# Álgebra de Boole

Tema 5

### ¿Qué sabrás al final del capítulo?

- Leyes y propiedades del Algebra de Boole
- Simplificar funciones utilizando el Algebra de Boole
- Analizar circuitos mediante Algebra de Boole y simplificarlos
- Pasar de una tabla de verdad a Suma de Productos y Producto de Sumas
- Utilizar Mapas de Karnaugh para simplificar funciones lógicas

### Algebra de Boole binaria

En 1860 George Boole desarrolló un Algebra en la que los valores de A y B sólo podían ser "verdadero" o "falso" (1 ó 0). Se llama *Algebra de Boole* y se utiliza en Electrónica Digital

Elementos: {0,1}

**Operadores**:

Suma Booleana: es la función lógica OR

$$X=A+B$$

Producto Booleano: es la función lógica AND

$$X = AB$$

<u>Axiomas</u>

#### Axioma: Propiedad Conmutativa

$$A+B=B+A$$

El orden en la OR no importa

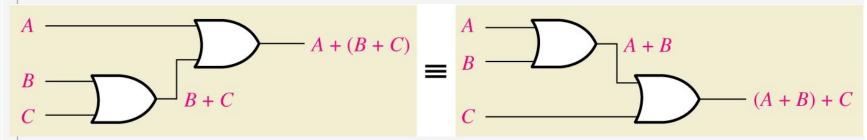
$$AB = BA$$

El orden en la AND no importa

#### Axioma: Propiedad asociativa

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Agrupar variables en la OR no importa



$$A(BC) = (AB)C$$

Agrupar variables en la AND no importa

$$\begin{array}{c}
A \\
B \\
C
\end{array}$$

$$= B \\
C$$

$$A(BC) \\
B \\
C$$

$$C$$

$$AB \\
C$$

$$C$$

$$C$$

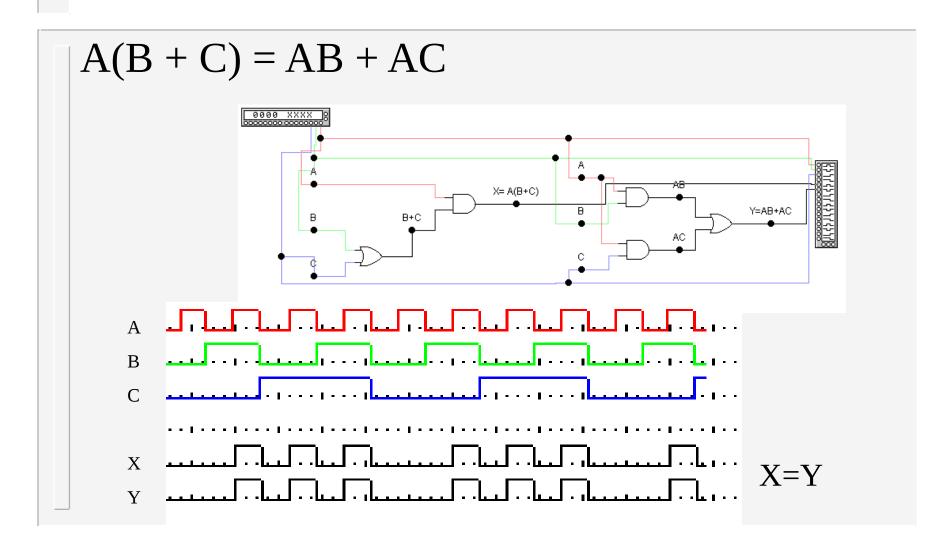
$$C$$

$$AB \\
C$$

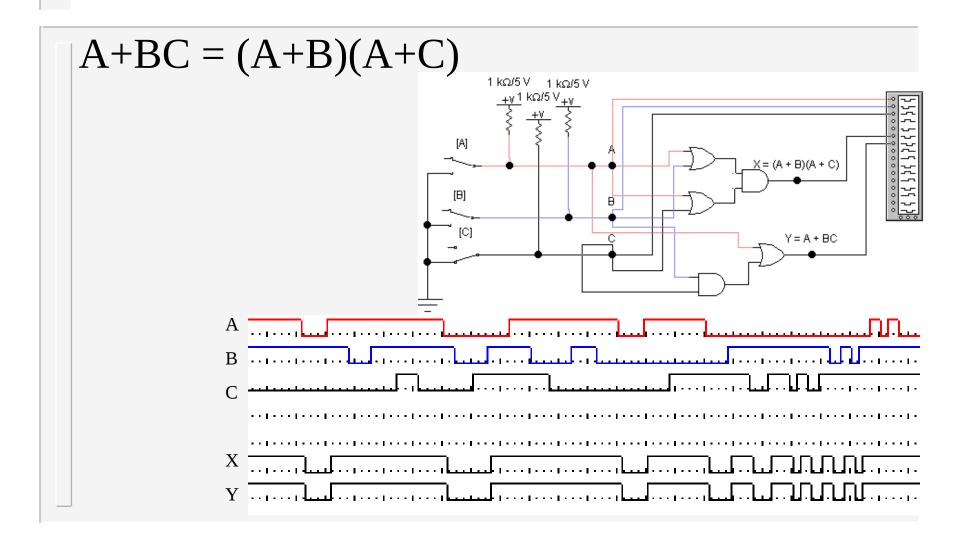
$$C$$

$$C$$

#### Axioma: Propiedad distributiva I



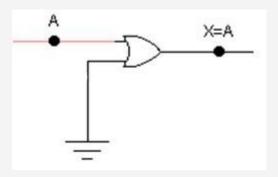
#### Axioma: Propiedad distributiva II

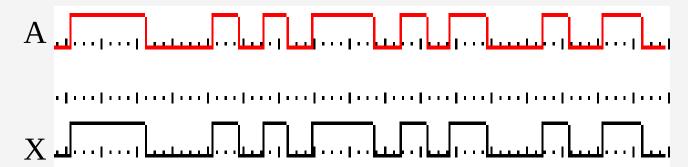


#### Axioma: Elemento identidad (0 para +)

#### A+0=A

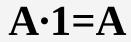
Hacer una operación OR con 0 no cambia nada.



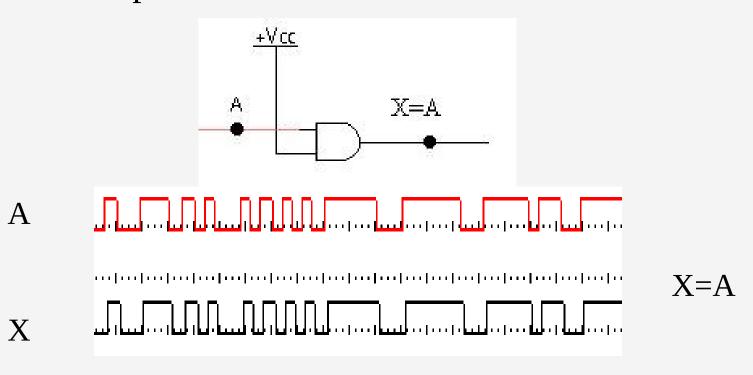


X = A

#### **Axioma:** Elemento identidad (1 para •)



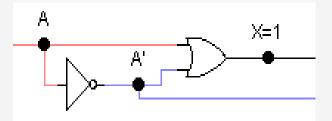
Hacer una operación AND con 1 no cambia nada



