Vettori aleatori

Monday, 3 April 2023   13:06

- Ora abbiamo studi di un array di variabili aleatorie
  Dati
  $$\begin{Bmatrix} X: \Omega \to R \\ Y: \Omega \to R \end{Bmatrix}$$
  $(X, Y): \Omega \to R^2$
  Come facciamo però a studiarli?
  Si classificano

- Vettori aleatori discreti
  Contenuti in un insieme finito numerabile
  $$X(\Omega) = \{x_i\}, \qquad Y(\Omega) = \{y_i\}$$
  E per studiarlo si introduce
  - Densità discreta congiunta
    $P_{(X,Y)}(x_i, y_i) \coloneqq P(X = x_i, Y = y_i)$
  - Densità discreta marginale
    $P_x^{x_i}\ e\ P_{Y}{}_i^y$
    $$P_X{}_i^x = \sum_{y_i} P_{(X,Y)}^{(x_i,y_i)}$$
  - $E[X * Y] = \sum_{x_i} \sum_{y_i} x_i * y_i * p_{(X,Y)}^{(x_i y_i)}$
- Vettore aleatorio assolutamente continuo
  Se esiste una funzione $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$
  Allora detta densità congiunta di X, Y

  Se (X, Y) è continuo, allora X, Y sono continue
  $$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y)$$
  $$E[X * Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x * y * f_{X,Y}(x, y)$$

- Indipendenza
  Se abbiamo X, Y
  Diciamo che sono indipendenti se
  $P(X \in [s, t], Y \in [u, v]) = P(X \in [s, t])P(Y \in [u, v])$

$= P(X \in [s,t] | Y \in [u,v]) = P(X \in [s,t])$

Aka qualunque siano s, t, l'informazione di u, v non cambierà l'informazione

Aka conoscere l'informazione di Y non cambierà la distribuizione di Y

E se sono indipendenti

$P_{X,Y}^{x_i,y_i} = P_X^{x_i} * P_Y^{y_i}$

$f_{X,Y}^{x,y} = f_X^x * f_Y^y$

$E[X * Y] = E[X] * E[Y]$

- Covarianza e correlazione

  $m_X = E[X], \qquad m_y = E[Y]$

  $Cov[X,Y] \coloneqq E[(X - m_X) * (Y - m_Y)]$

  $\coloneqq E[X * Y] - E[X]E[Y]$

  Proprietà:
  - $Var[X] = Cov[X,X]$
  - $Cov[X,Y] = Cov[Y,X]$
  - $Cov[X,c] = 0$
  - $Cov[\alpha X,Y] = \alpha Cov[X,Y]$

    $Cov[X+Z,Y] = Cov[X,Y] + Cov[Z,Y]$
  - $Var[aX] = Cov[aX,aX] = aCov[X,aX] = a^2Cov[X,X] = a^2Var[X]$

  Ora arriviamo alla formula importnate

  $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X,Y]$

  E se sono indipendenti

  $Cov[X,Y] = 0$

  Quindi $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$

  Se sono indipendenti

- Coefficiente di correlazione lineare

  $$p[X,Y] = \frac{Cov[X,Y]}{SD[X] * SD[Y]} = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]} * \sqrt{Var[Y]}}$$

  Questa è una versione più normalizzata della covarianza

  $-1 \leq p[X,Y] \leq +1$

  E se Cov[X, Y] = 0, X Y sono scorrelate

  Quindi

  X, Y indipendenti $\Rightarrow X, Y$ scorrelate

  Però non è vero il contrario

Esempio

Esempio

1) $X :=$Faccia prima moneta

$Y :=$ Faccia della seconda moneta

$Z :=$ Numero totale di testa

$X(\Omega) = \{0, 1\}$

$Z(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$P_{(X,Z)}^{x,z} = P(X = x, Z = z)$

(tabella)

$P_{X,Z}^{0,0} = P(X = 0, Z = 0) = \frac{1}{4}$

Se la prima moneta è testa, la seconda moneta non può essere croce

$P_{X,Y}^{0,0} = P(X = 0, Z = 2) = 0$

2) Interviste casuali

$X :=$ Candidato

$Y :=$ Età dell'elettore