Математические модели обработки сигналов

Тема 10: Линейные стационарные системы и цифровая фильтрация

Лектор: Кривошеин А.В.

Основные дискретные сигналы (примеры)

Дискретные сигналы — это последовательности чисел $x = \{x[n]\} := \{x[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Множество всевозможных последовательностей будем обозначать за $\ell(\mathbb{Z})$.

Это множество является линейным пространством.

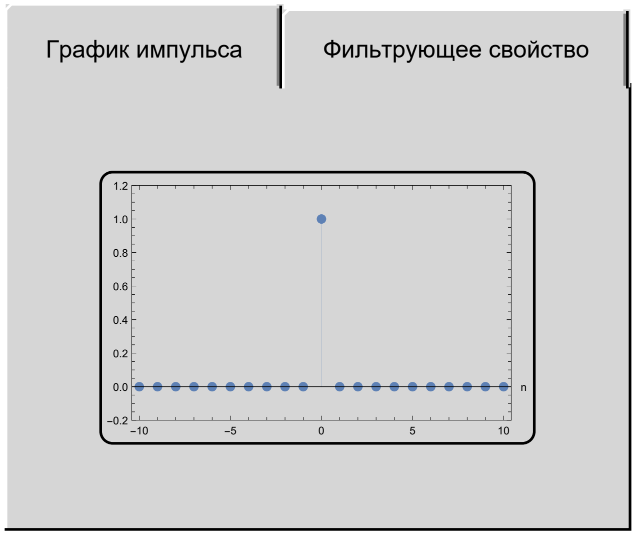
$\ell_0(\mathbb{Z})$ — линейное пространство финитных последовательностей.

$\ell_1(\mathbb{Z})$ — банахово пространство абсолютно суммируемых последовательностей.

$\ell_\infty(\mathbb{Z})$ — банахово пространство ограниченных последовательностей.

Единичный импульс $\delta = \{\delta[\mathrm{n}]\}$: $\quad \delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0; \\ 1, & n = 0. \end{cases}$

Фильтрующее свойство : $x[n] = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k], \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}.$



Основные дискретные сигналы (примеры)

Единичный скачок — это последовательность $u = \{u[n]\}$ с элементами

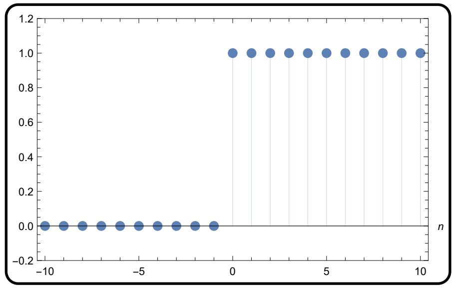
$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Единичный скачок может быть выражен через единичный импульс как

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \ldots = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k], \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

Обратно, единичный импульс можно выразить через единичный скачок как разность

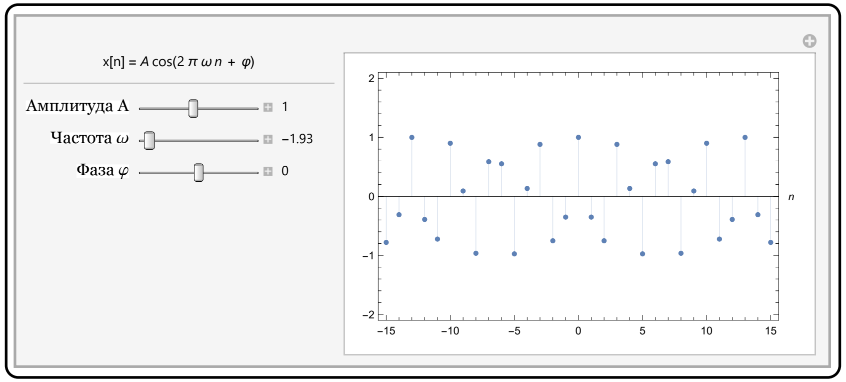
$$\delta[n] = u[n] - u[n-1], \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$



Основные дискретные сигналы (примеры)

Синусоида : $x[n] = A \cos(2\pi\omega n + \varphi), \ \forall \ n \in \mathbb{Z}, \ 0 \le \omega < 1.$

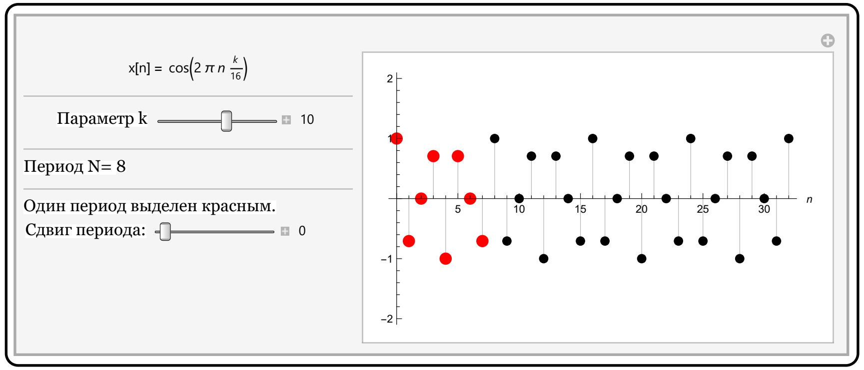
График синусоидальной последовательности



Число N называется периодом, если $x[n] = x[n+N], \ \forall \ n \in \mathbb{Z}.$

$$A\cos(2\pi\omega n + \varphi) = A\cos(2\pi\omega(n+N) + \varphi) = A\cos(2\pi\omega n + 2\pi\omega N + \varphi), \quad N \text{ является периодом, только если } \omega = \frac{k}{N}, \ k \in$$

Период синусоидальной последовательности

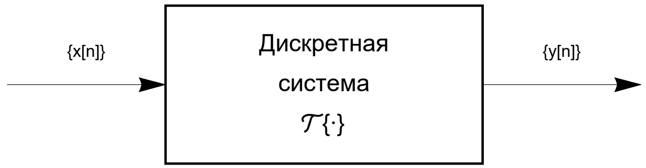


Дискретные системы (цифровые фильтры)

