Roba Brutta

Tuesday, 28 March 2023 13:00

Qualcuno mi spiega come siamo passati da probabilità ad analisi ma più complicata?

1) $X \sim encp(\lambda), \lambda \in (0, +\infty)$
   Calcolare:
   A. f_x
      X è una v.a. con densità di probabilità
      $f_x(x) = \begin{Bmatrix} \lambda e^{-\lambda x} \to x \geq 0 \\ 0 \to x < 0 \end{Bmatrix}$
      $x \in R, F_x(x) = P(X \leq x) = \begin{Bmatrix} 0 \to x < 0 \\ * \to x \geq 0 \end{Bmatrix}$
      $* = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^x = -e^{\lambda x} - \left(-e^{\lambda 0}\right) = 1 - e^{-\lambda x}$
      Quindi
      $F_x(x) = \begin{Bmatrix} 1 - e^{-\lambda x} \to x \geq 0 \\ 0 \to x < 0 \end{Bmatrix}$ →continua su R ed è derivabile a tratti

   B. Dedurre il valore $P\left(\frac{1}{\lambda} < X \leq \frac{2}{\lambda}\right)$
      $= P\left(x \leq \frac{2}{\lambda}\right) - P\left(x \leq \frac{1}{\lambda}\right) = F_x\left(\frac{2}{\lambda}\right) - F_x\left(\frac{1}{\lambda}\right)$
      Sono tutti e due positivi quindi prendiamo $x \geq 0$
      $\Rightarrow 1 - e^{-\lambda x}$
      $= \left(1 - e^{-\lambda * \frac{2}{\lambda}}\right) - \left(1 - e^{-\lambda * \frac{1}{\lambda}}\right) = e^{-1} - e^{-2}$

   C. Calcolare $E[X]$
      $= \int_R x * f_x(x) dx = \int_0^\infty x * \lambda e^{-\lambda x}\, dx$
      $= \lim_{b \to +\infty} \int_0^b x * \lambda e^{-\lambda x}$
      $= \lim_{b \to +\infty} -e^{-\lambda x} x \Big|_0^b - \int -e^{-\lambda x}$
      $= \lim_{b \to +\infty} -e^{-\lambda b} * b + \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \Big|_0^b = -e^{-\lambda b} b - \frac{e^{-\lambda b}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$
      Tutti e due tendono a 0

Quindi $E[X] = \frac{1}{\lambda}$

Madonna questi procedimenti sono UN BOTTO macchinanosi
Praticamente li devi studiare a memoria, mi sembra di essere tornato ad analisi
Vado a puntare una rivoltella dritta dritta sulla mia trachea

2) $X \sim U(0,1)$
$-\infty < a < b < +\infty$
$0 < \lambda < +\infty$
$f_X(x) = \begin{Bmatrix} 0 \rightarrow x < 0 || x > 1 \\ 1 \rightarrow x \in [0,1] \end{Bmatrix}$
(Da teoria delle uniformi)

A. Calcolare $F_x(X)$

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \begin{Bmatrix} 0 \rightarrow x < 0 \\ * \rightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \rightarrow x > 1 \end{Bmatrix}$$

$$* = \int_0^x 1 * dt = t\Big|_0^x = x$$

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \begin{Bmatrix} 0 \rightarrow x < 0 \\ x \rightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \rightarrow x > 1 \end{Bmatrix}$$

B. $T \coloneqq a + (b-a)X$
Calcolare
F_t, f_t
Dedurre $T \sim U(a,b)$

$$F_t(t) = P(T \leq t) = P(a + (b-a)X \leq t)$$

Noi vogliamo ricondurci ad X che è nota

$$P\big((b-a)X \leq t-a\big) = P\left(X \leq \frac{t-a}{b-a}\right) = F_x\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$$

Quindi ora possiamo usare

$$F_x\left(\frac{t-a}{b-a}\right) = P\left(X \leq \frac{t-a}{b-a}\right) = \begin{Bmatrix} 0 \rightarrow \frac{t-a}{b-a} < 0 \\ \frac{t-a}{b-a} \rightarrow 0 \leq \frac{t-a}{b-a} \leq 1 \\ 1 \rightarrow \frac{t-a}{b-a} > 1 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \rightarrow t < a \\ \frac{t-a}{b-a} \rightarrow a \leq t \leq b \\ 1 \rightarrow t > b \end{Bmatrix}$$

Dedurre $T \sim U(a,b)$

1. F deve essere continua su R

Si siccome sia
In t<a -> Continua
In t>b -> Continua
A<t<b -> Continua
Sostituendo a, b troviamo che anche in quei punti è continua

2. F è continua e derivabile a tratti -> Si

Allora $T \sim U(a, b)$
Quindi

$$f_t(t) = \begin{cases} 0 \to t < a \\ \dfrac{1}{b-a} \to t \in [a, b] \end{cases}$$