#### Axioma: Elemento complemento

#### A+A=1

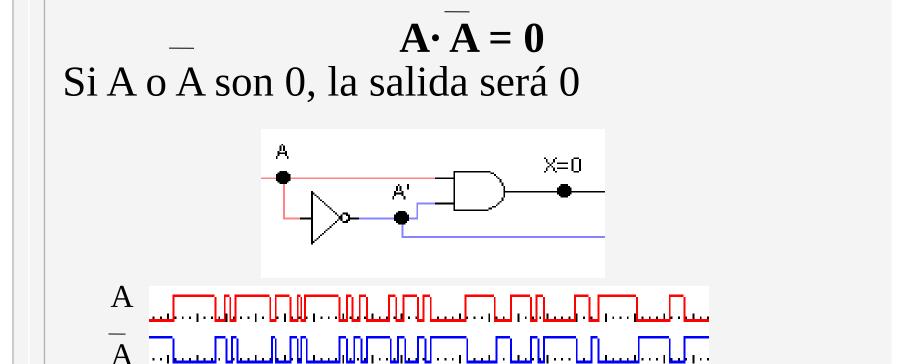
Si A o A son 1, la salida será 1





$$\mathbf{X}$$

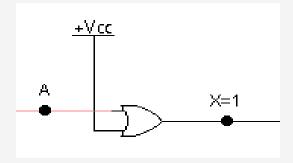
#### Axioma: Elemento complemento

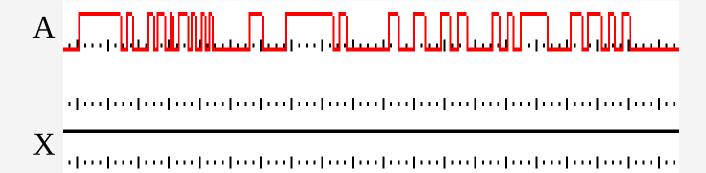


X=0

#### Teorema: A+1=1 (T. Complementación)

#### Hacer una operación OR con 1 da siempre 1.

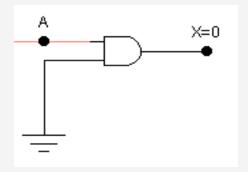




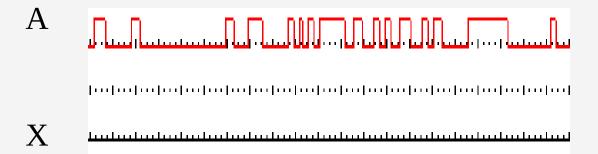
X=1

#### Teorema: $A \cdot 0 = 0$ (T. Complementación)

#### Hacer una operación AND con 0 siempre da 0



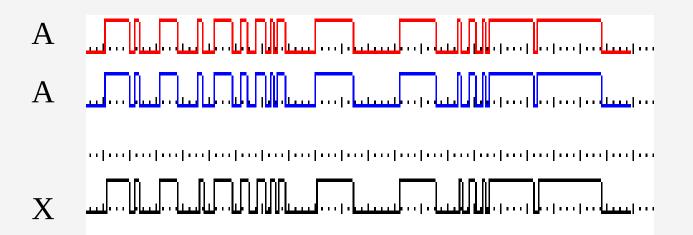
X=0



#### Teorema: A+A=A (T. Idempotencia)

Hacer una operación OR consigo mismo da el mismo resultado

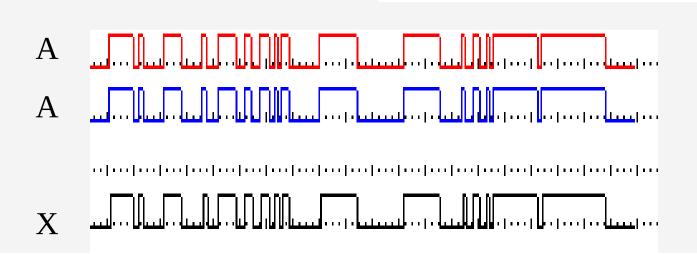
A = A



#### Teorema: $A \cdot A = A$ (T. Idempotencia)

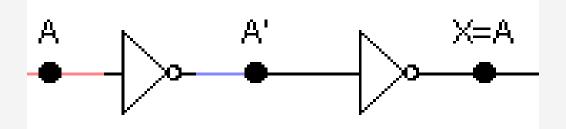
# Hacer una operación AND consigo mismo da el mismo resultado

A = A



## Teorema: $\overline{A} = A_{(T. Involución)}$

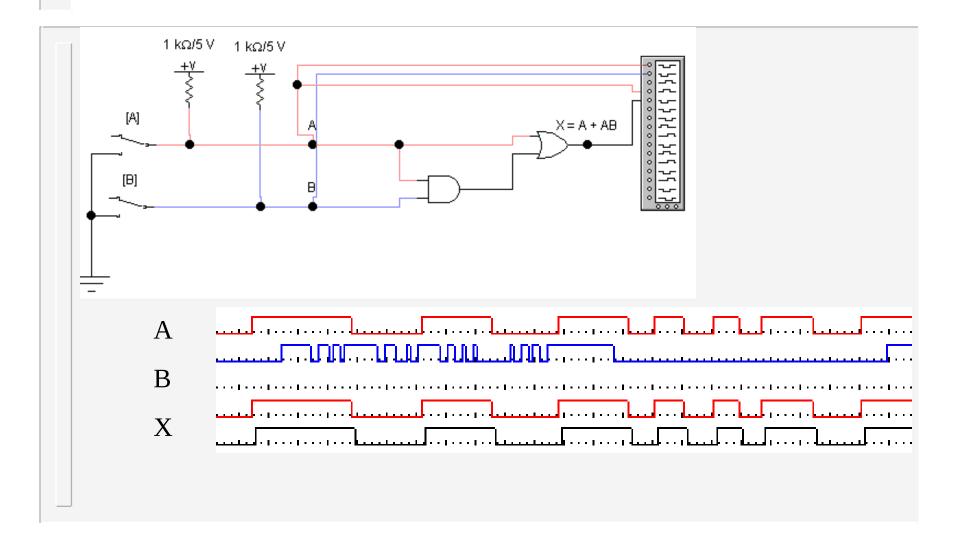
Si negamos algo dos veces volvemos al principio



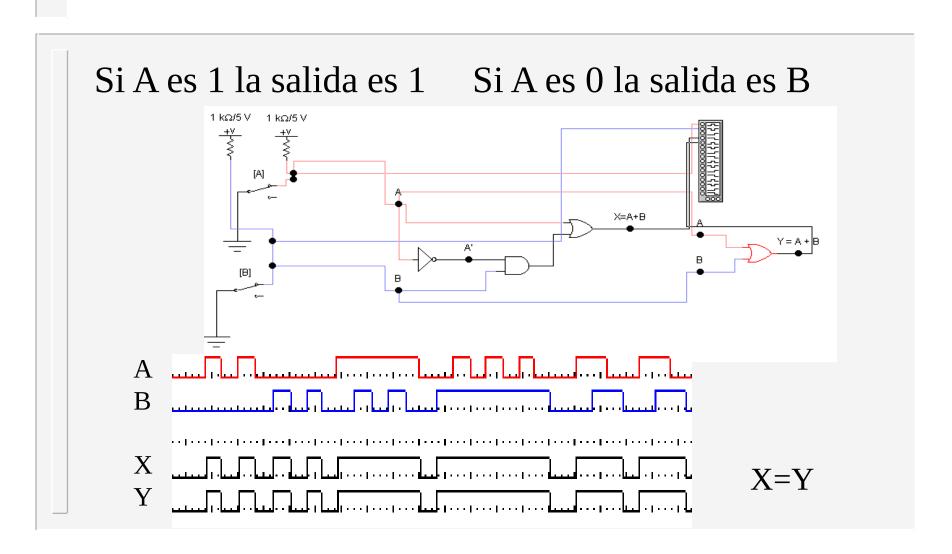


X=A

### Teorema: A + AB = A (T. Absorción I)



#### Teorema A + AB = A + B (T. Absorción II)



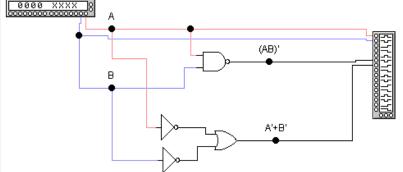
# Leyes de De Morgan (2 variables)

De Morgan ayuda a simplificar circuitos digitales usando NORs y NANDs.

