Математические модели обработки сигналов

Тема 11: Рекурсивные фильтры

Лектор: Кривошеин А.В.

Линейные стационарные системы

Пусть $x_1,\ x_2 \in \ell(\mathbb{Z}),\ \ y_i[n] = \mathcal{T}\{x_i[n]\},\ \ i = 1,\ 2.$

- **Линейность:** $\mathcal{T}\{\alpha\, x_1[n] + \beta\, x_2[n]\} = \alpha\, \mathcal{T}\{x_1[n]\} + \beta\, \mathcal{T}\{x_2[n]\}$, где $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$.
- **Стационарность** (инвариантность к сдвигу): если для $\forall\ n_0 \in \mathbb{Z}$:

  $\mathcal{T}\{x[n - n_0]\} = \{y[n - n_0]\}$, то есть сдвиг входной последовательности влечёт такой же сдвиг выходной.

  ЛС система полностью характеризуется откликом на единичный импульс : $h = \{h[n]\} = \mathcal{T}\{\delta[n]\}$.

Для входного сигнала x, отклик ЛС системы $y = \mathcal{T}\, x$ можно получить в виде дискретной свёртки $y = x * h$.

То есть $\forall\ n \in \mathbb{Z}\quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n - k]$.

ДВПФ свёртки : $x * h \overset{\text{ДВПФ}}{\longleftrightarrow} \hat{x}(\omega)\, \hat{h}(\omega)$ является произведением ДВПФ сигнала и ДВПФ фильтра.

ЛС системы ещё называют **линейными фильтрами**. Фильтры делятся на КИХ-фильтры и БИХ-фильтры.

Алгоритмы построения КИХ-фильтров позволяют достичь любого желаемого вида АЧХ $|\hat{h}(\omega)|$, но чем точнее приближение, тем большее число коэффициентов фильтра требуется.

БИХ-фильтры на первый взгляд не реализуемы в точности, однако, это на самом деле не так.

Реализуем ли сумматор?

ЛС система сумматор : $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k], \ \forall \ n \in \mathbb{Z}.$

Импульсная характеристика сумматора — это единичный скачок: $h[n] = u[n]$ и $y = x * h$.
Сумматор — это БИХ-фильтр, формально для подсчёта свёртки $x * h$ требуется бесконечное число операций.

Реализуем ли сумматор?

ЛС система сумматор : $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k], \quad \forall \; n \in \mathbb{Z}.$

Импульсная характеристика сумматора - это единичный скачок: $h[n] = u[n]$, и $y = x * h$.
Сумматор — это БИХ-фильтр, формально для подсчёта свёртки $x * h$ требуется бесконечное число операций.

Рассмотрим формулу для отсчета с индексом $n-1$

$$y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k].$$

Тогда $y[n] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n] + y[n-1], \quad \forall \; n \in \mathbb{Z}.$

Уравнение $y[n] = x[n] + y[n-1], \quad \forall \; n \in \mathbb{Z}$, называется также **рекуррентным представлением** системы, так как каждый отсчёт выходного сигнала системы вычисляется с использованием найденных ранее отсчётов.

Таким образом, сумматор реализуем.

Линейные разностные уравнения

Важным классом дискретных систем являются системы, в которых входной и выходной сигналы связаны **линейным разностным уравнением** порядка N с постоянными коэффициентами (англ. *constant-coefficient difference equation, CCDE*).

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m\, x[n-m], \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}$$

$$a_0\, y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m\, x[n-m], \quad \text{коэффициенты } a_k,\ b_k \text{ вещественны, } a_0 \neq 0.$$

Такие системы являются реализуемыми. КИХ-фильтры получаются при $N = 0$. И некоторые БИХ-фильтры могут быть реализованы с помощью линейного разностного уравнения (в частности, сумматор).

В случае, когда $a_0 = 1$, уравнение можно переписать в виде

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m\, x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k], \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

Фильтр, для которых выходной отсчёт зависит от предыдущих выходных отсчётов ещё называют ***рекурсивным***.

