Математические модели обработки сигналов

Дополнительные темы: Восстановление изображений

Лектор: Кривошеин А.В.

Задача восстановления изображений

Восстановления изображений заключается в попытке улучшить качество изображения на основе знаний о тех процессах, которые привели к формированию изображения.

Формирование изображения — это по сути преобразование входного распределения светового потока в выходное с помощью некоторого устройства. **Входное распределение** — это идеальное изображение, которые мы и хотим восстановить или приблизится к нему, имея на руках неидеальное или искажённое выходное распределение.

Рассмотрим модель формирования изображения с помощью системы:

$g = f * h + \eta.$

Фильтр h — это импульсный отклик системы, (англ. PSF, Point Spread Function, также $\hat{h}$ называют OTF, optical transfer function), η аддитивный шум.

Задача восстановления: оценить входное распределение f на основе имеющегося выхода g и любой доступной информации о h и шуме. По сути надо обратить операцию свёртки (англ. convolution), что известно как **деконволюция**.

Указанная выше модель проста, но она неплохо работает в ряде случаев.

Как правило, есть некоторое знание о h, исходя из физических свойств системы (например, форма линз для оптических приборов).

Шум случаен, но могут быть известны статистические свойства шума.

“Наивное” восстановление

Рассмотрим преобразование Фурье нашей модели : $\hat{g} = \hat{f}\,\hat{h} + \hat{\eta}$.

Пусть аддитивный шум пренебрежимо мал и можно считать, что $\eta = 0$. В этом случае можно получить простое решение задачи деконволюции с помощью фильтра y заданного в виде

$$\hat{y} = \frac{1}{\hat{h}}, \quad \text{тогда}\ \hat{f}_{\text{app}} = \hat{y}\,\hat{g} = \frac{\hat{g}}{\hat{h}}. \quad \text{Тогда} \quad f_{\text{app}} = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{y}\,\hat{g}\}.$$

Фильтр y называют **обратным фильтром**.

На практике же такое простое решение почти никогда не работает должным образом. Для частот в которых $\hat{h}$ имеет значения близкие к нулю, значения обратного фильтра $\hat{y}$ будут велики по модулю.

Простая модификация: когда значение $\hat{h}(\omega)$ близки к нулю, то соответствующее значение для $\hat{y}(\omega)$ положить равным нулю. По сути, это действие похоже на полосно-пропускающий фильтр, поскольку ряд частот подвергается подавлению, а остальные идут для восстановления.

“Наивное” восстановление с шумом

Ещё одна из проблем возникает из-за шума в изображении. В этом случае применение обратного фильтра может привести непредсказуемым результатам:

$$\hat{f}_{\text{app}} = \hat{y}\,\hat{g} = \hat{f} + \frac{\hat{\eta}}{\hat{h}}.$$

Второе слагаемое желательно сделать как можно малым. Но **спектр шума** заранее **неизвестен**, и потому неотделим от полученного спектра. К тому же, для многих типов шумов характерна заметная ВЧ компонента, то есть может быть и так, что для каких-то частот она выше полезного сигнала.

$$|\hat{\eta}| \geq |\hat{f}|$$

В этом случае, первое слагаемое $\hat{f}$ в правой части будет мало по сравнению со вторым $\hat{\eta}/\hat{h}$. И это приведёт к непредсказуемым результатам и возможно полной потере изображения.

Идеи для восстановления с шумом

Таким образом, при наличии шума нужен более сложный подход, чем простая фильтрация обратным фильтром. Рассмотрим подробнее равенство

$$\hat{f}_{\text{app}} = \hat{y}\,\hat{g} = \hat{y}\left(\hat{f}\,\hat{h} + \hat{\eta}\right),$$

из которого можно понять, какими свойствами должен бы обладать фильтр y.

1. Для тех частот, где **шумовая компонента значительно меньше полезного сигнала**, фильтр $\hat{y}$ должен быть близок к обратному фильтру, то есть

$$\hat{y}(u, v) \approx \frac{1}{\hat{h}(u, v)}, \quad \text{если} \quad |\hat{\eta}(u, v)| << |\hat{g}(u, v)|.$$

Это приведёт к восстановлению этих частот в восстановленном изображении близкими к оригиналу.

2. Для тех частот, где **шумовая компонента значительно больше полезного сигнала**, фильтр $\hat{y}$ должен быть близок к нулю, то есть

$$\hat{y}(u, v) \approx 0, \quad \text{если} \quad |\hat{\eta}(u, v)| >> |\hat{g}(u, v)|.$$

Это приведёт к тому, что сильно зашумлённые частоты будут обнулены.

