TutorialPrimale

Wednesday, 8 November 2023 22:37

- Si usa quando non è possibile applicare il simplesso

1) Simplesso->Primale
   a. Trasformazione dei dati

   Per poter trasformare da simplesso a primario dobbiamo usare il fatto che essi sono simmetrici tra di loro, e che quindi è possibile vederli nel seguente modo:

			Problema Primale					
			coefficiente di				termine noto	coefficienti della funzione obiettivo (minimizzazione)
			x_1	x_2	...	x_n		
Problema Duale	coefficiente di	y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\leq b_1$	
		y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$\leq b_2$	
		...	...	...	...	...	$\leq \cdots$	
		y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$\leq b_m$	
	termine noto		VI c_1	VI c_2	VI ...	VI c_n		
			coefficienti della funzione obiettivo (massimizzazione)					

   Ora, potrebbe sembrare difficile da comprendere ma in realtà è estremamente semplice. Facciamo un esempio che verrà facile:

$$max \quad 4x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 2x_4$$
$$4x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leq 5$$
$$3x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 \leq 4$$
$$x \geq 0$$

   Guardiamo le nostre 2 equazioni ed immaginiamo di guardarle dall'altro verso il basso, sinistra verso destra, e di attribuire gli indici a seconda della riga, un esempio parla meglio di mille parole:

$$4y_1 + 3y_2 \geq^{\leq} 4$$
$$2y_1 + 1y_2 \geq^{\leq} 3$$
$$1y_1 + 2y_2 \geq^{\leq} 1$$
$$1y_1 + 1y_2 \geq^{\leq} 2$$
$$\min/\max\ (5y_1 + 4y_2)$$
$$y_1, y_2 \geq^{\leq} 0$$

   Penso che con i colori sia veramente facile da comprendere come fare la trasformazione.
   Bene, ora vi stareste dicendo, perchè ho messo $\geq^{\leq}$?
   E la risposta è perchè consiglio di scegliere $\geq/\leq$ dopo aver creato le equazioni, e la motivazione è che la decisioni di essi è parecchio complessa e, molto probabilmente la parte più brutta e noiosa del primale.
   Bisogna seguire la seguente tabella:

Primale (MAX)		Duale (MIN)		Primale (MIN)		Duale (MAX)	
Vincolo di variabile	≥	≥	Vincolo funzionale	Vincolo di variabile	≥	≤	Vincolo funzionale
	free	=			free	=	
	≤	≤			≤	≥	
Vincolo funzionale	≥	≤	Vincolo di variabile	Vincolo funzionale	≥	≥	Vincolo di variabile
	=	free			=	free	
	≤	≥			≤	≤	

   Ed otterremo il seguente risultato:

$$min\, 5y_1 + 4y_2$$
$$4y_1 + 3y_2 \geq 4$$
$$2y_1 + y_2 \geq 3$$
$$y_1 + 2y_2 \geq 1$$
$$y_1 + y_2 \geq 2$$
$$y_{1,2} \geq 0$$

   - Consiglio: riconducetevi sempre al MAX nel primale, e ricordatevi solamente la prima tabella. Meno confusione e meno probabilità di sbagliare

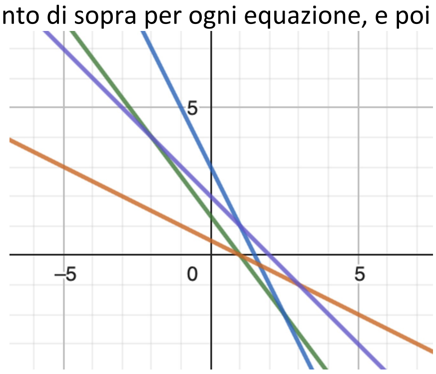
2) Risoluzione del sistema

   Ci sono 2 metodi per risolverlo:
   - Risolverlo come se fosse un simplesso
   - Risolverlo in maniera grafica

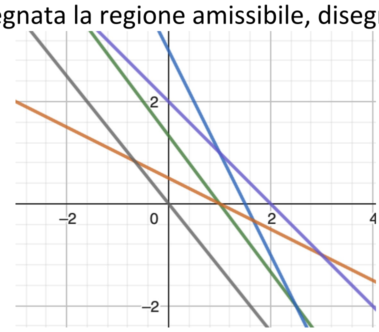
   Il primo punto, in generale se vi viene richiesto di risolverlo con il primale vuol dire che non è possibile risolverlo utilizzando la stessa metodologia del simplesso.
   Detto questo, ecco come risolverlo graficamente:

- Per ogni equazione, disegnare delle rette su carta
  Es:
  - 4x+3y=4
    3y=4-4x
    y=4/3-4/3 x
      x=0
      y=4/3
      Non è possibile rappresentare 4/3, cerchiamo un valore intero (più facile da rappresentare)
      x=4
      y=4/3-16/3=(-12)/3=-4
    4x=4-3y
      y=0
      x=1
  - 2x+y=3
    y=3-2x
      x=0
      y=3
      ====
      x=1
      y=3-2=1

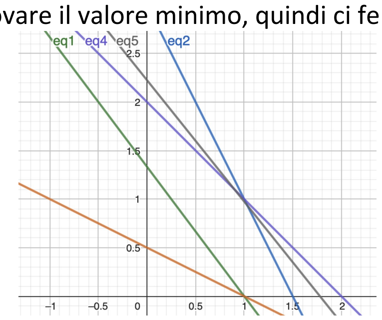
  Fate il procedimento di sopra per ogni equazione, e poi disegnate. Uscirà il seguente grafico:



  Ora, con questo noi possiamo comprendere la nostra regione amissibile.
  Per farlo, per ogni retta disegnata delimitiamo il nostro spazio: se abbiamo ≥ guarderemo a destra, se invece abbiamo ≤ guarderemo a sinistra
  Ed una volta disegnata la regione amissibile, disegnaimo la funzione obiettivo.



