

Математические модели обработки сигналов

Тема 14: Непрерывное всплеск-преобразование

Лектор: Кривошеин А.В.

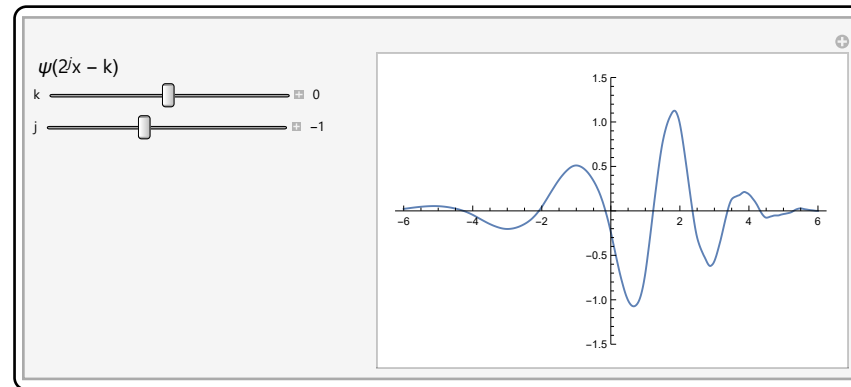
Что такое всплеск?

Под понятием всплеск-функции понимается два близких объекта.

Первое: всплеск-функцией будем называть функцию, сдвиги и растяжения которой образуют некоторую систему представления, то есть ОНБ, базис Рисса, жёсткий или двойственный фрейм (“избыточный” базис) в $L_2(\mathbb{R})$.

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) = 2^{j/2} \psi\left(2^j \left(x - \frac{k}{2^j}\right)\right), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

График всплеск-функции



За счёт сдвигов функции мы можем охватить всю вещественную ось, за счёт сжатий улавливать достаточно быстрые колебания, за счёт растяжений — достаточно медленные колебания. Множитель $2^{j/2}$ играет роль нормировки, за счёт него все функции равны по норме в $L_2(\mathbb{R})$: $\|\psi_{j,k}\| = \|\psi\|$ для всех $j, k \in \mathbb{Z}$.

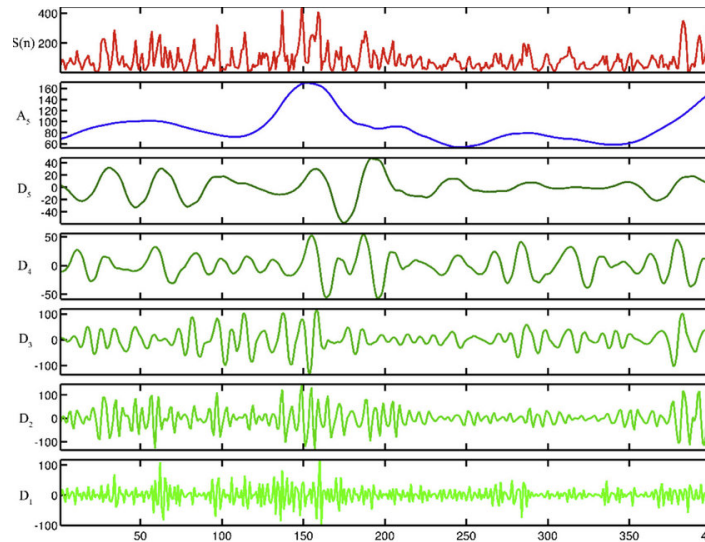
Второй смысл всплеск-функции — это ядро непрерывного всплеск-преобразования.

Базовая идея приближения с помощью системы всплесков

Произвольный сигнал f представляется как сумма
“грубого” приближения этого сигнала и уточняющих деталей.

“Грубое” приближение является сглаженной копией сигнала (содержащей в основном низкие частоты),
а уточняющие детали содержат быстро меняющиеся компоненты сигнала (то есть высокочастотную компоненту).

При этом степень “огрубления” можно легко изменять, а алгоритмы расчета автоматически являются быстрыми, за счет самой структуры систем всплесков.



Для характеристики “грубого” приближения сигнала и уточняющих деталей служат две различные функции φ и ψ , которые должны обладать целым рядом свойств.

Функцию φ называют **масштабирующей**, она отвечает за построение приближения сигнала с той или иной точностью (или же с тем или иным масштабом).

Функцию ψ называют **всплеск-функцией**, она отвечает за детали. Её название возникло из-за типичного вида всплеск-функции: маленькой волны.

Базовая идея приближения с помощью системы всплесков

Ключевое свойство всплеск-функции ψ в том, что её сдвиги и сжатия

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

образуют "достаточно хорошую" систему представления в $L_2(\mathbb{R})$ (например, ортогональный базис).