Для того, чтобы запустить подсчёт отсчётов выходного сигнала, необходимо задать ряд начальных условий. Например, если первый отсчёт, который мы считаем, это $y[0]$, то необходимо задать какие-то значения отсчётам $y[-1],\ \ldots,\ y[-N]$. Выбор условий, которые гарантируют линейность и стационарность системы, это нулевые начальные условия. Они также гарантируют то, что нулевой сигнал на входе, даст нулевой сигнал на выходе.

Несмотря на то, что рекурсивные фильтры имеют более сложную структуру и их сложнее проектировать, тем не менее, они очень эффективны. Для их вычисления требуется гораздо меньше операций, чем для обычных КИХ-фильтров, при схожей АЧХ. Некоторые КИХ-фильтры, записанные с помощью рекурсивного фильтра, требует меньше операций при подсчёте.

Скользящее среднее

Запишем скользящее среднее в виде рекурсивного фильтра, при этом уменьшив количество сложений.

$$y[n] \ = \frac{1}{2\,M+1}\sum_{k=-M}^{M} x[n+k].$$

Запишем $n+1$-ый отсчёт через n-ый

$$y[n+1] \ = \frac{1}{2\,M+1}\sum_{k=-M}^{M} x[n+k+1] \ =$$

$$\frac{1}{2\,M+1}\left(\sum_{k=-M}^{M-1} x[n+k+1] + x[n \ + \ M+1] + x[n \ - \ M] - x[n \ - \ M]\right) \ =$$

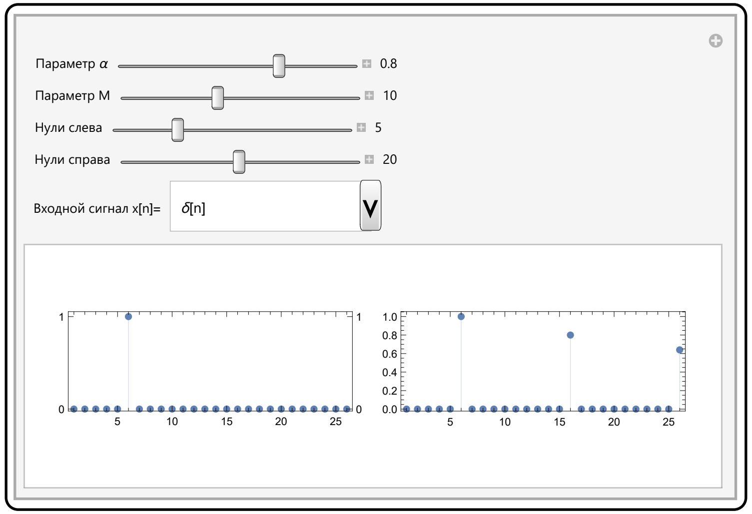
$$y[n] \ + \ \frac{1}{2\,M+1}(x[n \ + \ M+1] - x[n \ - \ M]).$$

Такая схема значительно сокращает количество операций, при большом M.

Фильтр Карплюса-Стронга

Приведём пример ещё одного рекурсивного фильтра, который использовался в первых музыкальных синтезаторах.

$y[n] = \alpha\, y[n-M] + x[n], \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}.$



Фактически, если подать на вход сигнал x длины M, с параметром $\alpha = 1$, то получим периодизированную версию сигнала длины M. За счет параметра $\alpha = 1$ можно менять скорость затухания или наоборот усиления периодического продолжения.

Фильтр Карплюса-Стронга

Следующий пример реализует фильтр Карплюса-Стронга для различных трех входных сигналов.
Входные сигналы всюду равны нулю, за исключением M значений.

