Эффект Гиббса

Эффект Гиббса (1899) заключается в том, что ряд Фурье не всегда представляет разлагаемую функцию с должной степенью точности.

Рассмотрим подробнее эффект Гиббса на примере простой разрывной функции вида

$$f(\omega) = \begin{cases} -1, & -\frac{1}{2} < \omega < 0, \\ 0, & \omega = 0, \\ 1, & 0 \le \omega \le \frac{1}{2}, \end{cases}$$

продолженной с периодом 1 на всю вещественную ось.

Разложим эту функцию в ряд Фурье. Нам понадобится вид ряда в вещественной форме, то есть в виде разложения по синусам\косинусам. При этом, так как функция $f(\omega)$ нечётная, то значит в её разложении в ряд Фурье будут присутствовать только слагаемые с $\sin$:

$$f(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(2\pi m \omega),$$

где коэффициенты b_m определяются по формулам

$$b_m = 2 \int_{-1/2}^{1/2} f(\omega) \sin(2\pi m \omega)\, d\omega =$$

$$2 \int_{0}^{1/2} \sin(2\pi m \omega)\, d\omega - 2 \int_{-1/2}^{0} \sin(2\pi m \omega)\, d\omega =$$

$$= 2\,\frac{1-\cos(\pi m)}{2\pi m} + 2\,\frac{1-\cos(\pi m)}{2\pi m} = 2\,\frac{1-(-1)^m}{\pi m}, \ \forall\ m \in \mathbb{Z} \ \text{ или}$$

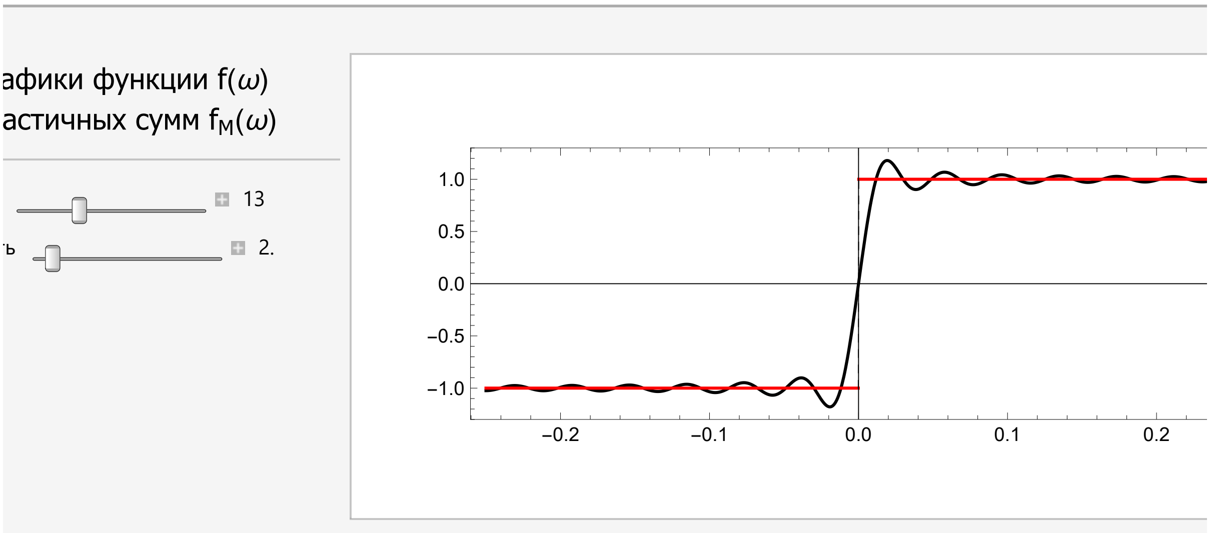
$$b_m = \begin{cases} 0, & m - \text{чётное}, \\ \frac{4}{\pi\, m}, & m - \text{нечётное}, \end{cases} \ \forall\ m \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим частичные суммы ряда Фурье. Пусть f_M — это сумма первых M ненулевых членов ряда Фурье.

$$f_M(\omega) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{M} \frac{\sin(2\pi(2m-1)\omega)}{(2m-1)}$$

График частичных сумм Фурье и исходной функции приведён ниже:

