Ripasso

Monday, 25 September 2023 09:03

- Matrici
  - E' una tabella contenente numeri con n*m
  - E' detta quadrata se m*m
  - Vettori riga se 1*m
  - Vettori colonna se m*1
  - $A = [a_{ij}]$
    i->riga, j->colonna, elementi di a
  - Trasposta
    $A = [a_{ij}] \rightarrow A^T = [a_{ji}]$
    Si ruotano in parole povere
  - Prodotto
    $A = [a_{ij}]$
    $B = [b_{kj}]$
    $A * B = C = [c_{ij}]$
    $c_{ij} = \sum a_{ij} * b_{kj}$
  - Somma
    E' la somma elemento per elemento delle due matrici
    E' possibile sono se gli indici uguali
  - Se moltiplichiamo per la costante
    $\alpha * A = [\alpha * a_{ij}]$
    SI moltiplicano tutti gli elementi
  - I vettori sono linearmente dipendenti se esiste un coefficente dove non tutti nulli fà 0
  - Sono indipendenti solo se fà 0 solo e solo se tutti gli a=0
    $a_1 * v_1 + a_2 * v_2 \ldots = 0 \rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = 0$
  - Un insieme di n vettori di n dimensioni linearmente indipendenti crea una base per uno spazio n dimensioni
  - SIngolare se l'insieme di m vettori riga/colonna dove ogni riga/colonna è linearmente dipendente
    - Se è singolare non è invertibile
  - Diagonale quando sono diversi da 0 solo gli elementi nella diagonale
  - Identità I quando la diagonale è uguale a 1 ed è una matrice diagonale

- Inversa $A^{-1} * A = I$
- Determinante **per le matrici quadrate** è un numero reale e ci dice se è invertibile
  - Nelle matrici quadrate è la sottrazione del prodotto delle diagonali
  - Il determinante è nullo solo nelle matrici singolari
  - Nelle matrici più grandi di 2*2 si utilizza un altro metodo
  - $\det(A) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} * a_{ij} * \det(A_{ij})$

    $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 * \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 3 * \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 5 * \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 10$

    Prendiamo la prima riga e facciamo il determinante del quadrato creato sotto

- Sistema di equazioni lineari
  - Si dice equazione lineare siccome la soluzione è una retta nello spazio R^2

    2∗x_1+3∗x_2=6

    Si mette $x_1 = 0$ si trova il valore, poi $x_2 = 0$ ed infine tracciamo la retta tra i 2 punti trovati

    E quindi si dice $2 * \alpha + 3 * \beta = 6 \rightarrow (\alpha, \beta) \in R^2$
  - Ed un sistema di m equazioni lineare con n variabili è la stessa cosa di sopra ma con più righe

    $a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \cdots + a_{1n} * x_n = b_1$

    ....

    $a_{m1} * x_1 + a_{m2} * x_2 + \cdots + a_{mn} * x_n = b_m$

    Si cerca il punto di intersezioni tra le rette qui invece

    $|\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n| \in R^2$

    Abbiamo:
    - 1 soluzione
    - 0 soluzioni
    - Infinite soluzioni

    Può essere:
    - Consistente se ammatte se esiste 1 soluzioni
    - Determinato se il numero di equazioni = numero incognite
    - Sottodeterminaten se equazioni > numero incognite
    - Sovradeterminante se se equazioni < incognite
  - Rango

    Si suppone

    A*x=b

        - A matrice m*n
        - X vettore colonna di n dimensioni incognito
        - B vettore colonna in m dimensioni noto

    Si dice rango:

