Математические модели обработки сигналов

Тема 7: ДВПФ и Преобразование Фурье

Лектор: Кривошеин А.В.

Дискретное по времени преобразование Фурье (ДВПФ)

Рассмотрим бесконечные дискретные сигналы. Пространством для работы с такими сигналами является $\ell_2(\mathbb{Z})$, содержащее последовательности суммируемые с квадратом, то есть

$\ell_2(\mathbb{Z}) = \left\{x = \{x[n]\}_{n\in\mathbb{Z}} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x[n]|^2 < +\infty\right\}$. Скалярное произведение $x, y \in \ell_2(\mathbb{Z})$: $\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]\,\overline{y[n]}$.

Для сигнала $x \in \ell_2(\mathbb{Z})$, его **ДВПФ или спектр** обозначается $\hat{x}$ и имеет вид:

$\hat{x}(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-2\pi i n \omega}$, при этом спектр $\hat{x}$ является функцией из $L_2[0, 1]$.

Сходимость ряда понимается в смысле $L_2[0, 1]$:

$$\hat{x}_N(\omega) := \sum_{n=-N}^{N} x[n]\, e^{-2\pi i n \omega}, \qquad \lim_{N\to\infty} \left\|\hat{x}_N - \hat{x}\right\|_{L_2[0,1]} = \lim_{N\to\infty} \int_0^1 \left|\hat{x}(\omega) - \hat{x}_N(\omega)\right|^2 d\omega = 0.$$

Такая сходимость не гарантирует поточечной сходимости.

Дискретное по времени преобразование Фурье (ДВПФ)

Если $x \in \ell_1(\mathbb{Z})$, то есть сигнал x из пространства абсолютно суммируемых последовательностей:

$$\ell_1(\mathbb{Z}) = \left\{x = \{x[n]\}_{n\in\mathbb{Z}} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\, x[n]\, | < +\infty\right\}, \text{ тогда}$$

$$\max_{\omega\in[0,1]} |\hat{x}(\omega) - \hat{x}_N(\omega)| \leq \max_{\omega\in[0,1]} \left|\sum_{|n|>N} x[n]\, e^{-2\pi i n \omega}\right| \leq \sum_{|n|>N} |x[n]| \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

То есть сходимость частичных сумм $\hat{x}_N$ к $\hat{x}$ **равномерная** и спектр $\hat{x}$ является непрерывной функцией. Отметим, что сигналы конечной длительности лежат в $\ell_1(\mathbb{Z})$.

Число $\hat{x}(\omega)$ трактуется как информация о вкладе гармоники $\left\{e^{2\pi i \omega n}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в сигнал x.

Амплитудой спектра называют функцию $|\,\hat{x}(\omega)\,|$.

Фазой спектра называют функцию $\arg\big(\hat{x}(\omega)\big)$.

Обратное ДВПФ: по спектру $\hat{x}(\omega)$ можно восстановить исходную последовательность.

$$x[n] = \int_0^1 \hat{x}(\omega)\, e^{2\pi i n \omega}\, d\omega.$$

Кратко связь сигнала $x \in \ell_2(\mathbb{Z})$ и его спектра $\hat{x}$ будем обозначать $x \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} \hat{x}$.