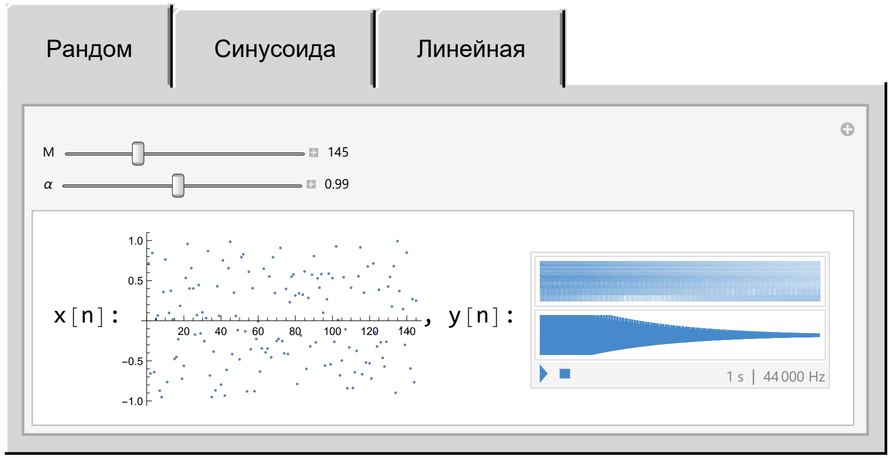
Первый сигнал содержит M случайных чисел от -1 до 1.

Второй содержит один период синусоиды $x[n] = \sin(2\pi n/M)$, $n = 1, \ldots, M$.

Третий сигнал содержит линейную функцию $x[n] = -1 + \frac{2n}{M}$, $n = 1, \ldots, M$.

Отклики на эти входные сигналы можно послушать, частота дискретизации при этом равна 44 000. То есть, если $M = 100$, то частота повторения ненулевых отсчетов входного сигнала - 440Гц (что соответствует ноте "ля" основной октавы).

Отметим, что за частоту звука отвечает M, параметр α отвечает за убывание, а вид входной последовательности отвечает за тембр звука.



Рекурсивные фильтры в частотной области

Рассмотрим рекурсивный фильтр и умножим на $e^{-2\pi i \omega n}$

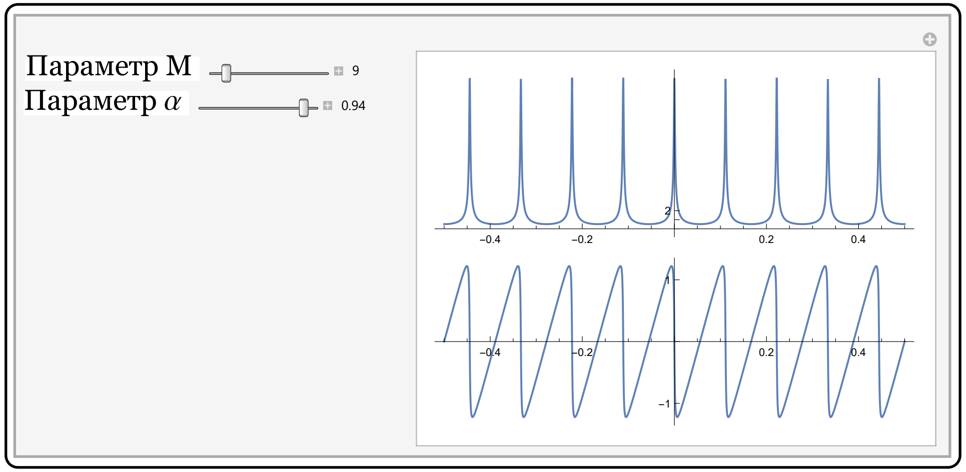
$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k]\, e^{-2\pi i \omega (n-k+k)} = \sum_{m=0}^{M} b_m\, x[n-m]\, e^{-2\pi i \omega (n-m+m)}$$ и просуммируем по $n \in \mathbb{Z}$. Получим

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, e^{-2\pi i \omega k}\, \hat{y}(\omega) = \sum_{m=0}^{M} b_m\, e^{-2\pi i \omega m}\, \hat{x}(\omega), \quad \text{или} \quad \hat{y}(\omega) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m\, e^{-2\pi i \omega m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k\, e^{-2\pi i \omega k}}\, \hat{x}(\omega) = \frac{\hat{b}(\omega)}{\hat{a}(\omega)}\, \hat{x}(\omega) = \hat{h}(\omega)\, \hat{x}(\omega),$$

где $\hat{h}(\omega)$ называется **КЧХ рекурсивного фильтра.** Эта функция полностью характеризует действие рекурсивной системы в частотной области.

