

Apéndice 1

ALGEBRA DE BOOLE

A1.1 Introducción

En 1847, George Boole desarrolla el álgebra, que lleva su nombre, como un análisis matemático. Su objetivo era describir las operaciones mentales mediante las cuales se realizan razonamientos.

En 1938, Shannon emplea el álgebra de Boole en circuitos de conmutación. Su objetivo era describir la conducta de circuitos digitales mediante un álgebra binaria.

El álgebra de Boole es una estructura algebraica consistente de un conjunto **B**, de dos elementos, y dos operaciones binarias; tales que se cumplen los axiomas de clausura, conmutatividad, asociatividad, distributividad, identidad y complementariedad.

A1.2. Postulados

P.1 Definición:

El álgebra de Boole es un sistema algebraico *cerrado* que contiene un conjunto **B** de dos elementos, $\{0, 1\}$; y dos operadores $\{ \cdot, + \}$. Los operadores también suelen representarse según: **{AND, OR}**.

La clausura implica que si **a** y **b** pertenecen a **B**, entonces: **a·b** y **a+b** también pertenecen a **B**.

P.2 Igualdad.

Dos expresiones son iguales si una puede ser *substituida* por la otra.

P.3 Elementos únicos.

Existen elementos *únicos* (0 y 1) en **B** tal que para cada **a** en **B** se tienen:

$$\begin{aligned} a + 0 &= a \\ a \cdot 1 &= a \end{aligned} \tag{P3}$$

P.4 Conmutatividad.

Si **a** y **b** pertenecen a **B**:

$$\begin{aligned}a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a\end{aligned}\tag{P4}$$

P.5 Asociatividad.

Si **a**, **b** y **c** pertenecen a **B**:

$$\begin{aligned}a + (b + c) &= (a + b) + c \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c\end{aligned}\tag{P5}$$

P.6 Distributividad.

Si **a**, **b** y **c** pertenecen a **B**:

$$\begin{aligned}a + (b \cdot c) &= (a + b) \cdot (a + c) \\ a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c)\end{aligned}\tag{P6}$$

Nótese que en la distribución para la suma en el producto, la expresión a la derecha es diferente de la empleada habitualmente para números reales y enteros.

P.7 Complementariedad.

Si **a** pertenece a **B**, existe complemento único de **a** que se representa por **a'** y también por \bar{a} .

$$\begin{aligned}a + a' &= 1 \\ a \cdot a' &= 0\end{aligned}\tag{P7}$$

Al complemento único de **a** lo representaremos, para facilitar su escritura según convenga, como: **a'**, y también como: **not a**. El complemento podría haberse definido como un operador unario de la estructura algebraica.

En el lenguaje C se emplea $\sim a$ para denotar el complemento; $!a$ para la negación, el operador and se anota $\&$ y el operador or emplea el símbolo $|$.

Observar que, con la formulación de postulados, se pueden demostrar como teoremas las siguientes proposiciones:

$$\overline{1} = 0$$

$$\overline{0} = 1$$

$$\overline{\overline{a}} = a$$

Es decir, las igualdades anteriores no son postulados.

A1.3 Sobre las demostraciones de Teoremas.

Cada paso en las demostraciones consiste en la aplicación de P.2, regla de sustitución, en conjunción con otros postulados o teoremas ya demostrados. Se agrega a cada línea, como comentario, el postulado usado.

Ejemplo A1.1.

Teorema. Complemento de 1.

Se desea demostrar que: $1' = 0$

Se tienen:

$$a \bullet 1 = a \quad ; \text{ P3 Elemento único 1.}$$

$$0 \bullet 1 = 0 \quad ; \text{ P2 Sustitución de } a \text{ por } 0.$$

$$(i) \quad 1 \bullet 0 = 0 \quad ; \text{ P4 Conmutación del producto.}$$

Y también:

$$a + 0 = a \quad ; \text{ P3 Elemento único 0.}$$

$$(ii) \quad 1 + 0 = 1 \quad ; \text{ P2 Sustitución de } a \text{ por } 1.$$

Por (ii) y (i) se tienen:

$$1 + 0 = 1$$

$$1 \bullet 0 = 0$$

El postulado P7 para el complemento de uno es:

$$1 + 1' = 1$$

$$1 \bullet 1' = 0$$

Empleando P2 puede sustituirse 0 por $1'$. Lo cual demuestra que: $1' = 0$

En forma similar puede demostrarse que el complemento de cero es uno: $0' = 1$.

Ejemplo A1.2.

Teorema de involución.

$$\overline{\overline{a}} = a \quad (A1.1)$$

Demostración:

Si el complemento único de a' es $(a')'$. Por P7, debe cumplirse:

$$\begin{aligned} a' + (a')' &= 1 \\ a' \cdot (a')' &= 0 \end{aligned} \quad (A1.2)$$

Por P.7 se tiene para el complemento de a :

$$\begin{aligned} a + a' &= 1 \\ a \cdot a' &= 0 \end{aligned} \quad (A1.3)$$

Aplicando P4, en (A1.3), se tienen:

$$\begin{aligned} a' + a &= 1 \\ a' \cdot a &= 0 \end{aligned} \quad (A1.4)$$

Comparando (A1.2) y (A1.4), y empleando P2, se demuestra que puede substituirse $(a')'$ por a .

Ejemplo A1.3.

Existen algunas diferencias con el álgebra para números enteros y reales.

a) Como no está definida la substracción, en la siguiente proposición, no pueden cancelarse AB y \overline{AB} .

$$AB + \overline{A} \overline{B} + \overline{A} C = AB + \overline{A} \overline{B} + BC$$

b) Notar que el operador and no suele escribirse entre las letras de las variables.

c) Como no está definida la división $AB = AC$ no puede reducirse a $B = C$.

d) Expresiones aparentemente diferentes pueden ser idénticas, por ejemplo:

$$AB + \overline{A} \overline{B} + \overline{A} C = AB + \overline{A} \overline{B} + BC$$

e) El complemento del producto no es igual al complemento de los operandos $A'B' \neq (AB)'$

A1.4. Dualidad

Dada una ecuación lógica, la ecuación dual se obtiene: reemplazando los operadores: $+$ por \cdot y \cdot por $+$; reemplazando las constantes: 1 por 0 y 0 por 1; y dejando las variables sin cambios.

Principio de dualidad: Si una ecuación booleana es válida, también lo será la ecuación dual.

Observaciones:

- Los postulados 3 al 7 se muestran en parejas de ecuaciones duales.
- Los teoremas también se plantean en parejas de ecuaciones duales.
- Nótese que una variable no se complementa para formar la expresión dual.
- Este es un teorema acerca de teoremas. Plantea que cualquier teorema que pueda ser demostrado, también podrá ser demostrado para la proposición dual. Esto puede observarse en la demostración de una proposición, cambiando cada línea por su expresión dual, lo que lleva a la demostración del dual de la proposición original.
- Antes de obtener el dual de una expresión, conviene asociar los operandos con los operadores que les corresponden, mediante el uso de paréntesis: $A \cdot B + C$ debe interpretarse, según convenios algebraicos tradicionales, como: $(A \cdot B) + C$; en este caso, la expresión dual es: $(A + B) \cdot C$. Si se determina directamente la expresión dual, mediante el procedimiento de cambiar el or por and y viceversa, se obtendría erróneamente: $A + B \cdot C$.
- En el álgebra de Boole los operadores $(\cdot , +)$ tienen igual jerarquía. Y es necesario emplear paréntesis para asociar correctamente los operandos con el operador.
- En el lenguaje C, el operador $!$, la negación lógica, es un operador unario que tiene la más alta precedencia; luego viene el $\&$, el and; después el \wedge , el or exclusivo; después el \vee , el or. La precedencia indica que un operador de mayor precedencia toma sus operandos antes que uno de menor precedencia; de esta forma pueden escribirse, generalmente, operaciones lógicas sin emplear paréntesis.