“Достаточно хорошая” значит, что любая функция $f \in L_2(\mathbb{R})$ может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_{j,k} \psi_{j,k}(x). \quad (1)$$

Для фиксированного уровня j внутренняя сумма $\sum_{k \in \mathbb{Z}} A_{j,k} \psi_{j,k}(x)$ отвечает за вклад в сигнал компонентов, которые меняются с определенной частотой.

Чем больше j , тем более быстро меняющиеся компоненты содержатся в этой сумме.

В представлении (1) сигнал f разложен по всем уровням $j \in \mathbb{Z}$. Часто также используется и такое разложение

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_{0,k} \varphi_{0,k}(x) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_{j,k} \psi_{j,k}(x),$$

где первая сумма как раз отвечает за “грубое” приближение сигнала.

История создания

Термин "**wavelet**" был введён французским математиком Жаном Морле в 1970-х (фр. "ondelette"), что означает "маленькая волна". На русском этому термину соответствует два эквивалента — это транслитерация английского слова wavelet: термин "вейвлет" и термин "всплеск".

Первой построенной системой всплесков и при этом самой простейшей является базис всплесков Хаара (1909). Но А. Хааром не был отмечен тот факт, что система образована сдвигами и растяжениями одной функции.

Ж. Морле в 1970-е годы разработал метод для анализа сейсмических сигналов для нефтяной компании, основанный на использовании сжатий/растяжений и сдвигов некоторой подходящей оконной функции. Задача была в определении наличия нефти под землей и толщины нефтяного слоя при помощи акустических волн.

Надо отметить, что Ж. Морле первоначально использовал оконное преобразование Фурье (ОПФ). Однако, оно плохо подходило для анализа, в силу особенностей частотно-временной локализации функции-окна (для ОПФ ширина временной и частотной локализации постоянна).

Идея Ж. Морле основана на следующих соображениях:

- при преобразовании Фурье (ПФ) сигнал раскладывается по синусоидам разных частот;
- при ОПФ, сигнал раскладывается, грубо говоря, по кусочкам синусоид разных частот,

при этом кусочки можно сдвигать, чтобы покрыть всю числовую ось.

Что если **изменять частоту** кусочка синусоиды не сменой частоты синусоиды, а **сжатием/растяжением** этого кусочка. Эти эксперименты с растягиванием и сжатием окна привели к разработке непрерывного всплеск-преобразования.

История создания

В 1984 году выходит статья Алекса Гроссмана и Жана Морле с теоретическим обоснованием метода Морле, то есть непрерывного всплеск-преобразования (НВП), в частности, были найдены условия обратимости. Далее, возникла задача построения дискретного аналога НВП, поскольку ПФ и ОПФ имеют свои дискретные аналоги. Для НВП такие аналоги также пытались найти. Однако, построение всплеск-функций с хорошими свойствами было не таким простым. Тогда считалось, что существование функции, чьи целочисленные сдвиги и двоичные сжатия образуют ОНБ и имеют хорошую частотно-временную локализацию скорее невозможно. Основанием для этого был результат Балиана—Лоу о том, что функция окно, чьи сдвиги и модуляции образуют ОНБ обязательно плохо локализована либо по времени, либо по частоте.

Ключевым результатом стал пример, который построил **Ив Мейер** в 1985 при попытке доказать, что такой пример построить невозможно. Он имеет хорошие частотно-временные свойства, при этом всплеск является бесконечно дифференцируемым и порождает ОНБ. Но носитель не компактный.

Возник вопрос: а можно ли построить всплеск-функцию с компактным носителем, которая порождает ОНБ?

На пути к разрешению этого вопроса, в 1986 **Ив Мейер** и **Стефан Малла** сформулировали понятие кратномасштабного анализа (КМА). Это некая структура упрощающая построение систем всплесков. До этого не было каких либо общих правил или способов построения. Надо было фактически угадывать функцию, подходящую для порождения ОНБ всплесков. КМА стал таким общим способом построения. С точки зрения теории цифровой обработки сигналов, КМА вытекает из идеи разложения сигнала по поддиапазонам (subband decomposition) на основе квадратурно-сопряжённых фильтров (которая успешно работала в задачах, связанных с обработкой речи). А также из пирамидальных алгоритмов (pyramidal algorithms), которые применялись при обработке изображений. Именно на эту связь и обратил внимание **С. Малла** в работе 1985 года, что предшествовало созданию КМА.

На основе КМА в 1988 **Ингрид Добеши** разработала семейство систем всплесков, которые являются ОНБ, обладают гладкостью и компактным носителем. Эти результаты легли в основу теории всплесков.

С этого момента интерес к теории всплесков начал активно расти, начинается ветвление теории и появляется целый вал публикаций, посвящённых всплескам. Идеи всплеск-анализа быстро проникли во многие области анализа сигналов. "За решающую роль в создании математической теории всплесков" **Ив Мейер** был отмечен престижной премией Абеля в 2017 году.

