Discreta

lunedì 13 marzo 2023 13:10

- E' una tipologia di variabile aleatoria dove
  L'insieme è un numero finito

- Ad ogni variabile aleatore discreta si associa:
  Densità discrata : $PX^{(x_i)} \coloneqq P(X = x_i)$
  Con le seguenti proprietà:

  - PX^{x_i} è una funzione $R \in [0, 1]$
  - $PX^{(x)} = P(X = x) = 0$ se x non è uno dei valori $x_i \in X$
  - $PX^{(x_i)} \geq 0, \quad \forall i$
  - $\sum PX^{(x_i)} = 1$

- Formule:
  - Valore medio (Media pesata, aka non tutti hanno la stessa importanza)

    $$E[X] \coloneqq \sum x_i * Px^{(x_i)}$$

    $$= x_1 * P(X = x_1) + \cdots + x_n * P(X = x_n)$$

    E nota che

    $$x_{\bar{N}} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{N} \simeq E[X]$$

    Questa si chiama la legge dei grandi numeri

    $$E[f(x)] = \sum f(x_i) * PX^{x_i} = \sum f(x_i) * P(X = x_i)$$

    Quindi

    $$E[X^2] = \sum x_i^2 * P(X = x_i)$$

    Proprietà:
    - $E[X + c] = E[X] + c$
    - $E[cX] = c * E[X]$
    - $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
      -> Qui abbiamo 2 variabili aleatorie
  - Varianza

- Varianza
  $Var[X] \coloneqq E[(X-m)^2]$
  $m = E[X]$
  Proprietà:
    - $Var[X+c] = Var[X]$
    - $Var[cX] = c^2 * Var[X]$
- Deviazione standard
  $SD[X] \coloneqq \sqrt{Var[X]} = E[X^2] - E[X]^2$

- Dipendenza tra variabili
  Siano X, Y due variabili aleatore che dipendono dallo stesso esperimento
  Quanto vale $Var[X+Y] = ?$
  Risposta: Dipende da come sono legate
  - Indipendenti, allora $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$
    $SD[X+Y] = \sqrt{SD[X]^2 + SD[Y]^2}$
    Rendiamo il tutto più matematico
    $X, Y =$ indipendenti, allora $Var[X] = Var[Y] = \phi^2$
    Allora
    $Var[X+Y] = 2\phi^2 \Rightarrow SD[X+Y] = \sqrt{2}\phi$
  - Dipendenti
    Qui si fanno i calcoli, es
    $Y = X \Rightarrow Var[Y] = Var[X] \Rightarrow Var[X+Y] = Var[2X] = 4Var[X]$
    $Y = -X \Rightarrow Var[X-X] = Var[0] = 0$

Esempio:

- $X \coloneqq$ numero figli maschi
  Qual è la densità discreta dato che:
  $X(\Omega) = \{0,1,2\}$
  $\Rightarrow PX^0 = \frac{1}{4}, PX^1 = \frac{1}{2}, PX^2 = \frac{1}{4}$
  Valore medio:
  $E[X] = 0 * PX^0 + 1 * PX^1 + 2 * X^2 = 1$
  Ricordo:
  $$P(\{mf\}) = P(\{fm\}) = PX^1 = \frac{1}{4} * 2 = \frac{1}{2}$$
  Praticamente noi stiamo associando ad ogni valore di X un valore di x
  E stiamo dicendo che {mf} = {fm}=1
  Quindi la probabilità che esce 1 è sia se estraiamo {mf} che {fm}
  Siano $Z \coloneqq X - 1, W \coloneqq 2x$

$E[Z] = E[X] - 1 = 0, E[W] = 2E[X] = 2$
Ed ora varianza
$E[x^2] = 1^2 * Px^1 + 2PX^2 = 1 * \frac{1}{2} + 4 * \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$
$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{2}$
$SD[X] = \frac{1}{\sqrt{2}}$

- Lancio una moneta truccata con $p \in [0, 1\}$
  Definiamo $X :=$ numero di teste
  Iniziamo a dichiarare le nostre variabili aleatorie
  $\Omega = \{tt, tc, ct, cc\}$
  $P(\{tt\}) = p^2, \qquad p(\{tc\}) = P(\{ct\}) = p(1-p), \qquad p(\{cc\}) = (1-p)^2$
  $X(tt) = 2, \qquad X(tc) = X(ct) = 1, \qquad X(cc) = 0$
  Quindi
  $Px^{(2)} = p^2, \qquad Px^{(1)} = P(tc) + P(ct) = 2 * p(1-p),$
  $Px^{(0)} = (1-p)^2$

  X=Lancio dado regolare
  $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}, PX^x = \frac{1}{6} \forall x \in X(\Omega)$
  $E[X] = \sum^6 x_i * \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$

- Esempio pratico
  Una pasticceria prepara ogni giorno 3 torte, e ne è uscito questo:
  - 20% dei giorni nessuno chiede torta
  - 30% giorni 1 torta chiesta
  - 35% dei giorni 2 torte
  - Il restante 3 o più giorni

  1) $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
     $PX^{(3)} = P(X = 3) =$0,2 = nessuno vuole una torta
     $PX^{(2)} = P(X = 2) = 0{,}3 =$ 1 cliente compra una sacca
     $PX^1 = P(X = 1) = 0{,}35 =$ 2 clienti comprano
     $PX^0 = P(X = 0) = 1 - 0{,}2 - 0{,}3 - 0{,}35 = 0{,}15 =$ 3 o più torte

     Ora risolviamo:
     Probabilità che le torte vendute ogni giorno è pari
     $q = P(x\ pari) = P(X = 0\ ||\ X = 2) = P(\{X = 0\}\ u\ \{X = 2\})$
     $= PX^0 + PX^2 = 0{,}15 + 0{,}3 = 0{,}45 = 45\%$