A1.5. Teoremas

T.8 Idempotencia.

$$a + a = a \quad (T8)$$

$$a \cdot a = a$$

Demostración de la primera proposición.

$$\begin{aligned}
 a &= a && ;P2 \\
 &= a + 0 && ;P3 \\
 &= a + (a a') && ;P7 \\
 &= (a + a)(a + a') && ;P6 \\
 &= (a + a) 1 && ;P7 \\
 &= a + a && ;P3
 \end{aligned}$$

T.9 Unión con el Universo e Intersección con el vacío.

$$a + 1 = 1 \quad (T9)$$

$$a \cdot 0 = 0$$

Demostración de la primera proposición:

$$\begin{aligned} a + 1 &= a + 1 && ;P2 \\ &= a + a + a' && ;P7 \\ &= a + a' && ;T8 \text{ y } P5 \\ &= 1 && ;P7 \end{aligned}$$

T.10 Absorción.

$$a + ab = a \quad (T10)$$

$$a \cdot (a + b) = a$$

Demostración de la primera proposición:

$$\begin{aligned} a + ab &= a + ab && ; P.2 \\ &= a \cdot 1 + ab && ; P.3 \\ &= a \cdot (1 + b) && ; P.6 \\ &= a \cdot (b + 1) && ; P.4 \\ &= a \cdot 1 && ; T.9 \\ &= a && ; P.3 \end{aligned}$$

Se absorbe b.

T.11 Absorción del complemento.

$$a + \bar{a}b = a + b \quad (T11)$$

$$a \cdot (\bar{a} + b) = ab$$

Demostración de la primera proposición:

$$\begin{aligned} a + a'b &= a + a'b && ;P2 \\ &= (a + a') (a + b) && ;P6 \\ &= 1 (a + b) && ;P7 \\ &= (a + b) && ;P3 \end{aligned}$$

T.12 De Morgan

$$\overline{a + b} = \bar{a}\bar{b} \quad (T12)$$

$$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$$

Demostración de la segunda proposición:

Por P7 se tiene que si $(ab)'$ es el complemento único de ab , entonces:

$$\begin{aligned}(ab) + (ab)' &= 1 \\ (ab) (ab)' &= 0\end{aligned}\quad \text{T12.a}$$

Por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned}(ab)(a' + b') &= (ab)(a' + b') && ;P2 \\ &= aba' + abb' && ;P6 \\ &= 0b + a0 && ;P4, P7 y P5 \\ &= 0 + 0 && ;T9 \\ &= 0 && ;P3\end{aligned}\quad \text{T12.b}$$

También tenemos que:

$$\begin{aligned}(ab) + (a' + b') &= (ab) + (a' + b') && ;P2 \\ &= (a' + b') + (ab) && ;P4 \\ &= ((a' + b') + a)((a' + b') + b) && ;P6 \\ &= ((a + a') + b')(a' + (b + b')) && ;P4 y P5 \\ &= (1 + b')(a' + 1) && ;P7 \\ &= (1)(1) && ;T9 \\ &= 1 && ;P3\end{aligned}\quad \text{T12.c}$$

Entonces de T12.a, T12.b y T12.c, y empleando P2, se logra:

$$(ab)' = (a' + b')$$

Generalización de De Morgan:

$$f'(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 1, +, \bullet) = f(x_1', x_2', \dots, x_n', 1, 0, \bullet, +)$$

Puede emplearse la inducción perfecta para demostrar en forma más simple las leyes de De Morgan. Basta desarrollar las tablas de verdad.

Inducción completa o perfecta.

Aristóteles, y otros después de él, emplearon este nombre para designar un razonamiento cuyas premisas enumeran todos los miembros de la clase a la que se refiere su conclusión. La conclusión deriva necesariamente de las premisas, ya que sólo expresa lo que en éstas se hallaba contenido. Se trata, pues, de una deducción.

Se basa en la enumeración completa, en la que se deben contar todos los casos de una clase determinada y enunciar sus resultados en una conclusión general. La conclusión acerca de todos los elementos de una clase se deduce a partir de premisas que se refieren a los casos observados. La inducción perfecta permite obtener información fidedigna.

Sin embargo, en la solución de la mayoría de los problemas no puede emplearse este tipo de enumeración ya que no es posible examinar todos los casos a que se refiere una conclusión; esto se hace evidente al aumentar el número de variables, ya que el número de renglones crece en forma exponencial con el número de variables.

El empleo de tablas de verdad es un ejemplo de aplicación de *inducción perfecta*.

Demostración de la segunda proposición de T12, mediante tabla de verdad.

a	b	a'	b'	(ab)'	a'+b'
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

T.13 Consenso.

$$ab + \bar{a}c + bc = ab + \bar{a}c \quad (T13)$$

$$(a + b)(\bar{a} + c)(b + c) = (a + b)(\bar{a} + c)$$

bc es el término de consenso entre ab y a'c.

Demostración de la primera proposición:

$$\begin{aligned}
 ab + a'c &= ab + a'c && ;P2 \\
 &= (ab + abc) + (a'c + a'cb) && ;T10 \\
 &= ab + a'c + abc + a'cb && ;P4 \\
 &= ab + a'c + abc + a'bc && ;P4 \\
 &= ab + a'c + (a + a')(bc) && ;P6 \\
 &= ab + a'c + (1)(bc) && ;P7 \\
 &= ab + a'c + bc && ;P3
 \end{aligned}$$

T.14 Fusión.

$$ab + a\bar{b} = a \quad (T14)$$

$$(a + b)(a + \bar{b}) = a$$

Demostración de la primera proposición:

$$\begin{aligned}
 ab + a\bar{b} &= ab + a\bar{b} && ;P2 \\
 &= a(b + \bar{b}) && ;P6 \\
 &= a(1) && ;P7 \\
 &= a && ;P3
 \end{aligned}$$

T.15 Factorización

$$ab + \bar{a}c = (a + c)(\bar{a} + b) \quad (T15)$$

$$(a + b)(\bar{a} + c) = ac + \bar{a}b$$

Demostración de la primera proposición:

$$\begin{aligned}
 (a + c)(\bar{a} + b) &= (a + c)(\bar{a} + b) && ;P2 \\
 &= a(\bar{a} + b) + c(\bar{a} + b) && ;P6 \\
 &= a\bar{a} + ab + c\bar{a} + cb && ;P6 \\
 &= 0 + ab + c\bar{a} + cb && ;P7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= ab + ca' + cb && ;P3 \\
 &= ab + a'c + bc && ;P4 \\
 &= ab + a'c && ;T13
 \end{aligned}$$

Los teoremas más frecuentemente empleados son: T.8, T.9, T.10, y T.12.

A1.6. Diagramas de Venn

Si consideramos que el álgebra de conjuntos es un álgebra de Boole, en la que los conjuntos corresponden a los elementos, la intersección al **AND**, y la unión al **OR**; entonces las proposiciones del álgebra de Boole se pueden representar por diagramas de conjuntos.

En los diagramas de Venn los conjuntos se muestran como áreas. El '1' es el conjunto universal, y el '0' es el conjunto vacío.

Los diagramas de Venn, permiten “visualizar” los postulados y teoremas.

La Figura A1.1. ilustra las operaciones de suma y producto lógico.

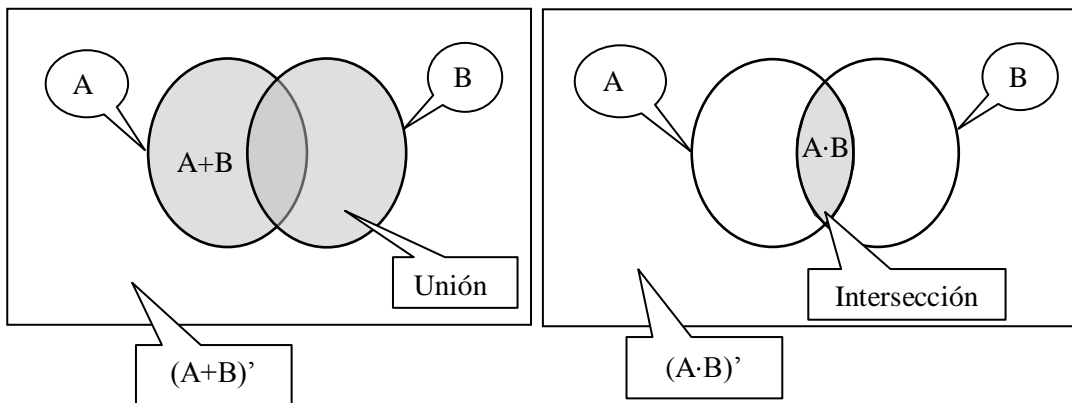


Figura A1.1. Unión e Intersección

La Figura A1.2. muestra el conjunto universal y el conjunto vacío.

