



PONTIFICIA UNIVERSIDAD  
CATOLICA  
DE VALPARAISO



# EIE 446 - SISTEMAS DIGITALES

## Tema 4: Algebra de Boole y Simplificación Lógica

Nombre del curso: “Sistemas Digitales”

Nombre del docente: Héctor Vargas



## OBJETIVOS DE LA UNIDAD

- Aplicar las leyes y reglas básicas del álgebra de Boole.
- Aplicar los teoremas de DeMorgan a las expresiones booleanas.
- Describir redes de puertas mediante expresiones booleanas.
- Evaluar las expresiones booleanas.
- Simplificar expresiones mediante las leyes y reglas del álgebra booleana.
- Convertir cualquier expresión booleana en una suma de productos o producto de sumas (SOP o POS).
- Utilizar los mapas de Karnaugh para simplificar expresiones booleanas, tablas de verdad.
- Utilizar condiciones indiferentes para simplificar funciones booleanas.



# OPERACIONES Y EXPRESIONES BOOLEANAS

- El álgebra de Boole son las matemáticas de los sistemas digitales. Es indispensable tener unos conocimientos básicos del álgebra booleana para estudiar y analizar los circuitos lógicos.
- En el tema previo hemos estudiado las operaciones y expresiones booleanas para las puertas NOT, AND, OR, NAND y NOR.

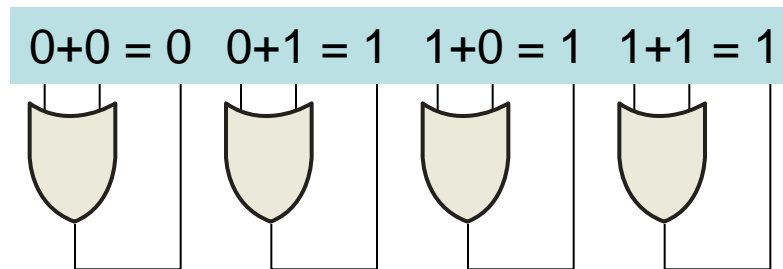
## Definiciones

- Los términos *variable*, *complemento* y *literal* son términos utilizados en el álgebra booleana:
  - Una *variable* es un símbolo que se utiliza para representar magnitudes lógicas. Una variable puede tener el valor 0 o 1.
  - El *complemento* es el inverso de una variable y se indica mediante una barra encima de la misma. Así, el complemento de A es  $\bar{A}$ .
  - Un *literal* es una variable o el complemento de una variable.



## Suma booleana

- Como hemos visto en el tema anterior, la **suma booleana** es equivalente a la operación **OR**. El término suma es 1 si al menos uno de sus literales son 1. El término suma es cero solamente si cada literal es 0.



- En el álgebra de Boole, el **término suma** es una suma de literales. En los circuitos lógicos, un término suma se obtiene con la operación OR, sin que exista ninguna operación AND. **Ejemplos:**  $A+B$ ,  $A+\overline{B}$ ,  $A+B+\overline{C}$ ,  $A+\overline{B}+C+\overline{D}$ .

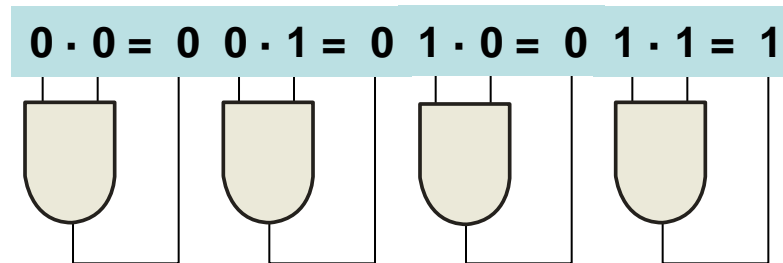
**Ejemplo** ¿Determinar los valores de  $A$ ,  $B$ , y  $C$  ¿Qué hacen la suma de la expresión  $A + B + C = 0$ ?

**Solución** Cada literal debe ser = 0; por lo tanto  $A = 1$ ,  $B = 0$  y  $C = 1$ .



## Multiplicación booleana

- Igualmente, ya hemos visto que la **multiplicación booleana** es equivalente a la operación **AND**. El producto de literales forma un término **producto**. El término producto será 1 solamente si todos literales son 1.



- En el álgebra de Boole, el **término producto** es un producto de literales. En los circuitos lógicos, un término producto se obtiene con la operación AND, sin que exista ninguna operación OR. **Ejemplos:**  $AB$ ,  $A\bar{B}$ ,  $ABC$ ,  $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ .

**Ejemplo** ¿Cuáles son los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$  si el término producto de  $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} = 1$  ?

**Solución** Cada literal debe ser = 1; por lo tanto  $A = 1$ ,  $B = 0$  y  $C = 0$ .



# LEYES Y REGLAS DEL ALGEBRA DE BOOLE

- Al igual que en otras áreas de las matemáticas, existen en el álgebra de Boole una serie de reglas y leyes bien determinadas que tienen que seguirse para aplicarla correctamente.

## Leyes del álgebra de Boole

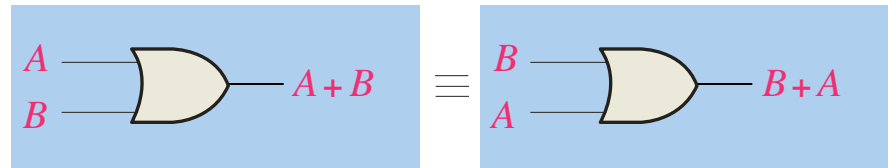
- Las leyes del álgebra de Boole son las mismas que en el álgebra ordinaria.
- Cada una de las leyes se explicará con dos o tres variables, aunque el número de variables no está limitado a esta cantidad.



## Leyes conmutativas

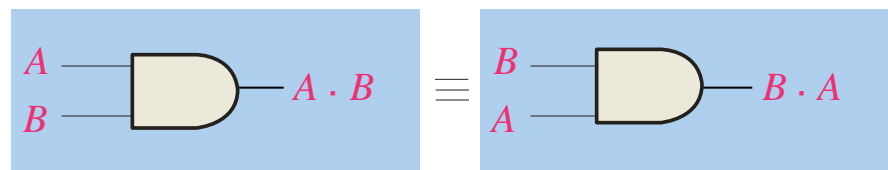
- Las leyes conmutativas se aplican a la suma y la multiplicación.
  - Para la suma la ley conmutativa declara: En términos del resultado, el orden en el cual se suman (OR) las variables es indiferente.

$$A + B = B + A$$



- Para la multiplicación la ley conmutativa declara: En términos del resultado, el orden en el cual se multiplican (AND) las variables es indiferente.

$$AB = BA$$



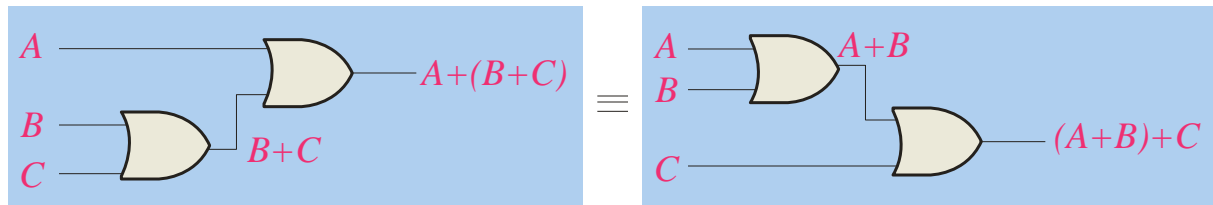




## Leyes asociativas

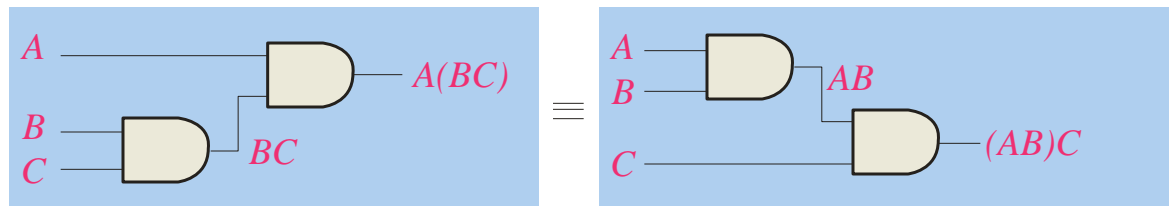
- Las leyes asociativas se aplican también a la suma y la multiplicación.
  - Para la suma la ley asociativa declara:** Cuando se suman (OR) más de dos variables, el resultado es el mismo a pesar del agrupamiento de las variables.