$$\overline{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$$

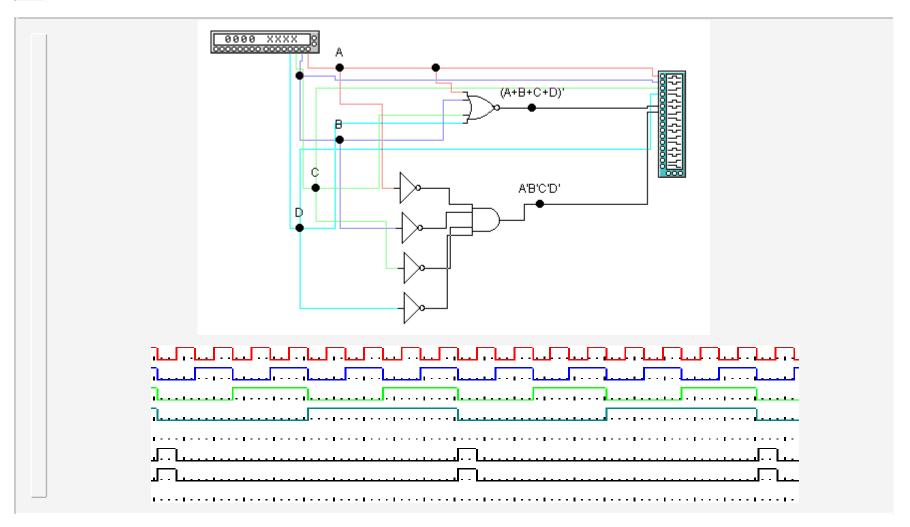
Igual para n variables

$$A + B = A \cdot B$$



#### Leyes de De Morgan (más de 2 variables)

$$A + B + C + D = A \cdot B \cdot C \cdot D$$



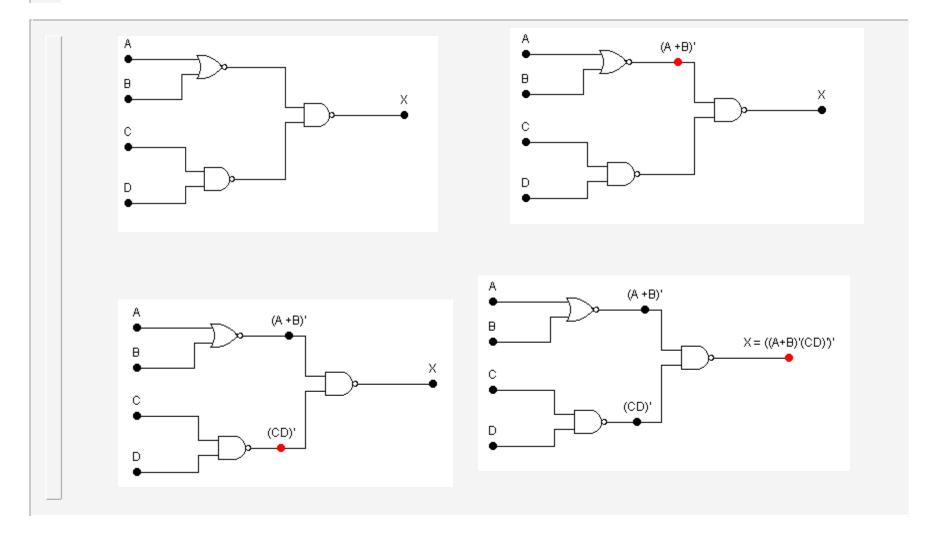
# Análisis Booleano de Funciones Lógicas

El propósito de este apartado es obtener expresiones booleanas simplificadas a partir de un circuito

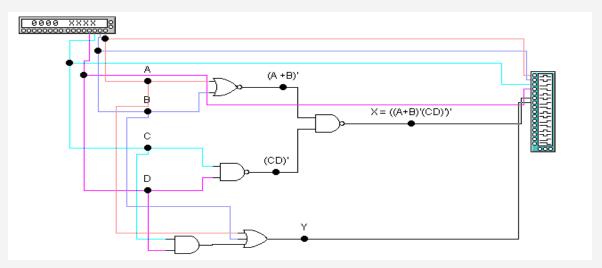
Se examina puerta a puerta a partir de sus entradas

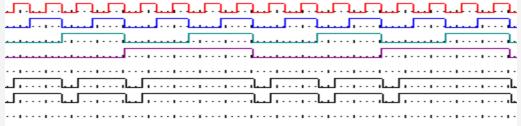
Se simplifica usando las leyes y propiedades booleanas.

# Cálculo de la expresión algebraica de salida (ejemplo 1)



$$(A + B) (CD) = (A + B) + (CD) = A + B + CD$$





X e Y son iguales

# Cálculo de la expresión algebraica de salida (ejemplo 2)

$$X = \overline{(A+B)} C + \overline{CD} + \overline{B}$$

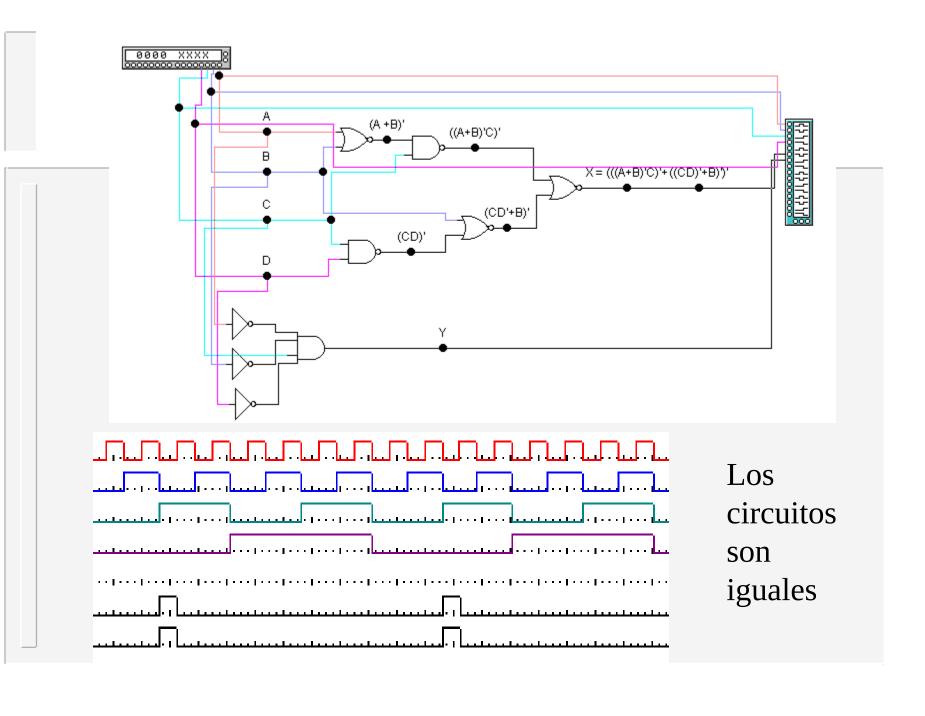
$$= \overline{(A+B)} C \cdot \overline{CD} + \overline{B}$$

$$= \overline{(A+B)} C \cdot (\overline{CD} + \overline{B})$$

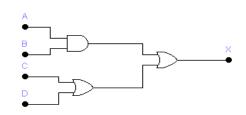
$$= \overline{A} B C \cdot (\overline{C} + \overline{D} + \overline{B})$$

$$= \overline{A} B C \overline{C} + \overline{A} B C \overline{D} + \overline{A} B C B$$