Дискретная система — это оператор $\mathcal{T} : \ell(\mathbb{Z}) \to \ell(\mathbb{Z})$ (областью определения может быть и некоторое подмножество в $\ell(\mathbb{Z})$), при этом

$$\begin{aligned} &\{y[n]\} = \mathcal{T}\{x[n]\}, \\ &y = \mathcal{T}\,x, \quad \text{где} \quad x, y \in \ell(\mathbb{Z}). \end{aligned} \tag{1}$$

Оператор $\mathcal{T}$ осуществляет преобразование, переводящее входную последовательность $\{x[n]\}$ (входной сигнал) в выходную последовательность $\{y[n]\}$ (выходной сигнал, отклик системы, реакция системы)

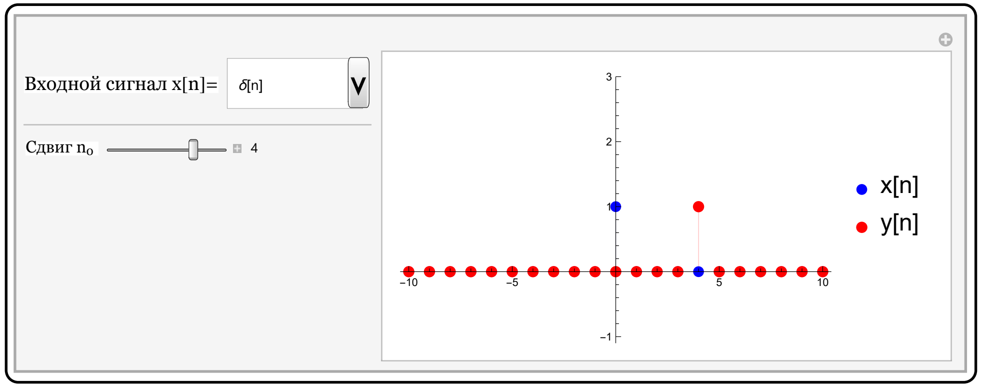


Любая система цифровой обработки сигналов может быть описана с помощью дискретной системы.

Примеры фильтров (задержка)

Идеальная система задержки на n_0 отсчетов : $y[n] = x[n - n_0], \ \forall \ n \in \mathbb{Z}.$

Идеальная система задержки

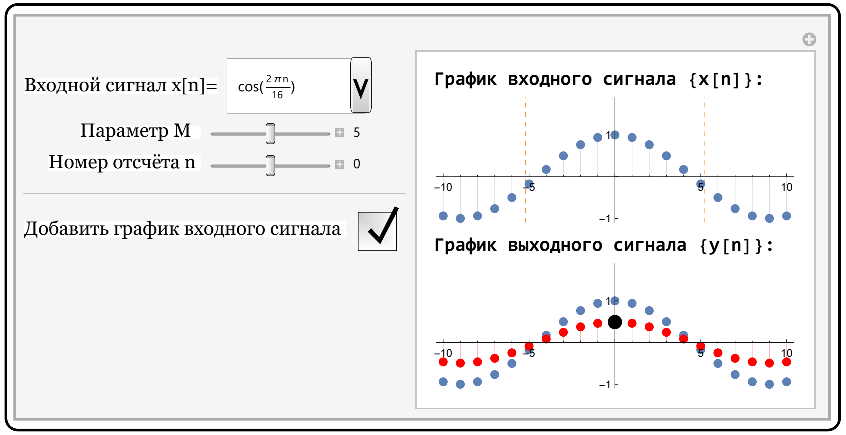


Примеры фильтров (скользящее среднее)

Скользящее среднее порядка M:

$$y[n] = \frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M} x[n-k] = \frac{1}{2M+1}(x[n+M] + \ldots + x[n] + \ldots + x[n-M]),$$

Скользящее среднее

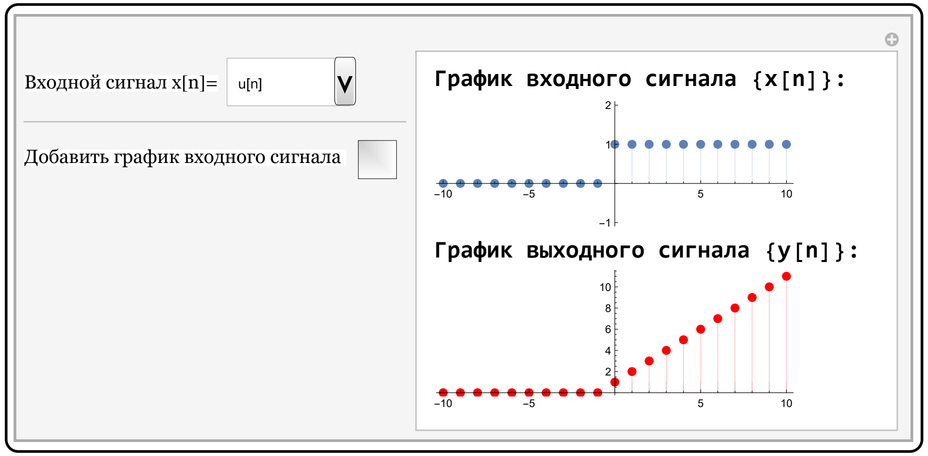


Примеры фильтров (сумматор)

Сумматором называется система, для которой

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k], \ \forall \ n \in \mathbb{Z}.$ Входной сигнал должен быть таким, что $\sum_{k=-\infty}^{0} x[k] < +\infty.$

