

Математические модели обработки сигналов

Тема 4: Преобразования Фурье

Лектор: Кривошеин А.В.

Пространства сигналов

Под пространствами сигналов будем понимать следующие гильбертовы пространства:

Дискретные сигналы	$x \in \mathbb{C}^N$	$x := (x[0], x[1], \dots, x[N-1])$	$\langle x, y \rangle := \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \overline{y[n]}$
	$x \in \ell_2(\mathbb{Z})$	$\ x\ ^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] ^2 < +\infty$	$\langle x, y \rangle := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \overline{y[n]}$
Аналоговые сигналы	$x \in L_2[0, 1]$	$\ x\ ^2 = \int_0^1 x(t) ^2 dt < +\infty$	$\langle x, y \rangle := \int_0^1 x(t) \overline{y(t)} dt$
	$x \in L_2(\mathbb{R})$	$\ x\ ^2 = \int_{\mathbb{R}} x(t) ^2 dt < +\infty$	$\langle x, y \rangle := \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{y(t)} dt$

Интегралы понимаются в смысле Лебега — это обобщение интеграла Римана.

Спектральный анализ

Спектральный анализ (в широком смысле) — это представление сигнала в новом “базисе” для выявления тех или иных особенностей сигнала.

Спектральный анализ (в узком смысле) — это применение преобразования Фурье к сигналу или разложение сигнала на “базовые частоты”. Это одна из самых базовых операций в рамках цифровой обработки сигналов.

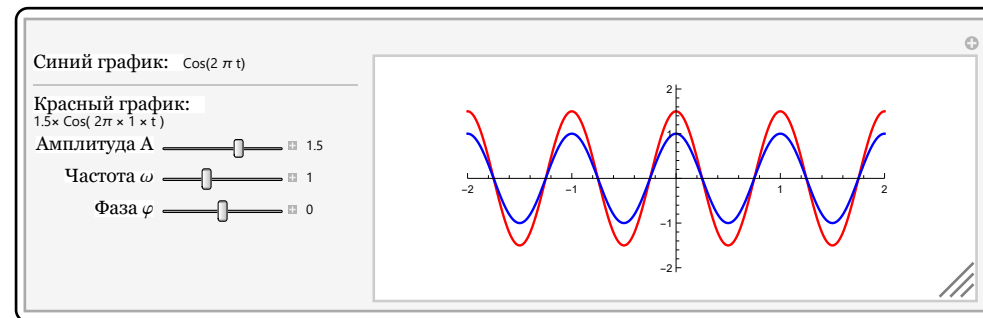
Результат преобразования Фурье — это информация о том, какие частоты содержатся в сигнале и какова их амплитуда.

Частота — количество повторений колебательного процесса в единицу времени.

Базовой частотой будем считать синусоиду (гармоническое колебание)

$A \cos(2\pi\omega t + \varphi)$ — где A — амплитуда, ω — частота, φ — фаза.

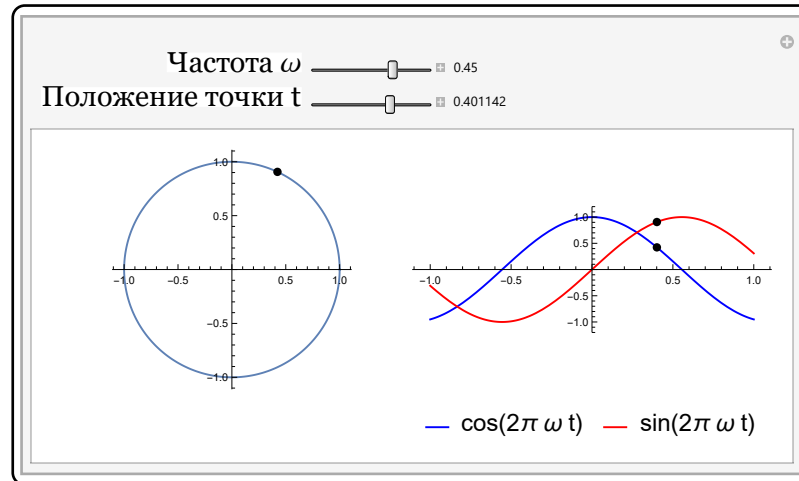
С помощью этих базовых частот можно извлекать частотную информацию из сигналов.