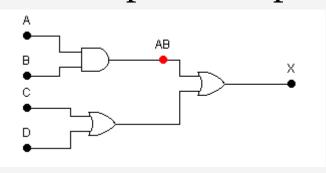
$$= \overline{A} B C \overline{D}$$

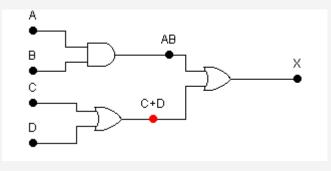


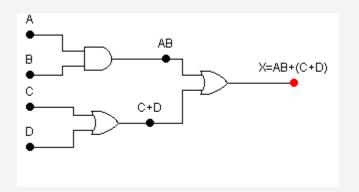
#### Ejemplo 3



#### Puerta a puerta a partir de sus entradas

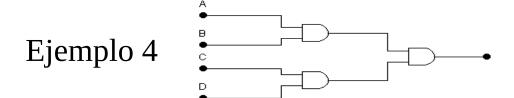


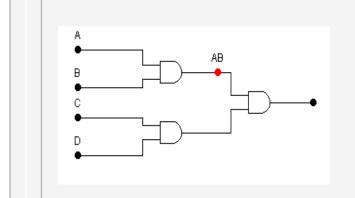


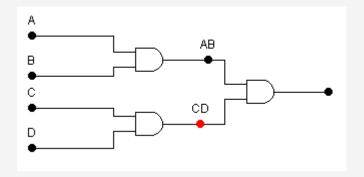


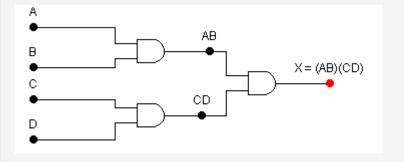
$$X = AB + (C + D)$$

$$X = AB + C + D$$





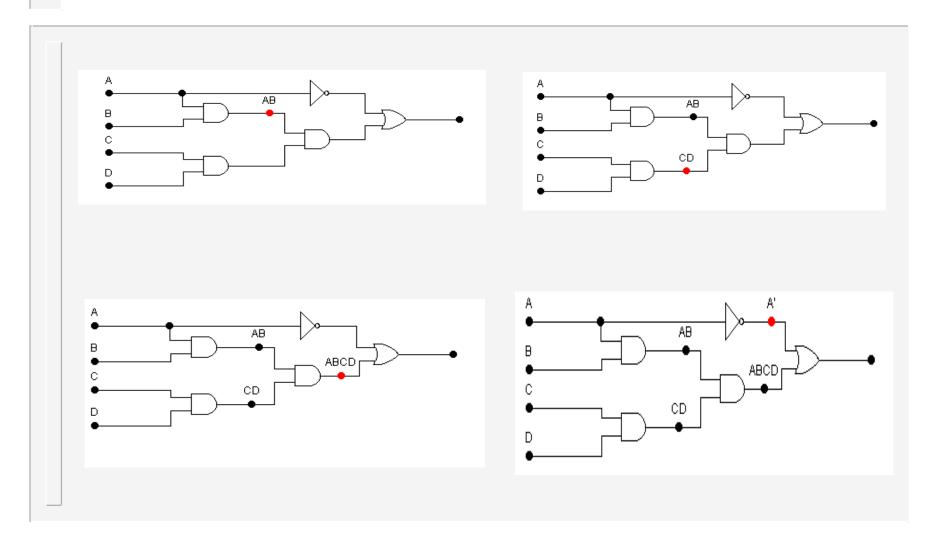


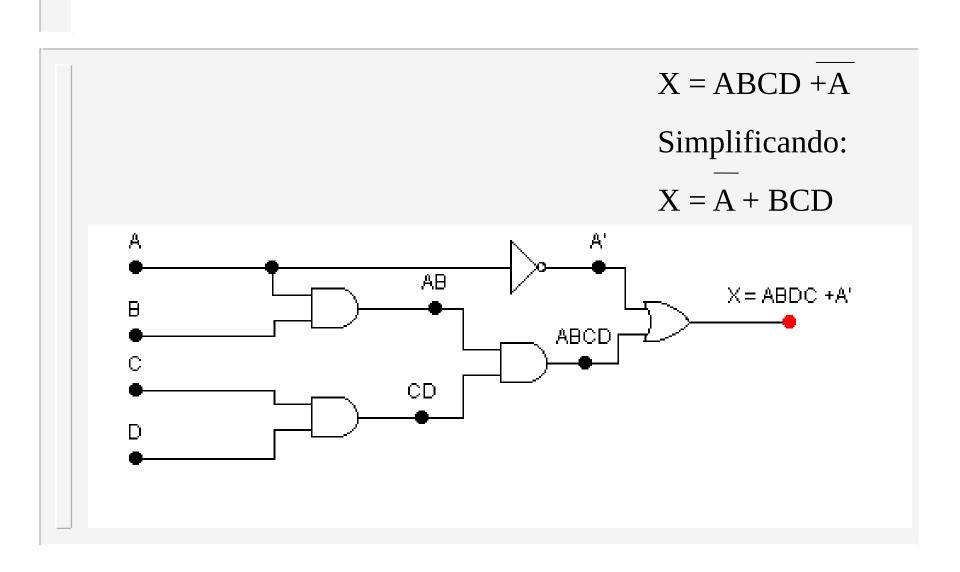


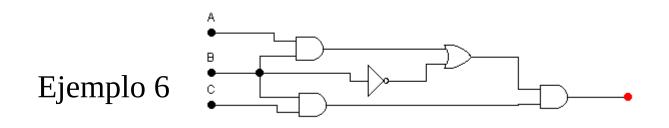
$$X = (AB)(CD)$$

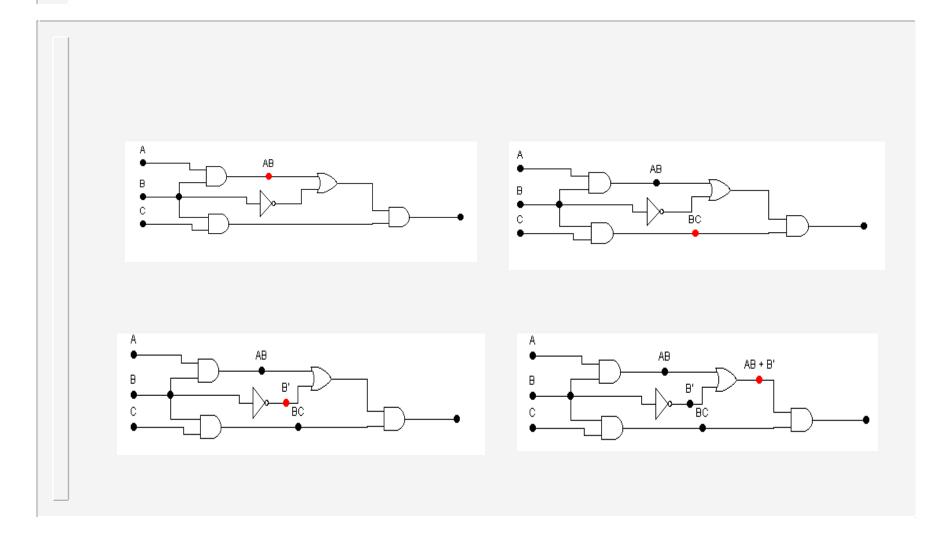
$$X = ABCD$$

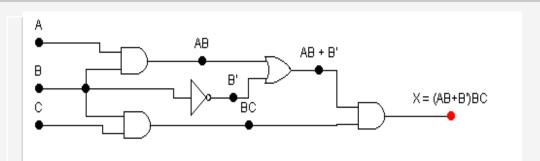
Ejemplo 5











En la siguiente transparencia se ve cómo las dos cosas son lo mismo

$$X = (AB + \overline{B})BC$$

Usando la propiedad distributiva:

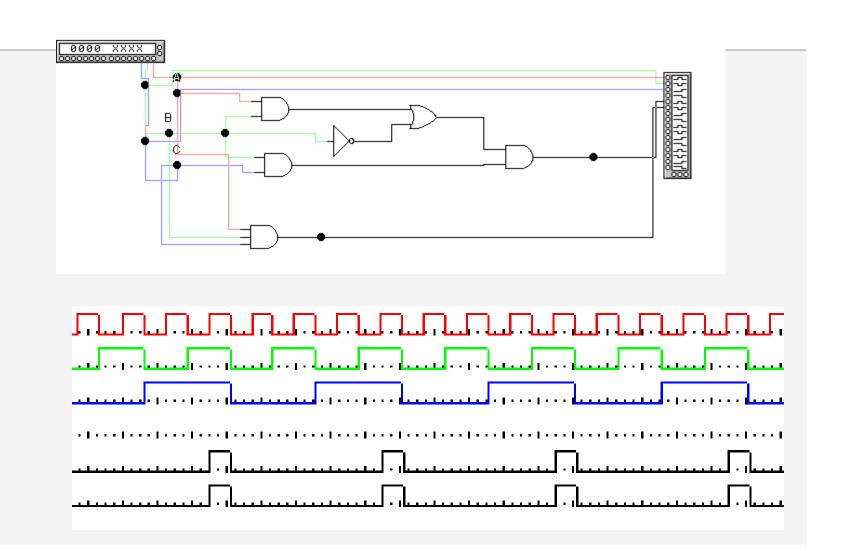
$$X = ABBC + \overline{B}BC$$

$$X = ABC + \overline{B}BC$$

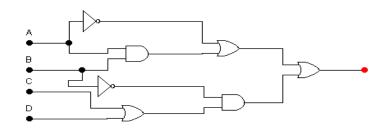
$$X = ABC + 0 \cdot C$$

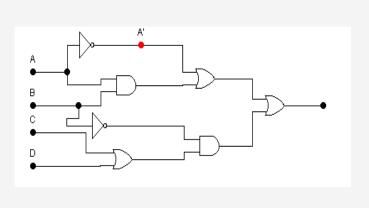
$$X = ABC + 0$$

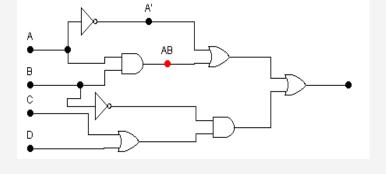
$$X = ABC$$

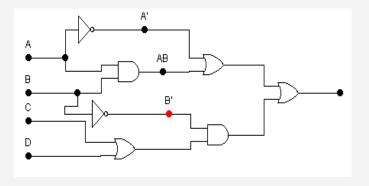


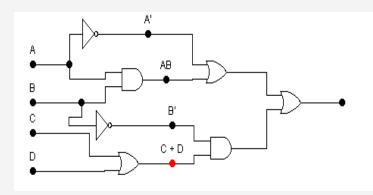
Ejemplo 7

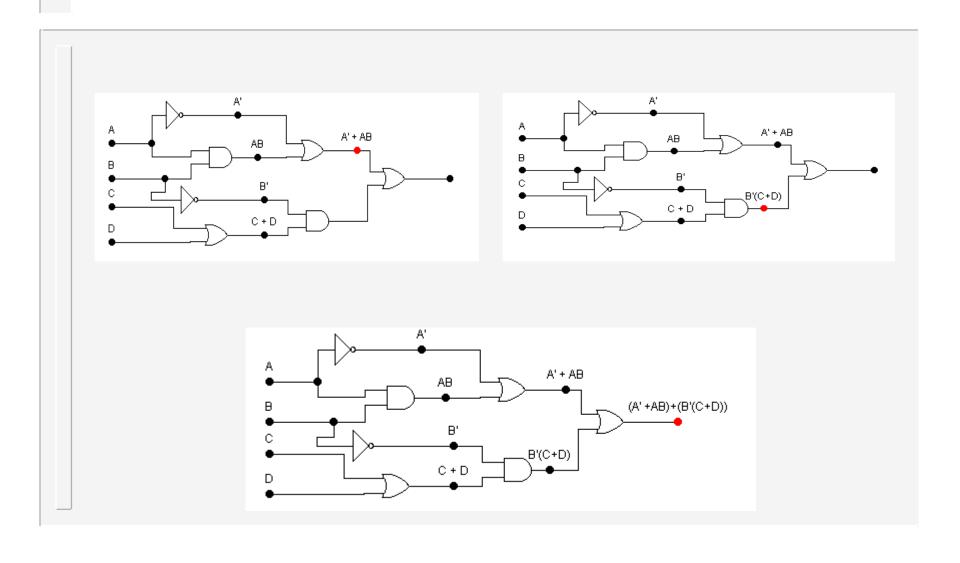












$$X = (\overline{A} + AB) + (\overline{B}(C+D))$$

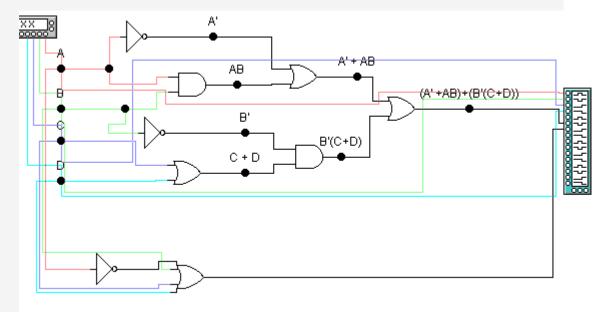
$$X = (\overline{A} + B) + (\overline{B}(C + D))$$