Для фильтра Карплюса-Стронга КЧХ имеет вид $\hat{h}(\omega) = \frac{1}{1-\alpha\, e^{-2\pi i \omega M}}$

КЧХ фильтра Карплюса–Стронга



Денойзер

Шум в сигнале из-за помех зачастую имеет фиксированную частоту. Например, шум из-за частоты переменного тока (50Гц в Европе, 60 Гц в Америке). Рекурсивные фильтры позволяют эффективно удалять такой шум. Пусть ω_0 частота шума.

$$\hat{h}(\omega) = \left(\left(1 - e^{2\pi i \omega_0} e^{-2\pi i \omega}\right)\left(1 - e^{-2\pi i \omega_0} e^{-2\pi i \omega}\right)\right) / \left(\left(1 - \lambda e^{2\pi i \omega_0} e^{-2\pi i \omega}\right)\left(1 - \lambda e^{-2\pi i \omega_0} e^{-2\pi i \omega}\right)\right) =$$

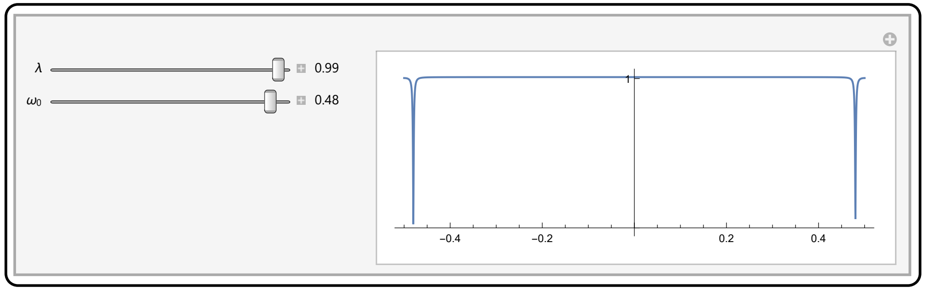
$$1 - \left(\left(1 - 2\cos(2\pi\omega_0) e^{-2\pi i \omega} + e^{-2\pi i 2\omega}\right) / \left(1 - 2\lambda\cos(2\pi\omega_0) e^{-2\pi i \omega} + \lambda^2 e^{-2\pi i 2\omega}\right)\right).$$

Во временной области фильтр имеет вид

$$y[n] - 2\lambda\cos(2\pi\omega_0)\, y[n-1] + \lambda^2 y[n-2] = x[n] - 2\cos(2\pi\omega_0)\, x[n-1] + x[n-2].$$

АЧХ денойзера

Out[1]=



Фильтры Баттерворта

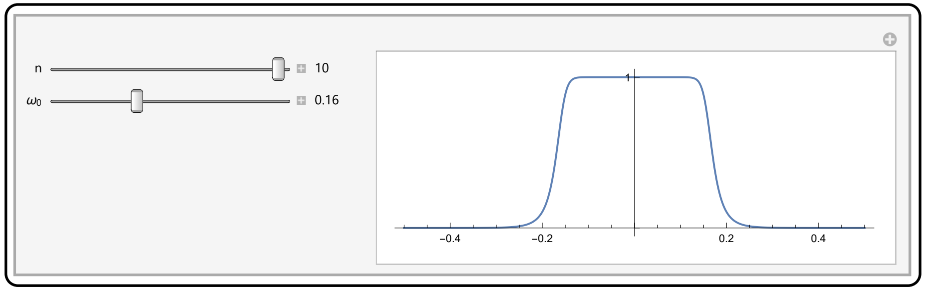
Фильтры Баттерворта проектируются так, чтобы АЧХ была максимально гладкой на частотах полосы пропускания. Рассмотрим НЧ фильтр Баттерворта. Его АЧХ имеет вид

$$\left|\hat{h}_B(\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}},$$

где ω_0 это частота среза, при $|\omega| < \omega_0$ значения АЧХ близки к 1, $|\omega| > \omega_0$ значения АЧХ близки к 0.