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$



- Para la multiplicación la ley asociativa declara:** Cuando se multiplican (AND) más de dos variables, el resultado es el mismo a pesar del agrupamiento.

$$A(BC) = (AB)C$$





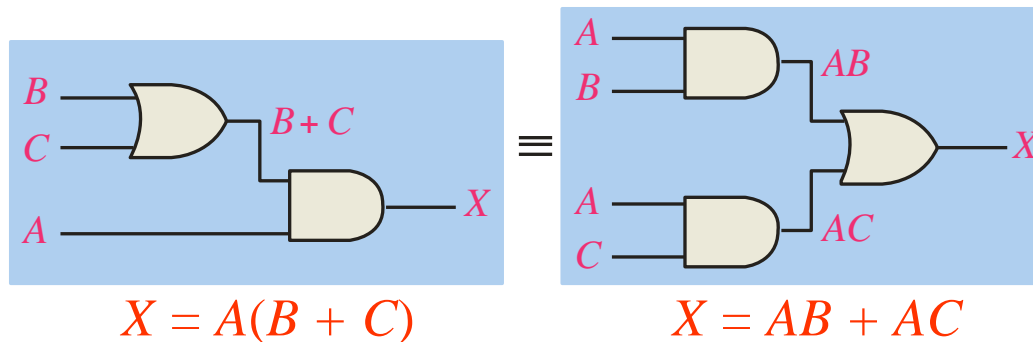


## Ley distributiva

- La ley distributiva es la ley de **factorización**. Una expresión que contiene factores comunes se puede factorizar tal como en el algebra ordinaria.

$$AB + AC = A(B + C)$$

- La ley distributiva se puede ilustrar con circuitos equivalentes:





## Reglas del álgebra booleana

- A continuación, se enumeran las doce reglas básicas, muy útiles, para la manipulación y simplificación de **expresiones booleanas**.

$$1. A + 0 = A$$

$$7. A \cdot A = A$$

$$2. A + 1 = 1$$

$$8. A \cdot \bar{A} = 0$$

$$3. A \cdot 0 = 0$$

$$9. \bar{\bar{A}} = A$$

$$4. A \cdot 1 = A$$

$$10. A + AB = A$$

$$5. A + A = A$$

$$11. A + \bar{A}B = A + B$$

$$6. A + \bar{A} = 1$$

$$12. (A + B)(A + C) = A + BC$$

- Las nueve primeras reglas se verán en términos de su aplicación a las puertas lógicas. Las reglas 10 a 12 se obtendrán de las reglas más sencillas y de las leyes anteriormente explicadas.

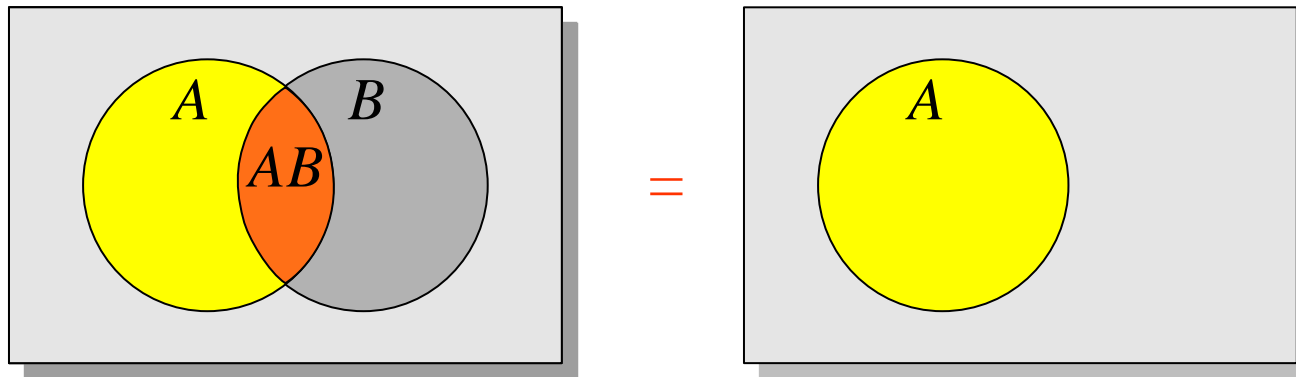


## Reglas del álgebra booleana

Las Reglas del álgebra Booleana se pueden ilustrar con diagramas de *Venn*. La variable  $A$  se representa como un área.

La regla  $A + AB = A$  se puede ilustrar fácilmente con un diagrama. Añadir una zona de solapamiento para representar la variable  $B$ .

La región de intersección entre  $A$  y  $B$  representa  $AB$ .



Visualmente, el diagrama muestra que  $A + AB = A$ . Otras reglas también se pueden ilustrar con estos diagramas.



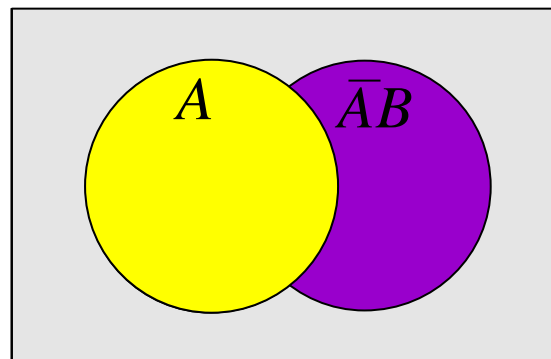
## Reglas del álgebra booleana

**Ejemplo** Ilustrar la regla  $A + \bar{A}B = A + B$  con un diagrama de Venn.

### Solución

Esta vez,  $\bar{A}$  se representa por el área azul y  $B$  de nuevo por el círculo rojo. La intersección representa  $\bar{A}B$ .

→ Observe que  $A + \bar{A}B = A + B$





## Reglas del álgebra booleana

- La Regla 12, que declara que  $(A + B)(A + C) = A + BC$ , se puede probar al aplicar las leyes y reglas como sigue:

$$\begin{aligned}(A + B)(A + C) &= AA + AC + AB + BC \\&= A + AC + AB + BC \\&= A(1 + C + B) + BC \\&= A \cdot 1 + BC \\&= A + BC\end{aligned}$$

- Esta regla es un poco más complicada, pero también puede ser demostrada con un diagrama de Venn. Homework ....



## TEOREMAS DE DeMORGAN

- DeMorgan propuso dos teoremas que constituyen una parte importante del álgebra de Boole.
- Fundamentalmente, los teoremas de DeMorgan proporcionan una verificación matemática de la equivalencia entre las puertas NAND y negativa-OR, y las puertas NOR y negativa-AND.
- En lo sucesivo aprenderemos:
  - Los postulados de los teoremas de DeMorgan.
  - Relacionar los teoremas de DeMorgan con la equivalencia entre puertas NAND y negativa-OR, y puertas NOR y negativa-AND.
  - Aplicar los teoremas de DeMorgan para simplificar las expresiones booleanas.



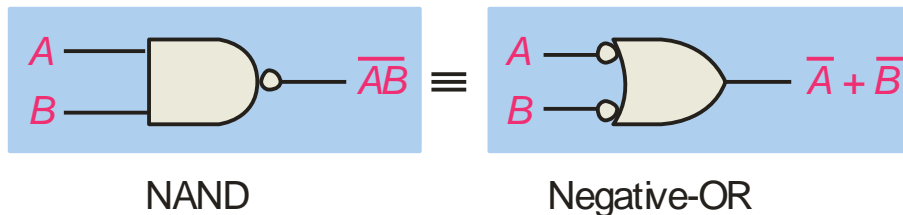
# TEOREMAS DE DeMORGAN

- 1<sup>er</sup> Teorema de DeMorgan.

- Enunciado: “El complemento de un producto de variables es igual a la suma de las variables complementadas”.

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

- Aplicando el primer teorema de DeMorgan a las puertas:



Inputs		Output	
A	B	$\overline{AB}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0





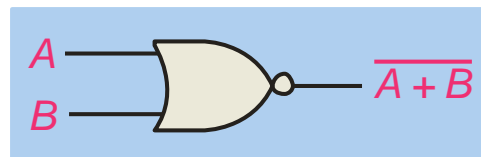
## TEOREMAS DE DeMORGAN

- **2<sup>do</sup> Teorema de DeMorgan.**

- Enunciado: “El complemento de una suma de variables es igual al producto de las variables complementadas”.

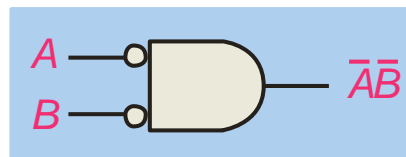
$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

- Aplicando el segundo teorema de DeMorgan a las puertas:



NOR

≡



Negative-AND

Inputs		Output	
A	B	$\overline{A + B}$	$\overline{A} \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0



## TEOREMAS DE DeMORGAN

- Como se ha comentado, los teoremas de DeMorgan se aplican también a expresiones en las que existen más de dos variables. A continuación veremos la aplicación de los teoremas de DeMorgan a expresiones de 3 y 4 variables.
- Aplicar los teoremas de DeMorgan a las expresiones  $\overline{XYZ}$  y  $\overline{X+Y+Z}$ .

**Solución:**

$$\overline{XYZ} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$
$$\overline{X+Y+Z} = \overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$$

- Aplicar los teoremas de DeMorgan a las expresiones  $\overline{WXYZ}$  y  $\overline{W+X+Y+Z}$ .