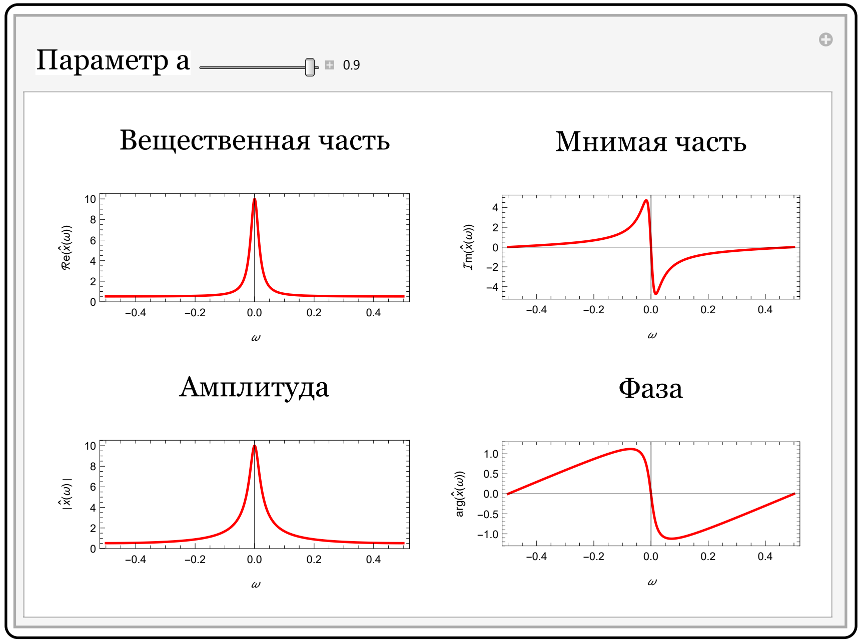
Пример ДВПФ

Рассмотрим одностороннюю экспоненциальную последовательность, заданную поэлементно:

$$x[n] = a^n\, u[n] = \begin{cases} a^n, & n \ge 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad \text{где } a \in \mathbb{R},\ |a| < 1.$$

Её ДВПФ имеет вид

$$\hat{x}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-2\pi i n \omega} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n\, e^{-2\pi i n \omega} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a\, e^{-2\pi i \omega}\right)^n = \frac{1}{1 - a\, e^{-2\pi i \omega}},$$



Свойства ДВПФ

Пусть $x_1, x_2, x \in \ell_2(\mathbb{Z})$.

Линейность : $a\,\{x_1[n]\} + b\,\{x_2[n]\} \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} a\,\hat{x}_1(\omega) \; + \; b\,\hat{x}_2(\omega)$

Сдвиг по времени : $\{x[n-n_0]\} \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} e^{-2\pi i \omega n_0}\,\hat{x}(\omega), \quad n_0 \in \mathbb{Z}.$

Доказательство : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-n_0]\, e^{-2\pi i n \omega} = \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} x[n']\, e^{-2\pi i (n'+n_0)\,\omega} = e^{-2\pi i \omega n_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-2\pi i n \omega}$

Умножение на экспоненту : $\left\{e^{2\pi i \omega_0 n}\, x[n]\right\} \overset{\text{DTFT}}{\longleftrightarrow} \hat{x}(\omega-\omega_0)$ – сдвиг в частотной области.

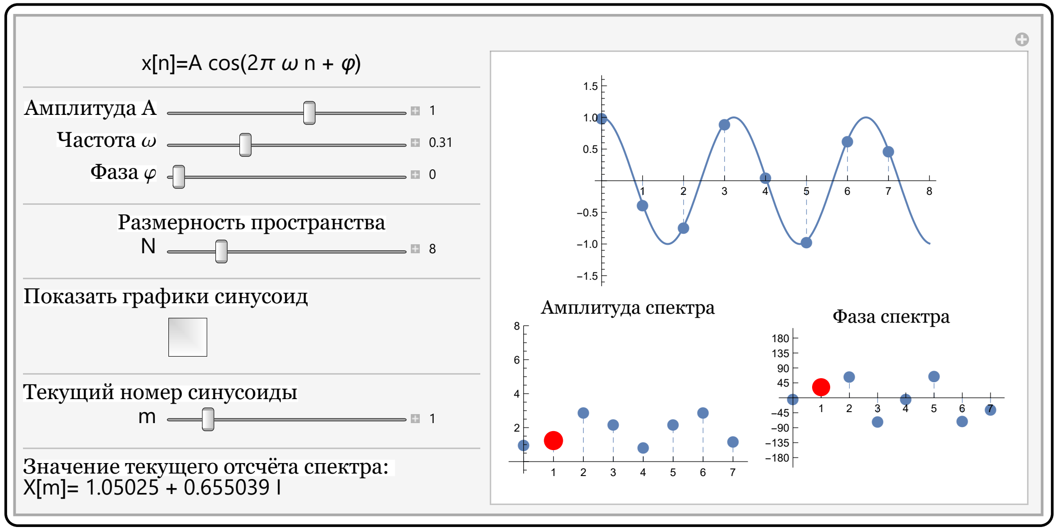
Доказательство : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{2\pi i \omega_0 n}\, e^{-2\pi i n \omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-2\pi i n (\omega-\omega_0)} = \hat{x}(\omega-\omega_0).$