АЧХ фильтра Баттерворта

Out[ ]=



Чтобы отсюда найти коэффициенты фильтра считают приближение АЧХ с помощью отношения тригонометрических полиномов степени n

$$\hat{h}_B(\omega) \approx \frac{\hat{b}(\omega)}{\hat{a}(\omega)} = \frac{\sum_{m=0}^{n} b_m\, e^{-2\pi i \omega m}}{\sum_{k=0}^{n} a_k\, e^{-2\pi i \omega k}}.$$

Влияние фазы КЧХ на сигнал

Фаза КЧХ влияет на входной сигнал так же значительно, как и амплитуда, хотя и менее очевидным образом. ФЧХ отвечает за задержку частотных компонент сигнала. Рассмотрим действие ЛС системы $\mathcal{T}$ на гармоническое колебание:

$$\mathcal{T}\left\{e^{2\pi i \omega n}\right\} = \hat{h}(\omega)\left\{e^{2\pi i \omega n}\right\} = \left|\hat{h}(\omega)\right| e^{i \arg\left(\hat{h}(\omega)\right)} \left\{e^{2\pi i \omega n}\right\} = \left|\hat{h}(\omega)\right| \left\{e^{i\left(2\pi \omega n + \arg\left(\hat{h}(\omega)\right)\right)}\right\} =$$

$$\left|\hat{h}(\omega)\right| \left\{e^{2\pi i \omega \left(n + \frac{\arg\left(\hat{h}(\omega)\right)}{2\pi\omega}\right)}\right\}.$$

Если $\frac{\arg\left(\hat{h}(\omega)\right)}{2\pi\omega} \in \mathbb{Z}$, то ЛС система вносит задержку. Когда фазовый сдвиг не выражается в целых числах, то говорят о дробной задержке сигнала (англ. *frational delay*). В результате, если ЛС система не влияет на амплитуду спектра сигнала, но нелинейным образом влияет на фазу, то отклик ЛС системы может иметь совершенно неузнаваемую форму.

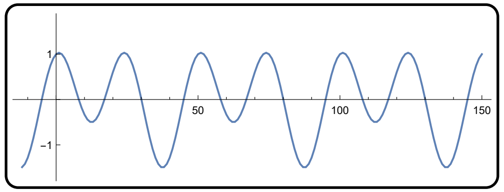
Есть три базовых случая

1. нулевая фаза, то есть $\arg\left(\hat{h}(\omega)\right) = 0$.
2. линейная фаза, то есть $\arg\left(\hat{h}(\omega)\right) = 2\pi D \omega$, где D - константа.
3. нелинейная.

Пример

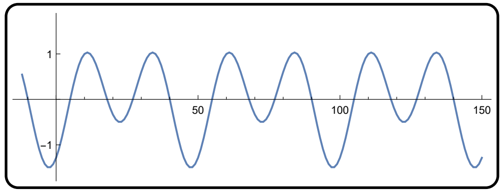
Для примера рассмотрим сигнал $x[n] = \frac{1}{2} \sin\left(2\pi \frac{n}{50}\right) + \cos\left(2\pi \frac{n}{25}\right)$.

Это сигнал с нулевой фазой, поскольку фаза каждой синусоиды равна нулю.



Добавим фазу к синусоидам, причём добавка будет пропорциональна частотам синусоид

$x[n] = \frac{1}{2} \sin\left(2\pi \frac{n}{50} + \theta\right) + \cos\left(2\pi \frac{2n}{50} + 2\theta\right)$, где $\theta = 2\pi \frac{4}{5}$

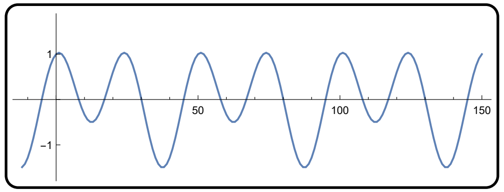


Видно, что форма сигнала не изменилась, но сигнал сдвинулся.