**Solución:**

$$\overline{WXYZ} = \overline{W} + \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$
$$\overline{W+X+Y+Z} = \overline{W}\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$$

- Si analizamos los postulados de DeMorgan, cada variable podría en realidad representar una combinación de otras variables. A continuación un ejemplo:



## TEOREMAS DE DeMORGAN

- $X$  puede ser igual al término  $AB+C$ , e  $Y$  puede ser igual a  $A+BC$ . Así, si aplicamos el primer teorema de DeMorgan para dos variables  $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ , a la expresión  $(AB+C)(A+BC)$  obtenemos el siguiente resultado:

$$\overline{(AB+C)(A+BC)} = \overline{(AB+C)} + \overline{(A+BC)}$$

- En el resultado anterior se ve que hay dos términos,  $\overline{AB+C}$  y  $\overline{A+BC}$ , a los que podemos aplicar otra vez DeMorgan  $\overline{A+B} = \overline{A}\overline{B}$ , obteniendo:

$$\overline{(AB+C)} + \overline{(A+BC)} = (\overline{AB})\overline{C} + \overline{A}(\overline{BC})$$

- De esta manera obtenemos otros dos términos en la expresión a los que nuevamente podemos aplicar DeMorgan. Estos términos son  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ . Una última aplicación del teorema nos da como resultado:

$$(\overline{AB})\overline{C} + \overline{A}(\overline{BC}) = (\overline{A} + \overline{B})\overline{C} + \overline{A}(\overline{B} + \overline{C})$$

- Los teoremas de DeMorgan ya no pueden seguir aplicándose, aunque este resultado puede ser simplificado aún más mediante el uso de reglas y leyes de Boole.



## Aplicación de los teoremas de DeMorgan

- A continuación se analiza un procedimiento que ilustra la aplicación de los teoremas de DeMorgan y del álgebra de Boole utilizando como ejemplo la siguiente expresión:

$$\overline{\overline{A + \overline{BC} + D(\overline{E + \overline{F}})}}$$

- Paso 1.** Identificamos los términos a los que se pueden aplicar los teoremas de DeMorgan y consideramos cada término como una única variable. De este modo, nos queda:

$$\overline{A + \overline{BC}} = X \quad y \quad \overline{D(\overline{E + \overline{F}})} = Y$$

- Paso 2.** Dado que  $\overline{X + Y} = \overline{X} \overline{Y}$

$$\overline{\overline{(A + \overline{BC}) + (D(\overline{E + \overline{F}}))}} = \overline{\overline{(A + \overline{BC})}} \overline{\overline{(D(\overline{E + \overline{F}}))}}$$



## Aplicación de los teoremas de DeMorgan

- **Paso 3.** Utilizamos la regla 9 ( $\overline{\overline{A}} = A$ ) para eliminar la barra doble sobre el término de la izquierda (esto no es parte del teorema de DeMorgan):

$$\overline{\overline{(A + B\overline{C})}}(\overline{D(\overline{E + F})}) = (A + B\overline{C})(\overline{D(\overline{E + F})})$$

- **Paso 4.** Aplicando el primer teorema de DeMorgan al segundo término:

$$(A + B\overline{C})(\overline{\overline{D(\overline{E + F})}}) = (A + B\overline{C})(\overline{D} + \overline{\overline{E + F}})$$

- **Paso 5.** Empleamos la regla 9 nuevamente para cancelar las barras dobles sobre la parte  $\overline{E + F}$  del término.

$$(A + B\overline{C})(\overline{D} + \overline{\overline{E + F}}) = (A + B\overline{C})(\overline{D} + E + \overline{F})$$



## Aplicación de los teoremas de DeMorgan

- **Ejercicio 1:** Aplicar los teoremas de DeMorgan a las expresiones:

$$(a) \overline{\overline{A+B} + \overline{C}} \quad (b) \overline{\overline{A+B} + CD} \quad (c) \overline{(A+B)\overline{CD} + E + \overline{F}}$$

- **Ejercicio 2:** Aplicar los teoremas de DeMorgan a las expresiones:

$$(a) \overline{(A+B+C)D} \quad (b) \overline{ABC + DEF} \quad (c) \overline{\overline{A}\overline{B} + \overline{C}\overline{D} + EF}$$

- **Ejercicio 3:** La expresión booleana de una puerta OR-exclusiva es  $\overline{A}\overline{B} + \overline{A}B$ . Tomando esto como punto de partida, desarrollar una expresión para una puerta NOR-exclusiva, utilizando los teoremas de DeMorgan y aquellas leyes o reglas que se puedan aplicar.

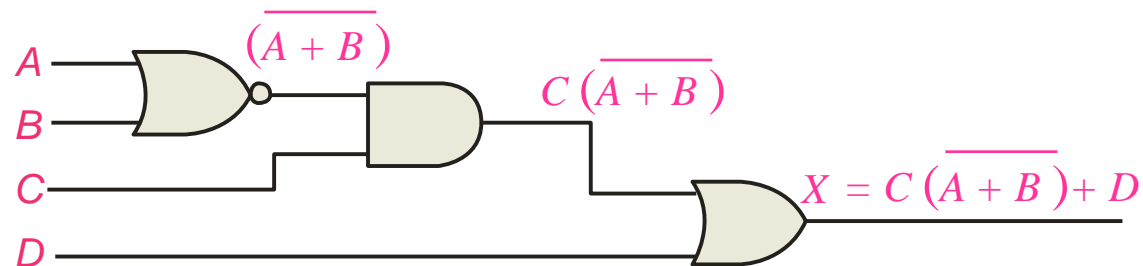


## ANÁLISIS BOOLEANO DE LOS CIRCUITOS LÓGICOS

- El álgebra de Boole proporciona una manera concisa de expresar el funcionamiento de un circuito lógico formado por una combinación de puertas lógicas, siendo la salida una combinación de los valores de entrada.

### Expresión booleana de un circuito lógico

- Los **Circuitos Lógicos Combinacionales** se pueden analizar escribiendo la expresión para cada puerta lógica y combinando estas expresiones de acuerdo a las reglas del álgebra de Boole. A continuación un ejemplo:



Aplicando el teorema de DeMorgan y la ley de distribución:

$$X = C(\overline{A} \overline{B}) + D = \overline{A} \overline{B} C + D$$





## Tabla de verdad para un circuito lógico

- Una vez determinada la expresión booleana de un circuito lógico, puede elaborarse una tabla de verdad que represente la salida del circuito lógico para todos los posibles valores de las variables de entrada.
- Para la expresión booleana obtenida en el ejemplo de la diapositiva anterior, se tiene:

$$X = C (\overline{A} \overline{B}) + D = \overline{A} \overline{B} C + D$$

Entradas				Salidas
A	B	C	D	$\overline{A} \overline{B} C + D$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1



# SIMPLIFICACIÓN MEDIANTE EL ÁLGEBRA DE BOOLE

- En múltiples ocasiones a la hora de aplicar el álgebra booleana, hay que reducir una expresión a su forma más simple o cambiarla a una forma más conveniente que permita conseguir una implementación eficiente.
- Aquí trataremos el método que utiliza las reglas, leyes y teoremas del álgebra de Boole para manipular y simplificar una expresión.
- Una expresión booleana simplificada debería emplear el menor número posible de puertas en la implementación de un circuito lógico.
- Mediante algunos ejemplos veremos esto en detalle.



## SIMPLIFICACIÓN MEDIANTE EL ÁLGEBRA DE BOOLE

- **Ejemplo 1.** Simplificar la siguiente expresión utilizando técnicas del álgebra de Boole.

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

- **Ejercicio 2.** Simplificar la siguiente expresión:

$$(\overline{A}\overline{B}(C + BD) + \overline{A}\overline{B})C$$

- **Ejercicio 3.** Simplificar la siguiente expresión:

$$\overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$$

- **Ejercicio 4.** Simplificar la siguiente expresión:

$$\overline{AB + AC} + \overline{A}BC$$



## FORMAS ESTÁNDAR DE LAS EXPRESIONES

- Todas las expresiones Booleanas pueden ser escritas en la forma suma de productos (SOP, *Sum Of Products*) o en la forma producto de sumas (POS, *Product of Sums*).
- Estas formas pueden simplificar la implementación de expresiones lógicas y hacer el trabajo mucho más sistemático y sencillo.

