Математические модели обработки сигналов

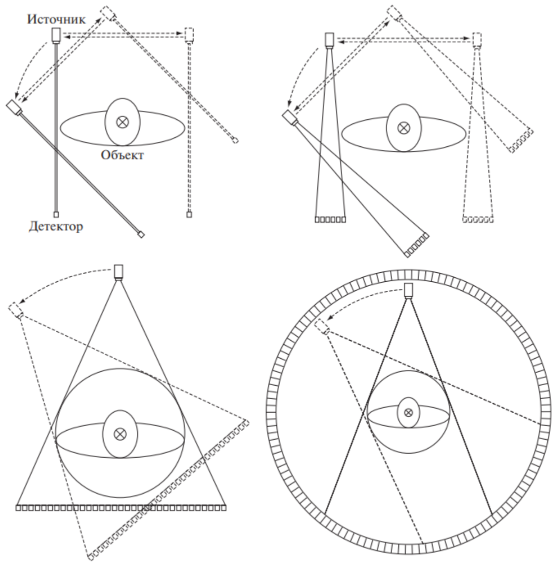
Дополнительные темы: преобразование Радона

Лектор: Кривошеин А.В.

Восстановление изображения по проекциям

Суть задачи в том, что можно отправить лучи из некоторого источника и на некотором расстоянии измерить потерянную энергию. Объекты на пути лучей будут эту энергию поглощать. Цель в том, чтобы по информации о проекциях лучей восстановить информацию об объектах.

Одно из основных приложений — это рентгеновская КТ. Есть несколько поколений КТ сканеров.

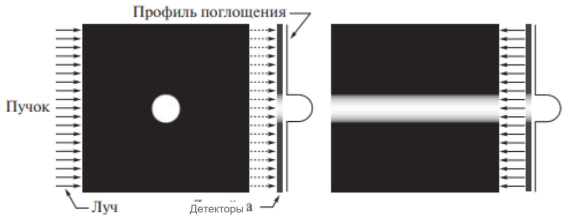


Восстановление изображения по проекциям

Рассмотрим простейшую постановку, когда лучи направляются параллельно вдоль некоторого сечения трехмерной области человеческого тела и проекции падают на прямую.

Если пучок рентгеновских лучей направить сквозь воздух, то их энергия практических не затухает. Если же лучи проходят сквозь пациента, то энергия лучей поглощается тканями и костями, причём с различными коэффициентами поглощения.

На иллюстрации объект имеет круглую форму и имеет больший коэффициент поглощения, чем окружающая область.

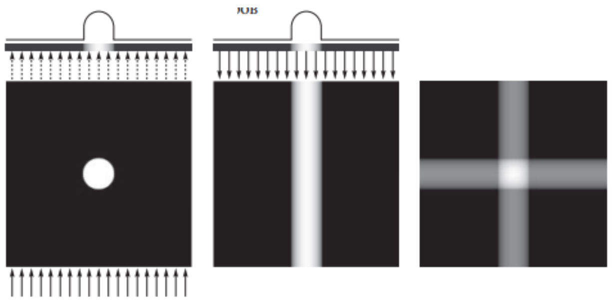


С одной проекции восстановить исходный объект невозможно. Однако, можно сделать множество проекций вдоль различных направлений лучей.

При восстановлении каждая полученная проекция подвергается **процессу обратного проецирования** (англ. backprojection). Проекция (как одномерный сигнал) “протягивается” назад вдоль направления распространения пучка лучей. В примере выше проекция копируется во все столбцы изображения (картинка справа).