$$X = (\overline{A} + B) + (\overline{B}C + \overline{B}D)$$

$$X = \overline{A} + B + \overline{B}C + \overline{B}D$$

$$X = A + B + C + BD$$

$$X = A + B + C + D$$



# Expresiones booleanas desde tablas de verdad

Suma de productos

$$Y = A \cdot B \cdot C + B \cdot C \cdot D + A \cdot C \cdot D$$
 o directamente

Producto de sumas

$$Y=(A+B+C)\cdot(D+C)\cdot(E+F)$$

# Sumas de Productos (SP)

Α	В	С	D	F	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	0	
0	1	1	0	0	
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	
1	0	1	0	0	
1	0	1 1		1	
1	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	
1	1	1	0	1	
1	1	1	1	1	

Sea una función F(ABCD) que sólo es 1 para los casos: 0011, 1011, 1110, 1111

Cuando ABCD=00<u>11,</u> únicamente la expresión producto ABCD es 1.

Cuando ABCD=1011, únicamente la expresión producto ABCD es 1

...y así sucesivamente... resultando que



 $F = \overline{ABCD} + A\overline{BCD} + ABC\overline{D} + ABC\overline{D} \Rightarrow F \text{ es suma de productos}$ 

#### B C D F 0 1 0 1 0 1 0 0 1

### Productos de Sumas (PS)

#### Sea una función F(ABCD) que

sólo es 0 para los casos: 0010, 0100, 0111, 1010, 1101

Cuando ABCD=0010, sólo la suma  $A+B+\overline{C}+D$  es 0.

Cuando ABCD=0100, sólo la suma A+B+C+D es 0, ...

...y así sucesivamente...

La función F es 0 (o bien F es 1)

cuando ABCD=0010

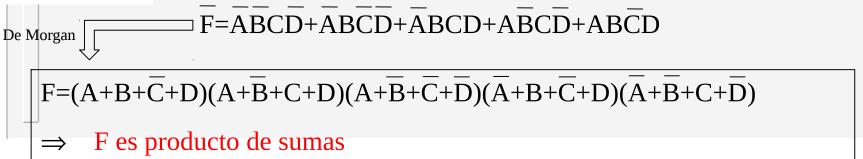
o cuando ABCD=0100

o\_cuando ABCD=0111

o cuando ABCD=1010

o cuando ABCD=1101

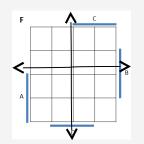
y en ningún otro caso más.

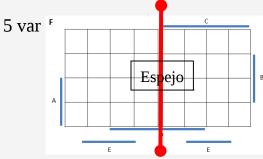


# Minimización de funciones lógicas

- Mapa de Karnaugh
  Se usa para minimizar el número de puertas requeridas en un circuito digital. Es adecuado en vez de usar leyes y propiedades cuando el circuito es grande y/o la función es de entre 3 a 6 variables
- <u>Un MK contiene</u> en la misma tabla de verdad de la función pero dispuesta en dos dimensiones. 4 var

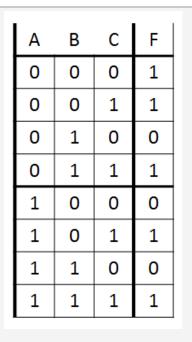
3 var

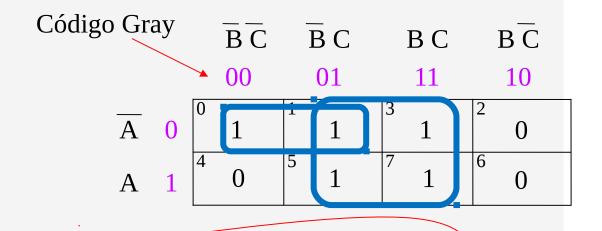




- <u>Celdas adyacentes</u>: En direcciones y, dependiendo del tamaño del MK, la adyacencia puede existir doblando el mapa sobre sí mismo o mediante reflexión en ejes verticales y horizontales
- Emplea un código Gray, que se caracteriza porque entre los códigos consecutivos de celdas adyacentes se diferencian en 1 bit.

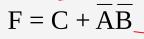
# Mapas de Karnaugh de 3 variables





0

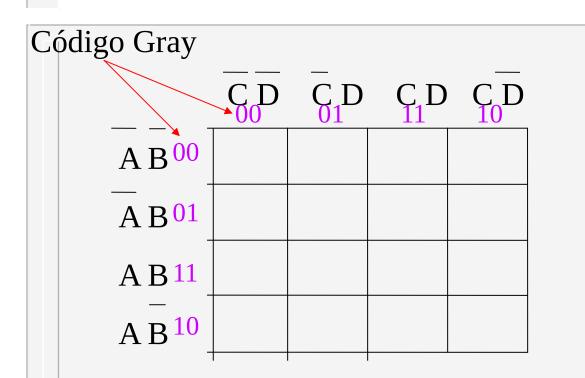
0

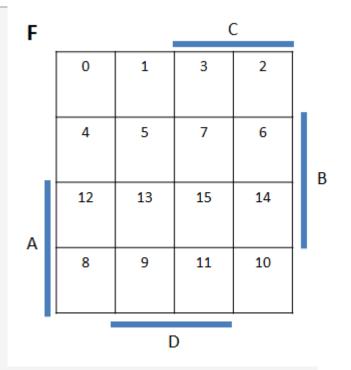




- Dos celdas adyacentes a 1 implican a 2 variables
- Cuatro celdas adyacentes a 1 implican a 1 variable
- Ocho celdas adyacentes a 1 constituyen función de valor 1

# Mapa de Karnaugh de 4 variables



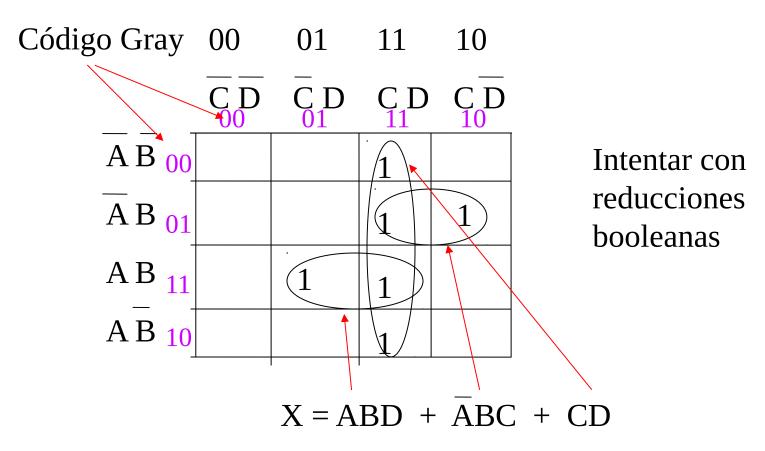


- •Una celda a 1 implica a 4 variables
- •Dos celdas adyacentes a 1 implican a 3 variables
- •Cuatro celdas adyacentes a 1 implican a 2 variables
- •Ocho celdas adyacentes a 1 implican a 1 variable
- •Dieciséis celdas adyacentes a 1 constituyen función de valor 1