Особенности всплеск-преобразования в приложениях

На практике, разложение сигналов с помощью всплесков осуществляется **дискретным всплеск-преобразованием** (ДВП). Результат ДВП — это два новых вектора, один из которых содержит в себе НЧ компоненту сигнала, то есть сглаженное приближение исходного сигнала.

Второй содержит детали или ВЧ компоненту сигнала.

При этом ДВП можно применять и дальше как к деталям, так и к сглаженному приближению, выделяя низкочастотную и высокочастотную компоненту из уже выделенных компонент.



ДВП при этом обеспечивает **обратимость**, то есть из компонент мы можем собрать исходный сигнал.

ДВП **не вносит избыточности** в данные. Это выражается в том, что N -мерный вектор на входе преобразуется в два вектора, суммарное количество элементов в которых также равно N .

Существуют **быстрые алгоритмы**, реализующие ДВП, число операций линейно зависит от размерности данных, то есть они требуют $O(N)$ операций в отличие от ДПФ с $O(N \log(N))$ операций.

Для гладких сигналов **много коэффициентов** в деталях либо **обнуляются**, либо близки к нулю, что даёт возможность для эффективного сжатия сигнала.

Особенности частотно-временной локализации. Для ДВП каждый коэффициент отвечает за свой небольшой временной участок и свой участок по частоте. Аналогичными свойствами обладает и оконное преобразование Фурье. Однако, ключевым отличием здесь является **гибкость частотно-временного прямоугольника**. Если для оконной функции и её сдвигов и модуляций, ширина временной и ширина частотной локализации одна и та же, то для всплеск-функции и её сжатий\растяжений ширина локализации по времени и по частоте меняется.

Обзор приложений

Одним из первых широко известных приложений ДВП была разработка **алгоритма сжатия** для хранения базы данных отпечатков пальцев ФБР (1993). Порядка 200 миллионов записей с отпечатками хранилось на бумажных картах. Планировалось сохранить отпечатки как 8-ми битное изображение с разрешением 500dpi. Без сжатия требовалось 10Мб на карточку, и в общем около 2 000 Тб. В основу алгоритма легло ДВП с биортогональной системой всплесков, разработанной Cohen-Daubechies-Fauveau, (1990). Новый стандарт позволил достичь коэффициента сжатия 20:1 при приемлемой потере качества.

К 2000 году был утвержден стандарт сжатия **JPEG 2000**. В его основе лежит ДВП, осуществляемое с помощью двух систем всплесков (одна для сжатия без потерь, вторая для сжатия с потерями). В отличие от стандарта JPEG, где обработка происходит поблочно с помощью, фактически ДПФ, ДВП может работать со всем изображением сразу. Можно также отметить и формат DjVu, предназначенный для хранения сканированных документов. На основе ДВП работает видео-кодек CineForm, предназначенный для профессионального видео-монтажа при создании цифрового кино.

Весьма распространено применение ДВП для медицинской визуализации при **анализе и улучшении качества изображений**, получаемых с различных приборов, то есть очищение от шума, сглаживание, классификация и пр. Это расшифровка ЭКГ и ЭЭГ, обработка томографических изображений, в частности позитронной эмиссионной томографии (ПЭТ) головного мозга. Также, ДВП применяют и для анализа последовательностей ДНК.

Также можно отметить применение всплесков в области **функционального анализа**. Это характеристика ряда функциональных пространств, таких как пространств Лебега, Соболева, Харди, Бесова и Лизоркина-Трибеля. Кроме того, было установлено что для всех классических банаховых пространств существуют безусловные базисы всплесков.

Среди ставших уже классическими приложений: это применение всплеск-функций для **численного решения дифференциальных уравнений** в частных производных, в частности использование всплесков как базисных функций в методе Галёркина, это очищение сигнала от шума. Для некоторых типов шумов (например, аддитивный белый шум) была показана высокая эффективность систем всплесков.

Частотно-временные всплески используются для детектирования гравитационных волн (этому была посвящена лекция Мейера в 2017 после получения им премии). За открытие этих волн в сентябре 2015 года в 2017 году была вручена Нобелевская премия.

Существование гравитационных волн впервые было предсказано в 1916 году Альбертом Эйнштейном на основании ОТО. Эти волны представляют собой рябь пространства, распространяющуюся во времени со скоростью света: при прохождении гравитационной волны между двумя свободно падающими телами расстояние между ними изменяется. Двойные системы массивных объектов, например, нейтронных звёзд или чёрных дыр, постоянно излучают гравитационные волны. Излучение постепенно сокращает их

орбиты и в конечном счёте приводит к их слиянию, порождающему в этот момент особенно мощную гравитационную волну, буквально «прокатывающуюся» по Вселенной. Гравитационную волну такой силы способны зарегистрировать детекторы гравитационных волн. Именно Сигнал слияния двух чёрных дыр был зафиксирован в 2015 году. Сигнал обнаружили два лаборатории LIGO и VIRGO. Когда гравитационная волна проходит через детектор (прямая 4 км с двумя тестовыми массами), то это можно уловить - поскольку изменяется расстояние между массами. Порядок изменений 10^{-20} . Алгоритм обнаружения разработал физик Сергей Клименко (Coherent WaveBurst) на основе всплесков, которые осуществляют частотно-временной анализ. Предсказанная из уравнений ОТО форма гравитационных волн важна из анализа, это чирп, сигнал с увеличением частоты во времени, очень сильно локализованный во времени.