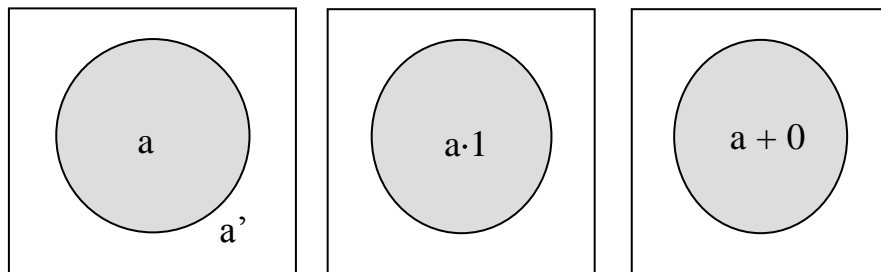


Figura A1.2. Conjunto Universal y Vacío

Ejemplo A1.4. Visualización de teoremas mediante diagramas de Venn.

Visualización del teorema del consenso.

T.13: $ab + \bar{a}c + bc = ab + \bar{a}c$

La Figura A1.3. ilustra los dos términos del lado derecho del teorema.

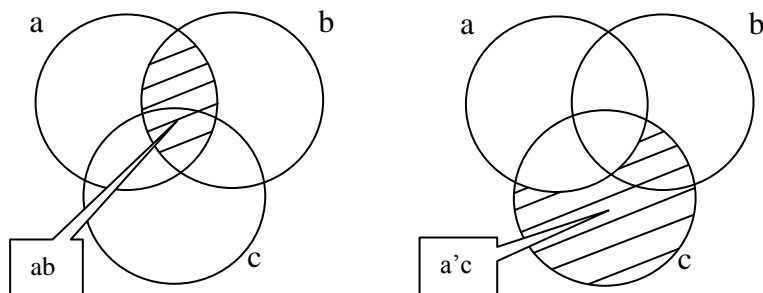


Figura A1.3. Consenso entre partes.

La parte izquierda de la Figura A1.4 muestra el término de consenso bc.

La parte derecha de la Figura A1.4 muestra la suma lógica de $ab + a'c$, en la cual se puede advertir que el término bc queda incluido. Una parte de bc está en ab; la otra parte de bc está en $a'c$.

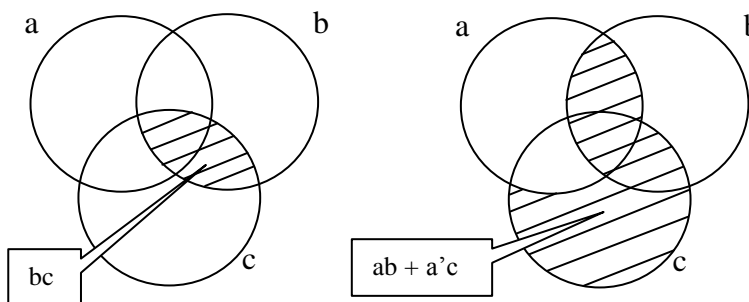


Figura A1.4. Término de consenso

Se puede decir que bc está incluido en $ab + a'c$; y también que bc es un término denominado consenso entre ab y $a'c$.

A1.7. Implicación material o condicional.

La expresión: $p \Rightarrow q$, se lee: Si p entonces q. (If p then q).

Con p el antecedente y q el consecuente, se tiene:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
0	0	1
0	1	1
1	0	0

Figura A1.5. Definición de Implicación

La implicación es falsa si el consecuente es falso cuando el antecedente es verdadero. Debe notarse que cuando el antecedente es falso el condicional es verdadero; si el antecedente y consecuente son verdaderos, entonces el condicional es verdadero.

Se destaca que la implicación condicional es una expresión que puede ser falsa.
Si se considera que 1 es mayor que 0, también puede tratarse como $p \leq q$.

La Figura A1.6 desarrolla que: $p \Rightarrow q$ equivale lógicamente con $(p'+q)$. Esto debido a que tienen iguales tablas de verdad.

p	q	p'	p'+q	$p \Rightarrow q$
1	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0

Figura A1.6. Implicación Material

También $p \Rightarrow q$ es equivalente con la expresión $q' \Rightarrow p'$, que se denomina implicación conjugada. La equivalencia lógica se demuestra en la Figura A1.7, ya que las dos últimas columnas muestran que tienen iguales tablas de verdad.

p	q	q'	p'	q+p'	$q' \Rightarrow p'$
1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0

Figura A1.7. Implicación conjugada

Ejemplo A1.4a.

a) Cuando p representa la proposición: El interruptor está cerrado, y q representa la aseveración: la ampolleta está encendida, $p \Rightarrow q$, puede describirse según:

Si *el interruptor está cerrado* entonces *la ampolleta está encendida*.

Si p entonces q .

La Figura A1.7a, muestra un sistema físico, en el cual por consideraciones basadas en redes eléctricas se cumple la equivalencia lógica: $q = p$

Se ha colocado q a la izquierda de la igualdad, para mostrar que q depende de p . Con esto se tiene que:

$$\begin{aligned} p \Rightarrow q &= p' + q \quad ; \text{ Implicación material} \\ &= p' + p \quad ; \text{ De acuerdo al sistema, } q \text{ es equivalente con } p. \\ &= 1 \end{aligned}$$

Es decir la implicación es verdadera; en este caso se dice que p es un implicante de q .

Empleando diagramas de Venn, p será un implicante de q , si p está contenido en q , o es igual a q . Si se marca la zona $p' + q$, se tendrá que ésta siempre es verdadera.

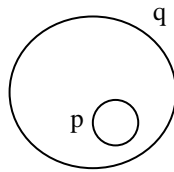


Figura A1.7aa. Implicante.

Por lo anterior se tendrá que si p es verdadero y q es falso, tendremos una contradicción. Sin embargo esto se debe a una modelación incompleta del diagrama; el cual no contempla que la ampolleta esté buena (r) y que la batería que alimenta al sistema tenga la suficiente carga (s). Considerando estas condiciones adicionales, puede expresarse: $q = r s p$

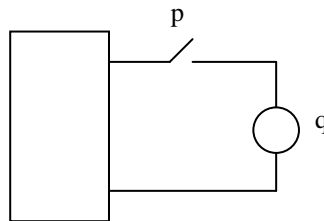


Figura A1.7a. Implicación.

En la situación que muestra la Figura A1.7a, no se presenta la combinación en la que q sea verdadero cuando p es falso. Se dice que ésta es una combinación o condición superflua.

La implicación conjugada o contrapositiva, se plantea según:

Si no q , entonces no p . Que puede traducirse por: “Si la ampolleta no está encendida, entonces: el interruptor no está cerrado”

b) En el siguiente diagrama puede escribirse:

“Si r está cerrado y s está cerrado entonces: la ampolleta está encendida”.

Si $(r \text{ y } s)$ entonces q

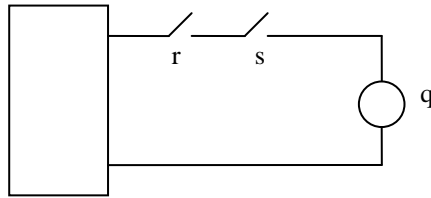


Figura A1.7b. Implicación.

Contrapositiva: Si no q entonces: no r o no s .

“Si la ampollita no está encendida, entonces: r no está cerrado o s no está cerrado”.

A1.7.1. Formas de enunciar implicaciones.

La implicación material puede plantearse de variadas formas:

p demuestra o determina o prueba q

p produce o establece o justifica q

p causa o crea o soporta q

p es la evidencia para q

Debido a p , concluimos q

q es cierta por la razón de p

Cuando p , se tiene q

q es probado por el hecho de p

A1.7.2. Teoremas relativos a implicaciones.

$$1) p' \Rightarrow q = p + q$$

2) $p \Rightarrow q = (pq')'$ Si la premisa es verdadera y la conclusión es falsa, la premisa $p \Rightarrow q$ es falsa.

$$3) p \Rightarrow q = q' \Rightarrow p' \text{ Transposición.}$$

$$4) pq = (p \Rightarrow q')'$$

El profesor es justo y el profesor es generoso, es equivalente a: No es cierto que si el profesor es justo esto pruebe que el profesor no es generoso.

Si dos hechos son ciertos, uno no puede desaprobar al otro.

$$5) pq = (q \Rightarrow p')'$$

$$6) (pq) \Rightarrow (p \Rightarrow q) = 1 \text{ Si } p \text{ y } q \text{ son válidos se puede usar uno de ellos para probar el otro.}$$

7) $(p \Rightarrow q')' \Rightarrow (p \Rightarrow q) = 1$ Si p no desaprueba q entonces p puede usarse para probar q . Si no existe hecho que pueda probar que algo no es, entonces cualquier hecho puede solamente probar que él es.

$$8) p \Rightarrow (qr) = (p \Rightarrow q)(p \Rightarrow r) \text{ Distribución de implica en el producto.}$$

Aún si un hecho asumido como cierto, prueba que un segundo es verdadero, esto no significa que podemos concluir que el segundo hecho prueba que el primero es verdadero; el segundo puede ser verdadero, aunque no el primero. O el segundo puede ser probado, quizá por un tercero.