#### Ejemplo 1.

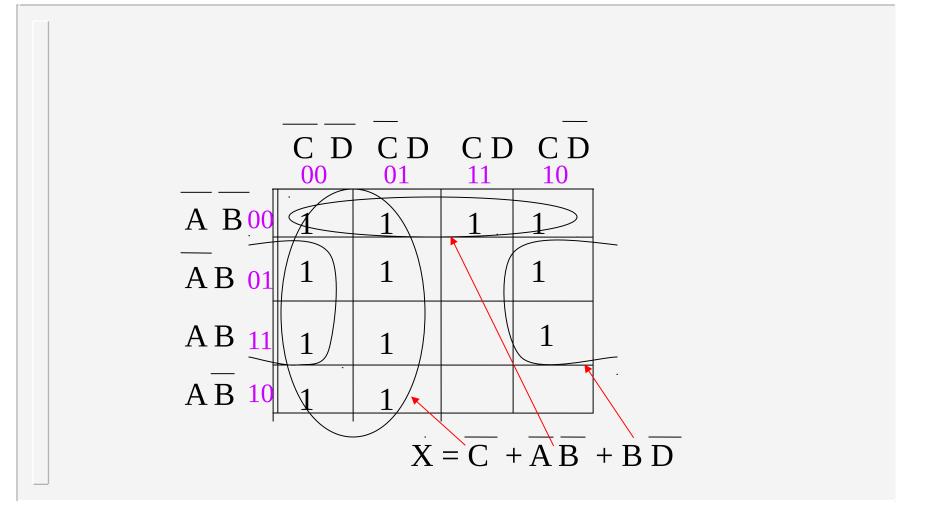
$$X = \overline{A} \overline{B} C D + \overline{A} B C D + \overline{A} \overline{B} C D + \overline{A} B C D + A B C D + A B C D$$

$$A B \overline{C} D + \overline{A} B C \overline{D}$$

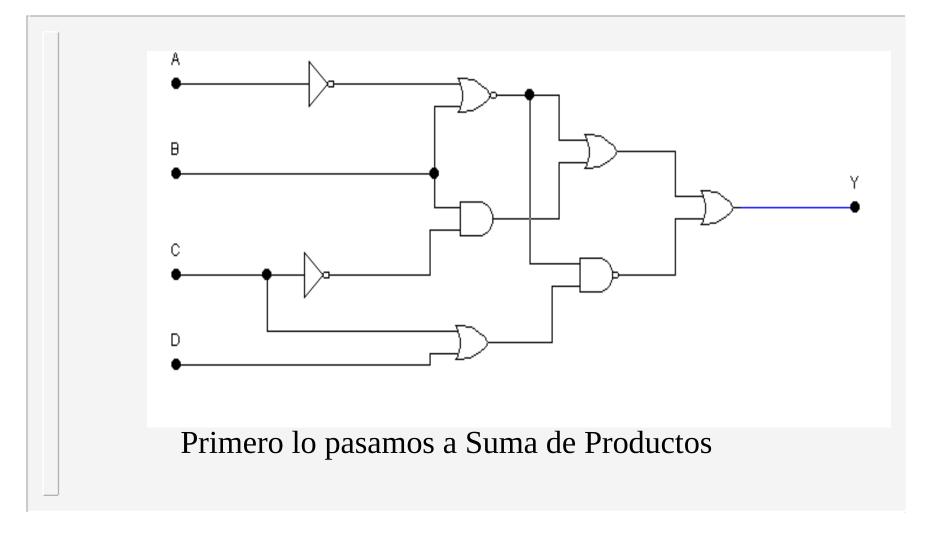


#### Ejemplo 2.

$$Z = B C D + B C D + C D + B C D + A B C$$



# **Ejemplo 3.** Dado un circuito encontrar otro más sencillo usando Mapas de Karnaugh



$$Y = \overline{\overline{A} + B} + B\overline{C} + (\overline{\overline{A} + B})(C + D)$$

$$Y = \overline{A} B + BC + \overline{A} B(C+D)$$

$$Y = AB + BC + ABC + ABD$$

$$Y = AB + BC + ABC ABD$$

$$Y = A B + B C + (A + B + C) (A + B + D)$$

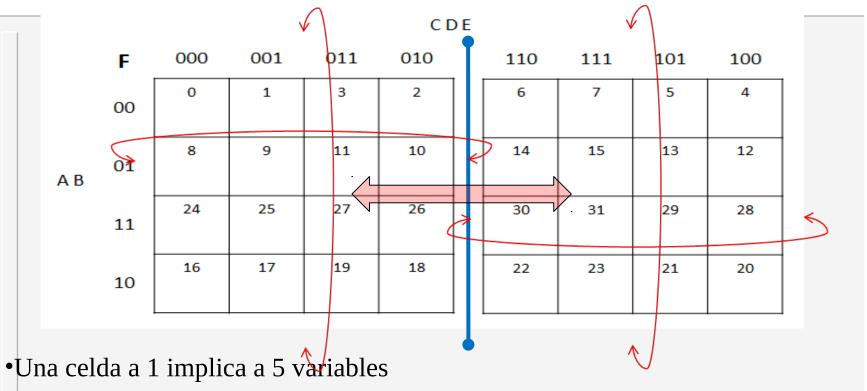
$$Y = A B + B C + A + AB + A D + AB + B + BD + AC + BC + CD$$

Sacando factor común A (en rojo) y B (en azul), queda

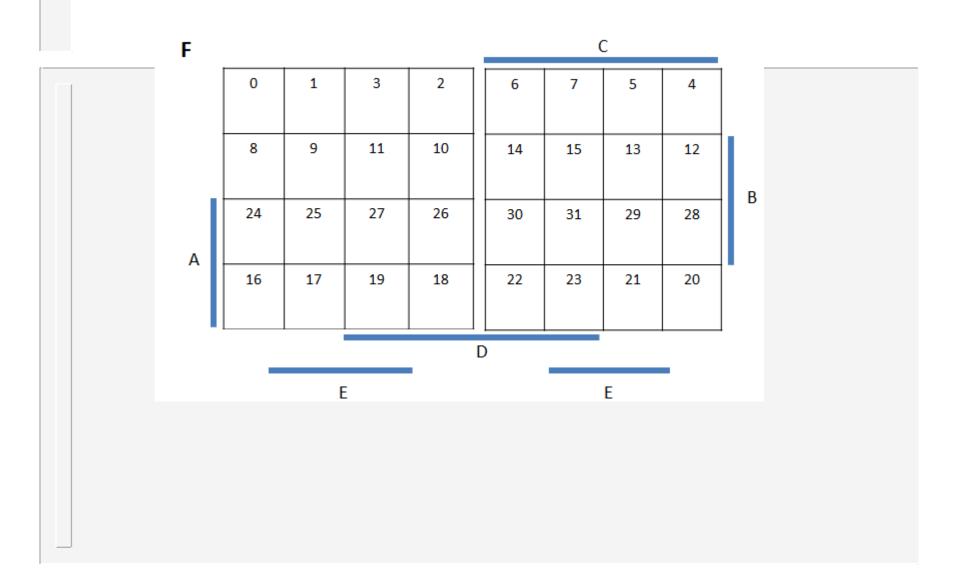
$$Y = A B + A (1+...) + B(1+...) + CD = A + B + B + C D = 1$$

	$C_{00}$	CD	CD	$C_{10}D$
$\overline{A} \overline{B}_{00}$	1	1	1	1
$\overline{A} B_{01}$	$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$	1	1	1
A B 11	1	1	1	1
$\overline{AB}_{10}$	1	1	1	1
l				
Z = 1				

# Mapa de Karnaugh de 5 variables



- •Dos celdas adyacentes a 1 implican a 4 variables
- •Cuatro celdas adyacentes a 1 implican a 3 variables
- •Ocho celdas adyacentes a 1 implican a 2 variables
- •Dieciséis celdas adyacentes a 1 implican a 1 variable



#### SIMPLIFICACIÓN POR KARNAUGH

- 1) Realizar agrupaciones de 1's, con sus adyacentes, lo mayor posibles, pero siempre en cantidades <u>potencias de 2</u>.
- 2) No dejar ningún 1 sin agrupar. Puede ocurrir que un 1 pertenezca a más de una agrupación. No se pueden coger agrupaciones totalmente contenidas en otras.
- 3) Por cada agrupación de 1's resulta un producto de variables. Cuanto más 1's se agrupen, más sencilla resultará la expresión de esa agrupación.
- 4) En cada agrupación, cada una de las variables puede aparecer en alguno de los siguientes casos:
  - a) Si siempre vale 1 ----> Se pone afirmada.
  - b) Si siempre vale 0 ----> Se pone negada.
- c) Si cambia de valor (50% de los casos un valor y el otro 50% otro valor) ----> No se pone.
- 5) La expresión de la función booleana será la suma lógica de todos los productos que hayan salido (expresión como Suma de Productos)

#### Diseñar un sistema de alarma

#### **Sensores disponibles**

- 1. V = Ventana (V=0 CERRADA, V=1 ABIERTA)
- 2. P = Puerta (P=0 CERRADA, P=1 ABIERTA)
- 3. C = Calefacción (C=0 APAGADA, C=1 ENCENDIDA)
- 4. A = Aire acondicionado (A=0 APAGADO, A=1 ENCENDIDO)
- 5. I = Alarma de proximidad de intruso (I=0 NO HAY INTRUSO,
  - I=1 SÍ HAY INTRUSO)