Непрерывное всплеск-преобразование

НВП — это аналог преобразования Фурье и оконного преобразования Фурье:

трансформация сигнала в другую форму, которая позволяет проводить анализ тех или иных особенностей сигнала более наглядно и эффективно. При этом трансформация, фактически, задаётся одной функцией.

Пусть $\psi \in L_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим семейство функций $\psi_a(t) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \psi\left(\frac{t}{a}\right)$. Преобразование Фурье этих функций имеет вид

$$\hat{\psi}_a(\omega) = |a|^{1/2} \hat{\psi}(a \omega)$$

Когда параметр a увеличивается, функция растягивается, а спектр сужается, при уменьшении параметра a — наоборот.

Рассмотрим также сдвиги этой функции:

$$\psi_{a,b}(t) = \psi_a(t - b) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \psi\left(\frac{t - b}{a}\right).$$

Множитель $\frac{1}{|a|^{1/2}}$ выбран так, чтобы $\|\psi\|^2 = \|\psi_{a,b}\|^2$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$.

Как правило, параметр a полагают положительным.

Определим непрерывное всплеск-преобразование (НВП, англ. *continuous wavelet transform, CWT*)

$$W_\psi f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\frac{1}{|a|^{1/2}} \psi\left(\frac{t - b}{a}\right)} dt.$$

Результатом НВП является двумерная функция $W_\psi f(a, b)$, которая некоторым образом характеризует исходную функцию.

Известно, что $W_\psi f(a, b) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ и $W_\psi f(a, b)$ ограничена по неравенству Коши-Буняковского.

Обратимость НВП

Ключевым для обратимости НВП является **условие допустимости** (англ. admissibility condition):

$$0 < C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty, \quad \text{тогда} \quad f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2}.$$

Эту формулу и называют **обратным всплеск-преобразованием**.

Теорема. Пусть $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, $t\psi(t) \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда для выполнения условия допустимости $C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$

необходимо и достаточно, чтобы $\hat{\psi}(0) = 0$ или $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$.

То есть интеграл функции равен нулю, а значит положительные и отрицательные значения друг друга уравнивают.

Типичный график всплеска действительно по виду напоминает волну.

Кроме того, $\hat{\psi}(\omega)$ должна иметь достаточно быстрое убывание на бесконечности (для хорошей локализации),

а с учётом условия $\hat{\psi}(0) = 0$,

значения $\hat{\psi}(\omega)$ **малы вне** некоторого интервала $\alpha < |\omega| < \beta$.

Обратимость НВП

Теорема. Пусть $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, $t\psi(t) \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда для выполнения условия допустимости $C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$

необходимо и достаточно, чтобы $\hat{\psi}(0) = 0$ или $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$.

Доказательство. Необходимость. При наложенных условиях $\psi \in L_1(\mathbb{R})$. Действительно,

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(t)| dt = \int_{|t| \leq 1} |\psi(t)| dt + \int_{|t| > 1} |\psi(t)| dt \leq \left(\int_{|t| \leq 1} 1 dt \int_{|t| \leq 1} |\psi(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \int_{|t| > 1} |t| |\psi(t)| dt \leq 2 \|\psi\|_2 + \|t\psi(t)\|_1.$$

Поскольку $\psi \in L_1(\mathbb{R})$, то $\hat{\psi}$ непрерывна. А значит, если условие допустимости выполняется, то обязательно $\hat{\psi}(0) = 0$.

Достаточность. Из свойств преобразования Фурье, $t\psi(t) \in L_1(\mathbb{R})$ влечёт то, что $\hat{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$. А значит, конечно число

$$\sup_{|\omega| \leq 1} \{|\hat{\psi}'(\omega)|\} =: M.$$

Если $\hat{\psi}(0) = 0$, то по формуле Лагранжа $|\hat{\psi}(\omega)| \leq M|\omega|$, $|\omega| \leq 1$.