Равенство Парсеваля : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \int_0^1 |\hat{x}(\omega)|^2\, d\omega.$

Симметричность: Если элементы $x[n] \in \mathbb{R}$, то спектр — это сопряжённо-симметричная функция: $\hat{x}(\omega) = \overline{\hat{x}(-\omega)}$.

ДПФ: растекание спектра

Применим ДПФ к сигналу вида $x[n] = A\cos(2\pi\,\omega\, n + \varphi)$, $n = 0, \ \ldots, N-1$.



Отметим из графика:

если у сигнала x частота $\omega = \frac{m}{N}$, $m = 0, \ \ldots, \ N-1$, то в спектре это точно отражается: отсчеты спектра равны нулю, за исключением $X[m]$ и $X[N-m]$. В других случаях возникает “растекание” спектра.

Связь ДПФ с ДВПФ позволит прояснить источник этого эффекта и понять, куда пропадает пиковая частота. Кроме того, будет ясно почему zero-padding или дополнение сигнала нулями по сути не изменяет частотную информацию сигнала.

Связь ДВПФ и ДПФ

Дополним N-мерный вектор $x \in \mathbb{C}^N$ до бесконечной последовательности $x_p \in \ell_2(\mathbb{Z})$ нулями.

$$x_p[n] \;=\; \begin{cases} x[n], & n = 0,\ \ldots,\ N-1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\text{Д П Ф}\quad x: \quad X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi i \frac{m n}{N}},\ \ m = 0,\ \ldots,\ N-1,$$

$$\text{ДВПФ}\quad x_p: \quad \hat{x}_p(\omega) \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi i \omega n},$$

$$\text{Связь между спектрами}: \quad X[m] \;=\; \hat{x}_p\!\left(\frac{m}{N}\right),\ \ m = 0,\ \ldots,\ N-1.$$

Дополнение нулями при ДПФ

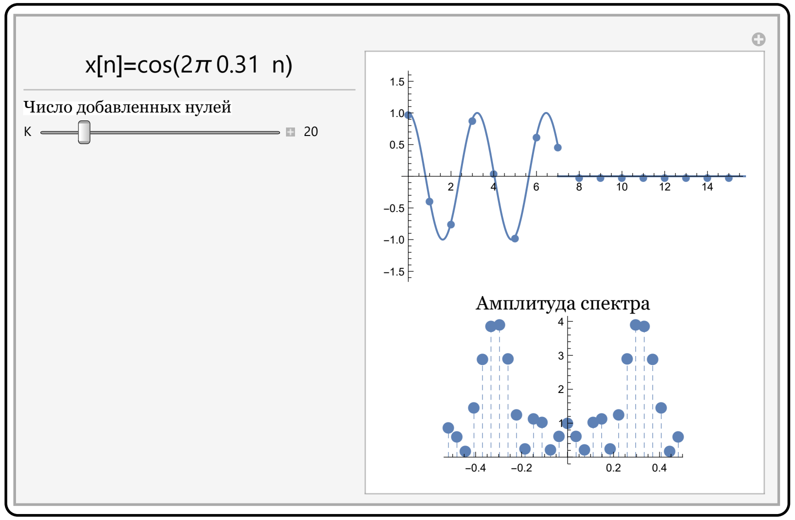
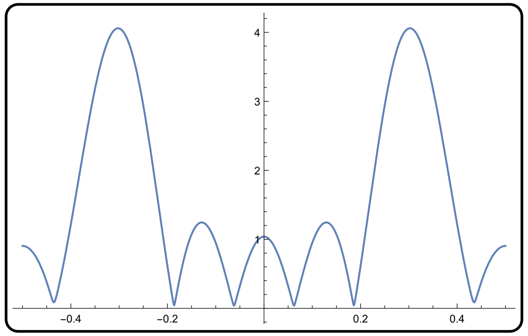


