Математические модели обработки сигналов

Тема 1: Основные понятия обработки сигналов

Лектор: Кривошеин А.В.

Что называется сигналом?

Сигнал — это результат измерения меняющегося во времени (или пространстве) физического явления. Сигнал несёт в себе информацию о состоянии или поведении физического явления.

- давление звуковых колебаний воздуха (аудио-сигналы)
- измерение светового потока (фото- и видео-сигналы)
- сила электромагнитного излучения, напряжение, температура окружающей среды, уровень воды в реке и др.

С математической точки зрения, сигнал — это отображение $f(t)$, действующее из подмножества $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^m$, то есть $f: E \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$. Изначально, мы будем работать с сигналами, как с одномерными функциями, то есть $d = m = 1$, а под независимой переменной будем, как правило, подразумевать время.

Основные категории сигналов

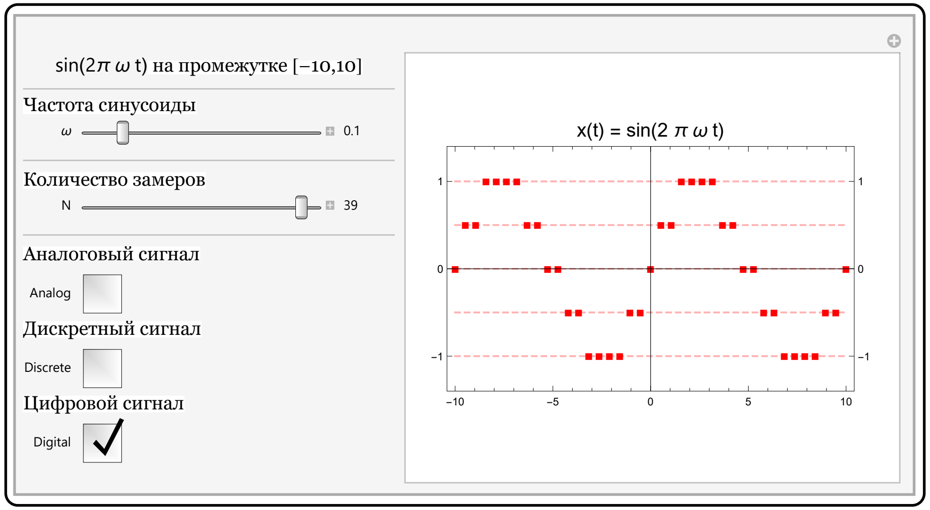
- *Аналоговый сигнал* — это сигнал, значения которого меняются в зависимости от непрерывно изменяющегося времени. Например, непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- *Дискретный сигнал* — это сигнал, значения которого известны только в некоторые дискретные моменты времени.
  Бесконечный дискретный сигнал представляет собой элемент пространства последовательностей $x = \{x[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.
  Конечный дискретный сигнал имеет конечное число значений, то есть вектор N-мерного евклидова пространства $(x[0], \ldots, x[N-1]) \in \mathbb{R}^N$.
- *Цифровой сигнал* — это конечный дискретный сигнал квантованный по амплитуде, то есть множеством значений сигнала является некоторое конечное множество, например целые числа от 0 до 255, или числа в формате double. Иными словами, цифровой сигнал — это отображение $x : \{0, \ldots, N-1\} \to A$, где A конечное множество.

Примеры категорий сигналов

Аналоговый сигнал: синусоида $f(t) = \sin(2\pi\omega t)$.

Дискретный сигнал: последовательность $\{x[n]\}_n$, где $x[n] = \sin(2\pi\omega n)$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$.

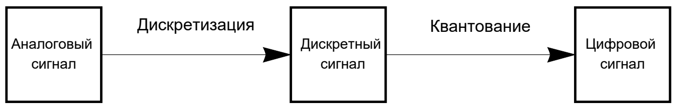
Цифровой сигнал: N-мерный вектор $(x[0], \ldots, x[N-1])$, где $x[n] \in \{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}$.



Переходы между категориями сигналов

На компьютерах реализуема обработка и хранение только цифровых сигналов.
В реальном мире значительная часть сигналов являются аналоговыми.

Определим переходы между категориями сигналов:



Дискретизация (*sampling*): Аналоговый сигнал $x_c(t) \rightarrow$ Дискретный сигнал $\{x[n]\}$.
Квантование (*quantization*): Дискретный сигнал $\{x[n]\} \rightarrow$ Цифровой сигнал

