}\left(\omega + \frac{1}{2}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y[n]\, e^{-2\pi i n \omega}\, e^{\pi i n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n\, y[n]\, e^{-2\pi i n \omega}.$$

Тогда $\frac{1}{2}\left(\hat{y}(\omega) + \hat{y}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u[2\,n]\, e^{-2\pi i 2 n \omega} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u[n]\, e^{-2\pi i n 2\omega} = \hat{u}(2\,\omega)$.

В итоге спектр после down – sampling: $\hat{u}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{y}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \hat{y}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\right)\right)$.

Тогда

$$\hat{A}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{x}\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{\hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \hat{x}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\right)\overline{\hat{h}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\right)}\right), \quad \hat{D}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{x}\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{\hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \hat{x}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\right)\overline{\hat{g}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\right)}\right).$$

ДВП: банк фильтров

Далее, синтезируем сигнал с помощью другой пары фильтров h^d и g^d (будем называть их двойственными фильтрами):

$$A \;\rightarrow\; A\!\uparrow\!2 \;\rightarrow\; h^d * (A \uparrow 2),$$
$$D \;\rightarrow\; D\!\uparrow\!2 \;\rightarrow\; g^d * (D \uparrow 2),$$
$$z \;=\; h^d * (A \uparrow 2) \;+\; g^d * (D \uparrow 2) \quad \text{или} \quad z[n] \;=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(h^d[n-2\,k]\, A[k] \;+\; g^d[n-2\,k]\, D[k]\Big).$$

Спектр после up-sampling: пусть $u = \{u[n]\} \in \ell_1(\mathbb{Z})$ — это входная последовательность и $z[n] \;=(y\!\uparrow 2)[n] := \begin{cases} y[k], & n = 2\,k \\ 0, & n = 2\,k+1 \end{cases}.$

Тогда $\hat{z}(\omega) \;=\; \hat{y}(2\,\omega)$.

В итоге спектр z будет равен

$$\hat{z}(\omega) \;=\; \hat{A}(2\,\omega)\,\hat{h^d}(\omega) \;+\; \hat{D}(2\,\omega)\,\hat{g^d}(\omega).$$

ДВП: банк фильтров

Сигнал z равен исходному x, если равны спектры. Действительно,

$$
\begin{aligned}
\hat{z}(\omega) \;&=\; \hat{A}(2\,\omega)\,\hat{h^d}(\omega) \;+\; \hat{D}(2\,\omega)\,\hat{g^d}(\omega) \\
&= \frac{1}{2}\left(\hat{x}(\omega)\,\overline{\hat{h}(\omega)} + \hat{x}\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\overline{\hat{h}\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}\right)\hat{h^d}(\omega) \;+\; \frac{1}{2}\left(\hat{x}(\omega)\,\overline{\hat{g}(\omega)} + \hat{x}\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\overline{\hat{g}\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}\right)\hat{g^d}(\omega) \\
&= \frac{1}{2}\,\hat{x}(\omega)\left(\overline{\hat{h}(\omega)}\,\hat{h^d}(\omega) \;+\; \overline{\hat{g}\,(\omega)}\,\hat{g^d}(\omega)\right) \;+\; \frac{1}{2}\,\hat{x}\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{\hat{h}\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}\,\hat{h^d}(\omega) \;+\; \overline{\hat{g}\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}\,\hat{g^d}(\omega)\right).
\end{aligned}
$$

Таким образом, чтобы восстановить спектр исходного сигнала, надо потребовать

$$
\begin{aligned}
&\overline{\hat{h}(\omega)}\,\hat{h^d}(\omega) \;+\; \overline{\hat{g}\,(\omega)}\,\hat{g^d}(\omega) = 1, \\
&\overline{\hat{h}\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}\,\hat{h^d}(\omega) \;+\; \overline{\hat{g}\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}\,\hat{g^d}(\omega) = 0.
\end{aligned}
$$

Или в матричном виде

$$
\overline{\begin{pmatrix} \hat{h}\,(\omega) & \hat{g}(\omega) \\ \hat{h}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) & \hat{g}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}}
\begin{pmatrix} \hat{h^d}\,(\omega) \\ \hat{g^d}\,(\omega) \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \hat{h}\,(\omega) & \hat{h}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \\ \hat{g}\,(\omega) & \hat{g}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}^{*}
\begin{pmatrix} \hat{h^d}\,(\omega) \\ \hat{g^d}\,(\omega) \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

где обозначение A^* для матрицы A, значит $A^* = \overline{A^T}$, то есть комплексное сопряжение с транспонированием.

ДВП: банк фильтров

Также условие можно переписать в виде:

$$\overline{\begin{pmatrix} \hat{h}(\omega) & \hat{g}(\omega) \\ \hat{h}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) & \hat{g}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \hat{h^d}(\omega) & \hat{h^d}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \\ \hat{g^d}(\omega) & \hat{g^d}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

То есть к исходным двум условиям, добавлено еще два в виде

$$\overline{\hat{h}(\omega)}\,\hat{h^d}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) + \overline{\hat{g}(\omega)}\,\hat{g^d}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\overline{\hat{h}\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}\,\hat{h^d}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) + \overline{\hat{g}\left(\omega+\frac{1}{2}\right)}\,\hat{g^d}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) = 1.$$

На самом деле, это те же два исходных условия, но с аргументом сдвинутым на $\frac{1}{2}$.