Пример

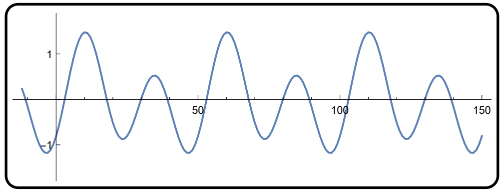
Для примера рассмотрим сигнал $x[n] = \frac{1}{2}\sin\left(2\pi\frac{n}{50}\right) + \cos\left(2\pi\frac{n}{25}\right)$.

Это сигнал с нулевой фазой, поскольку фаза каждой синусоиды равна нулю.



Теперь добавим фазу, которая непропорциональна частотам, а именно, добавим фазу только одной синусоиде

$x[n] = \frac{1}{2}\sin\left(2\pi\frac{n}{50}\right) + \cos\left(2\pi\frac{2n}{50} + 2\theta\right)$, где $\theta = 2\pi\frac{4}{5}$



Форма сигнала изменилась.

Отметим, что для всех трёх сигналов - график амплитуды спектра одинаков.

Примеры линейной фазы

Итак, случай линейной фазы значит, что $\arg\left(\hat{h}(\omega)\right) = 2\,\pi\,D\,\omega$.

Спектр фильтра с линейной фазой имеет вид $\hat{h}(\omega) = \left|\hat{h}(\omega)\right| e^{2\,\pi\,i\,\omega\,D}$. То есть на него можно смотреть, как на два последовательно соединённых фильтра, один из них имеет спектр $\left|\hat{h}(\omega)\right|$ и нулевую фазу, а второй спектр соответствует фильтру задержки (возможно дробной). Напомним, что когда $D \in \mathbb{Z}$, ЛС система задержки имеет ИХ: $h[n] = \delta[n+D]$, а КЧХ $\hat{h}(\omega) = e^{2\,\pi\,i\,\omega\,D}$.

Ранее мы рассматривали фильтр скользящего среднего с импульсной характеристикой вида

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{2\,M+1} & -M \le n \le M \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}. \qquad \text{КЧХ имеет вид } \hat{h}(\omega) = \frac{1}{2\,M+1}\,(\sin(\pi\,\omega(2\,M+1))\,/\,(\sin(\pi\,\omega))).$$

Если же фильтр применяется онлайн, то мы можем обрабатывать только текущий и прошлые отсчёты сигнала, к будущим отсчётам в текущий момент времени доступа нет. В силу формулы

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\,h[k],$$

для обработки онлайн требуется, чтобы $h[n] = 0$ для $n < 0$. Такой фильтр называют **каузальным**.

Примеры линейной фазы

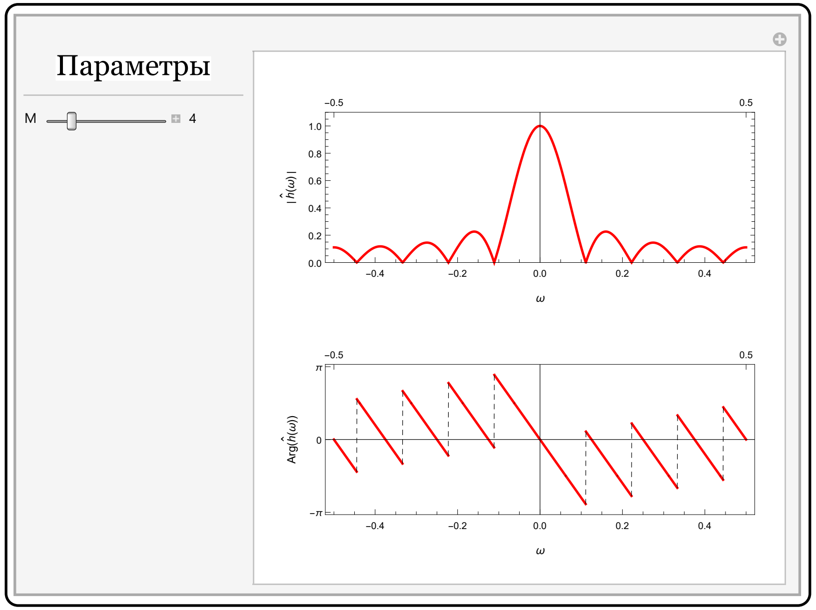
Рассмотрим каузальный фильтр скользящего среднего.