Сумматор



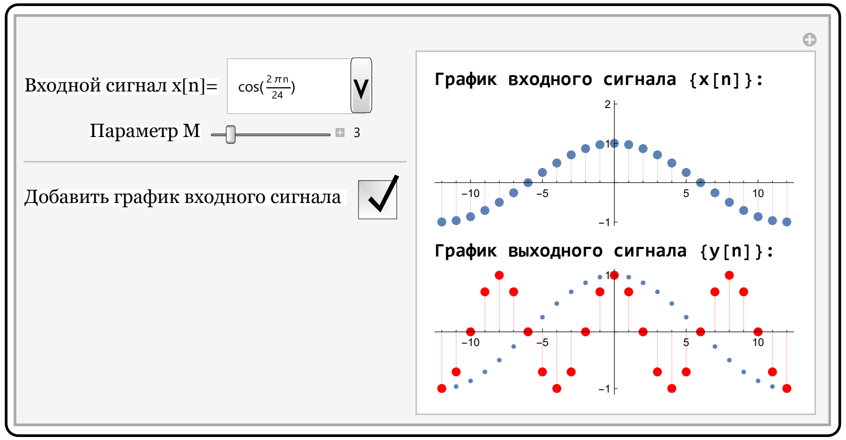
Примеры фильтров (down-sampling)

Децимация (компрессор, уплотнитель, англ. down-sampling):

$$y[n] = (x\downarrow M)[n] = x[M\,n], \quad \forall\ n \in \mathbb{Z},\ M \in \mathbb{N}.$$

Действие заключается в выбрасывании из входного сигнала $M-1$ отсчёта из каждых M отсчётов и сохранения каждого M-го отсчёта.

Компрессор (Down–sampling)

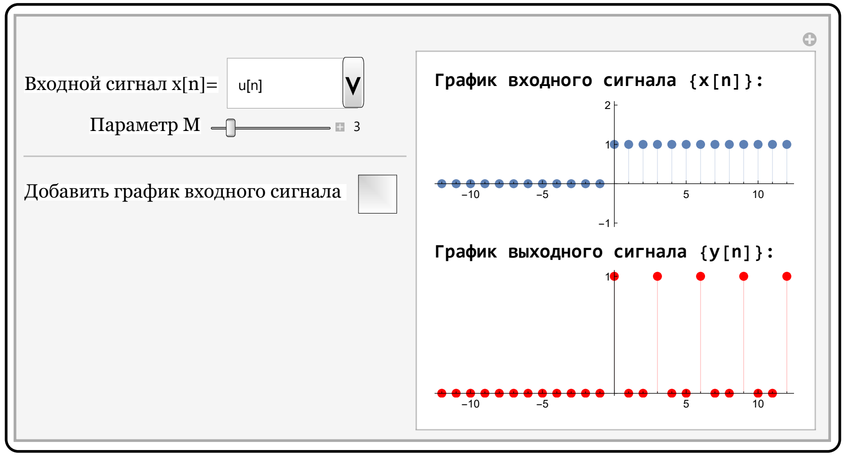


Примеры фильтров (up-sampling)

$$\text{Up}-\text{sampling}: \quad y[n] = (x\uparrow M)[n] = \begin{cases} x[k] & n = M\,k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & n \neq M\,k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Действие заключается во вставке $M-1$ нуля между всеми отсчётами.

Up–sampling



Линейные стационарные системы

Пусть $x_1, x_2 \in \ell(\mathbb{Z})$, $y_i[n] = \mathcal{T}\{x_i[n]\}$, $i = 1, 2$.

- **Линейность:**

  $\mathcal{T}\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \alpha\mathcal{T}\{x_1[n]\} + \beta\mathcal{T}\{x_2[n]\}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

  Скользящее среднее, up-sampling, down-sampling — это линейные системы;

  $y[n] = (x[n])^2, \forall\ n \in \mathbb{Z}$, нелинейная система;

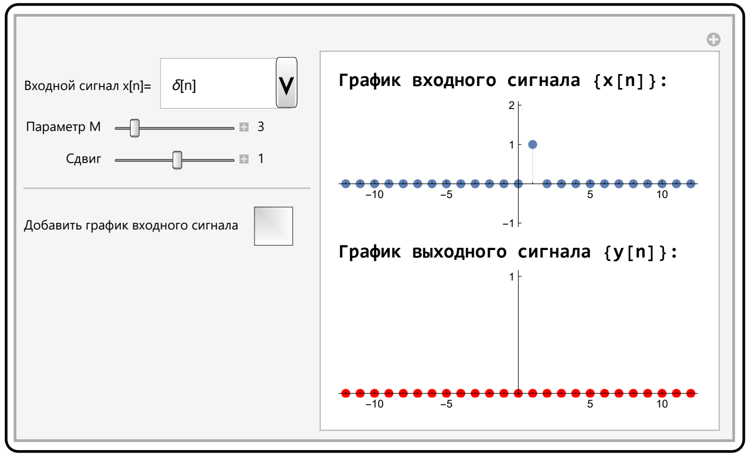
Пусть $x \in \ell(\mathbb{Z})$, $\{y[n]\} = \mathcal{T}\{x[n]\}$.

- **Стационарность** (инвариантность к сдвигу): если для $\forall\ n_0 \in \mathbb{Z}$:

  $\mathcal{T}\{x[n - n_0]\} = \{y[n - n_0]\}$, то есть сдвиг входной последовательности влечёт такой же сдвиг выходной.

Примеры: скользящее среднее — стационарная система; down-sampling не является стационарной системой.

Нестационарность down–sampling



Линейные стационарные системы

Линейные стационарные системы (Linear shift-invariant system, LTI systems) — это важный класс дискретных систем.

Любая ЛС система может быть полностью охарактеризована откликом на δ-импульс.

Пусть $\delta = \{\delta[n]\}$ – единичный импульс, $h = \{h[n]\} = \mathcal{T}\{\delta[n]\}$ – отклик ЛС системы на единичный импульс.

Пусть $x \in \ell_0(\mathbb{Z})$ и $y = \{y[n]\} = \mathcal{T}\{x[n]\}$. Известно, что $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$.

Тогда, из линейности : $\{y[n]\} = \mathcal{T}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\mathcal{T}\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\{h[n-k]\}$.

