Distribuzione notevoli discrete

mercoledì 15 marzo 2023 18:01

Ci sono classi che vale la pena studiare.

Se abbiamo una variabile aleatoria discreta, ed una distribuzione

$P(X \in A) = \sum Px^{x_i}$

Es.

$X(\Omega) = N, P(x \leq 3) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3)$
$= Px^1 + Px^2 + Px^3$

Ed ora classifichiamole.

- Bernulli
  E' una variabile aleatoria che può assumere $X(\Omega) = \{0, 1\} \rightarrow 2$ soli valori
  $Px^x = P(X = x) = \begin{Bmatrix} p \; se \; x = 1 \\ 1 - p \; se \; x = 0 \end{Bmatrix}$
  $X \sim Be(p)$
  Valore medio:
  $E[X] = p$
  Quindi probabilità $= 1 ==$ valore medio

  $E[X^2] = E[X] = p$
  $Var[X] = p - p^2 = p(1 - p)$
  Es: tiro lancio 1 moneta, lancio 1 dado con solo controllo di 1 risultato

- Binomiale
  Questa è una bernulli dove però abbiamo N prove
  Es: lanciamo più monete
  Supposizioni:
  $n \in N \rightarrow$ numeor totale prove
  $p \in [0, 1] \rightarrow$ probabilità successo di ogni prova
  $X :=$ numero di successi che si verificano in n prove
  X è detta binomiale di parametri n, p ed indicata come $X \sim Bin(n, p)$
  Nota: $n = 1, bin(1, p) = Be(p)$

  Soluzione:
  $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$
  $PX^k = P(X = k) =$ n prove abbiamo k successi $= \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \; \forall 0 \leq$

$k \leq n$

Introduciamo variabile aleatoria $X_i := \begin{Bmatrix} 1 \rightarrow successo \\ 0 \rightarrow altrimenti \end{Bmatrix}$

$X = \sum X_i$

Si suppone che le prove siano tutte indipendenti
$X_i \sim Be(p)$
Quindi detto questo sappiamo valore medio e varianza per variabile
$E[X_i] = p, Var[X_i] = p(1-p)$
Questo noi possiamo calcolare

$E[X] = \sum E[X_i] = np$

$Var[X] = \sum Var[X_i] = n * p(1-p)$

Es: lanciamo moneta 50 volte, probabilità escono 30 teste
Es pratico
$X :=$ Num figli maschi
$X(\Omega) =\cdot \{0, 1, 2\}$
$PX^0 = \frac{1}{4}, PX^1 = P(mf) + P(fm) = \frac{1}{2}, PX^2 = \frac{1}{4}$
Questa è una variabile aleatoria $X \sim Bin\left(2, \frac{1}{2}\right)$
E questa è binomiale siccome può essere pensato come
$X = X_1 + X_2 \rightarrow X_i = \begin{Bmatrix} 1 \rightarrow M \\ 0 \rightarrow altrimenti \end{Bmatrix}$
Quindi qui, per spiegare meglio $bin(n, p)$
N è il numero di tentativi, qui noi abbiamo 2 gruppo: MM/FF/M/FM
P è la probabilità che noi vogliamo, ed in questo caso la probabilità mf/fm $= \frac{1}{2}$

- Poisson
  X si dice Paisson di $\lambda \in (0, \infty)$ se $X(\Omega) = N_0 = \{0, 1, \dots\}$
  $PX^k = P(X = k) = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0,1, \dots$
  Ci hai capito qualcosa? Nemmeno io

  Supponiamo $Y \sim Bin(n, p)$
  $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$ con $np = \lambda$
  Quindi veramente tante prove con ogni prova numero piccolissimo
  Però il prodotto di questi due numeri è bilanciato in modo tale che $np = \lambda$
  $E[X] = Var[X] = \lambda$

Es: Numero accessi a una pagina web in un'ora
Numero nascite in un ospedale in una giornata
Numero clienti in un ufficio postale
Quindi, quando n potrebbe essere molto grande

Esercizio.
In ospedale nascono 2,2 bambini al giorno
Qual'è la probabilità che non nasce nessuno? Invece che nessuno nasce?
$X \coloneqq$ numero nascite
$X \sim Pois(X) \to E[X] = \lambda$
E fissiamo $\lambda = 2{,}2$
Quindi usiamo $P(X = 0) = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda} = 11\%$
$P(X > 3) = P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$
$= 18\%$

- Geometrica
Si dice $X \sim Geo(P)$ se $X(\Omega) = N = \{1,2,3, \dots\}$
$PX^k = P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$
Si ottengono attraverso una successione infinita
Dove ci chiediamo l'istante del primo successo
$T \coloneqq$ istante del primo successo
$P(T = k) = (1-p)^{k-1} * p$
\-----------/. \-> successo a k
\-> Probabilità di insuccessi per k-1
Questa è la probabilità in istante k
$E[X] = \frac{1}{p}$
$Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$
Probabilità primo successo dopo istante n:
$P(T > n) = (1-p)^n$
-> Prime n prove sono tutti insuccessi
$P(T \leq n) = 1 - (1-p)^n$
E notare che
$P(T < \infty) = \lim_{p \to +\infty} 1 - (1-p)^\infty = 0$
Quindi non può mai succedere che il tempo infinito non ci sarà mai un successo