А значит верна оценка, устанавливающая справедливость условия допустимости

$$\int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \leq \int_0^1 M^2 |\omega| d\omega + \int_1^\infty |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \leq M^2 + \|\psi\|^2 < \infty. \quad \square$$

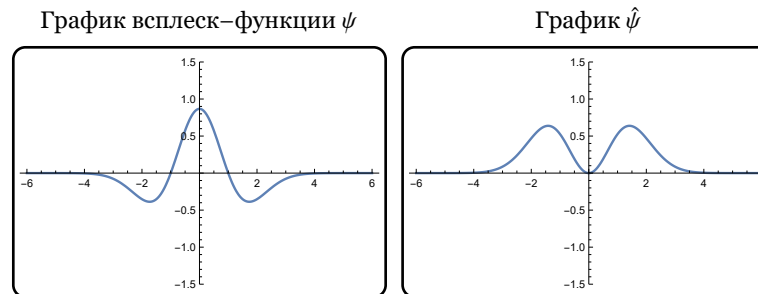
Пример

Одним из популярных примеров всплеск-функции является функция называемая из-за своей формы **“мексиканской шляпой”** (англ. Mexican Hat Wavelet):

$$\psi(t) = \frac{2(1-t^2)e^{-t^2/2}}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}$$

Эта функция, является нормированной (по норме в $L_2(\mathbb{R})$) второй производной гауссианы $e^{-t^2/2}$. Преобразование Фурье $\hat{\psi}$ имеет вид

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{2\omega^2 e^{-\omega^2/2}}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}$$



Условию допустимости такая функция ψ очевидно удовлетворяет.

Пример

Простейшим пример всплеск-функции является функция Хаара:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad \hat{\psi}(\omega) = i \sin\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) e^{-\pi i \omega}.$$

График всплеск-функции ψ

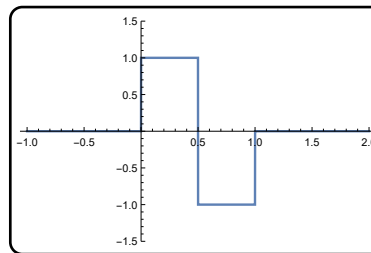
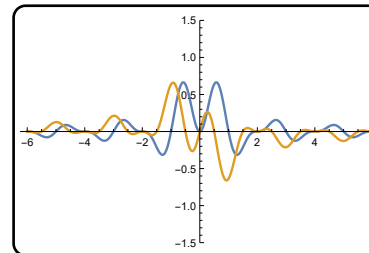


График $\hat{\psi}$



Значение $\mathcal{W}_\psi(f, a, b)$ просто интерпретировать

$$\mathcal{W}_\psi(f, a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\int_b^{b+a/2} f(t) dt - \int_{b+a/2}^{b+a} f(t) dt \right) = \frac{\sqrt{a}}{2} \left(\frac{2}{a} \int_b^{b+a/2} f(t) dt - \frac{2}{a} \int_{b+a/2}^{b+a} f(t) dt \right).$$

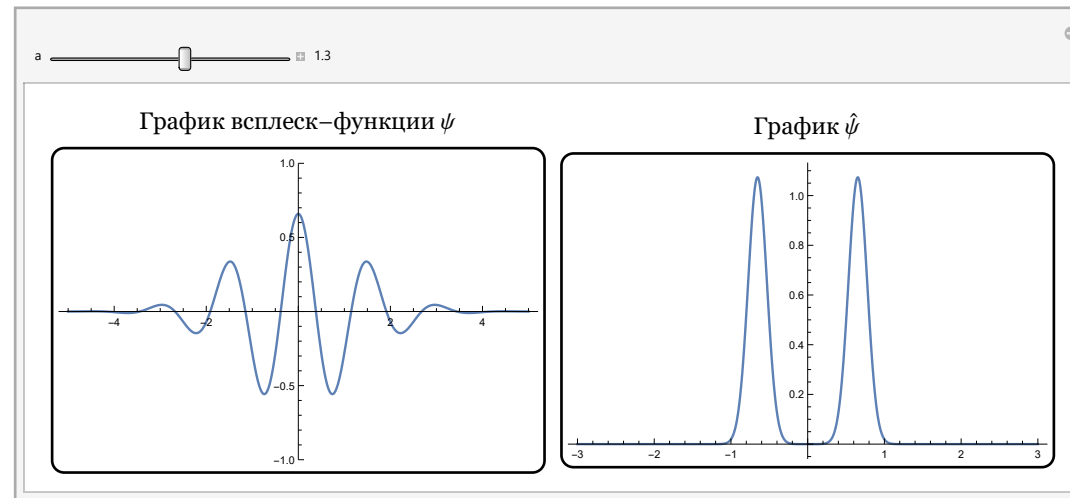
То есть значение $\mathcal{W}_\psi(f, a, b)$ (с точностью до нормировки) это разность между интегральными средними значениями функции f по двум соседним интервалам длины $a/2$ в окрестности точки b .