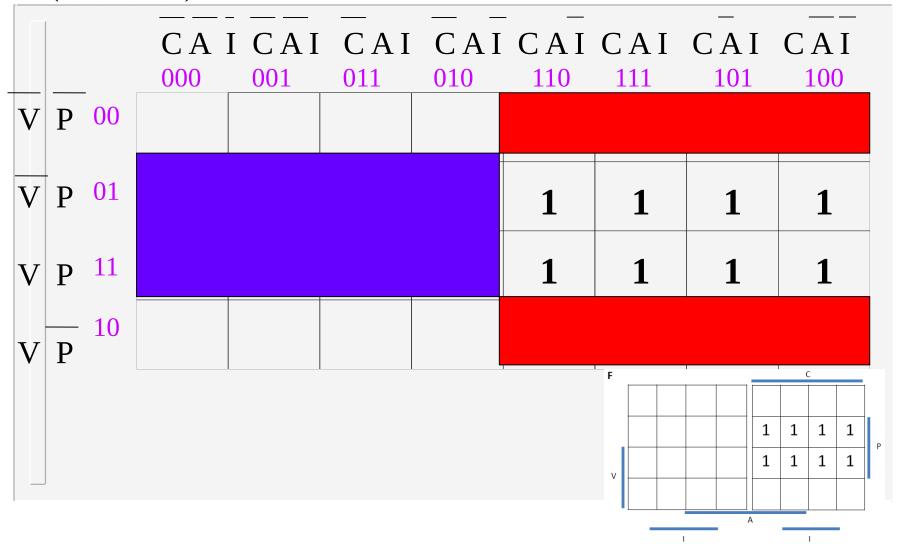
El sistema de alarma debe activarse cuando:

- 1. La puerta está abierta y la calefacción encendida (P=1, C=1)
- 2. La puerta está abierta y el aire acondicionado encendido (P=1, A=1)
- 3. La puerta está abierta con una alarma de proximidad de intruso (P=1, I=1)
- 4. La ventana está abierta y la calefacción encendida. (V=1, C=1)
- 5. La ventana está abierta y el aire acondicionado encendido (V=1, A=1)
- 6. La ventana está abierta con una alarma de proximidad de intruso (V=1, I=1)

Función sistema de alarma F de variables V, P, C, A, I

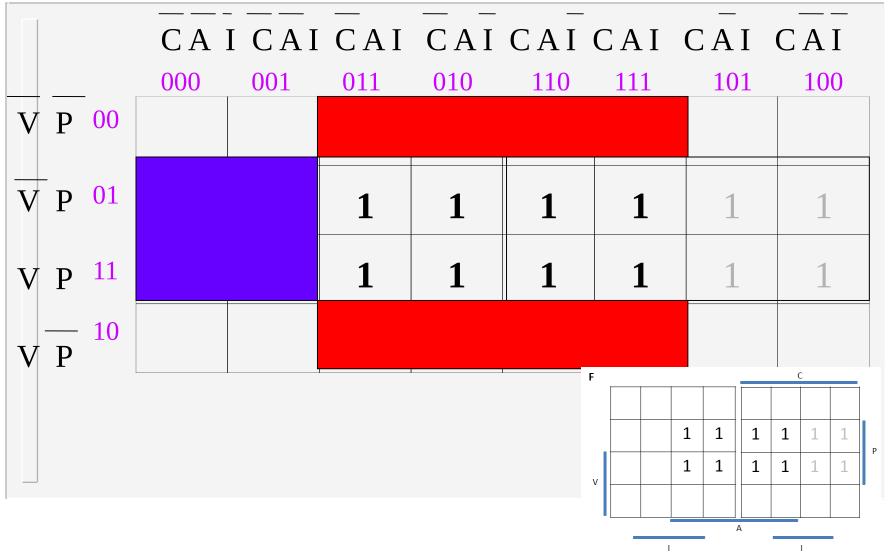
# Rellenando el mapa...(P=1, C=1)

F (V, P, C, A, I)=PC+...



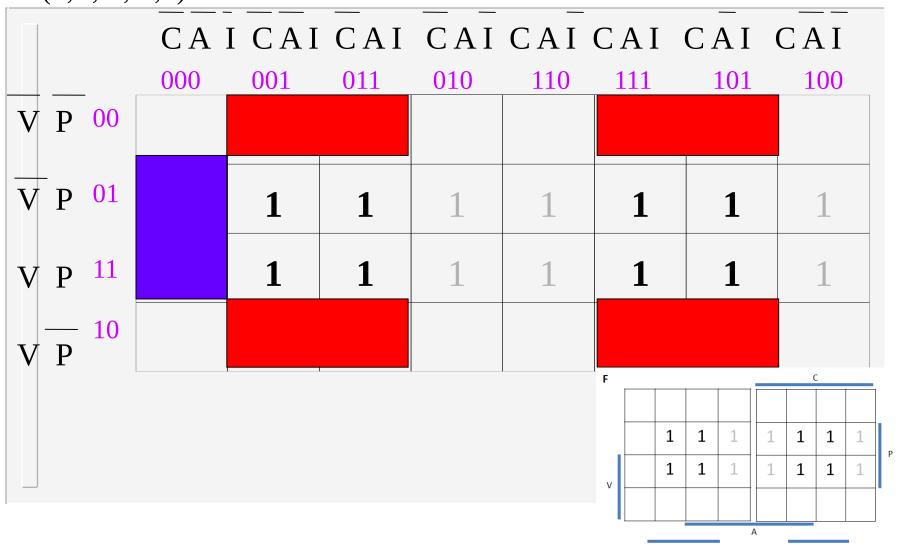
# Rellenando el mapa...(P=1, A=1)

F (V, P, C, A, I)=PC+PA+...



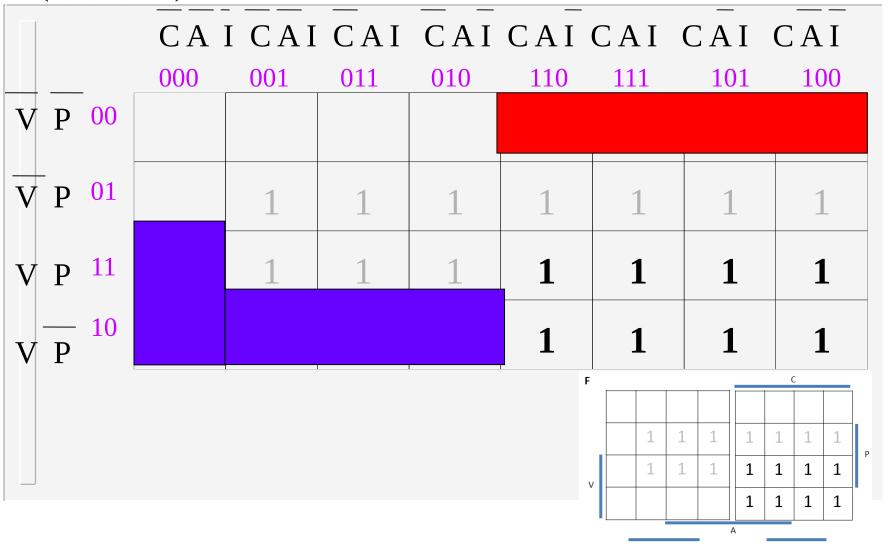
# Rellenando el mapa...(P=1, I=1)

F (V, P, C, A, I)=PC+PA+PI+...



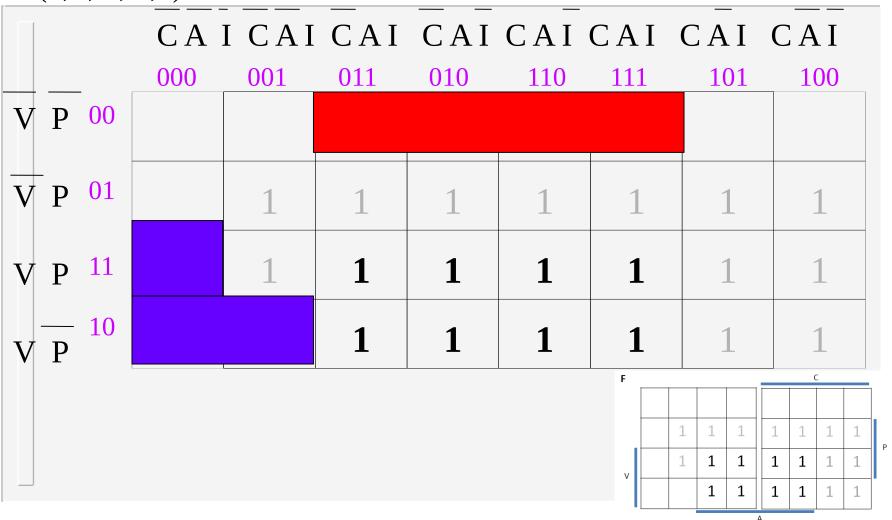
#### Rellenando el mapa...(V=1, C=1)

F (V, P, C, A, I)=PC+PA+PI+VC+...



#### Rellenando el mapa...(V=1, A=1)

F(V, P, C, A, I)=PC+PA+PI+VC+VA+...