        - Rango di riga
        - Rango di colonna

    E se rango riga = rango colonna alllora

    $$Rango(A) \leq \min(m,n)$$

    Rango pieno se

    $$Rango(A) \leq \min(m,n)$$

    - Una matrice aumentata è la matrice che si ottiene aggiungendo ad A il vettore b come colonna
      Essa ci permette:
        - Rango(C)>Rango(A) allora il sistema lineare non ammette soluzioni
        - Rango(C)=Rango(A) allora ammette soluzioni
          Ed abbiamo i seguenti casi:
            - M > n quindi più equazioni che incognite
                - Rango(A)=n allora 1 soluzione
                - Rango(A)<n allora infinite soluzioni
            - M < n
                - Rango(A)<=m allora infinite soluzioni
            - M = n
                - Rango(A) = n -> soluzione unica
                - Rango(A) < n -> infinite soluzioni
    - E per risolvelo
        - Metodo eliminazione
            - Si prende una variabile, si risolve per la prima equazione
            - Poi si va alla prossima equazione e si risolve per un altra variabile
            - Si continua fino alla fine del numero di equazioni
            - Poi si sostituisce e si ha il valore di tutte le variabili
        - Eliminazione di Gauss
          E qui si possono applicare questo fino alla risoluzione:
            - Moltiplica per uno scalare non nullo
            - Somma un equazione moltiplicata per uno scalare ad un altra equazione
            - Scambiare tra loro due equazioni

          Qui dobbiamo cercare di creare la scaletta con gli 0
            - Moltiplico la prima, sommo seconda e sostituisco risultato al secondo

- Faccio lo stesso tra secondo e terzo

- Funzione 1 variabile
  E' una terna (A, B, F)
  Dove: A, B isnsieme non vuoti
  f è una legge che associa x ∈ A, f(x) ∈ B
  E qui diamo le terminologie
  A è dominio di f -> asse X
  B codominio di f -> asse Y
  $f: A \to B, \qquad x \in dom(f) \to f(x)$
  - Derivata
    Se esiste limite finito o meno veiene chiamato $f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$
    Ed è il tasso di variazione
    Varie derivate:
    - $f(x) = c \to 0$
    - $f(x) = x^n \to n * x^{n-1}$
    - $f(x) = \dfrac{1}{x} \to -\dfrac{1}{x^2}$
    - $f(x) = \log(x) \to \dfrac{1}{x}$

    E diciamo che se f è derivabile in x0 allora f è continuo in x0
    Però non è vero che se f è continua allora per forza è derivabile
    E diciamo anche che
    - $(c * f)'(x_0) = c * f'(x_0)$
    - $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
    - $(f * g)'(x_0) = f'(x_0) * g(x_0) + f(x_0) + g'(x_0)$
    - $(g\ o\ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) * f'(x_0)$

    La derivata è il coefficente della retta tangente sul punto
  - Crescente
    Se in $[a, b]$ si dice crescente se $x_1 < x_2$ si risulta che $f(x_1) < f(x_2)$
    Per comprendere se lo è in 1 punto allora si guarda la derivata 1
  - Decrescente
    $f(x_1) > f(x_2)$
  - Convessa
    Se per ogni coppia in $[a, b]$ dove $x_1 < x_2$
    È vero che $f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x-1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
    Aka se tracciando una retta tra 2 punti essa è sempre sopra la nostra equazione
    E' strettamente covnessa quando anzichè $\leq$ abbiamo $<$
  - Concava
    Qui invece la retta è sempre sotto la nostra equazione
    Una equazione non è convessa non è vero che è concava

Una equazione non è convessa non è vero che è concava

- Una fnzione è crescente/decrescente se la sua derivata prima è positiva/negativa in x
- Punti stazionari dove la derivata si annulla
- Punti minimo dalla derivata si vede quando si passa da positivo/negativo nella derivata
  Si dice che è minimo locale quando intorno è sempre più piccola
  Mentre per i minimi globali/assoluti è quando è la più piccola dappertutto
  Nota: non si può notare se è relativo/assoluto ameno che non si controlli con valori
- Punti massimo
  Se passiamo da positivo a negativo nella derivata allora è massimo nella derivata
- Punti sella
- Derivata prima se deriviamo 1 volta
- Derivata seconda se facciamo la derivata della derivata 1
- Condizioni necessari primo e secondo ordine
- Lineare quando la sua derivata è una costante

