LCS

Monday, 9 October 2023 08:51

- Obiettivo:
  Trovare la sottosequenza più lunga in comune tra 2 sequenze
  Es:
  X=<1, 7, 2, 3, 5, 9>
  Y=<3, 1, 10, 5, 16, 9, 2>
  Dobbiamo trovare una sottosequenza che è data dai simboli della sequenza pres
  compaiono
  Es sottosequenze di X (non massime, non in comune): <1, 3, 5, 9>, <5, 9>,
  E noi dobbiamo trovare una sottosequenza più comune e più lunga, es:
  <1, 5, 9>, <3, 5, 9>
- Spiegazione verbosa
  Noi, date 2 sequenze possiamo dire questa cosa:
  - Se gli ultimi valori sono uguali, bene! Sicuramente ci serviranno in futuro, contro
    valori precedenti se sono uguali: $S_{i-1,j-1}$
  - Se gli ultimi 2 valori non sono uguali, prima controlliamo se lo sono per $S_{i-1,j}$ e p
    Cos'è S?
    S è il nostro risultato che ha come indice I il valore nella nostra X e valore J il valo
    nostra J
    Quindi diremmo $S_{1,1} = 1 == 3? \rightarrow False$
    Poi dobbiamo prendere il massimo tra $S_{i-1,j}, S_{i,j-1}$
- Risoluzione:
  1) Funzione ricorsiva
     Possiamo scrivere intanto:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & i = 0 \; v \; j = 0 \\ 1 + c_{i-1,j-1} & X_i = Y_i \\ \max(c_{i,j-1}, c_{i-1,j}) & X_i \neq Y_j \end{cases}$$

     Ora scriviamolo in maniera ricorsiva

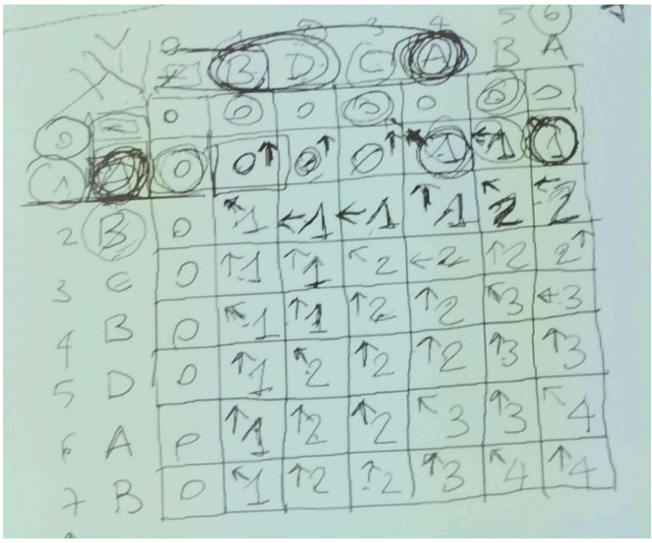
```
LCS-R(X, Y, i, j):
	If i=0 v j = 0:
		Return <>
	Else:
		If Xi = Yj:
			Return LCS-R(X, Y, i-1, j-1)
		Else:
```

```
            Return max(LCS-R(X, Y, i-1, j), LCS-R(X; Y, i, j-1))
```

2) Salvataggio dei dati
Per salvare i dati dobbiamo metterli in una matrice N*M
Che rappresenteranno i risultati dei nostri indici
E scrivendolo con questi avremo:

```
Def LCS(X; Y, i, j):
    If arr[i, j] != undefined: return arr[i, j]:
    If i==0 or m==0:
        Result = 0
    Else if X[i] == Y[j]:
        Result = 1 + LCS(X, Y, i-1, j-1)
    Else: // X[i] != Y[i]
        Result = max{LCS(X, Y, i-1, j), LCS(X, Y, i, j-1)}
    Arr[i, j] = Result
    Return result
```

Facendo questo si creerà la seguente tabella:



Da notare la direzione delle frecce:

Se $X[i] == Y[j]$
Allora andremo in diagonale
Senò potremmo andare o dall'altro oppure da sinistra