### Suma de productos

- Cuando dos o más productos se suman mediante la adición booleana, la expresión resultante se denomina **suma de productos** (SOP, *Sum Of Products*). A continuación algunos ejemplos:

$$\overline{A} \overline{B} \overline{C} + A B$$

$$A B \overline{C} + \overline{C} \overline{D}$$

$$C D + \overline{E}$$

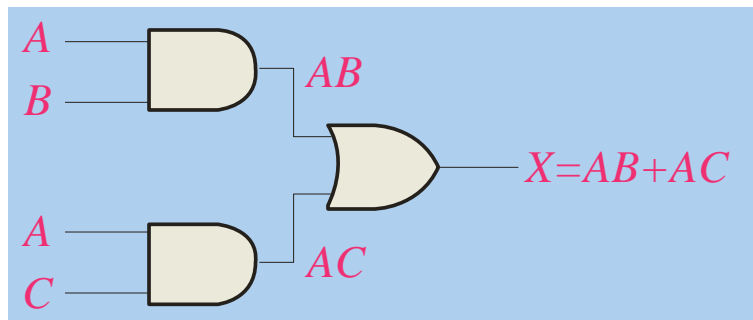
- En una expresión con formato de suma de productos, **una barra no puede extenderse sobre más de una variable**. Sin embargo, más de una variable puede tener una barra encima. *Es decir, si  $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$  pero no  $\overline{ABC}$*



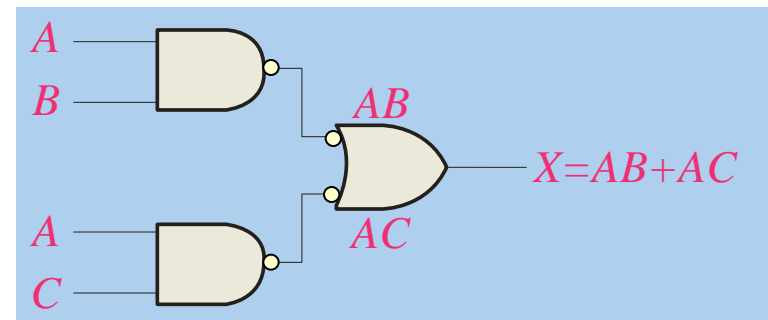
**Dominio de una expresión booleana:** El dominio de una expresión booleana es el conjunto de variables contenidas en la expresión ya sea en su forma complementada o no.

$$\begin{array}{lcl} \overline{A}B + A\overline{B}C & \longrightarrow & \text{DOMINIO: } A, B, C \\ ABC + C\overline{D}E + \overline{B}C\overline{D} & \longrightarrow & \text{DOMINIO: } A, B, C, D, E \end{array}$$

- La suma de productos puede ser implementada mediante una combinación de puertas AND/OR o puertas NAND/NAND.



AND/OR

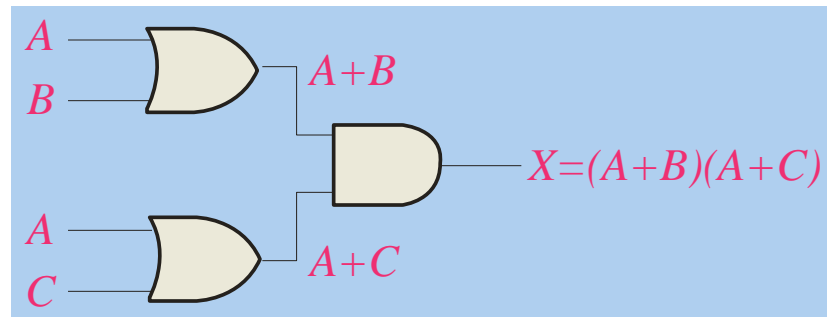


NAND/NAND



## Producto de sumas

- Cuando dos o más términos suma se multiplican, la expresión resultante se denomina **producto de sumas** (POS, *Product Of Sums*). A continuación algunos ejemplos:  
$$(\bar{A} + B)(A + \bar{B} + C) \quad (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(C + \bar{D} + E)(\bar{B} + C + D)$$
- En una expresión con formato de suma de productos, **una barra no puede extenderse sobre más de una variable**. Sin embargo, más de una variable puede tener una barra encima. *Es decir, si  $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$  pero no  $\overline{A + B + C}$*
- El producto de sumas puede ser implementado mediante una combinación de puertas OR/AND como ilustra la figura.



OR/AND



## FORMA SOP ESTÁNDAR

- En la forma SOP estándar, todas las variables del dominio deben aparecer en cada término. Esta forma es útil para la construcción de tablas de verdad.
- Puedes extender un término no-estándar a su forma estándar al multiplicar el término por un término compuesto por la suma de la variable que falta y su complemento. Es decir, aplicando la regla 6  $A + \bar{A} = 1$ .

**Ejemplo**

Convertir  $X = \bar{A} \bar{B} + A B C$  a su forma estándar.

**Solución**

El primer término no incluye la variable  $C$ . Por lo tanto, multiplicarlo por  $(C + \bar{C})$ , que es  $= 1$ :

$$\begin{aligned} X &= \bar{A} \bar{B} (C + \bar{C}) + A B C \\ &= \bar{A} \bar{B} C + \bar{A} \bar{B} \bar{C} + A B C \end{aligned}$$

- **Ejercicio:** Convertir la siguiente expresión booleana al formato SOP estándar:

$$\bar{A} \bar{B} C + \bar{A} \bar{B} + A B \bar{C} D$$





## FORMA POS ESTÁNDAR

- En la forma POS estándar, todas las variables en el dominio deben aparecer en cada término suma de la expresión.
- Puedes extender una forma de expresión POS no-estándar a su forma estándar al añadir el producto de la variable que falta y su complemento y aplicando la regla 12, que declara que:  $(A + B)(A + C) = A + BC$ .

### Ejemplo

Convertir  $X = (\bar{A} + \bar{B})(A + B + C)$  a su forma estándar.

### Solución

El primer término suma no incluye la variable  $C$ . Por lo tanto, añadir  $C\bar{C}$  y expandir el resultado aplicando la regla 12.

$$\begin{aligned} X &= (\bar{A} + \bar{B} + C\bar{C})(A + B + C) \\ &= (\bar{A} + \bar{B} + C)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(A + B + C) \end{aligned}$$

- **Ejercicio:** Convertir la siguiente expresión booleana al formato POS estándar:  
 $(A + \bar{B} + C)(\bar{B} + C + \bar{D})(A + \bar{B} + \bar{C} + D)$



## CONVERSIÓN DE UN SOP ESTÁNDAR EN UN POS ESTÁNDAR

- Para pasar de la suma de productos estándar al producto de sumas estándar hay que realizar los siguientes pasos:
  1. Evaluar cada término producto de la expresión suma de productos. Es decir, determinar los números binarios que representan estos términos.
  2. Determinar todos los números binarios no incluidos al realizar la evaluación del paso 1.
  3. Escribir los términos suma equivalente para cada valor binario del paso 2 y expresarlos en forma de producto de sumas.
- **VER EJEMPLO.**
  - Convertir la siguiente suma de productos estándar en su expresión equivalente como producto de sumas:

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + ABC$$



- **Desarrollo del ejemplo.**

- Convertir la siguiente suma de productos estándar en su expresión equivalente como producto de sumas:

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + ABC$$

- **Paso 1.** El resultado de la evaluación es el siguiente:

$$000 + 010 + 011 + 101 + 111$$

- **Paso 2.** Dado que son 3 las variables del dominio, existe un total de  $2^3$  posibles combinaciones. La expresión suma contiene cinco de estas combinaciones, luego la expresión producto de sumas debe contener las otras tres que son: 001, 100 y 110.

- **Paso 3.** Recordar que estos valores binarios (paso 2) son los valores que hacen que cada operación suma sea igual a cero. El resultado es,

$$(A + B + \overline{C})(\overline{A} + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + C)$$

- Utilizando un procedimiento similar, se puede pasar de POS a SOP estándar.



## EXPRESIONES BOOLEANAS Y TABLAS DE VERDAD

- Todas las expresiones booleanas pueden convertirse fácilmente en tablas de verdad utilizando los valores binarios de cada término de la expresión.
- Además, las expresiones SOP y POS pueden determinarse muy fácilmente desde las tablas de verdad.

### Conversión de una suma de productos a tabla de verdad

- El primer paso para construir una tabla de verdad consiste en enumerar todas las posibles combinaciones de los valores de entrada.
- El segundo paso consiste en pasar la suma de productos a su forma estándar, si no lo está ya.
- Finalmente, se escribe un 1 en la columna de salida de cada valor binario que hace que la suma de productos estándar sea 1, y un 0 en los restantes.
- **VER EJEMPLO.**

- Desarrollar una tabla de verdad para la expresión:  $\overline{\overline{A}}\overline{B}C + \overline{A}\overline{\overline{B}}C + ABC$



## Conversión de un producto de sumas a tabla de verdad

- El primer paso para construir una tabla de verdad consiste en enumerar todas las posibles combinaciones de los valores de entrada.
- El segundo paso consiste en pasar el producto de sumas a su forma estándar, si no lo está ya.
- Finalmente, se escribe un 0 en la columna de salida de cada valor binario que hace que la suma de productos estándar sea 0, y un 1 en los restantes.
- **Ejercicio.**
  - Desarrollar una tabla de verdad para la expresión:

$$(A + B + C)(A + \overline{B} + C)(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)$$



## Expresiones estándar a partir de la tabla de verdad

- Para obtener la expresión algebraica de una suma de productos representada por una tabla de verdad se deben enumerar todos los valores de las variables de entrada para los que la salida es 1.
  - Luego, cada valor binario se convierte en el correspondiente término producto, reemplazando cada 1 por la variable y cada 0 por la variable complementada. Ejemplo: El valor binario 1010  $\rightarrow ABCD$
- 
- Para obtener la expresión algebraica de un producto de sumas representado por una tabla de verdad se deben enumerar todos los valores de las variables de entrada para los que la salida es 0.
  - Luego, cada valor binario se convierte en el correspondiente término suma, reemplazando cada 0 por la variable y cada 1 por la variable complementada. Ejemplo: El valor binario 1010  $\rightarrow \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + D$



## Expresiones estándar a partir de la tabla de verdad

- **Ejercicio:** A partir de la tabla de verdad de la derecha, determine la expresión suma de productos y la expresión producto de sumas estándar equivalente.