Pero si el primer hecho prueba que el segundo es cierto, entonces esto significa que podemos concluir que si el segundo es falso, entonces el primero también será falso.

A1.7.3. Condiciones suficientes y necesarias.

Cuando $p \Rightarrow q$ es verdadero, para que q sea verdad es condición suficiente que p sea verdad. Pero no es condición necesaria, ya que q puede ser verdad, aún siendo p falso.

Cuando $p \Rightarrow q$ es verdadero, para que p sea verdad es necesario que q sea verdad.

A1.7.4. Razonamiento Deductivo.

La expresión $p \Rightarrow q$ también puede leerse: q se deduce lógicamente de p . O también: La conclusión q se infiere de la hipótesis p .

Para que el razonamiento sea válido la expresión $p \Rightarrow q$, debe ser una tautología.

Se denomina tautología a una expresión que es verdadera bajo cualquier interpretación. Y se denomina contradicción a una expresión que es falsa bajo cualquiera interpretación.

A1.8. Deducción natural. Formas de razonamiento.

Una regla de inferencia transforma una sentencia válida en otra sentencia válida.

Si puede derivarse la conclusión de un argumento a partir de sus premisas, empleando una secuencia de **reglas de inferencia** válidas, entonces el argumento es válido.

Se denomina método de **deducción natural** al empleo de un conjunto de reglas de inferencia válidas para derivar la conclusión a partir de las premisas. También se denomina **cálculo proposicional**.

Este método es una alternativa a la validación mediante tablas de verdad y permite profundizar en la estructura lógica de los argumentos, pero a costa de un mayor razonamiento. Las tablas de verdad tienen la ventaja de ser procedimientos mecánicos, pero su tamaño crece muy rápidamente cuando aumentan las variables.

Se tienen reglas de implicación y de reemplazo.

1.8.1. Reglas de inferencia.

Las siguientes reglas de inferencia o tautologías condicionales se emplean para efectuar deducciones.

Modus ponens.

Modus ponendo ponens, del latín: Modo que afirmando afirma.

En esta forma de razonar debe demostrarse que $(p \bullet (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ es una tautología.

Si p implica q , y p es verdadero, entonces q también debe ser verdadero.

Ejemplo:

Hago mucho deporte.

Si hago mucho deporte, entonces estoy cansado.

Por lo tanto: estoy cansado.

Modus tollens.

Modus tollendo tollens, del latín: Modo que negando niega. Se llama también prueba indirecta.

En esta forma de razonar debe demostrarse que $(q' \bullet (p \Rightarrow q)) \Rightarrow p'$ es una tautología.

Si p implica q , y q es falso, entonces p también debe ser falso.

Ejemplo:

No estoy cansado.

Si hago mucho deporte, entonces estoy cansado.

Por lo tanto: No hago mucho deporte.

Transitividad. Silogismo hipotético.

En esta forma de razonar debe demostrarse que $(p \Rightarrow q) \bullet (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ es una tautología. También se denomina silogismo hipotético.

Ejemplo:

Si estudio mucho entonces aprobaré el curso.

Si apruebo el curso entonces me sentiré feliz.

Si estudio mucho entonces me sentiré feliz.

Inferencia de la alternativa. Silogismo disyuntivo.

Debe demostrarse que: $(p+q) p' \Rightarrow q$ es una tautología.

Si p o q es verdadera, y además sabemos que p es falsa, entonces se infiere que q es verdadera. Suele denominarse a esta tautología silogismo disyuntivo.

"Una vez eliminado lo imposible, lo que queda, por improbable que parezca, debe ser la verdad" Arthur Conan Doyle.

Simplificación.

Si se tiene la premisa pq se infiere p .

Conjunción.

Si se tienen las premisas: p, q se infiere pq .

Adición.

Si se tiene p puede inferirse $p+q$. Donde q puede ser cualquier premisa.

Dilema constructivo.

Dadas las premisas: $(p \Rightarrow q)(r \Rightarrow s)$ y $p+r$, entonces: $q+s$

1.8.2. Reglas de reemplazo.

En el método de deducción natural pueden emplearse reglas de reemplazo o tautologías bicondicionales.

Conmutatividad

Asociatividad

Distributividad

Doble negación: $p = (p')'$

Leyes de De Morgan

Idempotencia o Tautología: $p = p + p$ o $p = pp$

Trasposición o contrapositiva: $p \Rightarrow q = q' \Rightarrow p'$

Implicación material: $p \Rightarrow q = p' + q$

Equivalencia material: $p = q = (p \Rightarrow q)(q \Rightarrow p)$ o alternativamente: $p \Leftrightarrow q = (pq) + (p'q')$

Exportación: $(pq) \Rightarrow r = p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

Las reglas de reemplazo pueden emplearse en ambas direcciones y pueden reemplazar parte de una sentencia. Las de inferencia se emplean sólo en una dirección, es decir importa el orden de las premisas; y se aplican a sentencias completas.

Nótese que la equivalencia lógica puede describirse por el símbolo \equiv ; antes al definir los postulados y teoremas empleamos simplemente el signo $=$ para denotar la equivalencia lógica.

Ejemplo A1.5

Se tiene el siguiente argumento:

$a' \Rightarrow Z, a \Rightarrow b, c + b', c' \therefore Z.$

Deducir Z.

Solución.

Para efectuar la deducción, enumeramos las premisas, que se asumen verdaderas:

- | | | |
|----|--------------------|--------------------|
| 1. | $a' \Rightarrow Z$ | P |
| 2. | $a \Rightarrow b$ | P |
| 3. | $c + b'$ | P |
| 4. | c' | P / $\therefore Z$ |

Luego de las premisas se coloca una barra diagonal y luego de ésta la conclusión. Para efectuar la deducción, se aplican las reglas de inferencia, agregando como comentarios las reglas de inferencia o equivalencia que se aplican.

- | | | |
|----|------|-----------------------------|
| 5. | b' | 3 y 4: Silogismo disyuntivo |
| 6. | a' | 5 y 2 : Modus Tollens |
| 7. | Z | 6 y 1 : Modus Ponens |

Lo cual deduce Z, a partir de las premisas.

Como ilustran los siguientes ejemplos, algunas reglas pueden ser deducidas a partir de otras, y podría tenerse un conjunto menor de reglas. Específicamente bastaría para efectuar deducciones el disponer solamente de los postulados; sin embargo el conjunto de reglas ha resultado ser útil para disminuir el número de pasos en las deducciones.

Ejemplo A1.6.

Probar validez de Modus Tollens

$A \Rightarrow B$

B'

A'

Prueba:

1. $A \Rightarrow B$ P
2. B' $P \therefore A'$
3. $A' + B$ 1 Implicación material
4. A' 2, 3 Silogismo Disyuntivo

Probar validez de Modus Ponens

$A \Rightarrow B$

A

B

Prueba:

1. $A \Rightarrow B$ P
2. A $P \therefore B$
3. $A' + B$ 1 Implicación material
4. B 2, 3 Silogismo Disyuntivo

Probar validez del silogismo disyuntivo:

1. $(p+q)$ P
2. p' $P \therefore q$
3. $p' \Rightarrow q$ 1 Implicación material
4. q 2, 3 Modus ponens

Ejemplo A1.7.

Deducir la regla Dilema Constructivo.

1. $(p \Rightarrow q)(r \Rightarrow s)$ P
2. $p+r$ $P \therefore q+s$
3. $r \Rightarrow s$ 1 Simplificación
4. $p' \Rightarrow r$ 2 Implicación material
5. $p' \Rightarrow s$ 4 y 3 Transitividad.
6. $s' \Rightarrow p''$ 5 Transposición
7. $s' \Rightarrow p$ 6 Doble negación
8. $p \Rightarrow q$ 1 Simplificación

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| 9. $s' \Rightarrow q$ | 7 y 8 Transitividad |
| 10. $s + q$ | 9 Implicación material |
| 11. $q + s$ | 10 Conmutación. |

A1.9. Listas de implicaciones. Sorite.

Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), conocido por su seudónimo Lewis Carroll, diseñó numerosos puzzles para entrenar a las personas en el razonamiento sistemático.

Su mayor interés fue aumentar el entendimiento de las personas, tratando de que esto fuera un juego.