Per stampare i risultati:

```
Print-LCS(X, B, i, j):
    If i!= 0 ^ j!= 0:
        If B[i, j] = "\": # Freccia obliqua
            Print-LCS(X, B, i-1, j-1)
            Print(Xi)
        Else:
            If B[i, j] = "/\": #Freccia alta
                Print-lcs(X, B, i-1, j)
            Else: # Freccia a sinistra
```

```
Print-lcs(X, B, i, j-1)
```

3) Bottom-up solution

```
L-LCS-I:
    M = Length(X)
    N = Length(Y)

    For j=0 to n:
        C[0, j] = 0
    For i=1 to m
        C[i, 0]=0

    For i=1 to m:
        For j=1 to n:
            If Xi=Yj and Xi > C[i-1, j-1]: # Quell'AND serve per farlo ordinat
                C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1
                B[i, j] = (i-1, j-1) # Freccia da dove arriviamo
            Else:
                C[i, j] = max(C[i-1, j], C[i, j-1])
                If C[i-1, j] >= C[i, j-1]:
                    B[i, j] = (i-1, j)
                Else:
                    B[i, j] = (i, j-1)



    # Ricostruiamo
    Output = []
    I, j = N, M
    Idx = 0
    While i!=0 and j!=0:
        If C[i, j] != C[B[i, j, 0], B[i, j, 1]]:
            Output[idx++] = X[i-B[i, j,0]]
        I, j = B[i, j]
```

- Proprietà sossostruttura ottima
  - $x_i = y_j$
    Allora
    $\mathrm{z_k} = x_i = y_j, \mathrm{Z}_{\mathrm{k-1}}^{\mathrm{i,j}} = \mathrm{Z}(i-1, j-1)$
  - $x_i \neq y_j$ e $z_k \neq x_i$
    Allora
    $Z^{i,j} = Z^{i-1,j}$

$Z_k = Z$

  - $x_i \neq y_j$ e $z_k \neq y_j$
    Allora
    $Z_k^{i,j} = Z_k^{i,j-1}$

- Dimostrazione
  1) Assumo che $x_i = y_j$

     Devo far vedere che $z_k = x_i = y_j$^$Z_{k-1}^{i,j} = Z^{n-1,j-1}$

     Ragioniamo per assurdo.

     Dobbiamo dimostrare o una o l'altra non vale: (a), (b)

     A. $z\_k \neq x\_i \ || \ z\_j \neq y_j$
        Supponiamo che non vale
        - $se\ z\_k \neq x\_i$
          Alora
          $Z_k^{i,j}\ |x_i$ è $una\ LCS\ di\ X_i, Y_j$
          Siccome $Z_k^{i,j}$ per ipotesi è una sottosequenza
          E siccome $x_i = y_i$
          Allora è una LCs di X_i, Y_i
          E quindi abbiamo dedotto che $Z_k^{i,j}$ non è soluzione del problema (i, j)
          Siccome $Z_k^{ij}|x_i > Z_j^{ij}$
          Quindi è una contraddizione

        Per l'altro
        - $z_j \neq y_j$ è $identica$

     B. $Z_{k-1}^{ij} \neq Z_k^{i-1,j-1}$
        E quindi non non è soluzione del sottoproblema (i-1, j-1)
        Chiamiamo W la soluzione del sottoproblema (i − 1, j − 1)
        (Che è la stessa cosa di dire $Z_j^{i-1,j-1}$)
        $W|x_i$ è $una\ sottosequenza\ di\ X_i, Y_j$
        Questo siccome $x_i = y_i$
        Noi sappiamo che W ha lunghezza > k-1
        $W|x_i\ \ ha\ lunghezza\ > 1$
        E quindi $Z_k^{i,j}$ non può essere soluzione della sottosequenza (i, j)
        Contraddizione

  2) Assumiamo $x_i \neq y_j$

     Dimostriamo per assurdo che se $z_j \neq x_i$

     Allora
     - $Z_k^{ij} \neq Z_k^{i-1,j}$

     Sia allora W una soluzione del sottoproblema (i-1, j)
     - Noi sappiamo che Z_j^{ij} ha lunghezza k
     - E quindi W ha lunghezza > k

E quindi W ha lunghezza > k
Se però W è una soluzione di (i-1, j) allora W è anche sottosequenza comu
E siccome ha lunghezza > k
Z_k^{ij} non può essere una soluzione del sottoproblema (i, j) siccome W è più
Quindi contraddizione

-