То есть $\forall\ n \in \mathbb{Z}\quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$.

Последовательность y – это результат дискретной свёртки : $y = \{y[n]\} = \{x[n]\} * \{h[n]\} = x * h$.

Дискретная свёртка играет важную роль в цифровой обработке сигналов, поскольку является явной реализацией ЛС системы.

Случаи, когда свёртка имеет смысл:

$h \in \ell_1(\mathbb{Z}),\ x \in \ell_1(\mathbb{Z})$, тогда $y \in \ell_1(\mathbb{Z})$.

$h \in \ell_0(\mathbb{Z}),\ x \in \ell(\mathbb{Z})$, тогда $y \in \ell(\mathbb{Z})$.

$h \in \ell_2(\mathbb{Z}),\ x \in \ell_2(\mathbb{Z})$, тогда $y \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$.

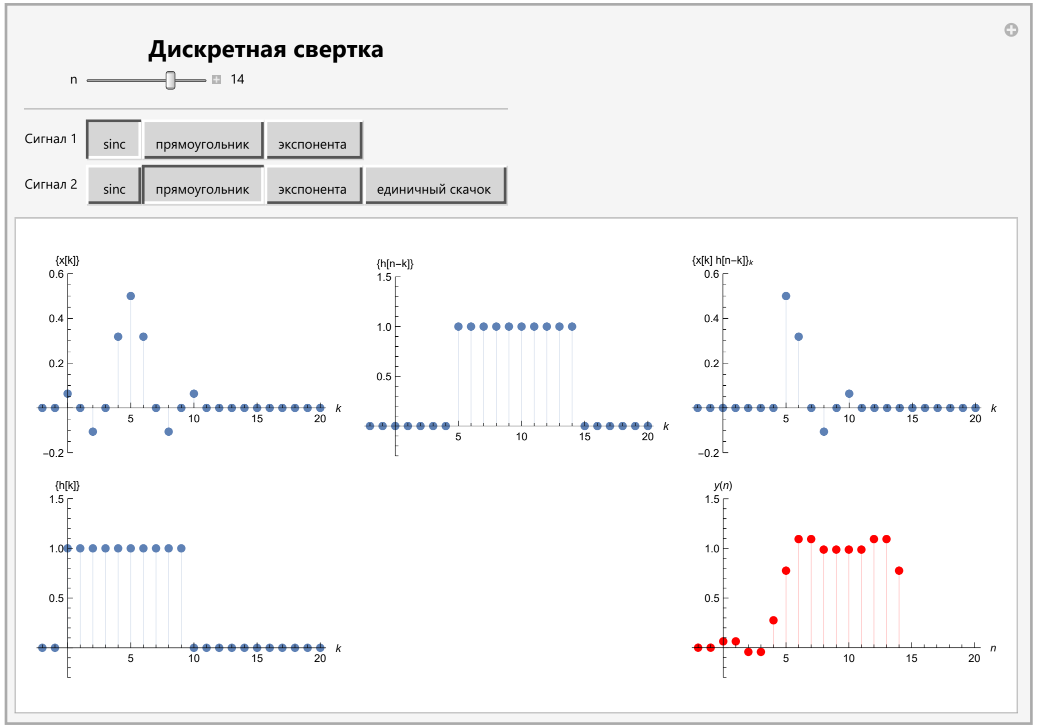
Дискретная свёртка

$$\forall\ n \in \mathbb{Z} \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k].$$

Каждый отсчёт выходного сигнала с номером n - это результат

1. поэлементного умножения последовательностей $\{x[k]\}_k$ и $\{h[n-k]\}_k$
2. последующего суммирования произведений вида $x[k]\, h[n-k]$ по индексу k.

Отсюда следует, что для подсчёта $y[n]$ используются ВСЕ отсчёты двух последовательностей.



Дискретная свертка

Свойства дискретной свёртки:

Коммутативность: $x * h = h * x$ (доказательство через замену переменной суммирования)

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k] \;=\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\, h[k]$$

Дистрибутивность: $x * (h_1 + h_2) = x * h_1 + x * h_2$. (доказательство через линейность)

Ассоциативность: $h_1 * (h_2 * h_3) = (h_1 * h_2) * h_3 \qquad (h_1, h_2, h_3 \in \ell_1(\mathbb{Z}))$.

Полезное свойство свёртки: свёртка сигнала x с единичным импульсом δ равна сигналу x.

$$\text{Из}\quad x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, \delta[n-k] \;\; \forall\;\; n \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\quad x * \delta \;=\; x.$$

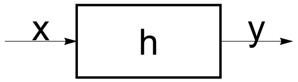
Свёртка сигнала x с единичным импульсом δ сдвинутым на n_0 приводит к задержке сигнала на n_0.

$$\{x[n]\} * \{\delta[n-n_0]\} = \{x[n-n_0]\}.$$

Импульсная характеристика ЛС-системы

Любая ЛС система $\mathcal{T}$ характеризуется откликом на единичный импульс δ: $h = \mathcal{T}\,\delta$.

Последовательность h называется импульсной характеристикой (ИХ) системы.



Каскадное (последовательное) соединение двух ЛС-систем:

Параллельное соединение ЛС-систем:

Примеры импульсных характеристик

Идеальная система задержки:

$$h[n] = \delta[n - n_0], \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

Скользящее среднее:

$$h[n] = \frac{1}{2\,M + 1} \sum_{k=-M}^{M} \delta[n - k], \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}, \quad \text{или} \quad h[n] = \begin{cases} \frac{1}{2\,M+1}, & -M \le\ n \le\ M \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Сумматор:

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n], \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

ЛС системы с импульсной характеристикой, имеющей КОНЕЧНОЕ число ненулевых отсчётов, называют системами с конечной импульсной характеристикой (КИХ-системой, англ. Finite Impulse Response, FIR).

ЛС системы с импульсной характеристикой, имеющей БЕСКОНЕЧНОЕ число ненулевых отсчётов, называют системами с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-системой, англ. Infinite Impulse Response, IIR).