En un determinado tipo de problemas, enumera una lista de implicaciones, deliberadamente absurdas, de tal modo que el lector no sea influenciado por sus opiniones preconcebidas. La tarea propuesta es usar todas las implicaciones para llegar a una conclusión indiscutible.

Ejemplo A1.8

Todos los bebés son ilógicos.
 Nadie es detestado si puede manejar un cocodrilo.
 Las personas ilógicas son detestadas.

El primer paso en la solución es reconocer el conjunto universo. En el puzzle propuesto, el universo son todas las personas.

El segundo paso es definir variables:
 B: esta persona es un bebé.
 L: esta persona es lógica.
 M: esta persona puede manejar un cocodrilo.
 D: esta persona es detestada.

Las premisas, pueden escribirse:
 Si una persona es un bebé, entonces es una persona no lógica.
 Si una persona puede manejar un cocodrilo, entonces no es detestada.
 Si una persona no es lógica, entonces es detestada.

Las premisas pueden ser simbolizadas por:
 $B \Rightarrow L'$
 $M \Rightarrow D'$
 $L' \Rightarrow D$.

Nuestro objetivo es emplear razonamiento transitivo todas las veces que sea necesario, usando todos los elementos de las premisas, formando una cadena de implicaciones.

Nótese que si $M \Rightarrow D'$, también se cumple la contrapropuesta: $D \Rightarrow M'$.

Entonces, se logra la cadena, aplicando transitividad de la implicación:
 $B \Rightarrow L' \Rightarrow D \Rightarrow M'$

Conclusiones:

Tenemos entonces: $B \Rightarrow M'$: Todos los bebés no pueden manejar un cocodrilo.

También: $M \Rightarrow B'$: Si una persona puede manejar un cocodrilo, entonces no es un bebé.

Específicamente el tipo de problema anterior es clasificado como sorite. Que puede definirse como una forma de argumentación en la cual se ordenan una serie de silogismos incompletos de tal modo que el predicado de cada premisa sea el sujeto de la próxima. Finalmente el antecedente de la primera se une al predicado de la última formando la conclusión. Los silogismos son incompletos, ya que solamente están presentes las premisas.

A1.10 Silogismo.

Forma de razonamiento utilizado en lógica por la que del contraste de dos proposiciones o premisas se extrae una conclusión.

No se requiere ningún otro término o premisa para hacer la consecuencia necesaria.

Alternativamente: Razonamiento que consta de tres proposiciones, la última de las cuales se deduce necesariamente de las otras dos.

Las dos primeras proposiciones se llaman premisas; la tercera se denomina conclusión. Los dos términos que entran en las premisas y en la conclusión se llaman extremos (mayor y menor), y el que sólo entra en las premisas recibe el nombre de medio o eliminando.

Términos mayor y menor.

Un silogismo está formado por dos premisas y una conclusión.

El sujeto S de la conclusión es el término menor del silogismo.

El predicado P de la conclusión es el término mayor del silogismo.

Se llama premisa mayor, a la que contiene el término mayor; y se llama premisa menor, a la que contiene el término menor. El término que está presente en ambas premisas se denomina término del medio y se simboliza por M; y no está presente en la conclusión.

Se denomina orden estándar: el enunciar primero la premisa mayor, luego la menor y finalmente la conclusión.

Formas categóricas.

Un condicional es una proposición con la forma: Si p, entonces q.

La forma categórica del condicional anterior se plantea: Todos los p son q.

El condicional $p' \Rightarrow q$ puede escribirse, en forma categórica: Ningún p es q.

Se tienen 4 formas de proposiciones categóricas.

Se denomina tipo A, a la forma: Todos los S son P.

Se denomina tipo E, a la forma: Ningún S es P.

Se denomina tipo I, a la forma: Algún S es P.

Se denomina tipo O, a la forma: Algún S es no P.

La A y la E se denominan universales; la I y O se denominan particulares.

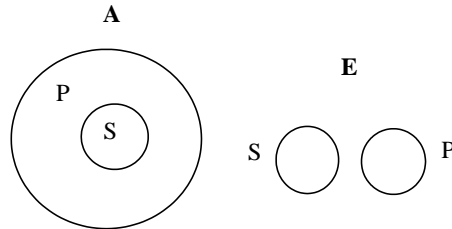


Figura A1.8. Formas universales.

Ejemplo A1.9

Premisa 1 tipo A: Todos los x son y

Premisa 2 tipo E: Ningún z es y

Conclusión tipo E: Ningún z es x.

Se dice que y es eliminando, y que se retienen z y x.

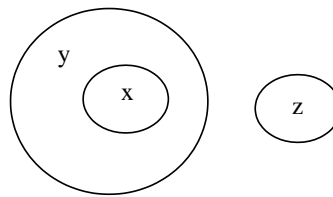


Figura A1.9. Ningún z es x.

Deducción:

- | | | |
|----|--------------------|-----------------------------------|
| 1. | $x \Rightarrow y$ | P |
| 2. | $z \Rightarrow y'$ | P / $\therefore z \Rightarrow x'$ |
| 3. | $y \Rightarrow z'$ | 2 Transposición |
| 4. | $x \Rightarrow z'$ | 1 y 3 Silogismo Hipotético |
| 5. | $z \Rightarrow x'$ | 4 Transposición. |

\therefore El silogismo es válido.

Ejemplo A1.10

Premisa 1 tipo A: Todos los x son y

Premisa 2 tipo I: Algún z es x

Conclusión tipo I: Algún z es y.

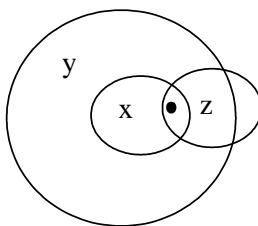


Figura A1.10. Algún z es y.

El silogismo es válido.

Disposición o tipos de silogismos.

Se denomina disposición del silogismo a la secuencia de tres de las letras anteriores (A, E, I, O), y que representan la premisa mayor, menor y conclusión del silogismo.

Por ejemplo el siguiente es silogismo AAA.

Todos los P son M.

Todos los S son M.

Todos los S son P.

La Figura A1.11 muestra tres diagramas que cumplen las premisas.

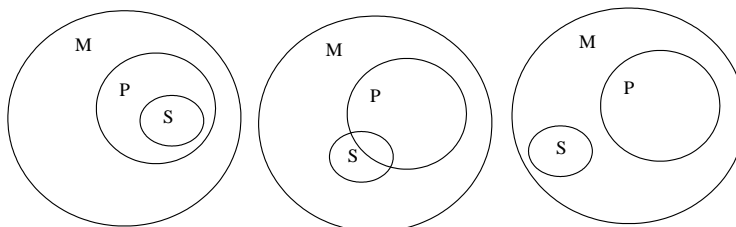


Figura A1.11. Silogismo AAA.

La posición del término del medio puede estar de cuatro formas diferentes. Se denominan con cifras desde 1 a 4.

Premisa	Cifra 1	Cifra 2	Cifra 3	Cifra 4
Mayor	M-P	P-M	M-P	P-M
Menor	S-M	S-M	M-S	M-S
Conclusión	S-P	S-P	S-P	S-P

Figura A1.12. Posición del término medio

Entonces el ejemplo anterior es silogismo AAA-2. Como muestran los diagramas central y derecho de la Figura A1.11, este silogismo es inválido, ya que todos los S no son P. La premisa: Todos los S son P, se muestra en el diagrama a la izquierda de la Figura A1.11.

Silogismo AAA-1

Todos los M son P.
Todos los S son M.
 Todos los S son P.

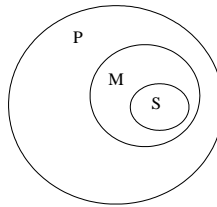


Figura A1.13. Silogismo AAA-1

Silogismo EAE-1

Ningún M es P.
Todos los S son M
 Ningún S es P.

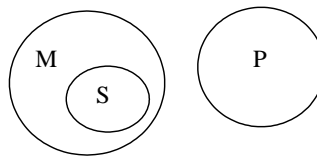


Figura A1.14. Silogismo EAE-1

Silogismo AII-3

Todos los M son P.
Algún M es S.
 Algún S es P.

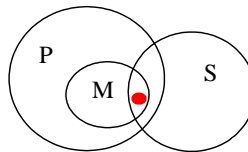


Figura A1.15. Silogismo AII-3

Silogismo AII-2

Todos los P son M.
Algún S es M.
 Algún S es P.