Пример

Первая всплеск-функция предложена Ж. Морле (1970-е):

$$\psi(x) = 1 / \sqrt[4]{\pi} \cos\left(x \pi \sqrt{\frac{2}{\ln 2}}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

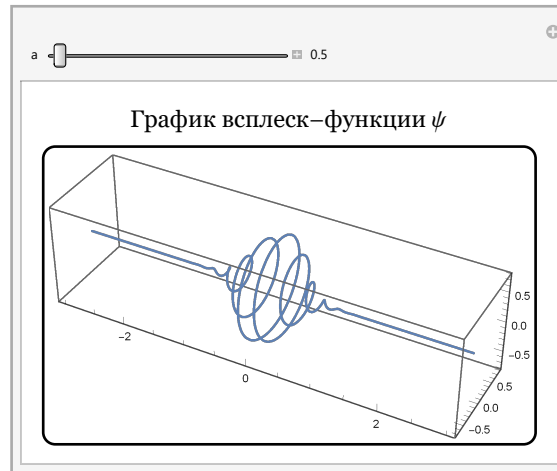
График функции ψ и её преобразования Фурье:



Пример

Комплексная всплеск-функция Морле:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi B}} e^{-t^2/B} e^{2\pi i C t}, \quad \text{где } B \text{ (ширина диапазона), } C \text{ (центральная частота)}$$



Производные гауссианы также можно использовать в качестве всплеск-функций:

$$D^n \psi(x), \quad \text{где } \psi(x) = C e^{-t^2}, \quad C \text{ параметр для нормализации.}$$

Анализ сигналов с помощью НВП

При преобразовании Фурье информация о вкладе частот в сигнал содержится в амплитудах $|\hat{x}(\omega)|$,

При оконном преобразовании Фурье частотно-временная информация содержится в спектрограмме $|X(\tau, \omega)|$.

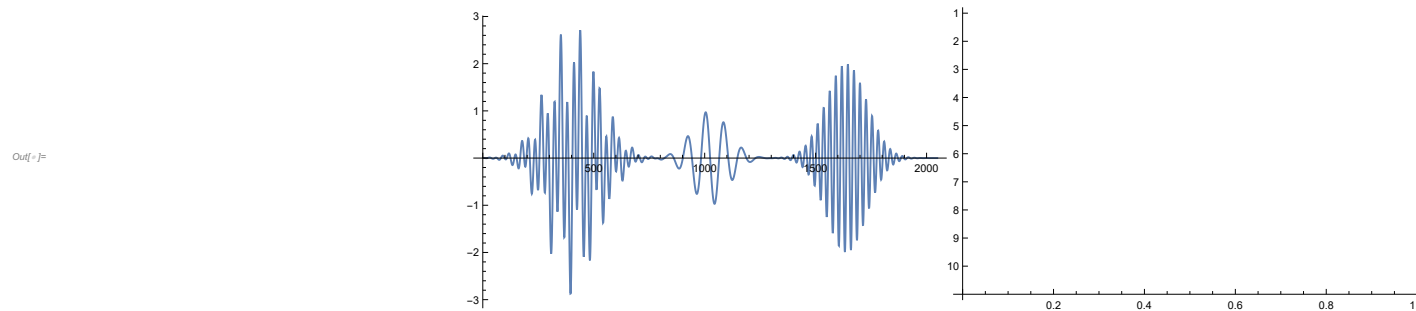
Для НВП при фиксированной паре параметров a, b значение

$$E(a, b) = |W_\psi f(a, b)|^2 = |\langle f, \psi_{a,b} \rangle|^2$$

отвечает за похожесть сигнала f на всплеск-функцию $\psi_{a,b}$.

Функцию $\psi_{a,b}$ также называют масштабно-временным атомом.

График функции $E(a, b)$ называют скейлограммой (шкалограмма, англ. scalogram, аналог спектрограммы для оконного преобразования Фурье).



Анализ сигналов с помощью НВП

По функции $E(a, b)$ можно восстановить энергию сигнала, проинтегрировав по a и b .

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty |W_\psi f(a, b)|^2 \frac{da}{a^2} db.$$

В этом смысле величину $E(a, b) = |W_\psi f(a, b)|^2$ можно также трактовать

как величину вклада соответствующего масштабно-временного атома $\psi_{a,b}$ в общую энергию сигнала.

Можно также подсчитать вклад в энергию сигнала только компонентов сигнала на некотором масштабе

$$E(a) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} |W_\psi f(a, b)|^2 db.$$

Пики этой функции покажут наиболее энергетически весомые масштабы в сигнале.

Эта функция наиболее близка к преобразованию Фурье сигнала x . Чтобы явно это установить, надо конвертировать масштаб a в частоту.

Анализ сигналов с помощью НВП

На практике самый распространённый метод заключается в формуле:

$$\omega = \frac{\omega_c}{a}.$$

где ω_c равна центральной частоте у полосы пропускания спектра всплеск-функции. Частота обратно пропорциональна масштабу a , так как если a растёт, то всплеск во времени растягивается, а спектр сужается, то есть он отвечает за более низкие частоты.