Комплексные экспоненты и ЛС системы

Пусть $\mathcal{T}$ — некоторая ЛС система с ИХ $h = \{h[n]\} \in \ell_1(\mathbb{Z})$. Найдём отклик этой системы на комплексную экспоненциальную последовательность $\{x[n]\} = \left\{e^{2\pi i \omega n}\right\}$, где $\omega \in [0,\ 1]$.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, e^{2\pi i \omega (n-k)} = e^{2\pi i \omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, e^{-2\pi i \omega k} \right),\ \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$

Положим $\hat{h}(\omega) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, e^{-2\pi i \omega k}.$

Ряд сходится абсолютно и равномерно $\Rightarrow$ $\hat{h}(\omega)$ непрерывная функция.

В итоге: $y[n] = \hat{h}(\omega)\, e^{2\pi i \omega n},\ \forall\ n \in \mathbb{Z}.$

Таким образом, $\mathcal{T}\left\{e^{2\pi i \omega n}\right\} = \hat{h}(\omega)\ \left\{e^{2\pi i \omega n}\right\}$

Комплексные экспоненты и ЛС системы

$\{e^{2\pi i \omega n}\}$ — это собственный вектор оператора $\mathcal{T}$ с собственным числом $\hat{h}(\omega)$.

Собственное число $\hat{h}(\omega)$ называют **комплексной частотной характеристикой** (КЧХ) системы.

$$\hat{h}(\omega) = \left|\hat{h}(\omega)\right| e^{i \arg\left(\hat{h}(\omega)\right)},$$

$\left|\hat{h}(\omega)\right|$ называют **амплитудной частотной характеристикой** (АЧХ) системы,

$\arg\left(\hat{h}(\omega)\right)$ называют **фазочастотной характеристикой** (ФЧХ) системы.

КЧХ $\hat{h}(\omega)$ — это ДВПФ от импульсной характеристики h.

Если $h \in \ell_0(\mathbb{Z})$, то есть последовательность с конечным числом ненулевых отсчетов, то $\hat{h}(\omega)$ является тригонометрическим полиномом.

Пусть $h, x \in \ell_1(\mathbb{Z})$. Тогда

ДВПФ свёртки : $x * h \overset{\text{ДВПФ}}{\longleftrightarrow} \hat{x}(\omega)\,\hat{h}(\omega)$ – это произведение ДВПФ.

$$\text{DTFT}\,\{x * h\}\,(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h[n-k]\,x[k]\right) e^{-2\pi i n \omega} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]\, e^{-2\pi i k \omega} \sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n-k]\, e^{-2\pi i (n-k)\omega} = \hat{x}(\omega)\,\hat{h}(\omega)\,.$$

Примеры КЧХ линейных стационарных систем

Найдем КХЧ для идеальной системы задержки:

$$\{y[n]\} = \{x[n - n_0]\}, \quad \text{где } n_0 \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $h[n] = \delta[n - n_0]$, то

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0]\, e^{-2\pi i \omega n} = e^{-2\pi i \omega n_0}.$$

Отметим, что АЧХ и ФЧХ будут иметь вид

$$\left|\hat{h}(\omega)\right| = 1, \quad \operatorname{Arg}\left(\hat{h}(\omega)\right) = -2\pi\omega n_0.$$

Примеры КЧХ линейных стационарных систем

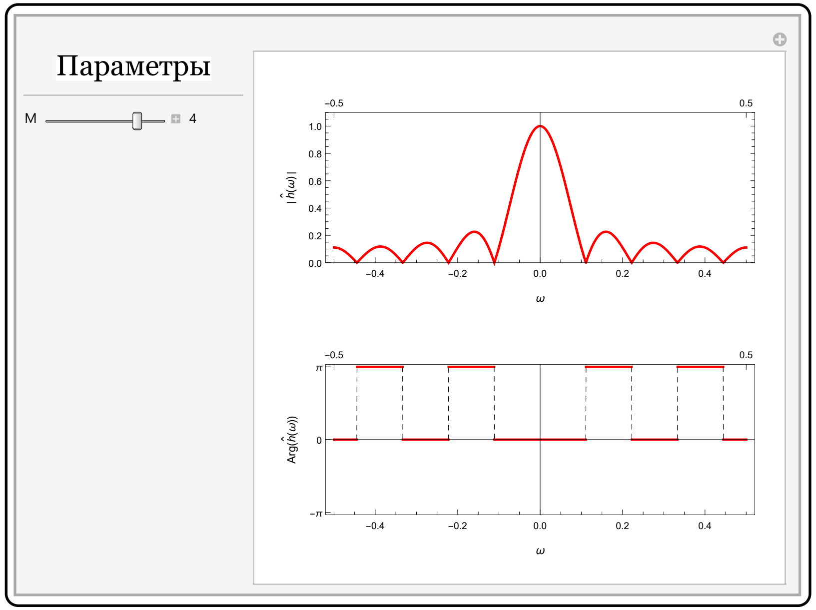
ИХ скользящего среднего имеет вид

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{2M+1} & -M \le n \le M \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}.$$

Её КЧХ имеет вид

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} e^{2\pi i n \omega} = \frac{1}{2M+1} \frac{e^{2\pi i \omega M}\left(1 - e^{-2\pi i \omega (2M+1)}\right)}{1 - e^{-2\pi i \omega}} = \frac{1}{2M+1} \frac{\sin(\pi \omega (2M+1))}{\sin(\pi \omega)}$$