Комплексная экспонента

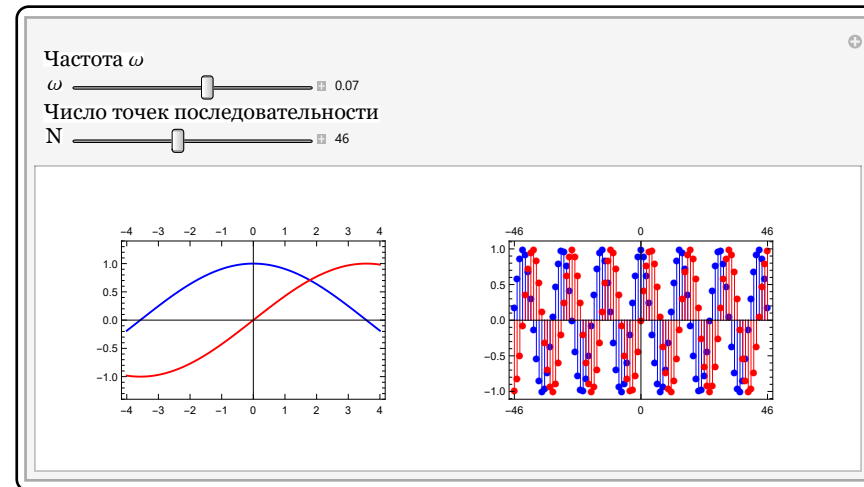
В силу ряда причин удобно использовать не синусоиды, а комплексные экспоненты:

$$A e^{i(2\pi\omega t + \varphi)} = A \cos(2\pi\omega t + \varphi) + i A \sin(2\pi\omega t + \varphi).$$



Точка $z(t) = e^{2\pi i \omega t}$ на комплексной плоскости с изменением t , пробегает по окружности единичного радиуса. От частоты ω зависит как скорость этого вращения, так и направление (против часовой стрелки с ростом t , если $\omega > 0$, и по часовой стрелке с ростом t , если $\omega < 0$).

Комплексные экспоненты для $L_2(\mathbb{R})$ и $\ell_2(\mathbb{Z})$.



Комплексные экспоненты **для** $L_2(\mathbb{R})$: $e^{2\pi i \omega t}$. Частоты изменяются непрерывно, то есть $\omega \in \mathbb{R}$.

Комплексные экспоненты **для** $\ell_2(\mathbb{Z})$: $\{e^{2\pi i \omega n}\}_n$. Частоты изменяются непрерывно, НО достаточно рассматривать $\omega \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Синусоиды с частотой ω и $\omega + k$, где $k \in \mathbb{Z}$, неотличимы друг от друга:

$$e^{2\pi i (\omega + k)n} = e^{2\pi i \omega n} e^{2\pi i k n} = e^{2\pi i \omega n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

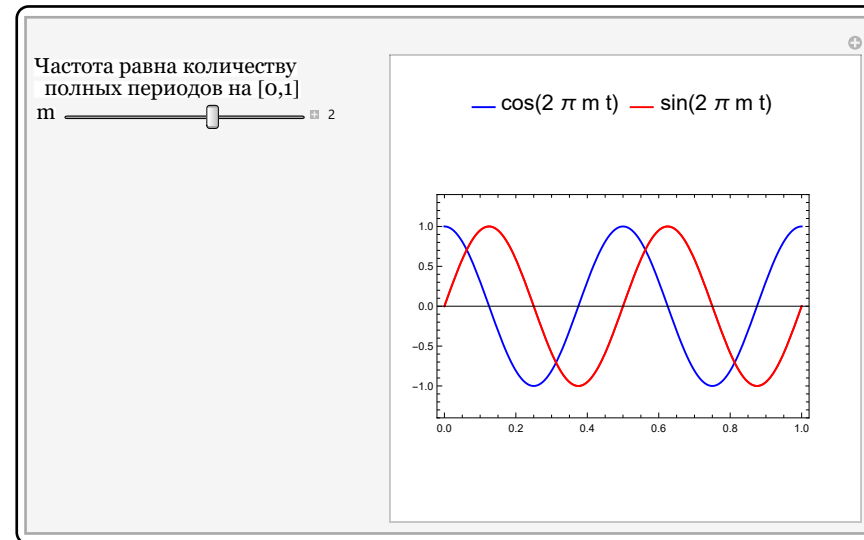
$$e^{i(2\pi k n)} = \cos(2\pi k n) + i \sin(2\pi k n).$$

Комплексные экспоненты для $L_2[0, 1]$

Это пространство содержит сигналы конечной длины.