Дискретизация +Квантование = Оцифровка сигнала

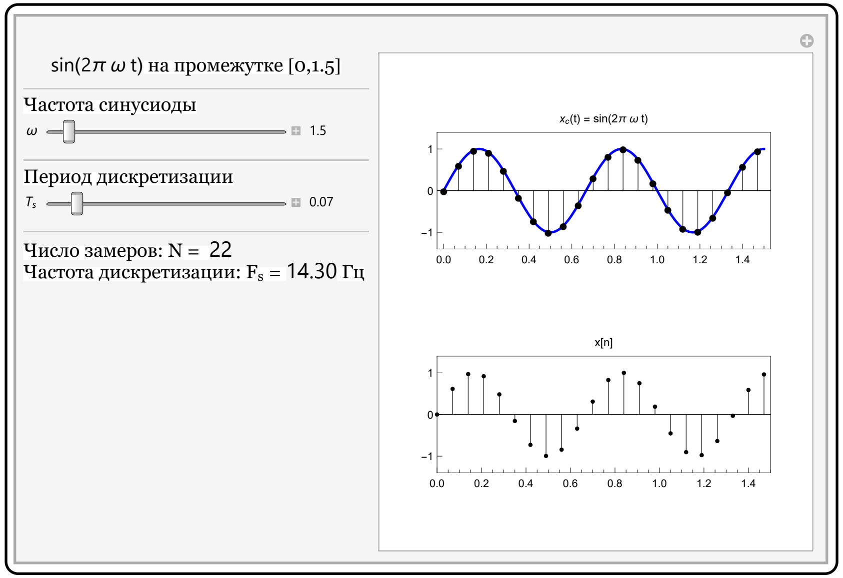
Равномерная дискретизация

Суть равномерной дискретизации:

- фиксируем период дискретизации (*sampling period*): T_s секунд.
- производим замер сигнала и записываем полученное значение,

$$x[n] = x_c(n\,T_s),\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Частота дискретизации (*sampling frequency*) — это число замеров в секунду: $F_s = 1 / T_s$. Частота дискретизации измеряется в герцах (Гц).



Синусоида $x_c(t) = \sin(2\,\pi\,\omega\,t)$ на промежутке $[0,\ 1.5]$.

T_s – период дискретизации,

$N = 1.5 / T_s + 1$ – число замеров.

Набор значений $\ldots, x[0], \ \ldots, x[N-1]\ldots$ – дискретное представление аналогового сигнала.

Важно: между элементами $x[n]$ и $x[n+1]$ не существует никакой информации о сигнале.

Квантование и восстановление сигнала

Компьютер может работать только с числами с конечной точностью.

Суть квантования: все **значения** дискретного сигнала кодируются числами из некоторого конечного множества:
множество чисел формата double или
множество 16-битных целых чисел и др.

Разрядность квантования — это число бит, выделенных на кодирование одного значения сигнала.

Наиболее полную информацию о явлении несет в себе аналоговый сигнал.

Потеря информации происходит на каждом переходе:

Аналоговый сигнал → Дискретный сигнал → Цифровой сигнал

Квантование — потеря информации не восполнима.

Дискретизация — при определенных условиях утерянная информация может быть целиком восстановлена (теорема Котельникова).

Интерполяция — это процесс перевода дискретного/цифрового сигнала в аналоговый.

Оцифровка

Дискретизация + Квантование = Оцифровка сигнала.
Устройства для оцифровки сигналов: АЦП (аналогово-цифровой преобразователь).

Основные параметры АЦП: **частота дискретизации и разрядность квантования.**

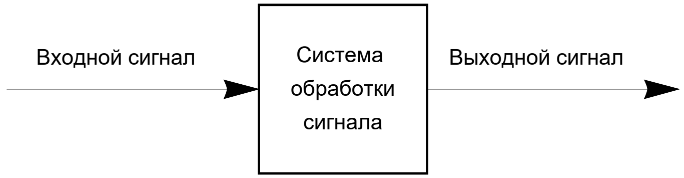
Различные типы АЦП являются составными частями таких устройств как:
цифровая звукозаписывающая аппаратура, цифровые фото- и видео- камеры, медицинские приборы (КТ, МРТ) и др.

Пример: формат AudioCD для записи компакт-дисков, параметры АЦП: 44.1 кГц, 16 бит.

Устройства для перевода цифровых сигналов в аналоговые: ЦАП (цифро-аналоговые преобразователи)
Примеры: устройства воспроизведения звука, дисплеи

Обработка сигналов

Обработка сигналов включает в себя извлечение нужной информации из сигнала, выявление особенностей сигнала, сравнение сигналов, анализ сигналов, разложение сигнала на элементарные составляющие или наоборот синтезирование сигнала.



Фундаментальные различия между аналоговыми и цифровыми сигналами влекут различия в методах их обработки.

Пример: найти среднее значение сигнала на некотором промежутке.

Аналоговый сигнал: проинтегрировать по промежутку и поделить на длину.

Дискретный сигнал: просуммировать значения сигнала и поделить на их количество.

Обработка сигналов: аналоговая и цифровая. Устройства, производящие обработку:

аналоговые вычислительные машины (АВМ, аналоговый компьютер),

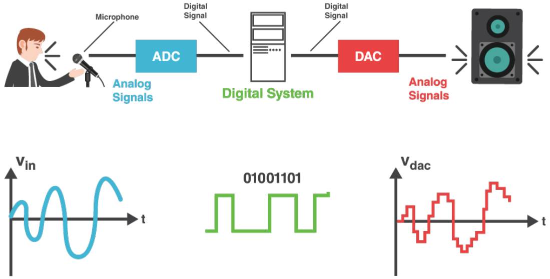
электронно-вычислительные машины (ЭВМ, цифровой компьютер).

АВМ — узкая специализация: под каждую задачу нужна своя машина.