Графики АЧХ и ФЧХ скользящего среднего



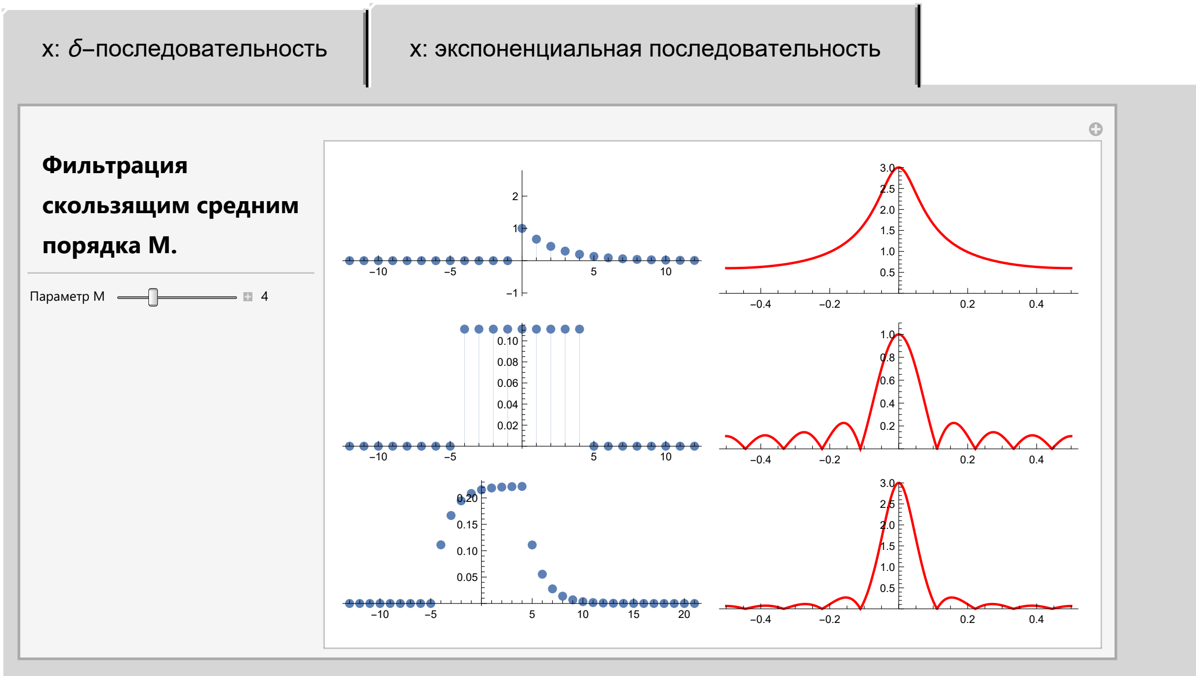
ЛС системы в частотной области

Пусть h — это импульсная характеристика системы ЛС системы $\mathcal{T}$.
$\hat{h}$ — это КЧХ ЛС системы. Отклик системы на сигнал x определяется с помощью свертки

$$y = \mathcal{T}\,x \quad \Longleftrightarrow \quad y = h * x.$$

Спектр отклика является произведением КЧХ системы $\hat{h}$ на спектр сигнала $\hat{x}$.

$$\hat{y}(\omega) = \hat{h}(\omega)\ \hat{x}(\omega).$$



Классификация ЛС систем

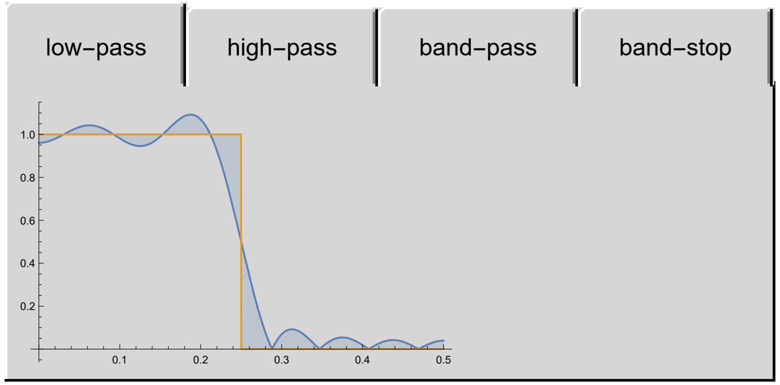
Классификация ЛС систем проводится в зависимости от вида КЧХ (а точнее АЧХ).

Частоты близкие к нулю будем считать низкими. Частоты около $\pm\frac{1}{2}$ - высокими.

ЛС системы будем называть также **фильтрами**, применение ЛС системы — **фильтрацией**.

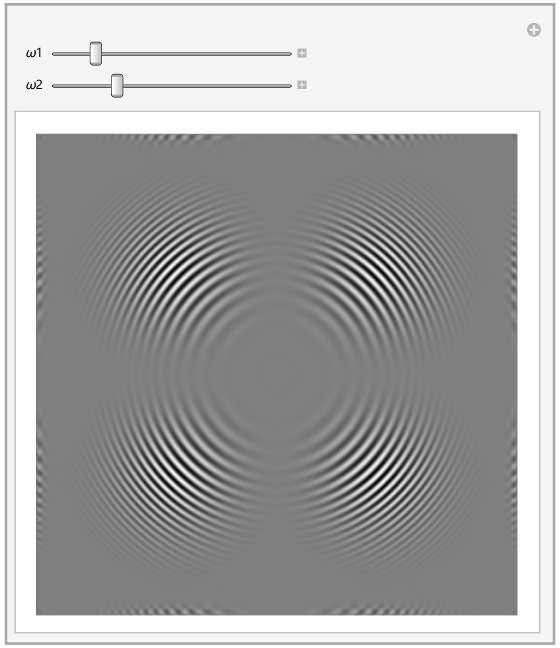
Низкочастотный (low-pass) фильтр пропускает низкие частоты и подавляет высокие.
Высокочастотный (high-pass) фильтр пропускает высокие частоты и подавляет низкие.

Полосовой (полосно-пропускающим, band-pass) фильтр пропускает все частоты из некоторого интервала частот.
Полосно-заграждающим (режекторным, band-stop) фильтр НЕ пропускает частоты из некоторого интервала частот.