Entradas			Salida
A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1





## Representaciones canónicas SOP y POS

- Otra forma de representar las sumas de productos y productos de sumas estándar son las formas canónicas.
- **Minterms 1**: Son los términos producto de cada fila de la tabla de verdad que hacen que tal término producto valga 1.
- Expresión para representar en SOP estándar mediante **minterms**.

$$F(\text{lista de variables}) = \sum (\text{lista de índices de minterms } 1)$$

- **Maxterms 0**: Son los términos suma de cada fila de la tabla de verdad que hacen que tal término suma valga 0.
- Expresión para representar en POS estándar mediante **maxterms**.

$$F(\text{lista de variables}) = \prod (\text{lista de índices de maxterms } 0)$$



## Representaciones canónicas SOP y POS

- Tabla representativa de *minterms* y *maxterms* de tres variables.

Entradas			Salida			
A	B	C	MINTERMS	NOTACIÓN	MAXTERMS	NOTACIÓN
0	0	0	$\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$	$m_0$	$X + Y + Z$	$M_0$
0	0	1	$\overline{X}\overline{Y}Z$	$m_1$	$X + Y + \overline{Z}$	$M_1$
0	1	0	$\overline{X}Y\overline{Z}$	$m_2$	$X + \overline{Y} + Z$	$M_2$
0	1	1	$\overline{X}YZ$	$m_3$	$X + \overline{Y} + \overline{Z}$	$M_3$
1	0	0	$X\overline{Y}\overline{Z}$	$m_4$	$\overline{X} + Y + Z$	$M_4$
1	0	1	$X\overline{Y}Z$	$m_5$	$\overline{X} + Y + \overline{Z}$	$M_5$
1	1	0	$XY\overline{Z}$	$m_6$	$\overline{X} + \overline{Y} + Z$	$M_6$
1	1	1	$XYZ$	$m_7$	$\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$	$M_7$



## Representaciones canónicas SOP y POS

- Exprese la función booleana  $F = X + YZ$  como suma de *minterms* 1.

$$F = X + YZ$$

$$F = X(Y + \bar{Y})(Z + \bar{Z}) + (X + \bar{X})YZ$$

$$F = XYZ + X\bar{Y}Z + XY\bar{Z} + X\bar{Y}\bar{Z} + XYZ + \bar{X}YZ$$

Eliminando los duplicados, de acuerdo con la regla 5, y reordenando los *minterms* en orden ascendente, obtenemos finalmente,

$$F = \bar{X}YZ + X\bar{Y}\bar{Z} + X\bar{Y}Z + XY\bar{Z} + XYZ$$

$$= m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$= \sum(3, 4, 5, 6, 7)$$

- **Ejercicio para la casa:** Exprese la función booleana  $F = \bar{X}\bar{Y} + XZ$  como producto de maxterms 0.



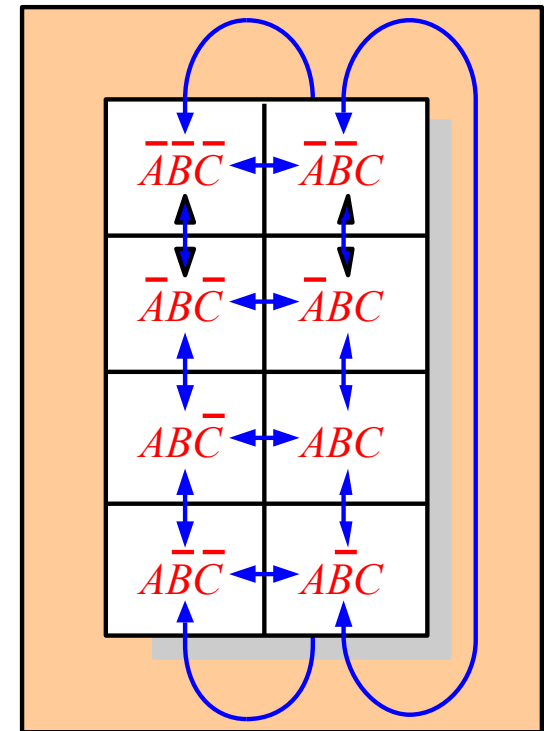
## MAPAS DE KARNAUGH

- Mientras que con las leyes, reglas y teoremas del álgebra de Boole la reducción de las expresiones dependía de nuestra habilidad para aplicarlas, los mapas de Karnaugh nos proporcionan un método sistemático para el mismo propósito.
- Si se aplica correctamente, el método genera las expresiones suma de productos o producto de sumas más simples posibles, conocidas como expresiones mínimas.
- Un mapa de Karnaugh es similar a una tabla de verdad, ya que muestra todas las posibles combinaciones de entrada y salida resultante para cada una de ellas.
- Los mapas de Karnaugh se pueden utilizar para reducir expresiones de dos, tres, cuatro y cinco variables. Nosotros nos ocuparemos de los casos de tres y cuatro variables para ilustrar los principios.



## Mapa de Karnaugh de tres variables

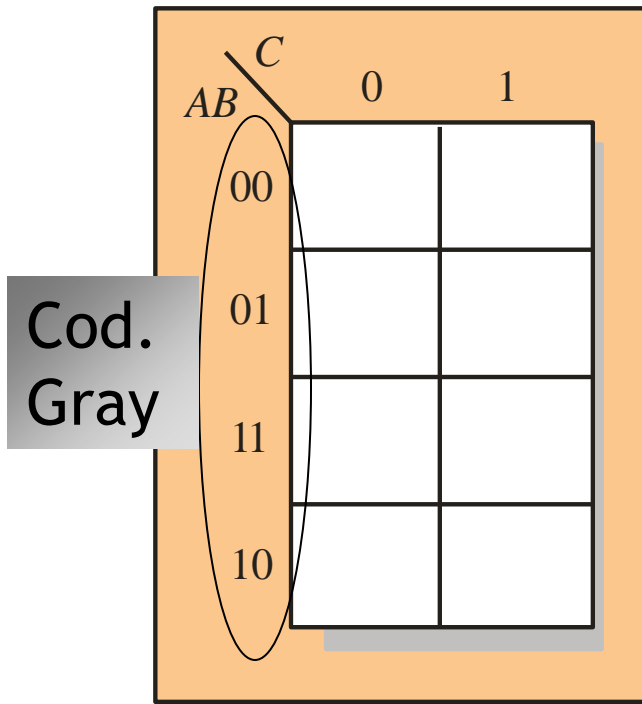
- El mapa de Karnaugh (K-map) es una herramienta para simplificar lógica combinacional con 3 o 4 variables. Para 3 variables, se requieren 8 celdas ( $2^3$ ).
- El mapa que se muestra es para tres variables etiquetadas A, B, y C. Cada celda representa un posible término producto.
- Cada celda difiere de una celda adyacente por solo una variable.





## Mapa de Karnaugh de tres variables

- Las celdas son usualmente etiquetadas usando 0's y 1's para representar la variable y su complemento.



Los números se ingresan en **código gray**, para forzar que las celdas adyacentes difieran por sólo una variable.

Los unos se leen como la variable real y los ceros se leen como la variable complementada.



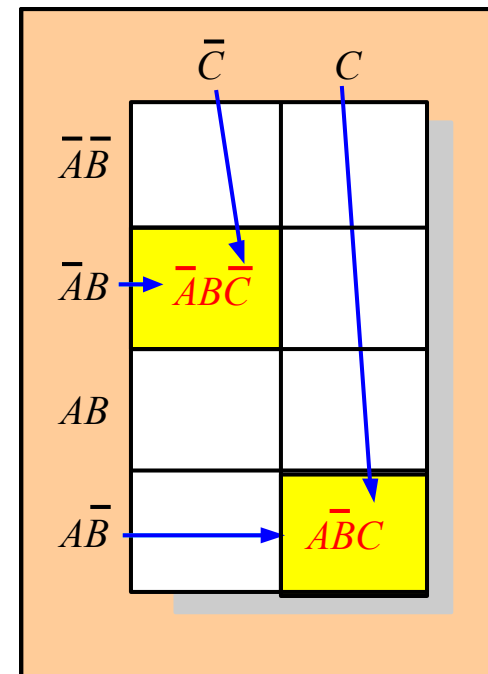
## Mapa de Karnaugh de tres variables

- Alternativamente, las celdas se pueden etiquetar con las letras de variables. Esto hace que sea más simple de leer, pero toma más tiempo preparar el mapa. Observe la adyacencia de las celdas.