ЭВМ — универсальность: для решения новой задачи нужна лишь новая программа.

Цифровая обработка сигналов

Под цифровой обработкой сигналов (ЦОС, англ. *Digital Signal Processing, DSP*) понимают обработку цифровых сигналов на компьютере. Вместе с АЦП и ЦАП можно проводить и цифровую обработку аналоговых сигналов.



Первые ЭВМ решали задачи, связанные с обороной и ядерной физикой (начиная с 40-х годов).

Развитие компьютеров и быстрых алгоритмов для обработки сигналов с начала 1960-х привело к взрывному росту решаемых с помощью ЦОС задач.

Телекоммуникации (передача информации на расстояние): телефонная и сотовая связь, телевизионные сигналы, Интернет.

Аудио: запись, хранение. Широчайшие возможности для редактирования звука, фильтрации, добавления эффектов. Цифровые музыкальные инструменты. Распознавание речи.

Изображения: фото- и видео-съёмка, редактирование, распознавание и др.

Медицина: “умные” диагностические приборы, КТ, МРТ.

Гильбертово пространство: определение

Сигналы, с точки зрения математики, — это функции, последовательности и вектора. Но неудобно работать со всеми сигналами вообще. Их удобно “упаковать” в некоторые “контейнеры” или пространства с общими правилами. Самой удобной математической абстракцией для работы с сигналами является **гильбертово пространство**.

Гильбертово пространство - это линейное пространство, в котором для любых двух элементов пространства определено скалярное произведение, и которое является полным и сепарабельным относительно порождённой этим скалярным произведением метрики.

Пусть $\mathcal{H}$ гильбертово пространство. Скалярное произведение - это отображение, сопоставляющее любым двум элементам $x,\ y \in \mathcal{H}$ комплексное число $\langle x,\ y\rangle \in \mathbb{C}$ и

1. для любых $x,\ y,\ z \in \mathcal{H}$ и $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ верно $\langle \alpha x + \beta z,\ y\rangle = \alpha \langle x,\ y\rangle + \beta \langle z,\ y\rangle$ (линейность);
2. для любых $x,\ y \in \mathcal{H}$ верно $\langle x,\ y\rangle = \overline{\langle y,\ x\rangle}$;
3. для любого x верно $\langle x,\ x\rangle \geq 0$, причем $\langle x,\ x\rangle = 0$ только если $x = 0$.

Порожденная метрика (норма) : $\rho(x, y) = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle} = \| x-y \|, \quad \forall\ x, y \in \mathcal{H}.$

Полнота $\mathcal{H}$: $\quad \forall\ \{x_n\}_n \subset \mathcal{H} : \| x_n - x_m \| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \Longrightarrow \exists\ x \in \mathcal{H} : \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x.$

Сепарабельность $\mathcal{H}$: существует счётное всюду плотное множество $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$,

то есть для каждого $\varepsilon > 0$ и $\forall\ x \in \mathcal{H}\ \ \exists\ y \in \mathcal{M} : \| x - y \| < \varepsilon$.

Гильбертово пространство: свойства

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ верно неравенство Коши-Буняковского $|\langle x,\ y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|, \quad \forall\, x, y \in \mathcal{H}$.

Два элемента $x,\ y \in \mathcal{H}$ называются ортогональными, если $\langle x,\ y\rangle = 0$. Важным свойством гильбертовых пространств является наличие в нём ортономированного базиса $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Если $\mathcal{H}$ гильбертово пространство и $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, то любой элемент $x \in \mathcal{H}$ может быть представлен в виде

$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x,\ e_n\rangle\, e_n$. При этом имеет место равенство Парсеваля $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x,\ e_n\rangle|^2 = \|x\|^2$.

Пусть W замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Пусть в W есть ортонормированный базис $\{e_n\}_n$. Для элемента x из $\mathcal{H}$ построим элемент x_W следующим образом

$$x_W = \sum_{n} \langle x,\ e_n\rangle\, e_n.$$

Ясно, что x_W является ортогональной проекцией элемента x на подпространство W, то есть $x - x_W$ ортогонально подпространству W. Более того, x_W является наилучшим приближением элемента x с помощью подпространства W, то есть

$$\|x - x_W\| = \inf_{y \in W} \|x - y\|.$$

Пространства сигналов

Под пространствами сигналов будем понимать следующие гильбертовы пространства:

Дискретные сигналы	$x \in \mathbb{C}^N$	$x := (x[0], x[1], \ldots, x[N-1])$	$\langle x, y \rangle := \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\overline{y[n]}$
	$x \in \ell_2(\mathbb{Z})$	$\|x\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|x[n]\|^2 < +\infty$	$\langle x, y \rangle := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\overline{y[n]}$
Аналоговые сигналы	$x \in L_2[0,1]$	$\|x\|^2 = \int_0^1 \|x(t)\|^2 dt < +\infty$	$\langle x, y \rangle := \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\, dt$
	$x \in L_2(\mathbb{R})$	$\|x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|^2 dt < +\infty$	$\langle x, y \rangle := \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t)}\, dt$

Интегралы понимаются в смысле Лебега — это обобщение интеграла Римана.