Пример работы band-pass фильтра

Результат применения полосового фильтра (band-pass) к изображению, пропускающего частоты из интервала ($\omega 1$, $\omega 2$)



Идеальные фильтры

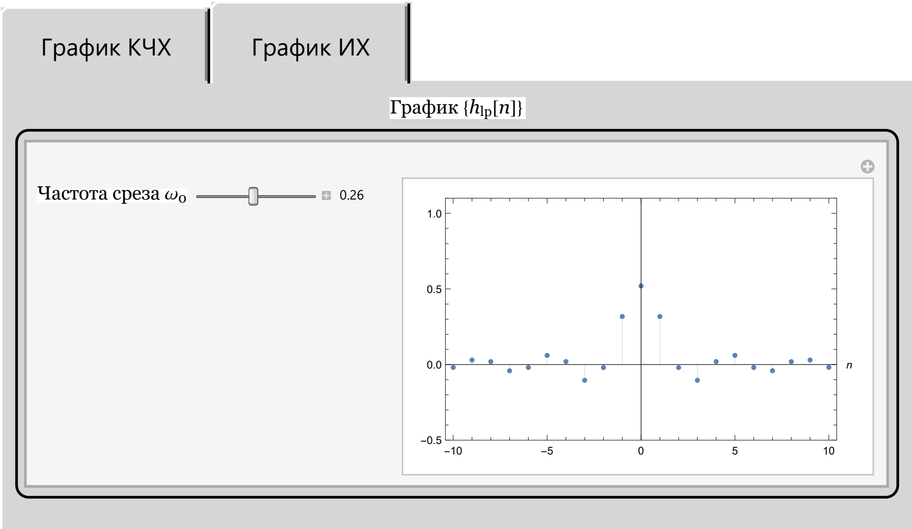
КЧХ идеального фильтра имеет вид кусочно-постоянной функции.
Например, идеальный низкочастотный (НЧ) фильтр

$$\hat{h}_{\mathrm{lp}}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_0, \\ 0, & \omega_0 \le |\omega| \le \frac{1}{2}, \end{cases}$$ где ω_0 – называется частотой среза (англ. *cut–off frequency*).

Импульсная характеристика идеального НЧ фильтра имеет вид:

$$h_{\mathrm{lp}}[n] = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{h}_{\mathrm{lp}}(\omega)\, e^{2\pi i \omega n}\, d\omega = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{2\pi i \omega n}\, d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi i n}\left(e^{2\pi i \omega_0 n} - e^{-2\pi i \omega_0 n}\right) = \frac{\sin(2\pi \omega_0 n)}{\pi n}, \ \forall\ n \in \mathbb{Z}.$$



$$\left\{2\,\omega_0 \operatorname{sinc}(2\pi \omega_0 n)\right\} \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{2\,\omega_0}\right)$$

$\operatorname{rect}(t)$ – характеристическая функция отрезка $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Идеальные фильтры

Идеальный высокочастотный фильтр (ВЧ) фильтр

$$\hat{h}_{\mathrm{hp}}(\omega) = 1 - \hat{h}_{\mathrm{lp}}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_0, \\ 0, & \omega_0 \le |\omega| \le \frac{1}{2} \end{cases} = 1 - \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\,\omega_0}\right).$$

Импульсная характеристика идеального НЧ фильтра имеет вид:

$$h_{\mathrm{hp}}[n] = \delta[n] - \frac{\sin(2\,\pi\,\omega_0\,n)}{\pi\,n}.$$

Идеальный полосно-пропускающий фильтр (англ. *bandpass*).

$$\hat{h}_{\mathrm{bp}}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\,\omega \pm \omega_c\,| \le \omega_0, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

причём ширина окрестности такова, что $0 < \omega_c - \omega_0 < \omega_c + \omega_0 < \frac{1}{2}$ или $\omega_0 < \min\left\{\omega_c, \frac{1}{2} - \omega_c\right\}$.

По свойствам ДВПФ, коэффициенты полосно-пропускающего фильтра имеют вид

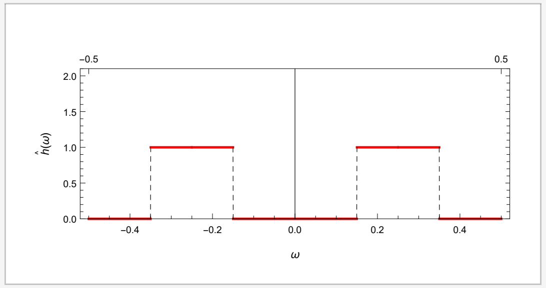
$$h_{\mathrm{bp}}[n] = \left(e^{2\,\pi\,i\,\omega_c\,n} + e^{-2\,\pi\,i\,\omega_c\,n}\right)\frac{\sin(2\,\pi\,\omega_0\,n)}{\pi\,n} = 2\cos(2\,\pi\,\omega_c\,n)\,\frac{\sin(2\,\pi\,\omega_0\,n)}{\pi\,n}.$$

График КЧХ | График ИХ

График КЧХ идеального частотопропускающего фильтра

Частота среза ω_0 0.1

Центральная частота ω_c 0.25



Идеальные фильтры

Идеальные фильтры имеют бесконечное число ненулевых отсчётов в импульсной характеристике (БИХ-фильтр).

Элементы последовательности стремятся к нулю не быстрее, чем $\frac{1}{n}$.