**Ejemplo** Leer los términos para las celdas amarillas.

**Solución**

Las celdas son  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  y  $A\bar{B}C$

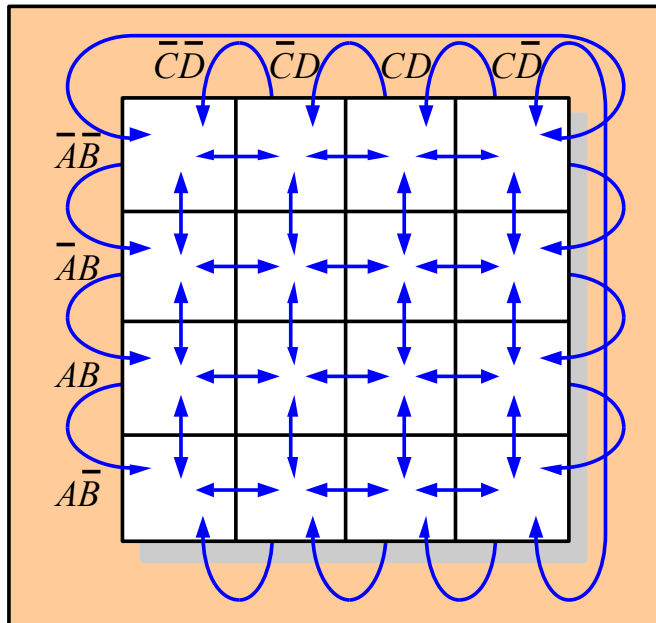






## Mapa de Karnaugh de cuatro variables

- En un mapa de Karnaugh de 4 variables las celdas se disponen de manera similar al mapa de 3 variables, es decir, las variables  $AB$  están a la izquierda y las variables  $CD$  están en la parte superior.



Físicamente, cada celda es adyacente a las celdas que están situadas inmediatas a ella por cualquiera de sus cuatro lados.

Una celda no es adyacente a aquellas celdas que tocan diagonalmente alguna de las esquinas.

Además podemos apreciar la adyacencia cíclica de las celdas ubicadas en los extremos.



## MINIMIZACIÓN DE UNA SOP MEDIANTE KARNAUGH

- Como se ha comentado en las diapositivas anteriores, el mapa de Karnaugh se utiliza para reducir expresiones booleanas al mínimo.
- **Objetivo:** Siguiendo el sentido del punto anterior, una suma de productos minimizada está formada por el mínimo número de términos producto posibles con el mínimo número de variables por término.
- Generalmente, una expresión suma de productos minimizada puede implementarse con un número de puertas menor que su expresión estándar, lo cual constituye la finalidad del proceso de simplificación.



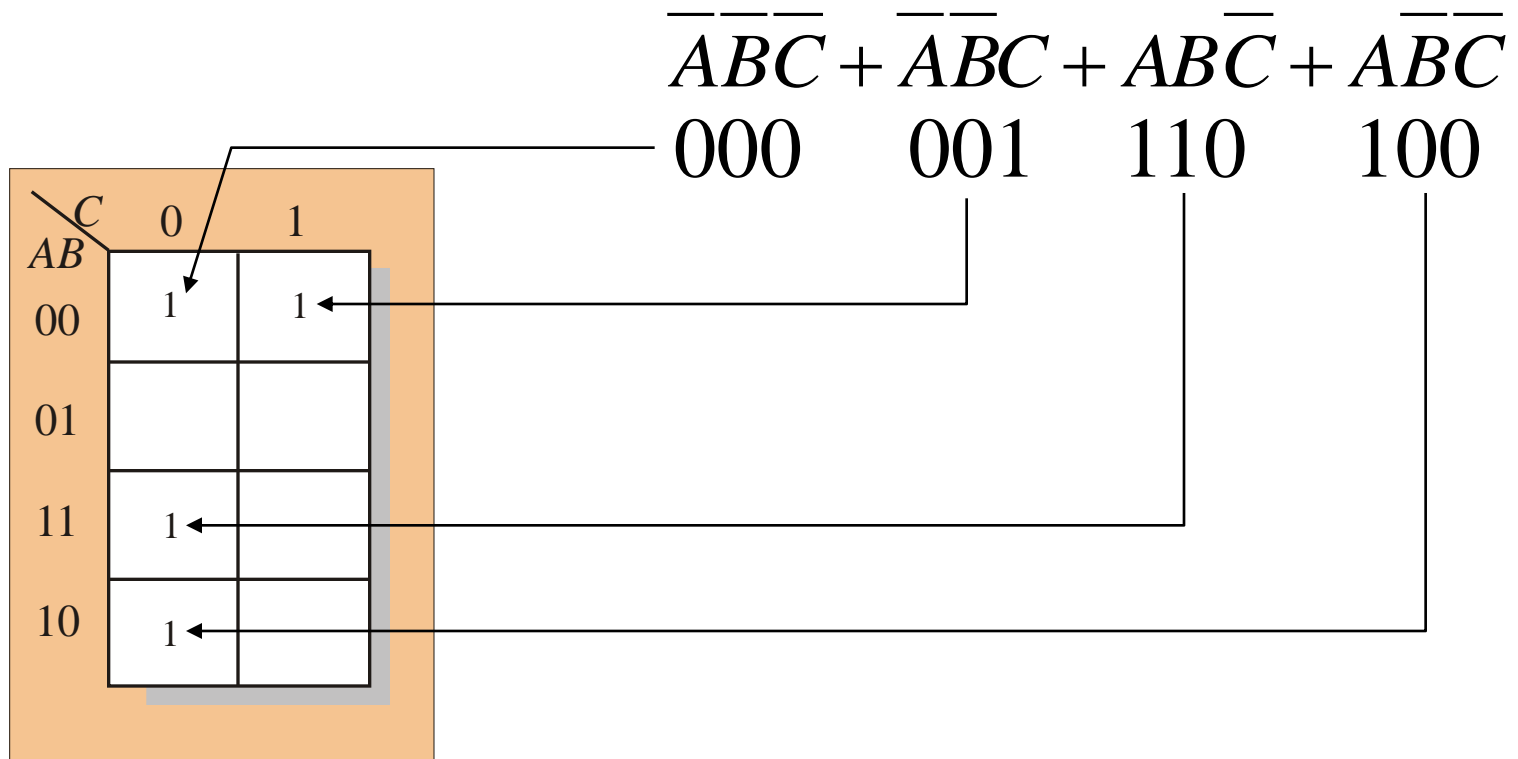
## Mapa de Karnaugh de una suma de productos estándar

- Los siguientes pasos describen como completar los mapas de Karnaugh de una suma de productos estándar:
  1. Determinar el valor binario de cada término producto de la suma de productos estándar.
  2. A medida que evaluamos cada término, colocamos un 1 en el mapa de Karnaugh en la celda que tiene el mismo valor que dicho término.
- Cuando hayamos completado el mapa de Karnaugh correspondiente a la suma de productos dada, en dicho mapa habrán tantos unos como términos en la expresión.
- Generalmente cuando se trabaja con suma de productos los ceros se dejan fuera del mapa.



## Mapa de Karnaugh de una suma de productos estándar

- Un ejemplo de mapa de Karnaugh de 3 variables de una SOP estándar.





## Mapa de Karnaugh de una suma de productos estándar

- **Ejercicio 1.** Transformar la siguiente suma de productos estándar en un mapa de Karnaugh.

$$\overline{\overline{A}}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + ABC$$

- **Ejercicio 2.** Transformar la siguiente suma de productos estándar en un mapa de Karnaugh.

$$\overline{\overline{A}}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + ABCD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$$



## Mapa de Karnaugh de una suma de productos **no-estándar**

- Antes de poder utilizar un mapa de Karnaugh, las expresiones booleanas deben estar en su forma estándar. Si una expresión no lo está, debería pasarse a su forma estándar mediante el procedimiento ya descrito algunas diapositivas atrás.
- Otra manera más rápida es mediante el método del desarrollo numérico de los términos que no incluyen todas las variables del dominio.

$$\overline{A} + \overline{A}B + \overline{A}BC$$

000    100    110  
001    101  
010  
011

		C	
		0	1
AB	00	1	1
	01	1	1
	11	1	
	10	1	1

**Ejercicio 2.** Obtener el K-map de:  $\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}D$



## Simplificación de una SOP mediante el mapa de Karnaugh

- El proceso de minimización de una suma de productos estándar mediante los mapas de Karnaugh (una vez generado el mapa) se divide en dos pasos:
  - **Agrupación de unos.** Se deben agrupar los unos del mapa de Karnaugh de acuerdo con ciertas reglas. La finalidad es maximizar el tamaño de los grupos y minimizar el número de estos grupos.
    1. Un grupo tiene que contener 1,2,4,8 ó 16 celdas (potencias de 2). En el caso de un mapa de 3 variables, el grupo máximo puede ser de 8 celdas.
    2. Cada celda del grupo debe ser adyacente a una o más celdas del mismo grupo, pero no todas las celdas del grupo tienen que ser adyacentes entre sí.
    3. Incluir en cada grupo el mayor número posible de 1s de acuerdo a la regla 1.
    4. Cada 1 del mapa debe estar incluido en al menos un grupo. Los 1s que ya pertenezcan a un grupo pueden estar incluidos en otro, siempre que los grupos que se solapen contengan unos no comunes.