  Quella in grigio è la nostra funzione obiettivo, ed ora con il rigello spostiamola in alto/basso a seconda se vogliamo minimizzare, massimizzare e a seconda di dov'è la nostra regione amissibile.
  Noi vogliamo trovare il valore minimo, quindi ci fermeremo appena il nostro rigello toccherà un punto di essa



  E' facile notare che la nostra funzione obiettivo tocca per prima l'intersezione tra l'equazione 2 e l'equazione 4, e quindi questo è il nostro valore minimo.
- Una volta trovato le equazioni dove l'intersezioni fa il minimo, basta metterle a sistema per trovare il punto
  $$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$x = 2 - y$
$2(2 - y) + y = 3 \to 4 - 2y + y = 3 \to -y = -1 \to y = 1$
$x + 1 = 2 \to x = 1$
Quindi il punto di minimo è $(1, 1)$

3) Applicazione dell'ortogonalità
Una voltra trovato il punto minimo, noi dobbiamo riuscire a trovare il restante dei valori a noi desiderati, e per farlo dobbiamo applicare il teorema dell'ortogonalità

a. Preparazione dei dati per l'ortogonalità (riscrizione in forma aumentata)

$\min\ 5y_1 + 4y_2$
$4y_1 + 3y_2 \geq 4$
$2y_1 + y_2 \geq 3$
$y_1 + 2y_2 \geq 1$
$y_1 + y_2 \geq 2$
$y_{1,2} \geq 0$
Il risultato che abbiamo trovato è: $(1, 1)$

- Scriviamo ora il duale in forma aumentata:
$4y_1 + 3y_2 - y_3 = 4$
$2y_1 + y_2 - y_4 = 3$
$y_1 + 2y_2 - y_5 = 1$
$y_1 + y_2 - y_6 = 2$
$y_{1,2,3,4,5,6} \geq 0$

- Da qui ricaviamo le variabili aumentate sostituendo $(1, 1)$:
$4 * 1 + 3 * 1 - y_3 = 4 \to 4 + 3 - y_3 = 4 \to y_3 = 3$
$2 * 1 + 1 - y_4 = 3 \to 2 + 1 - y_4 = 3 \to y_4 = 0$
$1 + 2 * 1 - y_5 = 1 \to 3 - y_5 = 1 \to y_5 = 2$
$1 + 1 - y_6 = 2 \to 2 - y_6 = 2 \to y_6 = 0$

- Riscriviamo la soluzione in forma aumentata:
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b. Applichiamo l'ortogonalità: il prodotto tra le variabili effettive del primale e quelle aumentate del duale (e viceversa) deve essere uguale a 0. Da qui riaveremo quali variabili del primale saranno uguali a 0 (quelle corrisponenti a variabili non nulle del duale):

- Ricordo che i vincoli del problema primale sono i seguenti:
$4x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leq 5$
$3x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 \leq 4$
Ed in forma aumentata:
$4x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 1x_4 + x_5 = 5$
$3x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + x_6 = 4$
- Scriviamo le variabili del primale * le variabili aumentate del duale = 0
$x_1 * y_3 = 0 \to x_1 * 3 = 0 \to x_1 = 0$
$x_2 * y_4 = 0 \to x_2 * 0 = 0 \to x_2 = ?$
$x_3 * y_5 = 0 \to x_3 * 2 = 0 \to x_3 = 0$
$x_4 * y_6 = 0 \to x_4 * 0 = 0 \to x_4 = ?$
- Ed ora facciamo le variabili aumentate del primale * le variabili del duale = 0
$x_5 * y_1 = 0 \to x_5 * 1 = 0 \to x_5 = 0$
$x_6 * y_2 = 0 \to x_6 * 1 = 0 \to x_6 = 0$

- Ci mancano da trovare x_2 e x_4, che ricaviamo sostituendo dalle equazioni dei vincoli:
$$\begin{cases} 4 * 0 + 2x_2 + 0 + 1x_4 + 0 = 5 \\ 3 * 0 + 1x_2 + 2 * 0 + 1x_4 + 0 = 4 \end{cases} \to \begin{cases} 2x_2 + x_4 = 5 \\ x_2 = 4 - x_4 \end{cases} \to \begin{cases} 2 * (4 - x_4) + x_4 = 5 \to x_4 = 3 \\ x_2 = 4 - x_4 \to x_2 = 1 \end{cases}$$

- Infine, possiamo scrivere la soluzione ottima del primale:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$