Programmazione lineare

Tuesday, 26 September 2023 09:54

- $opt\ f(x) = c^T x\ (lineare)$
- Nella programmazione lineare intera abbiamo che $x \in Z^n$
- Nella programmazione non lneare può essere lineare oppure non lineare
  - Richiede che almeno 1 vincolo non è lineare per essere non lineare
- Esempio pratico
  - Vogliamo organizzare una festa e dobbiamo preparere 10 litri di Cuba Libre
    - Rum chiaro + cola + limone
      Costo:

Ingrediente	Disponibilità	Costo x litro
Rum chiaro	6	15
Cola	15	1
Limone	3	2.5

    - Sappiamo che ci deve essere almeno 25% di rum chiaro, 50% di cola e non più di 10% di limone
    - Come possiamo fare si che possiamo minimizzare la spesa?
      - Indichiamo R, C, L come variabili decisionali
      - Scriviamo i vincoli
      1) Le variabili sono per forza positive e sono continue
      2) Abbiamo una disponibilità massima
      3) Abbiamo bisogno almeno 10 litri
      4) Le dosi ideali sono: 25% rum chiaro, 50% cola, massimo 10% limone

      Iniziamo a scrivere:
      1) $R \geq 0, C \geq 0, L \geq 0 \ \rightarrow R, C, L \in R^+$
      2) $R \leq 6, C \leq 15, L \geq 3$
         a) Fondiamo i due di sopra
            $0 \leq R \leq 6$
            $0 \leq C \leq 15$
            $0 \leq L \leq 3$
      3) $(R + C + L) \geq 10 \rightarrow R + C + L - 10 \geq 0$
         a) Trasformiamolo in forma matriciale
            $\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$

$$[1\ 1\ 1]\begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} - 10 \geq 0$$

E quindi

$$a_1^T = [1\ 1\ 1]$$

$$x = \begin{bmatrix} R \\ C \\ L \end{bmatrix}$$

$$b_1 = 10$$

4) $R \geq 0.25 * (R + C + L)$
$C \geq 0.5 * (R + C + L)$
$L \leq 0.1 * (R + C + L)$

- Ora scriviamo la nostra funzione
  $(15 * R + 1 * C + 2.5 * L)$
  Noi dobbiamo scrivere la nostra funzione come qualcosa che vogliamo minimizzare
- La nostra equazione ora è:

$$\min_{R,C,L}(15 * R + C + 2.5 * L)$$

$$s.a.\ \begin{array}{c} R + C + L - 10 \geq 0 \\ R \geq 0.25 * (R + C + L) \\ C \geq 0.5 * (R + C + L) \\ L \leq 0.1 * (R + C + L) \\ 0 \leq R \leq 6 \\ 0 \leq C \leq 15 \\ 0 \leq L \leq 3 \end{array}$$

- La windor Glaa CO produce vetri di elevata qualità
  Ha 3 impianti:
  1) Produce le cornici di alluminio e altre componenti metalliche
  2) Produce le cornici in legno
  3) Produce vetri

  Ora il Manager vuole liberarsi di 1 dei 3 e propone 2 prodotti
  1) Una finestra di vetro che usa impianto 1 e 3
  2) Una finestra doppia apertura che usa impianto 2 e 3

  Dobbiamo determinare quale tasse di produzione devono essere adottati per i 2 prodotti per massimizzare il profitto totale, e bisogna rispettare i vincoli
  - I lotti sono fatti da 20
  - I tassi di produzioni vengono espressi come numero di lotti prodotti settimanalmente

  Informazioni specifiche:

	Tempo produzione per lotto	Tempo produzione disponibile settimanale
	Prodotto	-

Impianto	1 | 2	-
1	1 | 2	4
2	1 | 0	12
3	3 | 2	18
Profitto	3000 | 5000	-

Quindi abbiamo
$x_1 = numero\ di\ lotti\ prodotti\ 1\ per\ settimana$
$x_2 = numero\ di\ lotti\ di\ prodotto\ 2\ per\ settimana$
E noi vogliamo massimizzare il nostro profitto
$\max Z = 3 * x_1 + 5 * x_2$
(è espresso in migliaia, quindi 3 è 3000)
Scriviamo i vincoli:

1) Il numero di lotti prodotti massimo settimanale dall'impianto 1 è 4
2) L'impianto impiega 2 ore settimanali per prodotto 2 ed ha massimo 12 ore
3) L'impianto 3 impiega 3 ore per prodotto 1, 2 ore per prodotto 2 ed ha masismo 18 ore
4) Ovviamente non possiamo produrre prodotti negativi

Scritti meglio:

1) $x_1 + 0 * x_2 \leq 4$
2) $0 * x_1 + 2 * x_2 \leq 12$
3) $3 * x_1 + 2 * x_2 \leq 18$
4) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Siccome abbiamo solamente 2 variabili possiamo usare la soluzione grafica
Ed ha 2 passi:

1) Disegnare
   Ci possono capitare 2 casi:
   1) Abbiamo una retta
      $g_i(x) = 0$
      $a_1 * x_1 + a_2 * x_2 \geq b$
   2) Abbiamo un semipiano
      $g_i(x) \geq 0 \mid g_i(x) \leq 0$
      $a_1 * x_1 + a_2 * x_2 \leq b$

   Dopo aver il piano, facciamo i vincoli
   - $x_1 \leq 4$
   - $2 * x_2 \leq 12 \rightarrow x_2 \leq 6$
   - $3 * x_1 + 2x_2 \leq 18$

- $3 * x_1 + 2x_2 \leq 18$

    Qui facciamo la retta e tracciamo la retta

Quindi, quale dei 2 semipiani dobbiamo decidere?

    Per comprenderlo, prendiamo il punto 0, 0
    Prendendolo comprendiamo se siamo dentro o fuori dal semipiano
    E comprendiamo che la regione ammissibile è dentro alla nostra figura

Detto questo, dobbiamo comprendere come Z si relazione con x_2 x_1

$Max\ Z = c_1 * x_1 + x_2 * x_2 + \cdots + x_n * x_n$
$\rightarrow funzione\ obiettivo$

$$a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \cdots + a_{1n} * x_n \leq b_1 \rightarrow vincolo$$
$$a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + \cdots + a_{2n} * x_n \leq b_2 \rightarrow vincolo$$

....

Se la regione ammissibile corrispondono ad un poliedro convesso in R^3

La regione ammissibile può essere limitata (politopo) o illimitata

Disegnaimo la retta Z e poi la spostiamo fino a che non raggiungiamo un vertice del poligono

- In alto se è da massimizzare
- In basso per minimizzare

2) Ottimali

Possono capitare 4 casi:

- Ammette 1 unica soluzione
- Ammette infinite soluzioni ottime
- Non ammette soluzioni siccome soluzione vuota
- Non ammette soluzione siccoe è infinito