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{2M+1} & 0 \le n \le 2M+1 \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad \text{Его КЧХ имеет вид:} \ \hat{h}(\omega) = \frac{e^{-2\pi i \omega M}}{2M+1} (\sin(\pi\,\omega\,(2M+1)) / \sin(\pi\,\omega))$$

То есть фильтр имеет линейную фазу, задержка равна M отсчётов.

Графики АЧХ и ФЧХ скользящего среднего

Out[2]=



Примеры нелинейной фазы

Рассмотрим **квазиинтегратор** (квазисумматор, англ. leaky integrator):

$$y[n] = \lambda\, y[n-1] + (1-\lambda)\, x[n], \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Это рекурсивный фильтр. То есть для формирования нового выходного отсчёта мы используем предыдущий выходной отсчёт с некоторым весом λ и текущий входной отсчёт с весом $1-\lambda$.

Импульсная характеристика : $h[n] = (1-\lambda)\, \lambda^n\, u[n]$.

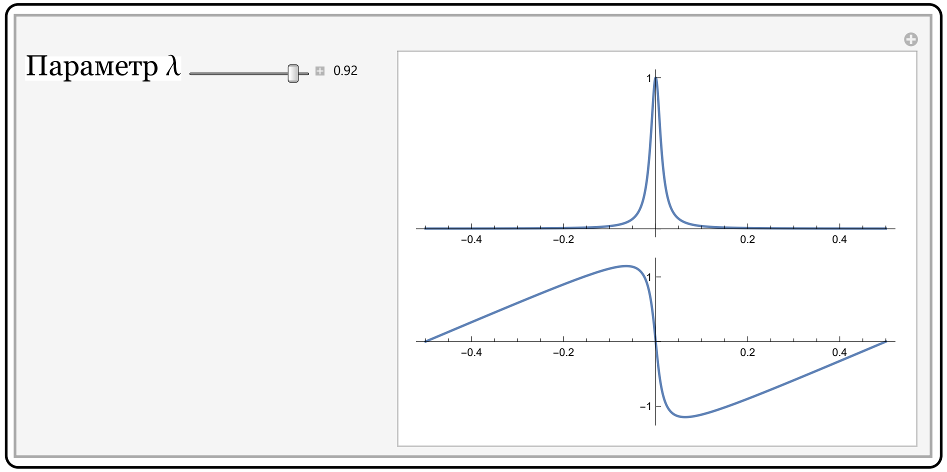
Действие квазиинтегратора на сигнал схоже с действием скользящего среднего, поскольку сигнал сглаживается. Действие этого фильтра ещё называют **экспоненциальным сглаживанием.**

Квазиинтегратор

КЧХ имеет вид : $\hat{h}(\omega) = \dfrac{1-\lambda}{1-\lambda\, e^{-2\pi i \omega}}$,

$\left|\hat{h}(\omega)\right| = (1-\lambda)^2 / \left(1 - 2\lambda \cos(2\pi\omega) + \lambda^2\right)$, $\quad \arg\left(\hat{h}(\omega)\right) = \operatorname{arctg}\left((-\lambda \sin(2\pi\omega)) / (1 - \lambda \cos(2\pi\omega))\right)$.