График амплитуды спектра сигнала x_p

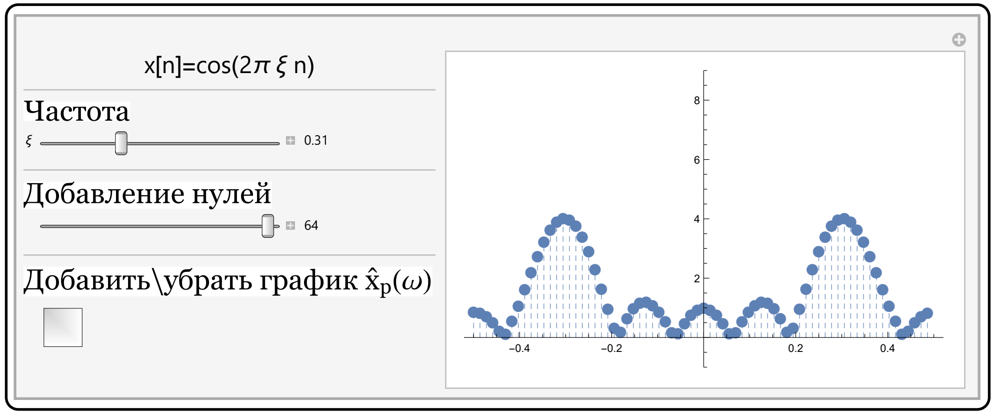


То есть отсчёты ДПФ вектора x лежат на графике функции $\hat{x}_p(\omega)$, которая является ДВПФ для последовательности x_p, полученной из вектора x добавлением нулей.

Связь ДВПФ и ДПФ

Демонстрация тех же эффектов, но теперь частоту синусоиды можно изменять.

График амплитуды спектра сигналов x и x_p



Отметим также, что дополнение вектора $x \in \mathbb{C}^N$ нулями позволяет более подробно разглядеть структуру его спектра, позволяет получить более сглаженную форму спектра, а также повысить точность оценки частоты пиков спектра.

Преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$

Рассмотрим бесконечные аналоговые сигналы. Пространством для работы с такими сигналами является $L_2(\mathbb{R})$, содержащее функций интегрируемые с квадратом, то есть

$$L_2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt < +\infty \right\}.$$ Скалярное произведение $f, g \in L_2(\mathbb{R})$: $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} \, dt$.

Для сигнала $f \in L_2(\mathbb{R})$, его **преобразование Фурье** обозначается $\hat{f}$ и имеет вид:

$$\mathcal{F} f(\omega) := \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \, e^{-2\pi i \omega t} \, dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$ при этом спектр $\hat{f}$ также является функцией из $L_2(\mathbb{R})$.

Спектр называют также спектральной функцией сигнала f.

Число $\hat{f}(\omega)$ трактуется как информация о вкладе гармоники $e^{2\pi i \omega t}$ в сигнал f.

Амплитудой спектра называют $\left| \hat{f}(\omega) \right|$.

Фазой спектра называют $\arg\left(\hat{f}(\omega)\right)$.

Обратное преобразование Фурье имеет вид:

$$\left(\mathcal{F}^{-1} \hat{f}\right)(t) := \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \, e^{2\pi i \omega t} \, d\omega,$$ то есть для $f \in L_2(\mathbb{R})$ верно $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} f) = f$.

Двойное применение преобразование Фурье приводит к исходному сигнал, отражённому во времени: $\mathcal{F}(\mathcal{F} f)(t) = f(-t)$.

Обоснование определения ПФ для $L_2(\mathbb{R})$

$L_1(\mathbb{R})$ — это пространство суммируемых функций, то есть $f \in L_1(\mathbb{R})$, если $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt < +\infty$.