Для характеристики частоты сигналов из $L_2[0, 1]$ будем использовать комплексные экспоненты, период которых целое число раз укладывается в $[0, 1]$.

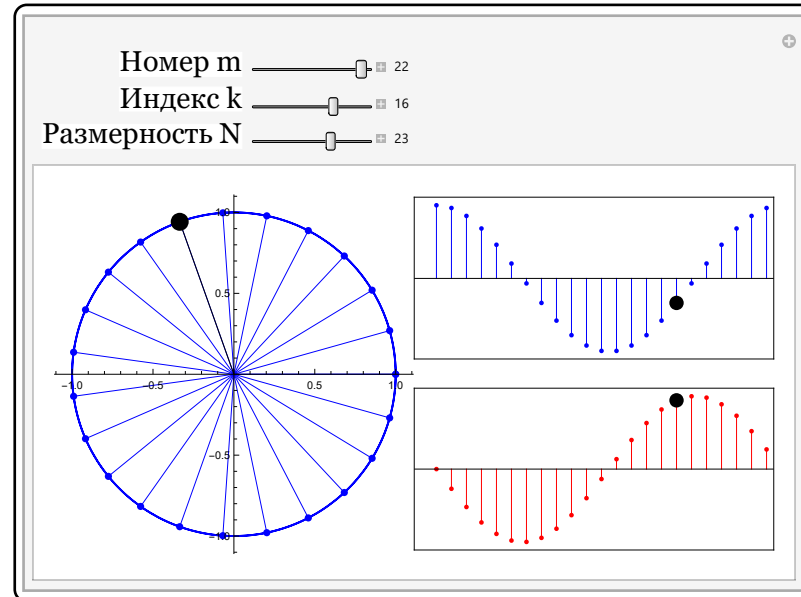
Комплексные экспоненты для $L_2[0, 1]$: $e^{2\pi i m t}$, $m \in \mathbb{Z}$.



Комплексные экспоненты для \mathbb{C}^N

Рассмотрим значения функции $e^{2\pi i m t}$ при $t = \frac{k}{N}$, $k = 0, \dots, N-1$.

Комплексные экспоненты для \mathbb{C}^N : $\mathcal{E}_m = \left(e^{2\pi i m \frac{0}{N}}, e^{2\pi i m \frac{1}{N}}, \dots, e^{2\pi i m \frac{N-1}{N}} \right)$, $m \in \mathbb{Z}$.



Комплексные экспоненты с параметром m и $m + Nn$, $n \in \mathbb{Z}$, не отличимы друг от друга, так как

$$\exp\left(2\pi i \frac{k(m+Nn)}{N}\right) = \exp\left(2\pi i \frac{km}{N} + 2\pi i kn\right) = \exp\left(2\pi i \frac{km}{N}\right), \quad \forall k = 0, \dots, N-1. \quad \text{Значит } \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m+nN}.$$

поэтому параметр $m \in \mathbb{Z}$ можно выбирать из множества $m = 0, \dots, N-1$ или $m = -\left[\frac{N}{2}\right] + 1, \dots, \left[\frac{N}{2}\right]$.

Высокие и низкие частоты

Для случая $L_2(\mathbb{R})$: $e^{2\pi i \omega t}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Низкие частоты: при малых значениях параметра ω или t по модулю.

Высокие частоты: при больших значениях параметра ω или t по модулю.

Для случая $L_2([0, 1])$: $e^{2\pi i m t}$, $m \in \mathbb{Z}$.

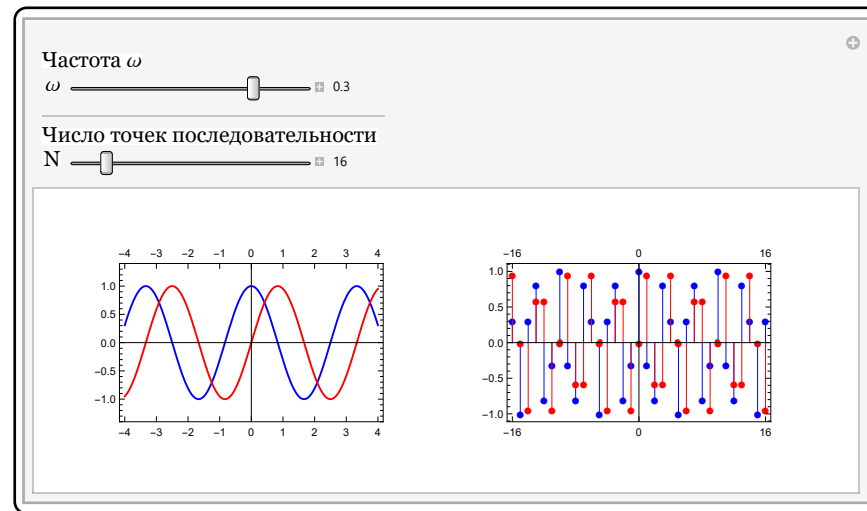
Низкие частоты: при значениях параметра m около нуля.