Энергию сигнала с помощью $E(a)$ можно получить по формуле

$$\|f\|^2 = \int_0^{\infty} E(a) \frac{da}{a^2}.$$

С помощью замены переменных вида $a = \frac{\omega_c}{\omega}$ получим

$$\|f\|^2 = - \int_{\infty}^0 E\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right) \frac{d\omega}{\omega^2} \frac{\omega_c}{\omega_c^2/\omega^2} = \int_0^{\infty} \frac{E\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)}{\omega_c} d\omega$$

То есть функция $\frac{1}{\omega_c} E\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)$ является прямым аналогом функции $|\hat{f}(\omega)|^2$, то есть спектральной плотности мощности сигнала f .

Вычисление НВП

Быстрый алгоритм для вычисления НВП основан на БПФ. Пользуясь свойствами преобразования Фурье, получим

$$\begin{aligned} W_{\psi} f(a, b) &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{a,b} \rangle = |a|^{1/2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega b} \overline{\hat{\psi}(a \omega)} d\omega = \\ &= |a|^{1/2} \mathcal{F}^{-1} \left[\overline{\hat{\psi}(a \omega)} \hat{f}(\omega) \right] (b), \end{aligned}$$

то есть $W_{\psi} f(a, b)$ — это обратное ПФ от функции $\overline{\hat{\psi}(a \omega)} \hat{f}(\omega)$.

Эти формулы дают метод быстрого вычисления НВП через БПФ. А именно, считается дискретизированное приближение НВП. Для этого надо знать \hat{f} , оно вычисляется как БПФ сигнала.

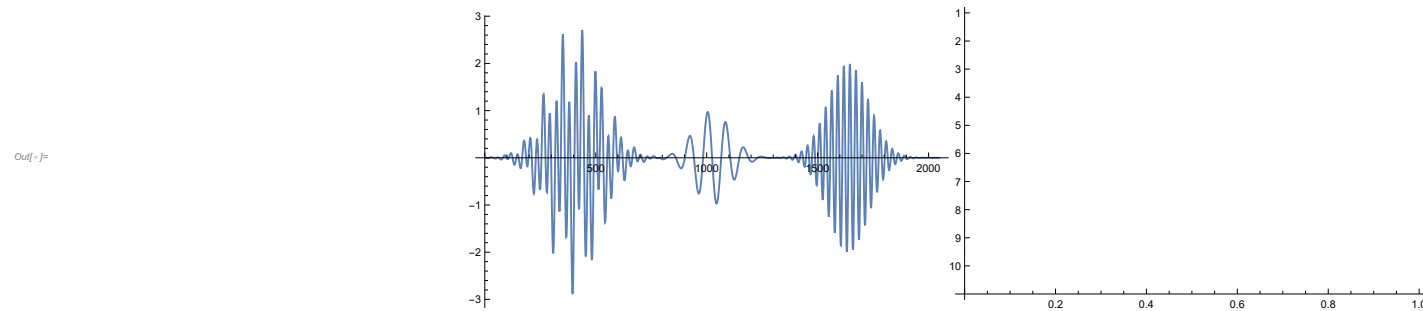
Также надо знать $\hat{\psi}$, которое, как правило, известно аналитически.

Далее, для выбранных масштабов, мы перемножаем поточечно эти два набора данных и берем обратное БПФ.

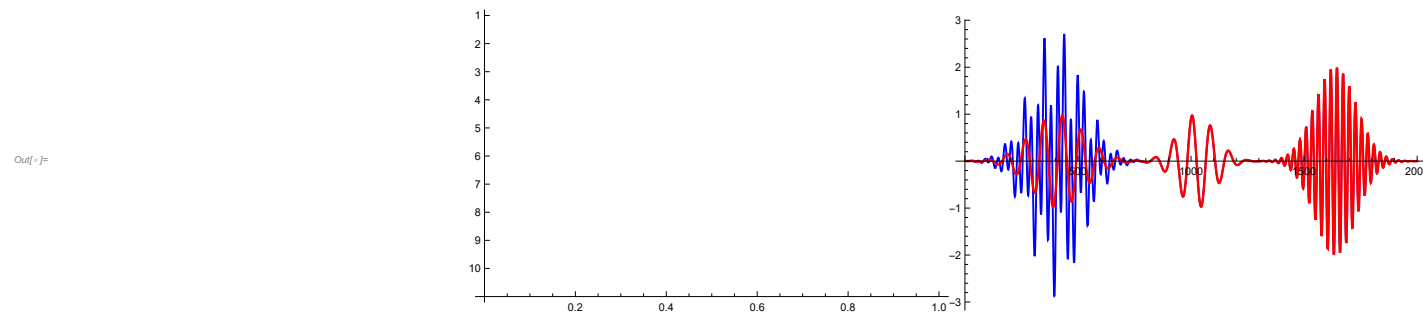
Пример фильтрации

Изменяя шкалограмму и выполняя обратное НВП, можно отсечь, например, высокочастотный шум.