Если f из $L_1(\mathbb{R})$, то преобразование Фурье $\hat{f}(\omega)$ — это непрерывная и ограниченная функция:

Действительно, поскольку $\left|f(t)\, e^{-2\pi i t \omega}\right| \le |f(t)|$, то верны

Ограниченность: $\left|\hat{f}(\omega)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2\pi i t \omega}\, dt\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt.$

Непрерывность: $\left|\hat{f}(\omega) - \hat{f}(\xi)\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, \left|e^{-2\pi i t \omega} - e^{-2\pi i t \xi}\right| dt \le |\omega - \xi| \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt$ (по теореме Лагранжа).

ТЕОРЕМА Планшереля. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда для любого $N \in \mathbb{R}$ интеграл

$$h_N(\omega) = \int_{-N}^{N} f(t)\, e^{-2\pi i \omega t}\, dt$$

является функцией из $L_2(\mathbb{R})$. При $N \to \infty$ функции h_N сходятся в $L_2(\mathbb{R})$ к некоторому пределу h, причём

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega)|^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt$$

Функция h и является преобразованием Фурье функции f. При этом, если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то соответствующая функция h совпадает с преобразованием Фурье функции f в смысле $L_1(\mathbb{R})$.

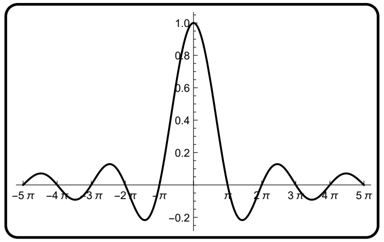
Пример спектра в $L_2(\mathbb{R})$

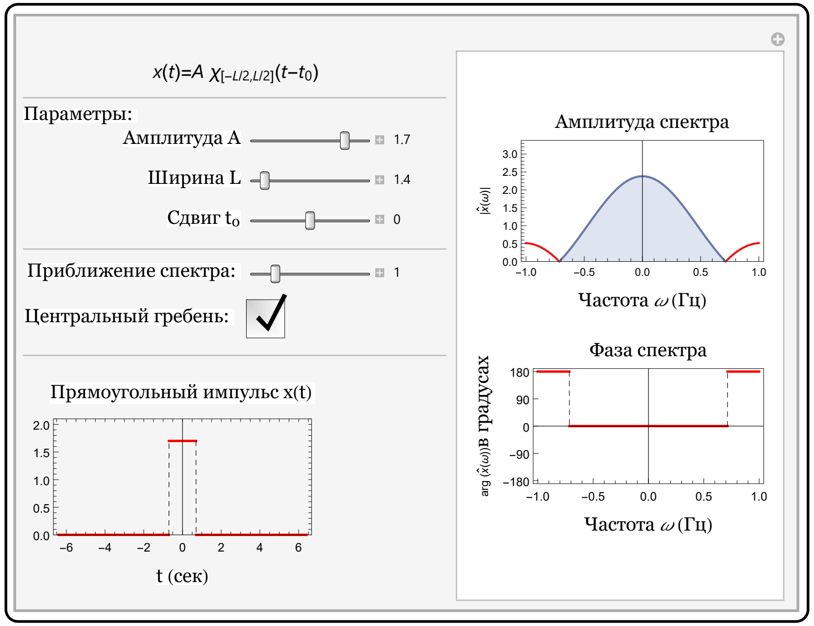
Прямоугольный импульс : $f(t) = A\,\chi_{[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]}(t) = \begin{cases} A, & |t| \le \frac{L}{2}; \\ 0 & |t| > \frac{L}{2}. \end{cases}$

Преобразование Фурье:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2\pi i t \omega}\, dt = A \int_{-L/2}^{L/2} 1 \cdot e^{-2\pi i t \omega}\, dt = -A\,\frac{e^{-2\pi i \omega \frac{L}{2}} - e^{2\pi i \omega \frac{L}{2}}}{2\pi i \omega} = A\,\frac{\sin(\pi \omega L)}{\pi \omega} = A\,L\,\mathrm{sinc}(\pi \omega L).$$