(In sotto dobbiamo fare la derivata)

C. $Y = X^2$
Calcolare F_Y
Mostrare che Y è a.c.
Calcolare f_y -> Densità

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 \to y < 0 \\ * \to 0 \leq y \leq 1 \\ 1 \to y > 1 \end{cases}$$

$$* = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_x(\sqrt{y}) - F_x(-\sqrt{y})$$

$$F_x(\sqrt{y}) = \sqrt{y}$$

$$-F_x(-\sqrt{y}) = 0$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 \to y < 0 \\ \sqrt{y} - 0 \to 0 \leq y \leq 1 \\ 1 \to y > 1 \end{cases}$$

Mostrare che Y è a.c.

1. E' continua in R? Si
   Y<0 -> Continua
   Y>1 -> Continua
   0<y<1 -> Continua
   E nel rimanente si, basta sostituire
2. E' derivabile a tratti (No 0, 1)

Quindi

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 \to y < 0 || y > 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \to 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

(In sotto dobbiamo fare la derivata)

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

D. $W := -\frac{1}{\lambda}\log X$

Calcolare F_W

Mostrare che $W \sim \exp(\lambda)$

Qui $w \in (0, +\infty)$ con $P = 1$

(Dobbiamo prima calcolare il dominio quindi)

$$F_W(w) = P(W \leq w) = \begin{cases} 0 \to w < 0 \\ * \to w \geq 0 \end{cases}$$

$$* = P\left(-\frac{1}{\lambda}\log X \leq w\right) = P(\log X \geq -\lambda w) = P\left(X \geq e^{-\lambda w}\right)$$

$$= 1 - F_X\left(e^{-\lambda w}\right)$$

Noi abbiamo $e^{-\lambda w}$

Noi sappiamo λ positivo, w positivo, - rende tutto negativo

Quindi

$$= 1 - e^{-\lambda w}$$

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 \to w < 0 \\ 1 - e^{-\lambda w} \to w \geq 0 \end{cases}$$

Mostrare che $W \sim \exp(\lambda)$

1. E' continua su R
2. E' derivabile a tratti

$$f_W(w) = \begin{cases} 0 \to w < 0 \\ \dfrac{d}{dx}\left(1 - e^{-\lambda w}\right) \end{cases} = \begin{cases} 0 \to w < 0 \\ \lambda e^{-\lambda w} \to w \geq 0 \end{cases}$$

3) $-\infty < a < b < +\infty$

X v.a. con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} c \to x \in [a, b] \\ 0 \to x < a || x > b \end{cases}$$

A. Trovare C

Per trovare C dobbiamo avere:

1. $f_X(x) \geq 0 \to \forall x \in R$

   Quindi $c \geq 0$
2. $\int_R f_X(x)\, dx = 1$

   $$1 = \int f_X(x) = \int_a^b c\, dx = cx\Big|_a^b = c(b - a)$$

   $$\Rightarrow c = \frac{1}{b - a} \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a} \to x \in [a, b] \\ 0 \to x < a || x > b \end{cases}$$

Quindi E' una uniforme

$\Rightarrow X \sim U(a, b)$

B. Determinare F_X

L'abbiamo calcolata nell'esercizio prima

$$F_X(x) = \begin{Bmatrix} 0 \to x < a \\ \dfrac{x-a}{x-b} \to a \leq x \leq b \\ 1 \to x > b \end{Bmatrix}$$

C. Calcolare $E[X], Var(X)$

$$E[X] = \int_R f_X(x)\,dx = \int_a^b x * \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int x = \frac{1}{b-a} * \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b$$

$$\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \int_R x^2 f(x) = \int_a^b x^2 * \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} * \frac{x^3}{3}\bigg|_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{1}{b-a} * \frac{(b-a)(b^2+a^2+ab)}{3} = \frac{a^2+b^2+ab}{3}$$

$$= \frac{a^2+b^2+ab}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2+ab}{6} - \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$$

$$= \frac{4a^2+4b^2+4ab-3a^2-3b^2-6ab}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

4) $X \sim U(0,3)$

Definiamo gli eventi

$A = \{X \leq 2\}, \qquad B = \{X \geq 1\}$

A. A, B sono indipendenti

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$P(A \cap B) = P(1 \leq X \leq 2) = \frac{1}{3}$$

$$P(A)P(B) = P(X \leq 2)P(X \geq 1)$$

$$= F_X(2)\big(1 - F_X(1)\big) = \frac{2}{3} * \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{4}{9} \neq \frac{1}{3}$$