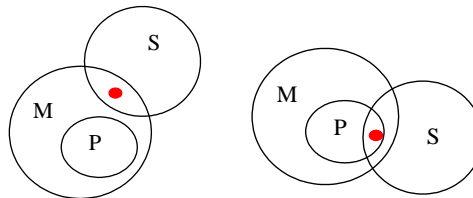


Figura A1.16. Silogismo AII-2

La premisa menor, puede dibujarse de dos formas. La Figura A1.16 izquierda ilustra que el silogismo AII-2 es inválido.

Para la determinación de la validez de los silogismos se emplean diagramas de Venn para mostrar la **distribución** de los miembros en las categorías. Son levemente diferentes de los usados en teoría de conjuntos, que se han empleado en las ilustraciones anteriores. Si no hay miembros se subraya el área, si al menos hay un miembro se coloca una x en el área. La Figura A1.17 muestra los diagramas para las cuatro proposiciones categóricas.

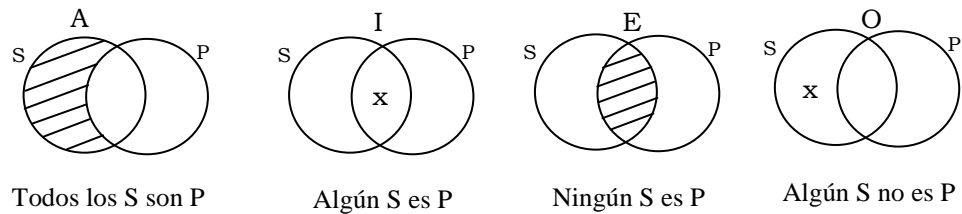


Figura A1.17. Diagramas de Venn de distribución de premisas categóricas.

Para probar los silogismos se dibujan tres círculos que se intersectan; se representan primero las premisas universales (A, E), luego las particulares (I, O); éstas últimas en zonas que no estén previamente achuradas.

EIO-3

Ningún M es P.

Algún M es S.

Algún S no es P

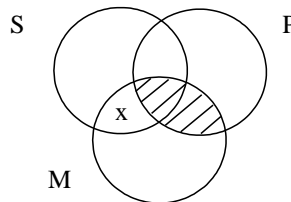


Figura A1.18. Ferison

Se diagrama primero: Ningún M es P. Luego se coloca la x, correspondiente a la premisa particular I; nótese que la x se coloca en la zona no achurada; ya que ésta fue invalidada por la premisa mayor. Si del diagrama resultante puede leerse la conclusión, el silogismo es válido. Si la conclusión no se encuentra en el diagrama, el silogismo es inválido. EIO-3 es válido.

EOO-2

Ningún P es M.

Algún S no es M.

Algún S no es P.

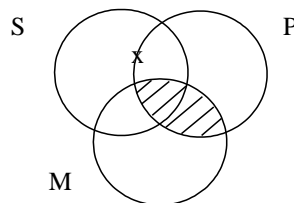


Figura A1.19. EOO-2

Se diagrama primero Ningún P es M. Se ha colocado la x fuera de M y en S, y en la línea sobre P para indicar que puede estar o no en P. De esta forma si algún S, que no es M, está en P el silogismo (EOO-2) es inválido. Lo cual concluye que EOO-2 es inválido.

Como el tipo de premisa puede repetirse: la premisa mayor puede escogerse de cuatro formas, la menor también de cuatro formas y la conclusión de cuatro formas, resultan 64 tipos de silogismos. Pero como además el término medio puede ocurrir de cuatro formas, se tienen en total 256 silogismos.

Pero sólo se tienen quince formas válidas. Existen palabras latinas, en las cuales el orden de aparición de las vocales indica el tipo de premisa categórica de las premisas mayor, menor y conclusión. Los siguientes son silogismos incondicionalmente válidos.

BARBARA, AAA-1 Todos los M son P. <u>Todos los S son M.</u> Por lo tanto: Todos los S son P.	CELARENT, EAE-1 Ningún M es P. <u>Todos los S son M.</u> Ningún S es P.	DARII, AII-1 Todos los M son P. <u>Algún S es M.</u> Algún S es P.	FERIO, EIO-1 Ningún M es P. <u>Algún S es M.</u> Algún S no es P.
---	--	---	--

La primera letra de los modos siguientes indica a cual modo con cifra 1 puede ser reducido.

Si luego de una letra de modo aparece s, la reducción es simple conversión; si es p la conversión es parcial; si es m entre las dos primeras vocales se aplica transposición. La letra c después de una de las dos primeras vocales indica que la premisa debe ser reemplazada por su negación para efectuar la conversión.

CESARE, EAE-2 Ningún P es M. <u>Todos los S son M.</u> Ningún S es P.	CAMESTRES, AEE-2 Todos los P son M. <u>Ningún S es M.</u> Ningún S es P.	FESTINO, EIO-2 Ningún P es M. <u>Algún S es M.</u> Algún S no es P.	BAROCO, AOO-2 Todos los P son M. <u>Algún S no es M.</u> Algún S no es P.
--	---	--	--

DISAMIS, IAI-3 Algún M es P. <u>Todos los M son S.</u> Algún S es P.	DATISI, AII-3 Todos los M son P. <u>Algún M es S.</u> Algún S es P.	BOCARDO, OAO-3 Algún M no es P. <u>Todos los M son S.</u> Algún S no es P.	FERISON, EIO-3 Ningún M es P. <u>Algún M es S.</u> Algún S no es P.
---	--	---	--

CAMENES, AEE-4 Todos los P son M. <u>Ningún M es S.</u> Ningún S es P.	DIMARIS, IAI-4 Algún P es M. <u>Todos los M son S.</u> Algún S es P.	FRESISON, EIO-4 Ningún P es M. <u>Algún M es S.</u> Algún S no es P.
---	---	---

Los silogismos AAI-1, EAO-1, AEO-2, EAO-4 son condicionalmente válidos si S existe. Si M existe: son condicionalmente válidos: EAO-3 y 4. Si P existe es válido: AII-4.

Silogismo EAO-4

Ningún P es M.
Todos los M son S.
Algún S es no P.

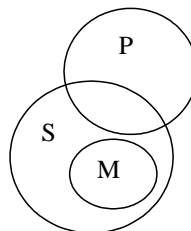


Figura A1.20. Silogismo

Condicional EAO-4

Este silogismo es válido si se conoce la premisa adicional: M existe.

No debe asumirse que algo existe, salvo que tengamos la evidencia.

Si existen entidades en M, éstas no estarán en P. Entonces los miembros de S que están en M, no estarán en P. Y el silogismo EAO-4 es válido.

Para algunos modelos geométricos (el punto, la línea), y físicos (masa puntual, componentes de parámetros concentrados) que son ampliamente usados no se tiene evidencia de su existencia física.

A1.11 Falacias.

Si se asume que la lógica trata sobre el razonamiento correcto se la puede usar para probar que una argumentación no es válida. Una falacia es un argumento que puede parecer válido, pero que en realidad es falso.

Existen innumerables tipos de falacias, tantos como los errores que el hombre puede cometer. Sin embargo algunas de ellas son tan comunes que se las reconoce con nombres latinos: Argumentum ad Ignorantiam, Argumentum ad Populum, etc.

Ejemplo A1.11

"Una mala sesión de clases es mejor que una buena sesión de clases, ya que una mala sesión de clases es **mejor que nada**, y *nada es mejor* que una buena clase"

Planteando las premisas y la conclusión:

Nada es mejor que una buena clase.

Una mala clase **es mejor que nada**.

Una mala clase es mejor que una buena clase.

Llevando a formas categóricas:

Ninguna (clase) son (cosas mejores que buenas clases).

Todas (las malas clases) son (cosas mejores que no tener ningún tipo de clases).

Todas (las malas clases) son (cosas mejores que buenas clases).

Se advierte que se tienen dos términos medios. Por lo tanto no es un silogismo del tipo EAA-1. Pertenece a las falacias de cuarto término.

Problemas resueltos

Problema A1.1

Demostrar, aplicando postulados y teoremas:

$$ABC + AB'(A'C')' = AB' + AC$$

Solución:

$ABC + AB'(A'C')'$	$= ABC + AB'(A'C')'$;P2. Substitución
	$= ABC + AB'(A'' + C'')$;T12 De Morgan
	$= ABC + AB'(A + C)$;Involución
	$= ABC + AB'A + AB'C$;P6 Distributividad
	$= ABC + AAB' + AB'C$;P4 Conmutatividad
	$= ABC + AB' + AB'C$;T8 Idempotencia
	$= AB' + ACB + ACB'$;P4 Conmutatividad
	$= AB' + AC(B + B')$;P6 Distributividad
	$= AB' + AC(1)$;P7 Complemento único
	$= AB' + AC$;P3 Elementos únicos.