Квазиинтегратор

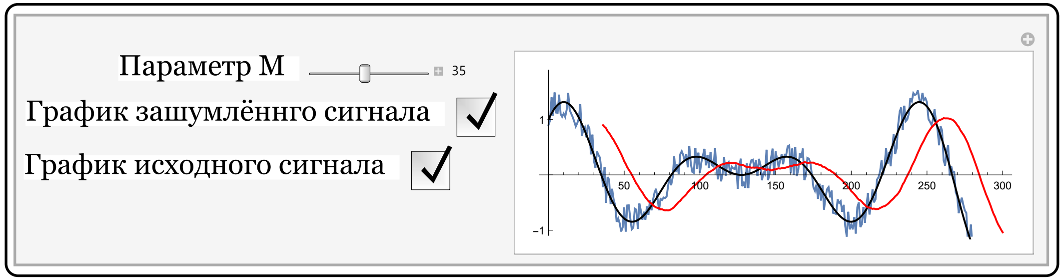


Отметим, что часть КЧХ где амплитуда близка к единице, соответствует почти линейной фазе для фазы спектра. Поэтому сильного изменения формы сигнала не происходит (нет фазовых искажений). В то же время, с ростом сглаживающего параметра растёт и задержка частот, находящихся около нуля.

Сравнение фильтров

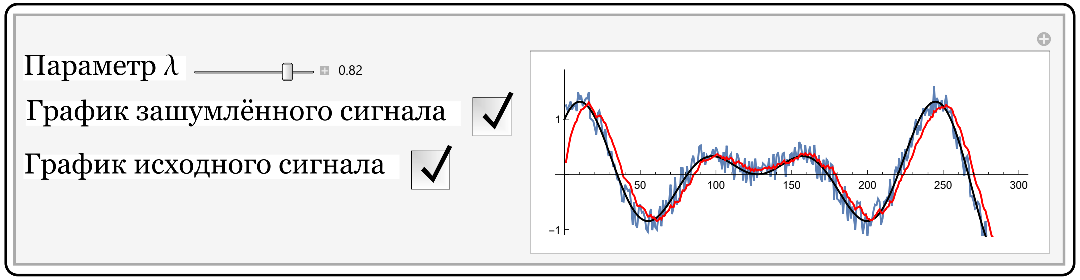
На примере задачи очищения заведомо гладкого сигнала от шума, сравним фильтры скользящего среднего и квазиинтегратора.

Скользящее среднее



Эффект сглаживания пропорционален параметру M. Чем выше M, тем более гладкий сигнал на выходе, однако при слишком больших M, заметен сдвиг отфильтрованного сигнала относительно исходного (сдвиг на $M/2$ отсчётов). Кроме того, снижается амплитуда сигнала.

Квазиинтегратор



С ростом λ, улучшаются сглаживающие свойства фильтра. Отметим, что фильтр также привносит некоторую задержку, растущую с ростом λ.

Как получить нулевую фазу при обработке сигнала?

При обработке сигналов в он-лайн режиме **фазовый сдвиг неизбежен.**

Если сигнал есть целиком и надо провести его обработку некоторым фильтром, то получить нулевую фазу при обработке просто. Пусть x входной сигнал, h фильтр (с вещественными коэффициентами),

$$y = x * h \text{ или } \hat{y}(\omega) = \hat{h}(\omega)\,\hat{x}(\omega).$$

Проведём фильтрацию ещё одним фильтром вида $h^{-} = \{h[-n]\}$. Его КЧХ имеет вид

$$\widehat{h^{-}}(\omega) = \overline{\hat{h}(\omega)}. \text{ Тогда}$$

$$\hat{z}(\omega) = \widehat{h^{-}}(\omega)\,\hat{y}(\omega) = \overline{\hat{h}(\omega)}\,\hat{y}(\omega) = \left|\hat{h}(\omega)\right|^2 \hat{x}(\omega).$$

То есть по сути мы провели фильтрацию фильтром $h^{-} * h$ с КЧХ $\left|\hat{h}(\omega)\right|^2$.

КЧХ вещественна, а значит фильтр имеет нулевую фазу. Да, АЧХ нового фильтра отличается от АЧХ исходного фильтра, однако, при проектировании фильтра h можно учесть эту особенность.