Quindi non sono indipendenti

B. A, B sono disgiunti

No siccome $P(A \cap B) \neq 0 \to P(A \cap B) = P(1 \leq X \leq 2)$

$$F_X(2) - F_X(1) = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3} > 0$$

C. $P(A|B) = \dfrac{1}{2}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(1 \leq X \leq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{1}{2}$$

D. $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

$A \cup B = \{X \leq 2\} \cup \{X \geq 1\} = \Omega$

Okay non comprendere questo da parte mia è stato stupido

5) Sia X una funzione di ripartizione

$$F_X(t) = \begin{Bmatrix} 0 \to t < 0 \\ \frac{1}{50}t^2 \to 0 \leq t < 5 \\ -\frac{1}{50}t^2 + \frac{2}{5}t - 1 \to 5 \leq t < 10 \\ 1 \to t \geq 10 \end{Bmatrix}$$

a. X è assolutamente continua e testare la densità

Notiamo che è continua e derivabile a tratti

Ora per calcolare la densità dobbiamo fare la derivata (credo?)

$$f_X(t) = \begin{Bmatrix} \frac{d}{dx}(0) = 0 \to t \leq 0 \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{50}t^2\right) \\ \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{50}t^2 + \frac{2}{5}t\right) \\ \frac{d}{Dx}(1) = 0 \end{Bmatrix}$$

$$f_X(t) = \begin{Bmatrix} 0 \to t \leq 0 \\ \frac{1}{25}t \\ -\frac{1}{25}t + \frac{2}{5} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b. Mostrare che la s.a- pende, con probabilità 1, valori in un intervallo (a, b) e determinarlo

Comprendiamo l'intervallo dal fatto che

Abbiamo 0 dopo 10 e prima di 0

Quindi per forza l'intervallo $(a, b) = (0, 10)$

Ora dobbiamo dimostrarlo

$$\int_0^{10} f_X(t) = \int_0^5 f_X(t) + \int_5^{10} f_X(t) = \cdots = 1$$

6) Componente prodotto in una, e viene prodotto su 2 linee
Il tempo di vita è esponenziale e rispettivamente $m, \lambda, m > \lambda$
E anche che le proporzioni di prodotto (delle due linee)
è definito come $p, q, p + q = 1$

a. Dato un pezzo a caso ed indichiamo il suo tempo di vita come T
Qual è la legge di T? Quanto vale E[T]?

La mia reazione: ???
Devo per forza guardare la soluzione lol, non c'ho capito un cavolo.
$P1 \coloneqq$ "Prima linea, aka tipo 2"
$P2 \coloneqq$ "Seconda linea, aka tipo 2"
$T1 \sim \exp(\lambda)$
$T2 \sim Exp(m)$
E sappiamo che
$P(p1) = p, \qquad P(p2) = q$

Noi vogliamo calcolare la legge di T, quindi
$F_T(t) = P(T \leq t)$
Qui però la probabilità si dirama in 2 parti:
Linea 1 e linea 2
Noi sappiamo che p+q=1 quindi
$P(P1) + P(P2) = 1$
Quindi la nostra funzione sarà p1 + p2
$P(\{T \leq t) \cap P1) + P(\{T \leq t) \cap P2)$
Noi qui vogliamo nella prima parte tutti i tempi che sono dentro a P1
E nella seconda parte tutti i tempi che sono dentro a P2
Ora sviluppiamo
$P(T \leq t|P1)P(P1) + P(T \leq t|P2)P(P2)$
Possiamo sostituire
$P(T \leq t|P1)p + P(T \leq t|P2)q$
$(1 - e^{-\lambda t})p + (1 - e^{-mt})q$
Ed ora risolviamo
$p + q - e^{-\gamma t}p - e^{-mt}q = 1 - e^{-\lambda t}p - e^{-mt}q$
Quindi finalmente la sua densità è
$$f_T(t) = \begin{Bmatrix} 0 \rightarrow t < 0 \\ \lambda p e^{-\lambda t} + mqe^{-mt} \end{Bmatrix}$$
(Non mi chiedete dove sono usciti quel gamma ed m)
Ed ora finalmente una formula nota

$E[T] = \int_{-\infty} tf_T(t) = \int_0 t\left(\lambda e^{-\lambda t}p + me^{-mt}q\right)$

Spero che non uscirà sta cosa in esame

b. Se il pezzo è funzionante a tempo s, qual è la probabilità che provenga dalla prima linea

$P(P1|T > s) = \frac{P(T > s|P1)P(P1)}{P(T > s)}$

T > s vuol dire, noi determiniamo s il tempo attuale, e T il tempo di malfunzionamento

Dobbiamo calcolare $P(T > s)$

E questo dipende da quale linea, quindi

$P(T > s|P1)P(1) + P(T > s|P2)P2$

Okay sto esercizio non l'ho capito.