# Simplificación de una SOP mediante el mapa de Karnaugh

- Ejemplo:** Agrupar los 1s en el siguiente mapa de Karnaugh.

$\backslash C$	0	1
$AB$		
00	1	
01		1
11	1	1
10		

- Ejercicios:** Agrupar los 1s en cada uno de los siguientes mapas de Karnaugh.

$\backslash C$	0	1
$AB$		
00	1	1
01	1	
11		1
10	1	1

$\backslash CD$	00	01	11	10
$AB$				
00	1	1		
01	1	1	1	1
11				
10		1	1	

$\backslash CD$	00	01	11	10
$AB$				
00	1			1
01	1	1		1
11	1	1		1
10	1		1	1



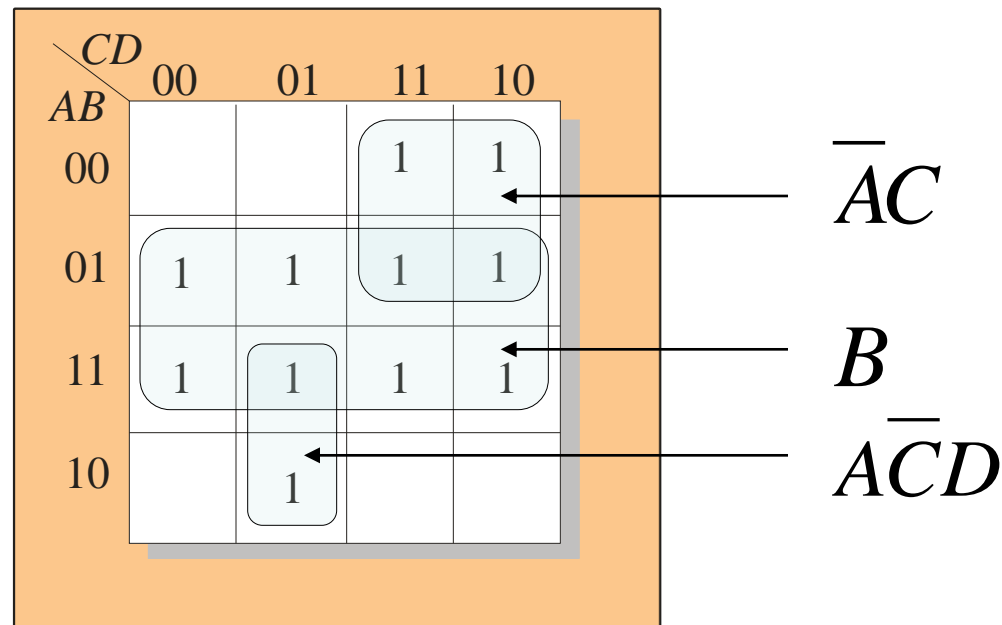
# Simplificación de una SOP mediante el mapa de Karnaugh

- **Determinación de la SOP mínima.** Seguir las reglas siguientes:
  1. Cada grupo de celdas que contiene 1s da lugar a un término producto compuesto por todas las variables que aparecen en el grupo en solo una forma (no complementada o complementada).
  2. Determinar la operación producto mínima para cada grupo.
    - a) *Para un mapa de 3 variables:*
      - Un grupo formado por una única celda da lugar a un término de 3 variables.
      - Un grupo formado por dos celdas da lugar a un término de 2 variables.
      - Un grupo formado por cuatro celdas da lugar a un término de 1 variable.
      - Un grupo formado por ocho celdas indica que la expresión vale 1.
    - b) *Para un mapa de 4 variables:*
      - Un grupo formado por una celda da lugar a un término producto de 4 variables.
      - Un grupo formado por dos celdas da lugar a un término producto de 3 variables.
      - Un grupo formado por cuatro celdas da lugar a un término producto de 2 variables.
      - Un grupo formado por ocho celdas da lugar a un término producto de 1 variable.
      - Un grupo formado por 16 celdas indica que la expresión vale 1.
  3. Sumar todos los productos mínimos obtenidos en el punto 2 para obtener la expresión suma de productos mínima.



## Simplificación de una SOP mediante el mapa de Karnaugh

- Ejemplo.** Determinar los productos para el mapa de Karnaugh siguiente y escribir la expresión suma de productos mínima resultante:

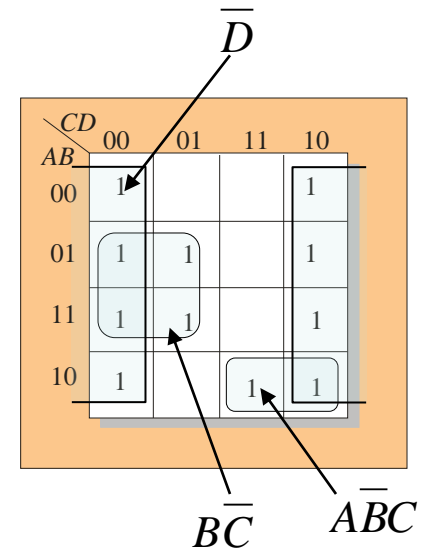
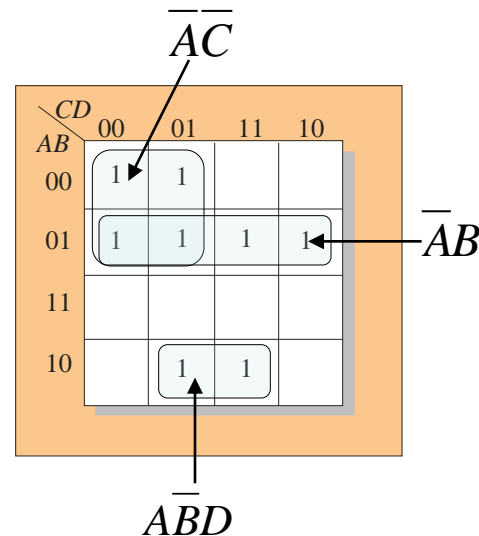
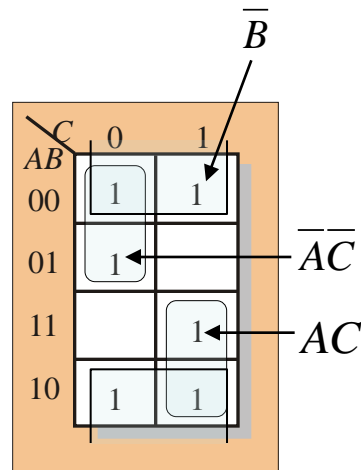
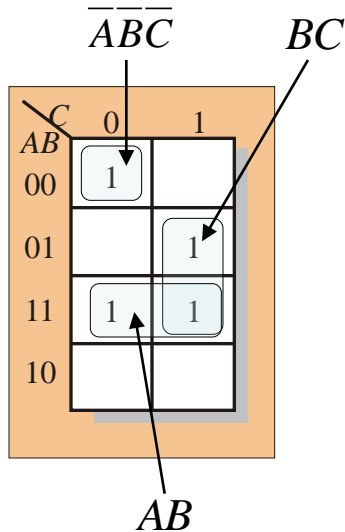


$$B + \bar{A}C + \bar{A}C\bar{D}$$



# Simplificación de una SOP mediante el mapa de Karnaugh

- Ejercicios.** Determinar los productos para cada uno de los mapas de Karnaugh siguientes y escribir la expresión suma de productos mínima resultante:

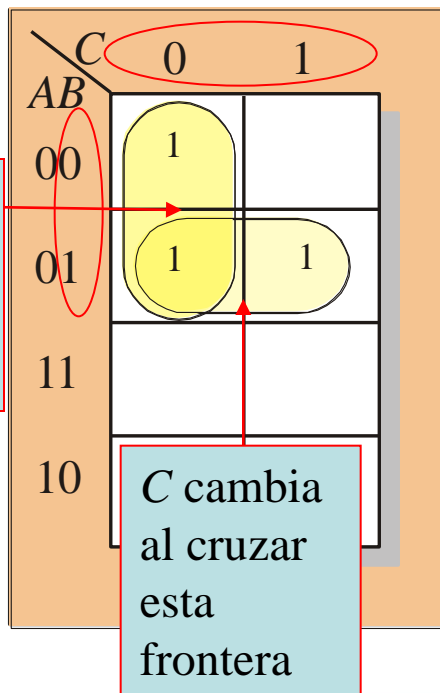




## Mapa de Karnaugh de tres variables

- K-maps pueden simplificar la lógica combinacional al agrupar celdas y eliminar las variables que cambian al cruzar una frontera.

**Ejemplo** Agrupar 1's en el mapa y leer la lógica mínima.



## Solución

- Agrupar 1's en dos grupos solapados como se indica.
- Leer cada grupo eliminando cualquier variable que cambie al cruzar una frontera.
- El grupo vertical se lee  $\overline{A}\overline{C}$ .
- El grupo horizontal se lee  $\overline{A}B$ .