Problema A1.2

$$\text{Con } f(a, b, c, d) = a + (a' b' c)(b' + (c \oplus d)')$$

Expresar, con el mínimo número de literales, como suma de productos empleando teoremas. Indicando los teoremas o postulados que emplee en cada paso de su desarrollo.

Solución:

Por definición de or exclusivo: $(c \oplus d) = cd' + c'd$

$$\begin{aligned} \text{Entonces: } (c \oplus d)' &= (cd' + c'd)' \\ &= (cd')' (c'd)' \quad \text{De Morgan} \\ &= (c' + d)(c + d') \quad \text{De Morgan} \\ &= c'c + c'd' + dc + dd' \quad \text{Distributividad} \\ &= c'd' + cd \quad \text{por P7 y P3.} \end{aligned}$$

Resulta entonces:

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &= a + (a' b' c)(b' + c'd' + cd) \quad \text{Por P2.} \\ f(a, b, c, d) &= a + a'b'cb' + a'b'cc'd' + a'b'ccd \quad \text{por Distributividad} \end{aligned}$$

Se tienen:

$$\begin{aligned} a'b'cb' &= a'b'b'c \quad \text{por conmutatividad} = a'b'c \quad \text{por idempotencia} \\ a'b'cc'd' &= a'b'0d' \quad \text{por complemento único} = 0 \quad \text{por T9. Luego se aplica P3.} \\ a'b'ccd &= a'b'cd \quad \text{por idempotencia.} \end{aligned}$$

Resulta:

$$f(a, b, c, d) = a + a'b'c + a'b'cd = a + a'b'c(1 + d) \text{ por distributividad}$$

$$= a + a'b'c \text{ por T9 y P3.}$$

$$f(a, b, c, d) = a + a'(b'c) = a + b'c \text{ por T11.}$$

Finalmente: $f(a, b, c, d) = a + b'c$ con tres literales.

Otra solución:

$$f(a, b, c, d) = a + a'b'c b' + a'b'c(c \oplus d)' = a + a'b'c(1 + (c \oplus d)') = a + a'b'c$$

$$f(a, b, c, d) = a + b'c$$

Problema A1.3

Sea un circuito eléctrico, que se muestra en la Figura PA1.1, en el cual una fuente de tensión V está conectada a través de los interruptores C y $C2$ a una ampolleta L :

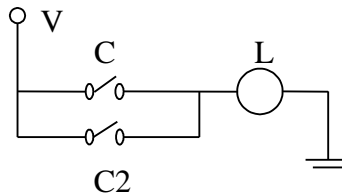


Figura PA1.1. Ampolleta e interruptores.

Sea C la proposición: El interruptor C está cerrado.

Sea L la proposición o declaración: La ampolleta L está encendida.

Ambas proposiciones simples pueden ser verdaderas o falsas, dependiendo de cómo se encuentren en la realidad.

La siguiente es una proposición condicional:

Si el interruptor C está cerrado, **entonces** la ampolleta L estará encendida.

Se denomina proposición condicional ya que ésta afirma que un hecho es cierto bajo la condición de que otro hecho sea verdadero.

La proposición luego del **si**, se denomina antecedente, la ubicada luego del **entonces** se llama consecuencia.

La declaración condicional afirma que la consecuencia es verdadera bajo la condición de que el antecedente sea verdadero; o bien que si el antecedente es cierto entonces la consecuencia también debe ser verdadera.

La declaración condicional no afirma que la consecuencia sea necesariamente cierta.

A esta relación se la denomina implicación material, y se la simboliza, con $p \Rightarrow q$ el antecedente y q la consecuencia, según: $p \Rightarrow q$, y se lee como “ p implica q ”. La flecha indica que la verdad de p es transferida a q .

La premisa $C \Rightarrow L$ puede ser verdadera o falsa, dependiendo de los valores que tomen C y L .

C	L	$C \Rightarrow L$	
1	1	1	Si el interruptor C está cerrado debe ser cierto que la ampolla L está encendida.
0	0	1	Si la ampolla L está apagada debe ser cierto que el interruptor C está abierto.
0	1	1	Si el interruptor C está abierto, y la ampolla L está encendida debe ser por causa de otro interruptor (C_2 cerrado en el diagrama anterior).
1	0	0	Cuando el interruptor C está cerrado, y la ampolla L está apagada la premisa es falsa.

No se puede establecer una implicación verdadera con un antecedente verdadero y una conclusión falsa.

Como se puede plantear una implicación material entre dos proposiciones simples cualesquiera, la implicación por sí misma puede no reflejar la realidad.

“Si los leones son carnívoros, entonces las uvas contienen azúcar”.

Problema A1.4

Todos mis hijos son delgados.

No hay niño mío sano que no haga ningún ejercicio.

Todos los glotones, que son hijos míos, son gordos.

Ninguna hija mía hace algún ejercicio.

Solución.

El universo es el conjunto de todos mis hijos.

Elegir variables y traducir la premisa en términos de las variables:

Variables:

Gordo: Este niño mío es gordo.

Hombre: Este niño mío es un muchacho.

Glotón: Este niño mío es un glotón.

Sano: Este niño mío es sano.

No_ejercicio: Este niño mío no hace ningún ejercicio.

En esta algebra, las variables sólo toman dos valores.

Se tiene entonces que:

(Hombre)' significa: Este niño mío es una niña.

Hombre=1 es muchacho, Hombre=0 es niña.

(No_ejercicio)' significa: Este niño mío hace algún ejercicio.

Las sentencias de la premisa, pueden plantearse:

Mis hijos hombres son “no gordos”.

Mis hijos que no hacen ningún ejercicio son “no sanos”.

Mis hijos glotones son gordos.

Los que hacen algún ejercicio no son niñas.

Empleando las variables anteriores:

hombre \Rightarrow (gordo)'

no_ejercicio \Rightarrow (sano)'

glotón \Rightarrow gordo

(no_ejercicio)' \Rightarrow hombre

Una cadena que emplea todas las proposiciones es:

glotón \Rightarrow gordo \Rightarrow (hombre)' \Rightarrow no_ejercicio \Rightarrow (sano)'

Que permite concluir: Todos (mis hijos) glotones no son saludables.

Problema A1.5

Deducir la validez del argumento:

$(a+b) \Rightarrow (c \cdot d)$, $b, a \Rightarrow d' \therefore a'$

- | | | |
|-----|---------------------------------|--------------------|
| 1. | $(a+b) \Rightarrow (c \cdot d)$ | P |
| 2. | b | P |
| 3. | $a \Rightarrow d'$ | P $\therefore a'$ |
| 4. | $b+a$ | 2 Adición |
| 5. | $a+b$ | 4 Conmutación |
| 6. | $c \cdot d$ | 1, 5 Modus Ponens |
| 7. | $d \cdot c$ | 6 Conmutación |
| 8. | d | 7 Simplificación |
| 9. | $(d')'$ | 8 Doble negación |
| 10. | a' | 3, 9 Modus Tollens |

Problema A1.6

Validar: $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$, $d \Rightarrow (ba) \therefore d'c$

- | | | |
|----|-----------------------------------|---------------------------|
| 1. | $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$ | P |
| 2. | $d \Rightarrow (b \cdot a)$ | P $\therefore d' + c$ |
| 3. | $(a \cdot b) \Rightarrow c$ | 1 Exportación |
| 4. | $(b \cdot a) \Rightarrow c$ | 3 Conmutación |
| 5. | $d \Rightarrow c$ | 2, 4 Silogismo Hipotético |
| 6. | $d' + c$ | 5 Implicación material |

Problema A1.7

Validar: $(a \cdot b) + (c \Rightarrow d)$, $(a \cdot b)'$, d' $\therefore c'$

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------|
| 1. $(a \cdot b) + (c \Rightarrow d)$ | P |
| 2. $(a \cdot b)'$ | P |
| 3. d' | P $\therefore c'$ |
| 4. $c \Rightarrow d$ | 1, 2, Silogismo disjuntivo |
| 5. c' | 3, 4, Modus Tollens |