Высокие частоты: при больших значениях параметра m по модулю.

Для случая $\ell_2(\mathbb{Z})$: $\{e^{2\pi i \omega n}\}_n$, $\omega \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Низкие частоты: при значениях параметра ω около нуля.

Высокие частоты: при значениях параметра ω вблизи значений $1/2$ и $-1/2$.

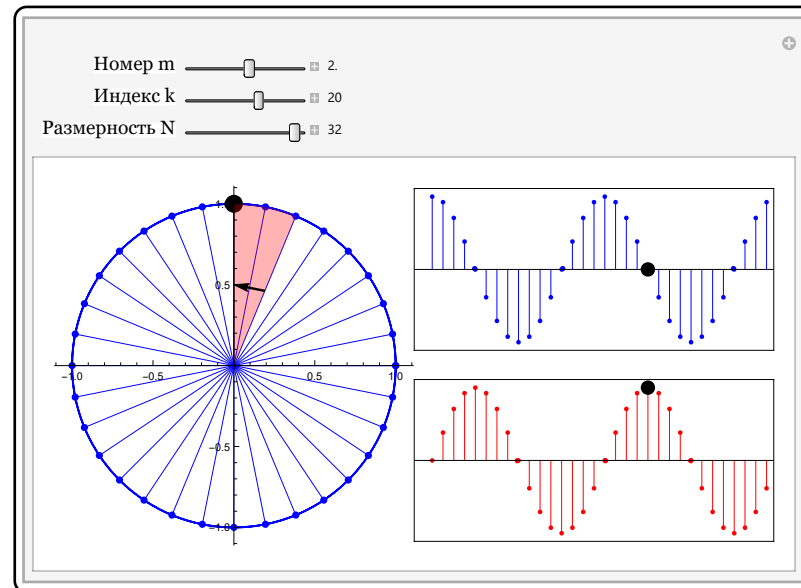


Высокие и низкие частоты

Для случая \mathbb{C}^N : $\mathcal{E}_m = \left(e^{2\pi i m \frac{0}{N}}, e^{2\pi i m \frac{1}{N}}, \dots, e^{2\pi i m \frac{N-1}{N}} \right)$, $m = -\left[\frac{N}{2}\right] + 1, \dots, \left[\frac{N}{2}\right]$.

Низкие частоты: при значениях параметра m около 0.

Высокие частоты: при значениях параметра m вблизи $\frac{N}{2}$ по модулю.



Для случая \mathbb{C}^N удобно использовать **нормализованные частоты**: вектору \mathcal{E}_m соответствует нормализованная частота $\frac{m}{N}$.

Таким образом, нормализованная частота принимает значения в промежутке $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Спектр произвольного сигнала

Спектральный анализ или разложение сигнала на базовые частоты заключается в ответе на вопросы:

1. Каким образом установить из каких частот состоит произвольный сигнал?
2. Насколько велик вклад каждой синусоиды в сигнал?
3. Можно ли по информации о частотах и амплитудах восстановить сигнал?

Инструментом для проведения спектрального анализа является скалярное произведение.

Величину **скалярного произведения** можно интерпретировать, как "**меру похожести**" двух элементов.

Например, в \mathbb{R}^d более “похожие” вектора — это “более сонаправленные” вектора, то есть угол между ними мал.

$$\frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \|B\|} = \cos \theta, \text{ где } \theta \text{ — угол между векторами } A \text{ и } B.$$

Рассмотрим разложение вектора $x \in \mathbb{C}^N$ по ортонормированному базису $e_1, \dots, e_N \in \mathbb{C}^N$

$$x = \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Каждое слагаемое $\langle x, e_n \rangle e_n$ — это вклад вектора e_n в вектор x .

Число $\langle x, e_n \rangle$ — это “мера” этого вклада.