Графики исходной функции и частичных сумм



Из графиков видно, что у частичных сумм вблизи точек разрыва функции $f(\omega)$ возникают незатухающие колебания, пульсации. С ростом M они не уменьшаются по амплитуде. Чтобы прояснить причину такого поведения частичных сумм, исследуем поведение экстремумов частичных сумм $f_M(\omega)$. Для этого найдём производную функции $f_M(\omega)$, используя формулу Эйлера и формулу суммы геометрической прогрессии, получим:

$$\frac{d(f_M(\omega))}{d\omega} = 8\sum_{m=1}^{M}\cos(2\pi(2m-1)\omega) =$$

$$8\,\mathrm{Re}\left(\sum_{m=1}^{M} e^{2\pi i(2m-1)\omega}\right) = 8\,\mathrm{Re}\left(e^{2\pi i\omega}\frac{e^{2\pi i 2M\omega}-1}{e^{2\pi i 2\omega}-1}\right) =$$

$$8\,\mathrm{Re}\left(e^{2\pi i M\omega}\frac{e^{2\pi i M\omega}-e^{-2\pi i M\omega}}{e^{2\pi i\omega}-e^{-2\pi i\omega}}\right) = 8\,\mathrm{Re}\left(e^{2\pi i M\omega}\frac{\sin(2\pi M\omega)}{\sin(2\pi\omega)}\right) =$$

$$8\,\frac{\cos(2\pi M\omega)\sin(2\pi M\omega)}{\sin(2\pi\omega)} = 4\,\frac{\sin(2\pi 2M\omega)}{\sin(2\pi\omega)}.$$

Таким образом, точки экстремума удовлетворяют уравнению $\sin(2\pi 2M\omega) = 0$ (за исключением $\omega = 0$). При $0 \le \omega \le \frac{1}{2}$ точки экстремума равны

$$\omega_n = \frac{n}{4M}, \quad n = 1, \ldots, 2M.$$

Для интервала $-\frac{1}{2} < \omega \le 0$ расположение корней симметрично, поэтому ограничимся интервалом $0 \le \omega \le \frac{1}{2}$.

Нас интересует величина первого экстремума, то есть экстремума в точке $\omega_1 = \frac{1}{4M}$.

Получим значение для первого экстремума функции f_M.

$$f_M(\omega_1) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{M}\frac{\sin(2\,\pi\,(2\,m-1)\,\omega_1)}{(2\,m-1)} =$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{M}\frac{\sin\left(\frac{\pi\,(2\,m-1)}{2\,M}\right)}{(2\,m-1)} = \frac{4}{2\,M}\sum_{m=1}^{M}\frac{\sin\left(\frac{\pi\,(2\,m-1)}{2\,M}\right)}{\frac{\pi\,(2\,m-1)}{2\,M}} = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{M}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{M}\left(m-\frac{1}{2}\right)\right)\frac{\pi}{M}.$$

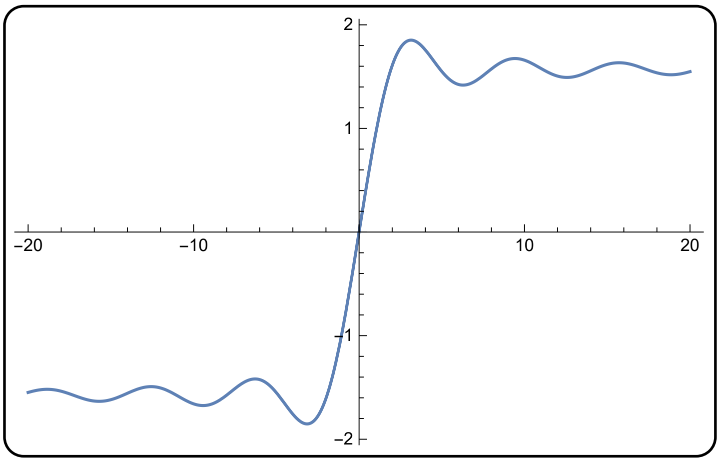
Чтобы выяснить поведение этой суммы при $M \to \infty$, отметим, что последняя сумма является интегральной суммой для интеграла от функции sinc на интервале от 0 до π, с разбиением на равноотстоящие узлы $\tau_i = \frac{\pi}{M}\,i$ и выбором точек ξ_i по середине отрезка. Поскольку функция sinc является интегрируемой, то значение интегральной суммы стремится к значению интеграла, то есть

$$\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{M}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{M}\left(m-\frac{1}{2}\right)\right)\frac{\pi}{M} \underset{M\to\infty}{\to} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sinc}(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\operatorname{Si}(\pi)\sim 1.17898.$$

Функция $\operatorname{Si}(x)$ — это интегральный синус (первообразной от функции sinc не существует в элементарных функциях, “неберущийся” интеграл)

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right),\ \text{при}\ x \to +\infty.$$

График интегрального синуса



Вывод из полученных фактов следующий: сумма ряда Фурье функции $f(\omega)$, проходя через точку разрыва (в данном случае $\omega = 0$) делает скачки на 17,9% большие, чем скачки раскладываемой функции $f(\omega)$.

Этот же вывод будет верен и в общем случае, при разложении в ряд Фурье произвольной разрывной функции.