Ejercicios propuestos.**Ejercicio A1.1**

a) Minimizar las siguientes funciones, aplicando postulados y teoremas:

$$f_1 = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{C} + A \cdot C + \bar{A} \cdot D + \bar{B} \cdot E$$

$$f_2 = A + \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{B} \cdot (C + D \cdot E)$$

$$f_3 = AB + \bar{A} \cdot \bar{C} + AC + \bar{A}C + \bar{B}C$$

b) Minimizar. Complementar y minimizar. Obtener la función dual y minimizar:

$$f_4 = A + \bar{B} \cdot (C + D \cdot (E + \bar{F} \cdot \bar{G}))$$

$$f_5 = A + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{B} \cdot D + \bar{C} \cdot D$$

c) Demostrar identidad

$$(A + B) \cdot (\bar{A} + C) \cdot (B + C + D) = (A + B) \cdot (\bar{A} + C)$$

$$A + B + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{C} \cdot D = A + B + C + D$$

$$A \cdot B + B \cdot C + A \cdot C = (A + B) \cdot (B + C) \cdot (A + C)$$

d) Demostrar

$$1. \text{ Si } A=B \text{ entonces } A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B = 0$$

$$2. A \cdot B + \bar{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \bar{A} \cdot C$$

$$3. A + B = (A \oplus B) \oplus (A \cdot B)$$

e) Minimizar usando teoremas:

$$1. a'b'c'd' + ab'c'd' + a'b'cd' + ab'cd'$$

$$2. a'bc + abc' + bc'd + bc$$

Ejercicio A1.2

Demostrar los siguientes teoremas.

1) $p \Rightarrow 1 = 1$ cualquier cosa prueba que la verdad es verdad.

2) $1 \Rightarrow p = p$

3) $p \Rightarrow 0 = p'$

- 4) $0 \Rightarrow p = 1$
- 5) $p \Rightarrow p = 1$
- 6) $p' \Rightarrow p = p'$
- 7) $p \Rightarrow (p' \Rightarrow p) = 1$
- 8) $(p' \Rightarrow p) \Rightarrow p = 1$
- 9) $(p \Rightarrow p') \Rightarrow p' = 1$
- 10) $(p \Rightarrow p') = p$
- 11) $p' \Rightarrow (p \Rightarrow p') = 1$
- 12) $p \Rightarrow q' = q \Rightarrow p'$
- 13) $p \Rightarrow q$ no es igual a $q \Rightarrow p$
- 14) $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ Dos proposiciones son equivalentes si una prueba la otra, y si la otra prueba a la primera.
- 15) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) = q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Ejercicio A1.3

Un pudín de ciruelas, que no es realmente sólido, es simplemente porridge.
 Cada pudín de ciruelas, servido en mi mesa, se ha hervido en un paño.
 Un pudín de ciruelas que es simplemente porridge es indistinguible de la sopa.
 No hay pudines de ciruelas realmente sólidos, excepto los que se sirven en mi mesa.

Verificar si es o no verdadera la sentencia:

Ningún pudín de ciruela, que no ha sido hervido en un paño, puede ser distinguido de la sopa.

Ejercicio A1.4

Validar los argumentos:

- a) $B \Rightarrow (C \Rightarrow D), A \Rightarrow B, A, C \therefore D$.
- b) $N' \Rightarrow ((B \Rightarrow D) \Rightarrow (N + E')), (B \Rightarrow E) \Rightarrow N', B \Rightarrow D, D \Rightarrow E / \therefore D'$
- c) $(L + T) \Rightarrow (B \cdot G), L \cdot (K \Leftrightarrow R) / \therefore L \cdot B$
- d) $(J + K)', B \Rightarrow K, S \Rightarrow B / \therefore S' \cdot J'$
- e) $(T \cdot K) + (C \cdot E), K \Rightarrow E', E \Rightarrow C' / \therefore T \cdot K$

Ejercicio A1.5

- a) Deducir que los silogismos: AEE-4, IAI-4 y EIO-4 son válidos.
- b) Demostrar que los silogismos: AEE-1 y AEE-3 son inválidos.

Referencias.

<http://www.lewiscarroll.org/carroll.html>.
<http://philosophy.lander.edu/logic/index.html>

Índice general

APÉNDICE 1	1
ALGEBRA DE BOOLE	1
A1.1 INTRODUCCIÓN	1
A1.2. POSTULADOS	1
P.1 Definición:	1
P.2 Igualdad.....	1
P.3 Elementos únicos.....	1
P.4 Conmutatividad.....	2
P.5 Asociatividad.....	2
P.6 Distributividad.....	2
P.7 Complementariedad.....	2
A1.3 SOBRE LAS DEMOSTRACIONES DE TEOREMAS.....	3
Ejemplo A1.1.....	3
Ejemplo A1.2.....	3
Ejemplo A1.3.....	4
A1.4. DUALIDAD	4
A1.5. TEOREMAS.....	5
T.8 Idempotencia.....	5
T.9 Unión con el Universo e Intersección con el vacío.....	6
T.10 Absorción.....	6
T.11 Absorción del complemento.....	6
T.12 De Morgan.....	6
Inducción completa o perfecta.....	7
T.13 Consenso.....	8
T.14 Fusión.....	8
T.15 Factorización	8
A1.6. DIAGRAMAS DE VENN	9
Ejemplo A1.4. Visualización de teoremas mediante diagramas de Venn.....	10
A1.7. IMPLICACIÓN MATERIAL O CONDICIONAL.....	10
Ejemplo A1.4a.....	11
A1.7.1. Formas de enunciar implicaciones.....	13
A1.7.2. Teoremas relativos a implicaciones.....	13
A1.7.3. Condiciones suficientes y necesarias.....	14
A1.7.4. Razonamiento Deductivo.....	14
A1.8. DEDUCCIÓN NATURAL. FORMAS DE RAZONAMIENTO.....	14
1.8.1. Reglas de inferencia.....	14
Modus ponens.....	14
Modus tollens.....	15
Transitividad. Silogismo hipotético.....	15
Inferencia de la alternativa. Silogismo disyuntivo.....	15
Simplificación.....	15
Conjunción.....	15
Adición.....	15
Dilema constructivo.....	15

1.8.2. Reglas de reemplazo.....	16
Ejemplo A1.5.....	16
Ejemplo A1.6.....	17
Ejemplo A1.7.....	17
A1.9. LISTAS DE IMPLICACIONES. SORITE.....	18
Ejemplo A1.8.....	18
A1.10 SILOGISMO.....	19
Términos mayor y menor.....	19
Formas categóricas.....	19
Ejemplo A1.9.....	20
Ejemplo A1.10.....	20
Disposición o tipos de silogismos.....	21
Silogismo AAA-1.....	22
Silogismo EAE-1.....	22
Silogismo AII-3.....	22
Silogismo AII-2.....	22
Silogismo EAO-4.....	24
A1.11 FALACIAS.....	25
Ejemplo A1.11.....	25
PROBLEMAS RESUELTOS.....	26
Problema A1.1.....	26
Problema A1.2.....	26
Problema A1.3.....	27
Problema A1.4.....	28
Problema A1.5.....	29
Problema A1.6.....	29
Problema A1.7.....	30
EJERCICIOS PROPUESTOS.....	30
Ejercicio A1.1.....	30
Ejercicio A1.2.....	30
Ejercicio A1.3.....	31
Ejercicio A1.4.....	31
Ejercicio A1.5.....	31
REFERENCIAS.....	31
ÍNDICE GENERAL.....	32
ÍNDICE DE FIGURAS.....	34

Índice de Figuras

Figura A1.1. Unión e Intersección.....	9
Figura A1.2. Conjunto Universal y Vacío.....	9
Figura A1.3. Consenso entre partes.	10
Figura A1.4. Término de consenso	10
Figura A1.5. Definición de Implicación	11
Figura A1.6. Implicación Material	11
Figura A1.7. Implicación conjugada.....	11
Figura A1.7aa. Implicante.	12
Figura A1.7a. Implicación.....	12
Figura A1.7b. Implicación.	13
Figura A1.8. Formas universales.	20
Figura A1.9. Ningún z es x.	20
Figura A1.10. Algún z es y.	21
Figura A1.11. Silogismo AAA.	21
Figura A1.12. Posición del término medio.....	21
Figura A1.13. Silogismo AAA-1	22
Figura A1.14. Silogismo EAE-1	22
Figura A1.15. Silogismo AII-3.....	22
Figura A1.16. Silogismo AII-2.....	22
Figura A1.17. Diagramas de Venn de distribución de premisas categóricas.	23
Figura A1.18. Ferison	23
Figura A1.19. EOO-2.....	23
Figura A1.20. Silogismo Condicional EAO-4.....	24
Figura PA1.1. Ampolleta e interruptores.	27