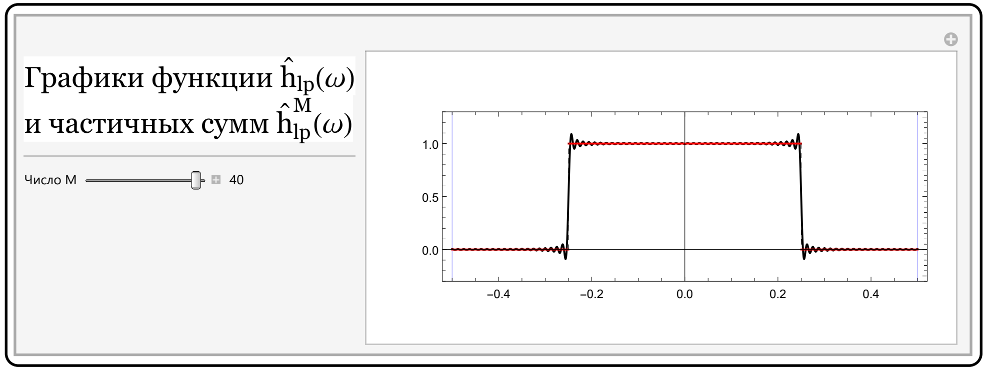
Кроме того, можно показать, что **такой фильтр не реализуем**, то есть нет алгоритма который бы за конечное число операций подсчитывал бы выходной отсчёт.

При приближении идеального фильтра с помощью обнуления коэффициентов возникает **эффект Гиббса**:

вблизи точек разрыва функции $\hat{h}_{\text{lp}}(\omega)$ возникают незатухающие колебания.

Частичные суммы ДВПФ : $\hat{h}_{\text{lp}}^{M}(\omega) \;=\; \sum_{m=-M}^{M} h_{\text{lp}}[m]\, e^{-2\pi i m \omega}$.

Графики КЧХ идеального НЧ фильтра и частичных сумм



$h_{\text{lp}}^{M}[n] = \begin{cases} h_{\text{lp}}[n], & |n| \le M, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. Фактически,

h_{lp}^{M} – это наилучшее приближение последовательности h_{lp} подпространством финитных последовательностей (с носителем $[-\text{M},\text{M}]\cap\mathbb{Z}$) в $\ell_2(\mathbb{Z})$.

Или $\hat{h}_{\text{lp}}^{M}(\omega)$ – это наилучшее приближение функции $\hat{h}_{\text{lp}}(\omega)$ с помощью тригонометрических полиномов степени не выше M в $L_2\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

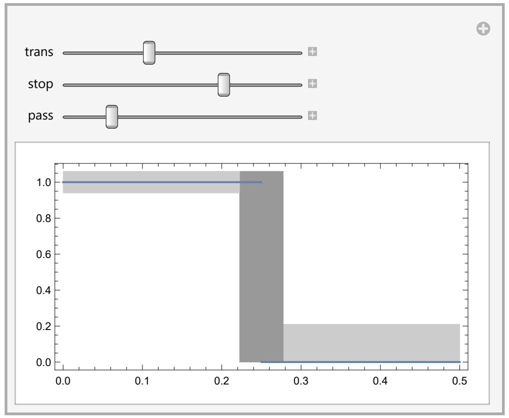
Разработка КИХ-фильтра

Требования к фильтру формулируются в терминах КЧХ, это так называемые спецификации фильтра.

Стандартные спецификации на примере НЧ фильтра, с частотой среза $1/4$ (в нормализованных частотах).
Полоса пропускания (англ. passband) — это полоса частот, в которой сигнал не подвергается изменениям.
Полоса задержки (англ. stopband) — это полоса частот, в которой сигнал подавляется.
Полоса перехода (англ. transition band) — это полоса частот, расположенная между полосой пропускания и полосой подавления.

Мгновенный переход между этими полосами в рамках реализуемого фильтра невозможен.
Строгие значения 0 или 1 для полосы задержки или полосы пропускания в рамках реализуемого фильтра невозможны.

Вводятся допуски (англ. tolerances). Например,
допуск 20% для полосы пропускания ($\delta_p = 0.2$) и 10% в полосе задержки ($\delta_s = 0.1$),
частота среза полосы пропускания f_{pass} и частота начала подавления сигнала f_{stop}.
Для идеального фильтра: $\delta_p = \delta_s = 0$, $f_{\text{pass}} = f_{\text{stop}} = \omega_0 = 1/4$.



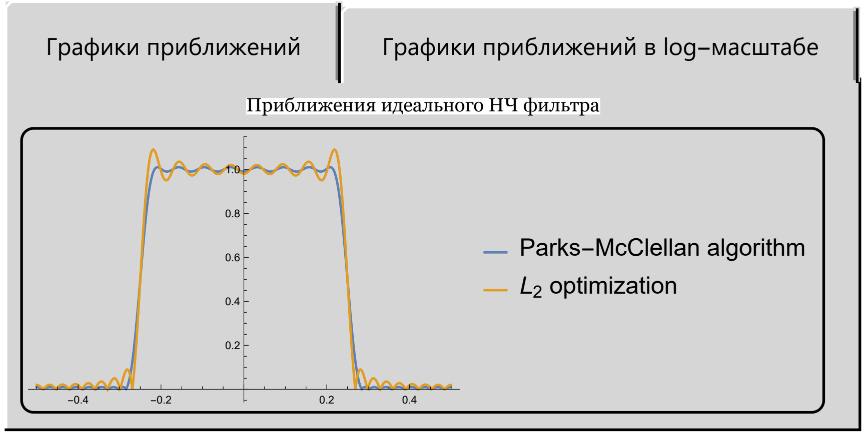
Более низкие допуски и узкая полоса перехода влекут увеличение носителя фильтра.

Разработка КИХ-фильтра

Алгоритм Парка-МакКлеллана (англ. the Parks-McClellan algorithm, Remez Exchange) —это алгоритм для разработки оптимального фильтра. Оптимальность в смысле нормы в L_∞ для КЧХ, то есть минимизируется максимальное отклонение от идеального фильтра в полосе пропускания и задержки.

В ходе итерационной процедуры определяются коэффициенты фильтра и число этих коэффициентов.
Особенность: равные колебания в passband и stopband.

В Python можно использовать scipy.signal.remez



АЧХ в log-масштабе отображается в децибелах.
Если максимальная амплитуда КЧХ равна $G = \max_{\omega\in[0,1]} \left|\hat{h}(\omega)\right|$. То

$$\hat{h}_{\text{db}}(\omega) = 20 \log_{10}\left(\left|\hat{h}(\omega)\right| / G\right).$$