Восстановление изображения по проекциям

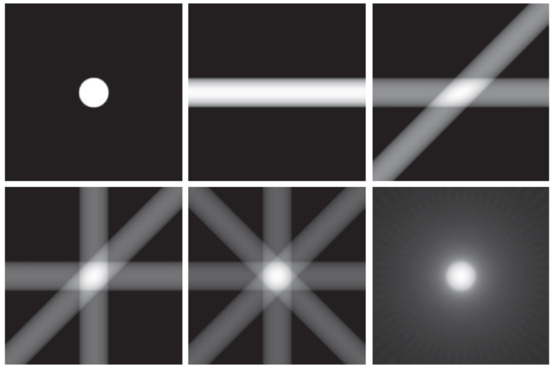
Пусть есть ещё одна проекция, в которой лучи направлены вдоль вертикальной оси. Для неё также проделаем процесс обратного проецирования и для восстановления исходного изображения **прибавим** результат к предыдущей обратной проекции.



Восстановление изображения по проекциям

Продолжая аналогичный процесс для проекций, полученных с различных направлений можно будет лучше приблизить исходное изображение.

Ниже пример восстановления изображения по 32 проекциям с углами равномерно распределёнными от 0 до π.



Восстановление успешно, однако, легко заметить эффект “ореола” или размытия.

Избавление от этого размытия является важным вопросом для КТ.

Преобразование Радона

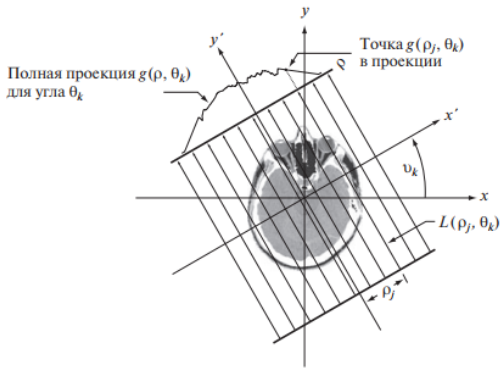
Сначала запишем уравнение прямой L на плоскости в виде:

$$x \cos\theta + y \sin\theta = \rho,$$

где $\theta \in (-\pi, \pi]$ — угол нормали

$\rho \geq 0$ — расстояния прямой до начала координат.

Зафиксируем угол θ_k и для разных значений ρ_j будем запускать лучи вдоль прямой с уравнением $x \cos\theta_k + y \sin\theta_k = \rho_j$. Для выбранного угла θ_k в результате будет получен набор значений проекции, которые будет обозначать за $g(\rho_j,\ \theta_k)$.



Преобразование Радона

Математически значения проекции $g(\rho,\ \theta)$ получаются как криволинейные интегралы 1-го рода вдоль прямых. Однако, удобнее записать значения $g(\rho,\ \theta)$ в виде

$$g(p,\theta) = \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y)\,\delta(y\sin\theta + x\cos\theta - \rho)\,dx\,dy,$$

где $\delta(x)$ — это дельта – функция.

Это преобразование двумерной функции I и называют **преобразованием Радона.**

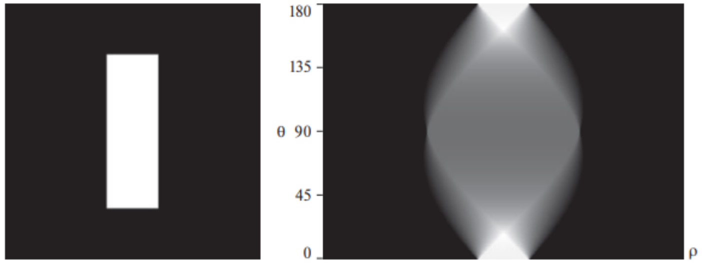
Для цифрового изображения нужно использовать соответствующую дискретную версию

$$g(p,\theta) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} I(x, y)\,\delta(y\sin\theta + x\cos\theta - \rho),$$

где все переменные дискретны.

Преобразование Радона

Полученную двумерную функцию $g(p,\ \theta)$ можно визуализировать. Полученное изображение, где яркости получаются из значений $g(p,\ \theta)$, называют **синограммой** (англ. sinogram). Синограмма содержит все необходимое для восстановления исходного изображения.



Обратное Преобразование Радона

Установим **теорему о проекциях** (Fourier-slice theorem).