- Funzioni N variabili
  $(x_1, x_2) \rightarrow y$
  In questo caso x_1, x_2 → indipendenti
  $y \rightarrow dipendenti$
  - Funzioni lineari quando abbiamo la forma:
    $f(x_1, x_2, \dots x_n) = a_0 + a_1 * x_1 + a_2 * x_2 + \cdots + a_2 * x_2$
    Noi qui abbiamo un piano
  - Funzioni quadratica
    $$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + \sum b_j * x_k + \sum_{i=1} \sum_{j \neq j,1} h_{ij} * x_i * x_j + \sum h_{kk} * x_k^2$$
    $$\rightarrow f(x) = a_0 + b^T x + \frac{1}{2} * x^T H x$$
    Noi qui
  - Gradiente
    Generalizzazione del concetto di derivata
    - E' la composizione delle derivate parziale prima della funzione

    $f(x_1, x_2) = x^2 + 5 * x_2^2$
    Facciamo derivata parziale rispetto x_1
    $$f'_{x1} = \frac{d}{dx}(x_1^2) = 2x_1$$
    $$f'_{x2} = \frac{d}{dx}(5x_2^2) = 10x_2$$

$$dx$$

$$\Delta f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 10x_2 \end{pmatrix}$$

- Derivata parziale prima e seconda
  E' la derivata classica dove la seconda incognita è costante
  Ed abbiamo prima a seconda x1-x2-xn
  La derivata seconda è la derivata prima della derivata prima
  E si indica $f'_{x_n x_n}$
  $f'_{x_2 x_1}$= derivata parziale seconda rispetto $x_2 x_1$
  Ora facciamo questo
  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1^2 * x_2^2$
  $f'_{x1} = \frac{\sigma}{\sigma x_1} f(x_1, x_2) = 2 - 2 * x_2^2$
  $\frac{\sigma}{\sigma x_1} * \frac{\sigma f(x_1, x_2)}{\sigma x_2} = -4 * x_1 * x_2$
  L'ordine considerato è indifferente
  $\frac{\sigma}{\sigma x_2} * \frac{\sigma f(x_1, x_2)}{\sigma x_1} = -4 * x_1 * x_2$
- Matrice Hessiana
  E' una matrice quadrata che contiene le derivate parziali
  $H = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} \end{pmatrix}$
- Curve di livello
  Insieme di curve in cui la funzione ha un valore costante
  Ad ogni linea il valore cambia
  Possiamo avere:
  - Rette
  - Cerchi
  - Ellissi
  - Sella
- Minimo/massimo locale
  Un punto può essere minimo/massimo/sella solo se il punto del gradiente è nullo
  $$\Delta^{-1} f(x_1 x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma f(x_1 x_2)}{\sigma x_1} \\ \frac{\sigma f(x_1, x_2)}{\sigma x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  In quesot caso il nostro punto critico è
  $x_1^2, x_2 = 1$
  Però non sappiamo se è minimo/massimo/sella
- Minomo/massimo globale

- Minimo, massimo globale
- Determinante di una hessiana

  $Det(H) = f_{x1}x_1(x_1, x_2) * f_{x_2x_2}(x_1, x_2) - \left(f_{x_1x_2}(x_1, x_2)\right)^2$

  Ed abbiamo i casi:
    - $Det(H) > 0$
        - $f_{x_1x_1}(x_1, x_2) > 0 \Rightarrow minimo\ relativo$
        - $f_{x_1x_1}(x_1, x_2) < 0 \Rightarrow massimo\ relativo$
    - $Det(H) < 0 \rightarrow sella$

  Prendiamo esempuo

  $f(x_1x_2) = x_1^2 - x_2^2$

  $\Delta^{-1}f(x_1, x_2) = \binom{0}{0}$

  Nota: il gradiente ci aiuta a determinare la direzione massima di crescita

  COn $(x_1, x_2) = (0, 0)$

  $H = \begin{pmatrix} 2\ 0 \\ 0\ -2 \end{pmatrix}$

  Ora calcoliamo se è un punto minimo

  $Det(H) = -4$

  Quindi è un punto di sella a 0, 0

  Si suppone

  H

  Con $f_{x_1x_1} > 0$

  E $\det(H) > 0$

  Allora f è convessa

    E qui siamo sicuri che c'è o minimo o massimo

  Esempio:

    $f(x_1x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1$

    (Scrivere l'esempio)