Спектр произвольного сигнала

Одна из причин использования комплексных экспонент для $L_2[0, 1]$:

$\cos(2\pi n t)$, $n = 0, 1, \dots$, не образуют ортонормированного базиса.

Для ортонормированного базиса надо добавить $\sin(2\pi n t)$, $n = 0, 1, \dots$,

Формулы, записанные с помощью \sin , \cos имеют более “громоздкий” вид.

Комплексные гармонические колебания: $e^{2\pi i n t} = \cos(2\pi n t) + i \sin(2\pi n t)$.

Система $\{e^{2\pi i n t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис в $L_2[0, 1]$.

$$\langle e^{2\pi i n t}, e^{2\pi i m t} \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i (n-m)t} dt = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}.$$

Аналогично: вектора $\mathcal{E}_m = \left(e^{2\pi i \frac{0 \cdot m}{N}}, e^{2\pi i \frac{1 \cdot m}{N}}, \dots, e^{2\pi i \frac{(N-1) \cdot m}{N}} \right) \in \mathbb{C}^N$ образуют ортогональный базис в \mathbb{C}^N , $m = 0, \dots, N-1$.

$$\langle \mathcal{E}_m, \mathcal{E}_n \rangle = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ N, & n = m \end{cases}, \text{ что можно проверить непосредственным вычислением.}$$

Спектр сигнала (формы преобразования Фурье)

№	Сигнал	Комплексные экспоненты	Формула преобразования	Принадлежность спектра
1	$x \in \mathbb{C}^N$	$\mathcal{E}_m[n] = e^{2\pi i \frac{mn}{N}}, n=0, \dots, N-1$	$X[m] := \langle x, \mathcal{E}_m \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}, m=0, \dots, N-1$	$(X[0], \dots, X[N-1]) \in \mathbb{C}^N$
2	$x \in L_2[0,1]$	$e^{2\pi i n t}, n \in \mathbb{Z}$	$C_n := \langle x, e^{2\pi i n (\cdot)} \rangle = \int_0^1 x(t) e^{-2\pi i n t} dt, n \in \mathbb{Z}$	$\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$
3	$x \in \ell_2(\mathbb{Z})$	$\{e^{2\pi i \omega n}\}_n, \omega \in [0,1]$	$\hat{x}(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-2\pi i \omega n}, \omega \in [0,1]$	$\hat{x}(\omega) \in L_2[0,1]$
4	$x \in L_2(\mathbb{R})$	$e^{2\pi i \omega t}, \omega \in \mathbb{R}$	$\hat{x}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2\pi i \omega t} dt, \omega \in \mathbb{R}$	$\hat{x}(\omega) \in L_2(\mathbb{R})$

Спектр — это результат “скалярного произведения” сигнала с комплексными гармоническими колебаниями.

1. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)
2. Разложение в ряд Фурье (нахождение коэффициентов тригонометрического ряда Фурье)
3. Дискретное по времени преобразование Фурье (ДВПФ)
4. Преобразование Фурье

Для пространств $L_2(\mathbb{R})$ и $\ell_2(\mathbb{Z})$ надо отметить, что формально комплексные экспоненты $e^{2\pi i \omega t}$ и $\{e^{2\pi i \omega n}\}_n$ в эти пространства не попадают. Но можно формально записать скалярное произведение сигнала и комплексной экспоненты и известно, что это будет иметь смысл.

Восстановление сигнала по его спектру

Сигнал	Спектр	Формула восстановления сигнала по спектру
$x \in \mathbb{C}^N$	$X \in \mathbb{C}^N$	$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{2\pi i \frac{mn}{N}}, n=0, \dots, N-1$ и $x \in \mathbb{C}^N$
$x \in L_2[0,1]$	$\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$	$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2\pi i t n}$ и $x(t) \in L_2[0,1]$
$x \in \ell_2(\mathbb{Z})$	$\hat{x} \in L_2[0,1]$	$x[n] = \int_0^1 \hat{x}(\omega) e^{2\pi i n \omega} d\omega$ и $\{x[n]\}_n \in \ell_2(\mathbb{Z})$
$x \in L_2(\mathbb{R})$	$\hat{x} \in L_2(\mathbb{R})$	$x(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega$ и $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$

Сигнал и его спектр — это эквивалентные формы представления сигнала.

Будем говорить, что сам сигнал представлен во временной или пространственной области (англ. *time domain*, *spatial domain*), а его спектр — это представление сигнала в частотной области (англ. *frequency domain*).