Зафиксируем некоторый угол θ и рассмотрим проекцию $g(\rho,\ \theta)$ как функцию по переменной ρ. Проделаем с этой функцией 1D преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}[\,g(\,\cdot\,,\theta)]\,(\omega) \;=\; G(\omega,\theta) \;=\; \int_{\mathbb{R}} g(\rho,\theta)\, e^{-2\pi i \omega \rho}\, d\rho\,.$$

Подставим выражение для $g(\rho,\ \theta)$ в преобразование Фурье

$$\int_{\mathbb{R}} g(\rho,\theta)\, e^{-2\pi i \omega\rho}\, d\rho \;=\; \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^2} I(x,y)\, \delta(y\sin\theta + x\cos\theta - \rho)\, dx\, dy\right) e^{-2\pi i\omega\rho}\, d\rho \;=$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} I(x,y)\left(\int_{\mathbb{R}} \delta(y\sin\theta + x\cos\theta - \rho)\, e^{-2\pi i\omega\rho}\, d\rho\right) dx\, dy \;=$$

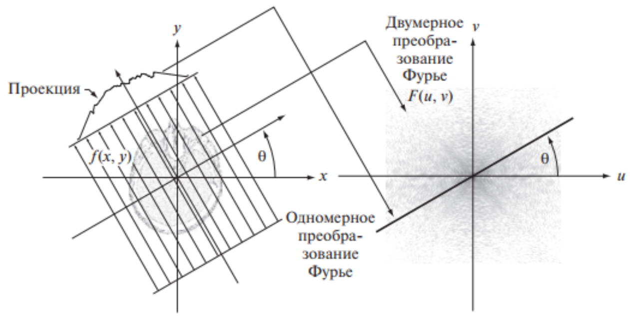
$$\int_{\mathbb{R}^2} I(x,y)\, e^{-2\pi i\omega(y\sin\theta + x\cos\theta)}\, dx\, dy \;=\; \hat{I}(\omega\cos\theta,\ \omega\sin\theta).$$

Введём обозначения $u = \omega\cos\theta$, $v = \omega\sin\theta$, тогда,

$$\int_{\mathbb{R}} g(\rho,\theta)\, e^{-2\pi i\omega\rho}\, d\rho = \int_{\mathbb{R}^2} I(x,y)\, e^{-2\pi i(yu + xv)}\, dx\, dy \;=\; \hat{I}(u,v).$$

Обратное Преобразование Радона

1D преобразование Фурье проекции $g(\cdot, \theta)$ равно срезу 2D преобразования Фурье исходного изображения вдоль прямой с углом наклона θ.



Восстановление изображения **суммой обратных проекций** равносильно восстановлению 2D преобразования Фурье **сложением срезов 2D преобразований Фурье**.

Эта связь даёт понимание причины размытости — это пересечение срезов около нулевых частот, что усиляет низкие частоты при простом суммировании проекции при восстановлении.

Как решить проблему? Уменьшить вес низких частот при сложении проекции, что ведёт к методу фильтрации и обратного проектирования (англ. filtered backprojection).

Обратное Преобразование Радона

По спектру $\hat{I}(u,\ v)$ можно восстановить исходное изображение.

$$I(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{I}(u,v)\, e^{2\pi i (y u + x v)}\, du\, dv.$$

Сделаем замену переменной, перейдя к полярным координатам: $u = \omega \cos\theta$, $v = \omega \sin\theta$, $\omega \geq 0$, $\theta \in [0,\ 2\pi)$
и затем применим Fourier-slice theorem:

$$I(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \hat{I}(\omega\cos\theta, \omega\sin\theta)\, e^{2\pi i (y\omega\cos\theta + x\omega\sin\theta)}\, \omega\, d\omega\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}[\, g(\cdot, \theta)]\,(\omega)\, e^{2\pi i (y\omega\cos\theta + x\omega\sin\theta)}\, \omega\, d\omega\, d\theta.$$