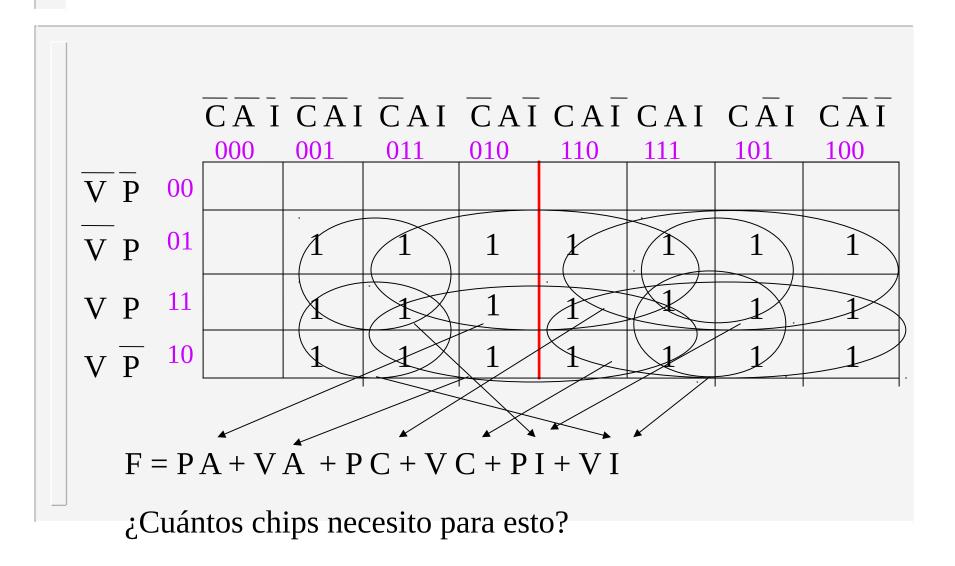


# Rellenando el mapa...(V=1, I=1)

F (V, P, C, A, I)=PC+PA+PI+VC+VA+VI

	$\overline{C}A$	I CAI	$\overline{C}AI$	$\overline{C}AI$	CAI	<b>C</b> .	ΑI	CA	Ι	C	A	I					
	000	001	011	010	110	1	111	1	01		10	0					
V P 00																	
V P 01		1	1	1	1		1		1		1						
V P 11		1	1	1	1		1		1		1		1		1		
V P 10		1	1	1	1		1		1 1		1	1					
						F					С		1				
							1	1 1	1 1	1	1	1					
							1	1 1	1 1	1	1	1	ı				
						V .	1	1 1	1 1	1	1	1					
						- '			A		1	_					

# Podemos agrupar así...



#### O usando los ceros...

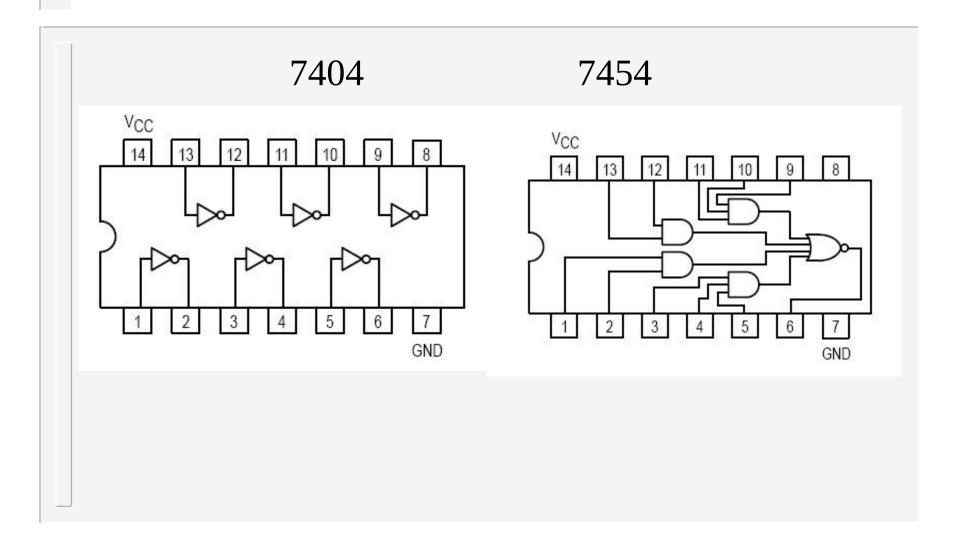
-	$\overline{C} - \overline{A}$	<u> </u>		<u> </u>			C A I	C A T
		001	C A I	010	110	111	101	100
${\mathrm{V}}$ ${\mathrm{P}}$ 00	<del>1</del>	0	011	010	0	0	0	100
		1	1	1	1	1	1	1
V P <sup>01</sup>	0	1	1	1	1	1	1	1
V P 11	0	1	1	1	1	1	1	1
$\overline{\mathrm{VP}}^{-}$ 10	$\sqrt{0}$	1	1	1	1	1	1	1

$$F = C A I + V P$$

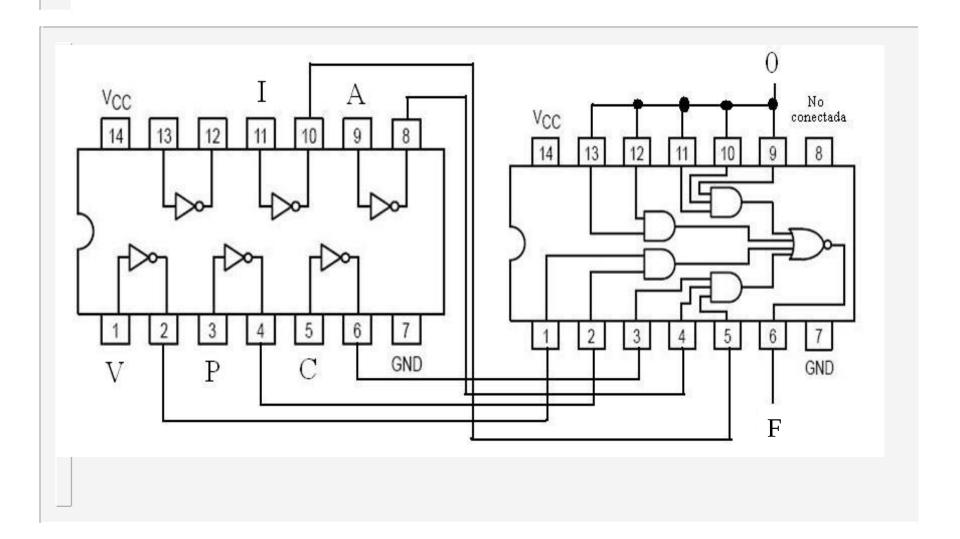
Sólo dos chips

$$F = \overline{\overline{C} \overline{A} \overline{I} + \overline{V} \overline{P}}$$

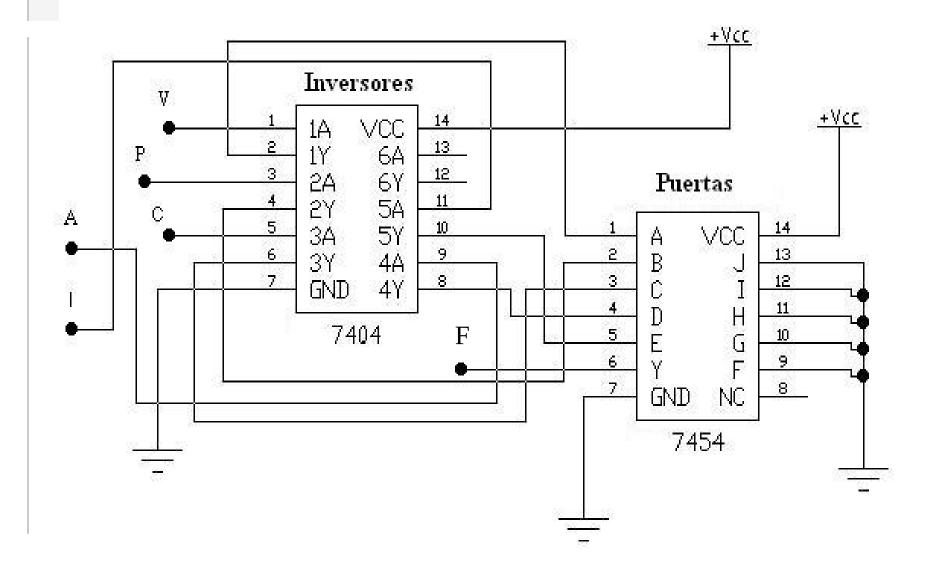
# Patillaje de los circuitos 7404 y 7454



#### Conexionado físico



#### Circuito diseñado



#### Ya sabes...

- Leyes y propiedades del Algebra de Boole
- Simplificar funciones utilizando el Algebra de Boole
- Analizar circuitos mediante Algebra de Boole y simplificarlos
- Pasar de una tabla de verdad a Suma de Productos y Producto de Sumas
- Utilizar Mapas de Karnaugh para simplificar funciones lógicas

# Final del Tema 5