3. Для тех частот, где **шумовая компонента сравнима с полезным сигналом**, наш фильтр должен найти баланс между пропусканием этих частот и их восстановлением обратным фильтром и полным подавлением.

Фильтр Винера

Если критерий оптимальности в задаче восстановления — это минимизация среднеквадратичной ошибки

$$Q = \frac{1}{M N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} (f(m, n) - f_{\text{app}}(m, n))^2,$$

то можно найти аналитическое решение, называемое **фильтром Винера**. Его удобно записать в частотной области:

$$\hat{y}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\hat{h}^*(\omega_1, \omega_2)\ W_f(\omega_1, \omega_2)}{\left|\hat{h}(\omega_1, \omega_2)\right|^2 W_f(\omega_1, \omega_2) + W_\eta(\omega_1, \omega_2)} \quad \text{или } \hat{y} = \frac{\hat{h}^*\ W_f}{|\hat{h}|^2 W_f + W_\eta},$$

где W_f, W_η спектральные мощности сигнала и шумовой компоненты,

$$W_f(\omega_1, \omega_2) = \left|\hat{f}(\omega_1, \omega_2)\right|^2, \quad W_\eta(\omega_1, \omega_2) = |\hat{\eta}(\omega_1, \omega_2)|^2$$

Также можно использовать запись

$$\hat{y} = \frac{\hat{h}^*}{|\hat{h}|^2 + \frac{W_\eta}{W_f}} = \frac{\hat{h}^*}{|\hat{h}|^2 + \text{NSR}} = \frac{1}{\hat{h}} \frac{|\hat{h}|^2}{|\hat{h}|^2 + \text{NSR}}, \quad \text{где NSR} = \frac{W_\eta}{W_f} \text{ отношение шум – сигнал.}$$

Из этой записи можно отметить, что 3 пункта, указанные выше, здесь удовлетворены.

Фильтр Винера: особенности

1. Реализация фильтра требует знания w_f, то есть распределение мощности спектра входного сигнала. Однако, входное распределение — это и есть та величина, которую мы хотим оценить, поэтому в точности w_f нам неизвестна. То есть точно фильтр Винера не реализуем. Однако, есть несколько советов для практической реализации:

- когда входное распределение принадлежит хорошо определённому классу, то достаточно аккуратные оценки мощности спектра могут быть получены (например, радиография скелета, скелеты в целом имеют схожую структуру и это даёт возможность оценить мощность спектра входных сигналов).
- мощность спектра входного сигнала может быть оценена как мощность спектра выходного сигнала w_g (возможно после применения к g какого либо фильтра).
- простейший способ (но менее точный) — это заменить NSR на константу, удалив зависимость от частот.

2. Восстановление фильтром Винера обычно выдаёт довольно размытый результат с точки зрения человеческого восприятия. Даже в идеальном случае, когда фильтр реализуется точно. То есть MSE критерий хотя и даёт оптимальное решение, но оно не оптимально с точки зрения нашего восприятия.

Алгоритм Люси-Ричардсона

Для решения задачи деконволюции применяется также алгоритм Люси-Ричардсона.

Пусть, как и выше изображение, получено свёрткой истинного изображения g и некоторого фильтра h:

$$g = f * h$$

$$g(n_1, n_2) = \sum_{(m_1, m_2)} f(m_1, m_2)\, h(n_1 - m_1, n_2 - m_2).$$

Суть метода Люси-Ричардсона в итеративном поиске наиболее вероятных значений для $f(n_1, n_2)$ по имеющимся значениями g и h. Опуская детали, решение этой задачи приводит к уравнениям для значений пикселей f, которые можно решать итеративно по формуле

$$u^{(k+1)}(n_1, n_2) = u^{(k)}(n_1, n_2) \sum_{(m_1, m_2)} \frac{g(m_1, m_2)}{w(m_1, m_2)}\, h(m_1 - n_1, m_2 - n_2),$$

где $w(m_1, m_2) = \sum_{(l_1, l_2)} u^{(k)}(l_1, l_2)\, h(m_1 - l_1, m_2 - l_2).$

Или $u^{(k+1)} = u^{(k)} \cdot \left(\frac{g}{u^{(k)} * h} * h^{-}\right),$

где операции умножения и деления поточечны, а h^{-} — это отражение относительно нуля h.