Еще один вид записи:

$$\mathcal{M}^*(\omega)\ \mathcal{M}_d(\omega) := \begin{pmatrix} \hat{h}(\omega) & \hat{h}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \\ \hat{g}(\omega) & \hat{g}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \hat{h^d}(\omega) & \hat{h^d}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \\ \hat{g^d}(\omega) & \hat{g^d}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ДВП: Сопряжённые квадратурные фильтры

Найдем фильтры H и G, такие, что матрица

$$\mathcal{M}(\omega) = \begin{pmatrix} \hat{H}(\omega) & \hat{H}\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \\ \hat{G}(\omega) & \hat{G}\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \text{ – унитарна, } \mathcal{M}^*(\omega)\,\mathcal{M}(\omega) = \overline{\mathcal{M}^T(\omega)}\,\mathcal{M}(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Взяв в качестве фильтра H такой, что $\left|\hat{H}(\omega)\right|^2 + \left|\hat{H}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)\right|^2 = 1$ и $\hat{G}(\omega) := -e^{-2\pi i\omega}\,\overline{\hat{H}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)}$, получим матрицу

$$\mathcal{M}(\omega) = \begin{pmatrix} \hat{H}(\omega) & \hat{H}\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \\ -e^{-2\pi i\omega}\,\overline{\hat{H}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} & e^{-2\pi i\omega}\,\overline{\hat{H}(\omega)} \end{pmatrix}$$

, которая действительно унитарна так как

$$\overline{\mathcal{M}^T(\omega)}\,\mathcal{M}(\omega) = =$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\hat{H}(\omega)} & -e^{2\pi i\omega}\,\hat{H}\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \\ \overline{\hat{H}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} & e^{2\pi i\omega}\,\hat{H}(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{H}(\omega) & \hat{H}\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \\ -e^{-2\pi i\omega}\,\overline{\hat{H}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} & e^{-2\pi i\omega}\,\overline{\hat{H}(\omega)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, в качестве $\mathcal{M}^d(\omega)$ можно взять $\mathcal{M}(\omega)$. Таким образом, начав с фильтра H такого, что $\left|\hat{H}(\omega)\right|^2 + \left|\hat{H}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)\right|^2 = 1$, остальные фильтры можно положить равными

$$\hat{G}(\omega) = -e^{-2\pi i\omega}\,\overline{\hat{H}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)}, \quad \hat{H^d}(\omega) = \hat{H}(\omega), \quad \hat{G^d}(\omega) = -e^{-2\pi i\omega}\,\overline{\hat{H}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)}$$

Такие фильтры называются сопряжёнными квадратурными фильтрами (quadratue-mirror filters, QMF)

Пример

Рассмотрим банк фильтров Хаара:

фильтр H таков, что $H[0] = \frac{1}{2}$, $H[1] = \frac{1}{2}$ и оставшиеся элементы равны нулю.

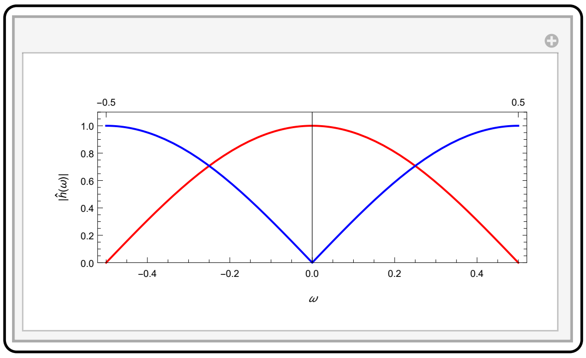
КЧХ: $\hat{H}(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\pi i \omega} = \cos(\pi\omega)\, e^{-2\pi i \frac{\omega}{2}}$,

При этом $\left|\hat{H}(\omega)\right|^2 + \left|\hat{H}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)\right|^2 = 1$. Значит остальные фильтры можно получить по схеме сопряженных квадратурных фильтров.

$$\hat{G}(\omega) = -e^{-2\pi i \omega}\, \overline{\hat{H}\left(\omega + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2\pi i \omega} = i \sin(\pi\omega)\, e^{-2\pi i \frac{\omega}{2}}.$$

То есть $G[0] = \frac{1}{2}$, $G[1] = -\frac{1}{2}$ и оставшиеся элементы равны нулю.

График АЧХ и ФЧХ



Обобщение банка фильтров

На самом деле можно сформировать банк фильтров $(h, g_1, \ldots, g_r)$, $\left(h^d, g_1^d, \ldots, g_r^d\right)$ с условием:

$$\mathcal{M}^*(\omega)\ \mathcal{M}_d(\omega) := \begin{pmatrix} \hat{h}(\omega) & \hat{h}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \\ \hat{g}_1(\omega) & \hat{g}_1\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \\ \hat{g}_2(\omega) & \hat{g}_2\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \\ \ldots & \ldots \\ \hat{g}_r(\omega) & \hat{g}_r\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \hat{h^d}(\omega) & \hat{h^d}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \\ \hat{g_1^d}(\omega) & \hat{g_1^d}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \\ \hat{g_2^d}(\omega) & \hat{g_2^d}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \\ \ldots & \ldots \\ \hat{g_r^d}(\omega) & \hat{g_r^d}\left(\omega+\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом можно проводить анализ и синтез сигнала.