График sinc–функции $\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$



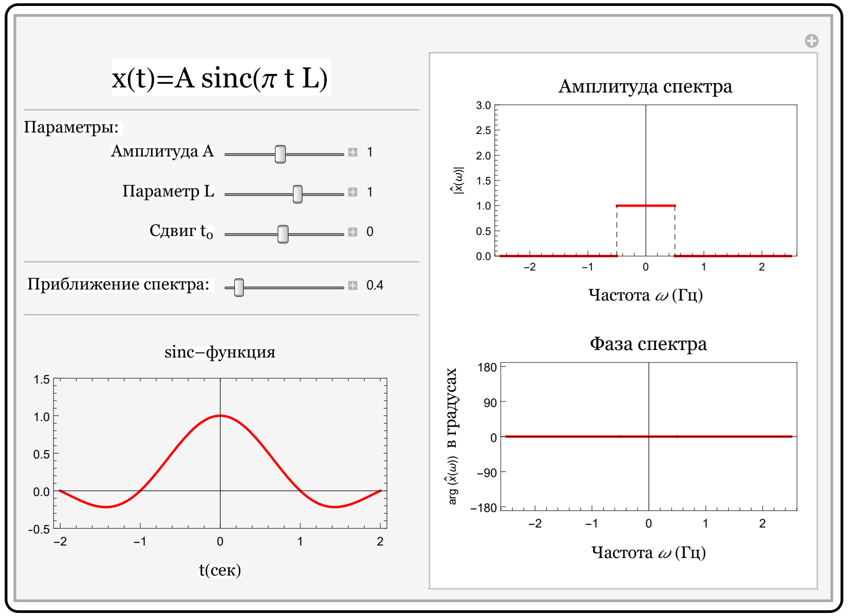


Пример спектра в $L_2(\mathbb{R})$

Сигнал : $f(t) = A\ \mathrm{sinc}(\pi\, t\, L)$.

Преобразование Фурье легко найти, пользуясь свойством, что $\mathcal{F}(\mathcal{F} f)(t) = f(-t)$. Тогда

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2\pi i t \omega}\, dt = A \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(\pi\, t\, L)\, e^{-2\pi i t \omega}\, dt = \frac{A}{L} \chi_{\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]}(t) = \begin{cases} \frac{A}{L}, & |t| \le \frac{L}{2}; \\ 0 & |t| > \frac{L}{2}. \end{cases}$$



С использованием обозначения $\mathrm{rect}(t)$ для характеристической функции отрезка $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, эти примеры можно записать так

$$A\,\mathrm{rect}\!\left(\frac{t}{L}\right) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} A\, L\, \mathrm{sinc}(\pi\, \omega\, L). \quad \text{Когда } A = 1,\ L = 1, \text{ то} \qquad \mathrm{rect}\,(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{sinc}(\pi\, \omega).$$

Свойства преобразования Фурье

Пусть $f, g \in L_2(\mathbb{R})$.

Линейность : $\mathcal{F}(a f + b g) = a \mathcal{F} f + b \mathcal{F} g$

Сдвиг по времени : $\mathcal{F}(f(\cdot - a))(\omega) = \mathcal{F} f(\omega)\, e^{-2\pi i a \omega}$ – модуляция спектра.

Модуляция по времени : $\mathcal{F}\left(e^{-2\pi i a (\cdot)} f\right)(\omega) = \mathcal{F} f(\omega - a)$ – сдвиг по частоте.

Сжатие по времени : $\mathcal{F} f(a\,\cdot)(\omega) = \dfrac{1}{|a|} \mathcal{F} f\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$ – растяжение по частоте.

Это свойство следует из замены переменной в интеграле: пусть $a > 0$, тогда

$$\int_{\mathbb{R}} f(a t)\, e^{-2\pi i t \omega}\, dt = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(a t)\, e^{-2\pi i \frac{\omega}{a} a t}\, d(a t) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(t')\, e^{-2\pi i \frac{\omega}{a} t'}\, d t' = \frac{1}{a} \mathcal{F} f\left(\frac{\omega}{a}\right).$$