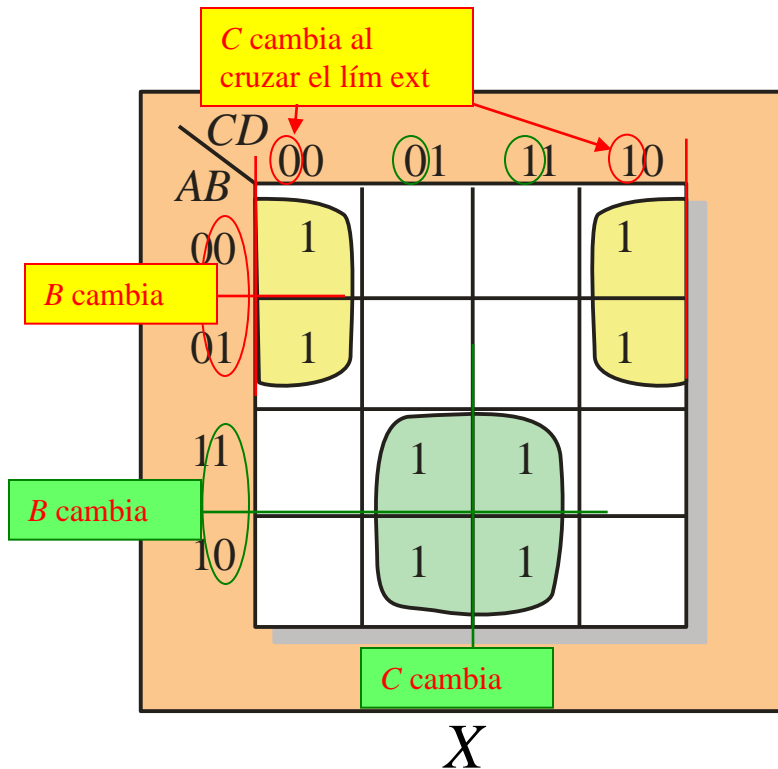
$$X = \overline{A}\overline{C} + \overline{A}B$$



## Mapa de Karnaugh de cuatro variables

### Ejemplo

Agrupar los 1's en el mapa y leer la lógica mínima.



### Solución

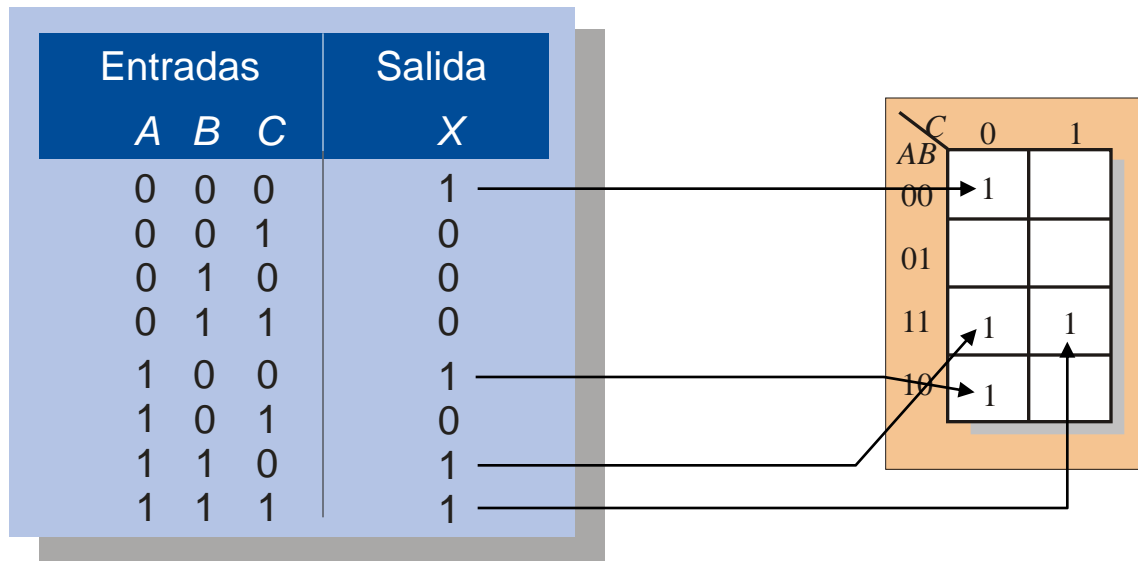
1. Agrupar los 1's en dos grupos separados como se indica.
2. Leer cada grupo eliminando cualquier variable que cambie al cruzar la frontera.
3. El grupo superior (amarillo) se lee como  $\overline{A}\overline{D}$ .
4. El grupo inferior (verde) se lee como  $AD$ .

$$X = \overline{A}\overline{D} + AD$$



## Obtención directa del K-map a partir de la tabla de verdad

- Recordar que una tabla de verdad proporciona la salida de una expresión booleana para todas las posibles combinaciones de las variables de entrada.
- Los unos de la columna de salida de la tabla de verdad se trasladan directamente al mapa de Karnaugh, a las celdas correspondientes a los valores asociados de las combinaciones de variables de entrada.







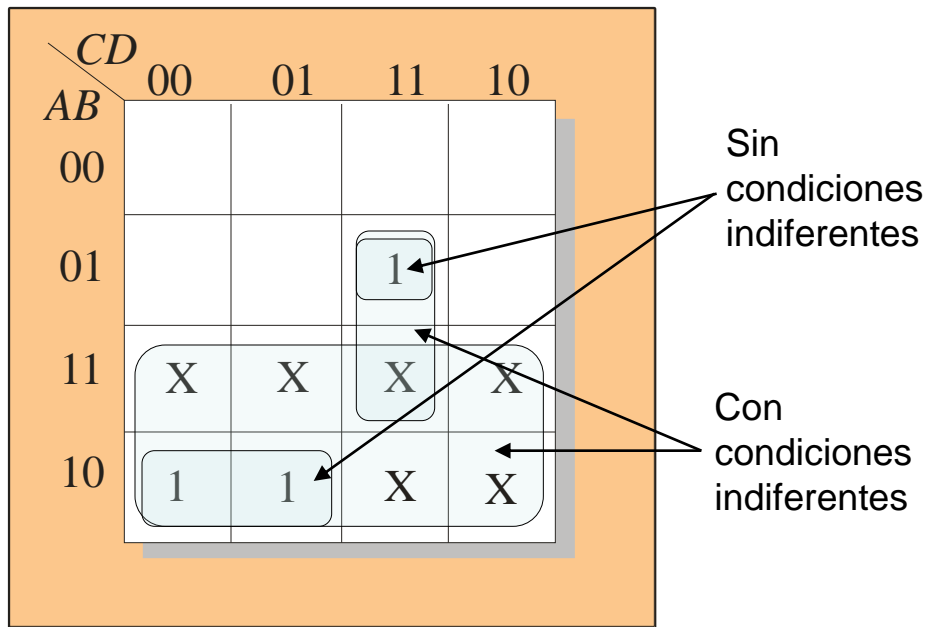
## Condiciones indiferentes

- Algunas veces se producen situaciones en las que algunas combinaciones de las variables de entrada no están permitidas. Por ejemplo, si recordamos el código BCD, existían seis combinaciones no válidas: *1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111*.
- Dado que estos estados no permitidos no ocurren nunca en una aplicación que emplee el código BCD, pueden considerarse como términos *indiferentes* con respecto a su efecto de salida.
- En la práctica, a estos términos se les puede asignar tanto un 1 como un 0 en la salida, y no son importantes dado que nunca van a generarse.
- En los mapas de Karnaugh los términos indiferentes pueden ocuparse como unos para agrandar los grupos o como ceros si no obtenemos ninguna ventaja.



## Condiciones indiferentes

- Ejemplo:** Encontrar la expresión SOP mínima con y sin condiciones indiferentes para la tabla de verdad siguiente:



*Sin condiciones indiferentes*  $Y = \overline{A}BC + \overline{A}BCD$

*Con condiciones indiferentes*  $Y = A + BCD$

Entradas				Salidas
A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X



## PALABRAS CLAVES DE LA UNIDAD

*Variable* Un símbolo utilizado para representar una cantidad lógica que puede tener un valor de 1 o 0, usualmente designado por una letra itálica.

*Complemento* El inverso o opuesto de un número. En el álgebra booleana, la función inversa, se expresa con una barra sobre la variable.

*Término suma* La suma booleana de dos o más literales equivalente a una operación OR.

*Término producto* El producto booleano de dos o más literales equivalente a una operación AND.



## PALABRAS CLAVES DE LA UNIDAD

- Suma-de-productos* (SOP) Una forma de expresión booleana que es básicamente la aplicación de la función OR a múltiples expresiones AND.
- Producto de sumas* (POS) Una forma de expresión booleana que es básicamente la aplicación de la función AND a múltiples expresiones OR.
- Mapa de Karnaugh* Un arreglo de celdas que representan combinaciones de literales en una expresión booleana y usado para la simplificación sistemática de una expresión.



# BIBLIOGRAFÍA

**Libro base:** “*Fundamentos de Sistemas Digitales*”. Autor: Tomas L. Floyd.

**Libro complemento:** “Principios de Diseño Digital”. Autor: Daniel D. Gaski.