Пример НВП



Фильтрация частоты:



Частотно-временная локализация

При обсуждении оконного ПФ рассматривался вопрос о частотно-временной локализации функции-окна.

Определим это понятие частотно-временной локализации функции формально.

Рассмотрим функцию $f \in L_2(\mathbb{R})$ такую, что $t f(t) \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда, в силу неравенства

$$2|t| |f(t)|^2 \leq (1 + t^2) |f(t)|^2 \quad \text{при всех } t \in \mathbb{R}$$

и признака сравнения, $\sqrt{|t|} f(t) \in L_2(\mathbb{R})$.

Те же требования наложим и на преобразование Фурье функции f , то есть $\hat{f}, \omega \hat{f}(\omega) \in L_2(\mathbb{R})$. Положим также, что $\|f\|_2 = 1$.

Центрами частотной и временной локализации будем называть величины

$$t_0 = \int_{\mathbb{R}} t |f(t)|^2 dt = \langle t f(t), f(t) \rangle,$$

$$\omega_0 = \int_{\mathbb{R}} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \langle \omega \hat{f}(\omega), \hat{f}(\omega) \rangle.$$

Интерпретация: t_0 - математическое ожидание случайной величины, распределение которой задаётся плотностью $|f(t)|^2$.

Частотно-временная локализация

Шириной временной и частотной локализации функции f будем называть величины Δ_t и Δ_ω

$$\Delta_t^2 = \int_{\mathbb{R}} (t - t_0)^2 |f(t)|^2 dt,$$

$$\Delta_\omega^2 = \int_{\mathbb{R}} (\omega - \omega_0)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Интерпретация: Δ_t^2 — это мера разброса значений (или дисперсия) случайной величины, распределение которой задаётся плотностью $|f(t)|^2$.

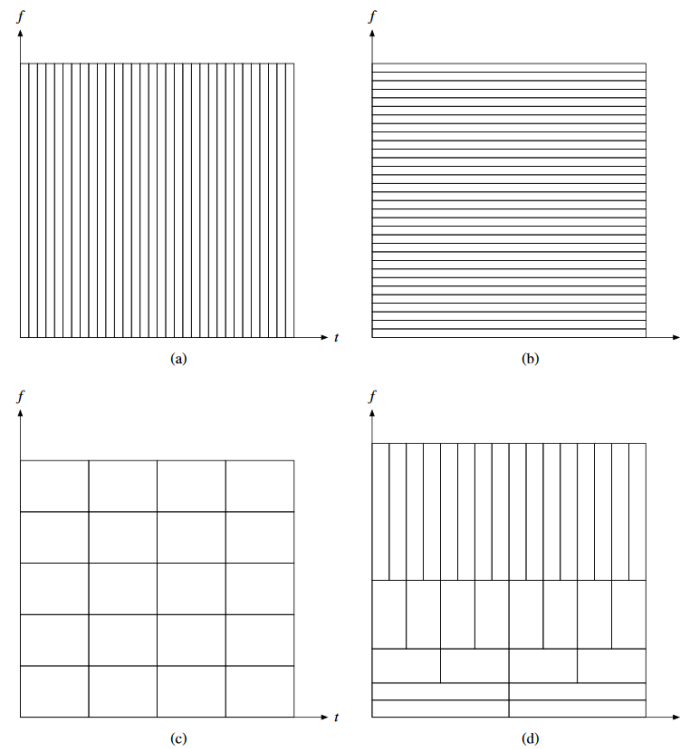
Принцип неопределённости Гейзенберга говорит, что

$$\Delta_t \Delta_\omega \geq \frac{1}{4\pi}.$$

То есть произведение ширин временной или частотной локализации не может быть меньше чем $\frac{1}{4\pi}$. При этом равенство достигается на гауссиане (с точностью до умножения на константу, сдвига, сжатия\растяжения и модуляции):

$$f(t) = e^{-\pi t^2/2}.$$

Частотно-временная плоскость



Заполнение частотно-временной плоскости для различных способов представлений сигналов:

- (a) во временной области
- (b) в частотной (с помощью ДПФ)
- (c) с помощью оконного преобразования Фурье
- (d) с помощью систем всплесков.

Частотно-временная плоскость

Оконное преобразование Фурье :

функция – окно $w_{b,\omega}(t) = w(t-b) e^{2\pi i \omega t}$,

$$X(\tau, \omega) := \langle x, w_{b,\omega} \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{w_{b,\omega}(t)} dt .$$

Непрерывное всплеск-преобразование:

всплеск – функция: $\psi_{a,b}(t) = \psi_a(t-b) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$.

$$W_\psi f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt .$$