Обратное Преобразование Радона

Далее, $I(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}[g(\cdot, \theta)](\omega)\, e^{2\pi i (y\,\omega \cos\theta + x\,\omega \sin\theta)}\, \omega\, d\omega\, d\theta = \int_0^{\pi} \ldots + \int_{\pi}^{2\pi} \ldots$

Сделаем во втором интеграле замену переменной $\theta := \theta - \pi$ и используем тот факт, что $\mathcal{F}[g(\cdot, \theta - \pi)](\omega) = \mathcal{F}[g(-\cdot, \theta)](\omega) = \mathcal{F}[g(\cdot, \theta)](-\omega)$. Тогда можно во внутреннем интеграле сделать замену переменной $\omega := -\omega$, что приведёт к интегралу

$$I(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[g(\cdot, \theta)](\omega)\, e^{2\pi i (y \cos\theta + x \sin\theta)\,\omega}\, |\omega|\, d\omega\, d\theta =$$

$$\int_0^{\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} |\omega|\, \mathcal{F}[g(\cdot, \theta)](\omega)\, e^{2\pi i \rho \omega}\, d\omega \right) \Bigg|_{\rho = y\cos\theta + x\sin\theta} d\theta.$$

Если бы не было бы $|\omega|$, то внутри внешнего интеграла находилось бы обратное преобразование Фурье. А так этот множитель действует как фильтр. Этот фильтр называют пилообразным (англ. Ramp filter). Также его называют фильтром Рам-Лака по именам предложивших его авторов [Ramachandran, Lakshminarayanan, 1971].

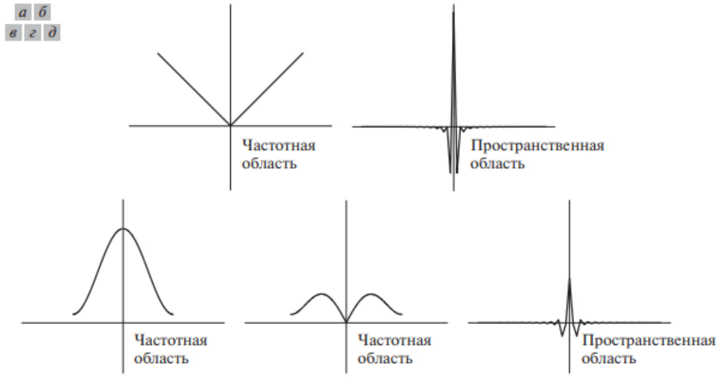
Функция $h(\omega) = |\omega|$ не является интегрируемой, а значит от неё нет преобразования Фурье в обычном смысле. На практике на этот фильтр можно навесить окно в частотной области, чтобы ограничить полосу частот.

Обратное Преобразование Радона

В качестве функции окна в простейшем случая можно выбрать и прямоугольное окно, но оно вызывает эффект Гиббса на резких переходах в изображении, поэтому лучший результат будет при использовании гладких окон, например, окно Хэмминга, или окно Ханна.

$$h(\omega)=\begin{cases} c+(c-1)\cos\dfrac{2\pi\omega}{M-1} & 0\le\omega\le M-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При $c = 0.54$ будет окно Хэмминга, а при $c = 0.5$ окно Ханна.



Обратное Преобразование Радона

В дискретном варианте формула восстановления означает, что изображение $I(x, y)$ восстанавливается суммированием по углам θ от 0 до π.

Когда проекций конечное число, то внешний интеграл будет суммой.

В итоге для восстановления полного изображения требуется:

1. Найти 1D преобразование Фурье каждой проекции.
2. Домножить каждое преобразование Фурье проекции $\mathcal{F}[\,g(\cdot\,,\,\theta)]\,(\omega)$ на $|\omega|$ с выбранной функцией-окна.
3. Взять обратное преобразование Фурье для каждой отфильтрованной проекции.
4. Просуммировать результат по всем углам.

Эти действия и составляют **метод фильтрации и обратного проектирования** (англ. filtered backprojection).