Esercizi

giovedì 9 giugno 2022 18:33

1) Sia f : R->R
$f(x) = (x^2 - x)e^{-x}$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty * e^{-\infty} = +\infty * 0 = 0$
-> Asintoto orizzontale y = 0, x->∞
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty * e^{\infty} = \infty$

Punto minimo:
$f'(x) = (2x-1)e^{-x} - (x^2 - x)e^{-x}$
$= 2xe^{-x} - e^{-x} - x^2e^{-x} + xe^{-x}$
$= e^{-x}(-x^2 + 3x - 1)$
$= \dfrac{-x^2 + 3x - 1}{e^x} = 0$
$e^x > 0 \to Vx$
$-x^2 + 3x - 1 = 0$
$D = 9 - 4 = 5$
$x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{-2}$
$x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{-2} \to massimo$
$x_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{-2} \to minimo$

Equazione retta tangente $f'(-1)$
$x_0 = -1$
$y_0 = (-1^2 + 1)e = 2e$
$m = \dfrac{- -1^2 + 3 * -1 - 1}{e^{-1}} = \dfrac{-1 - 3 - 1}{e^{-1}} = -5e$
$y - 2e = -5e(x + 1)$
$y = -5ex - 3e$

Trovare la convessità maggiore verso $+\infty$
$f'(x) = \dfrac{-x^2 + 3x - 1}{e^x}$
$f''(x) = \dfrac{(-2x + 3)e^x - (-x^2 + 3x - 1)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x(-2x + 3 + x^2 - 3x + 1)}{e^{x2}}$
$= \dfrac{x^2 - 5x + 4}{e^x}$
$x^2 - 5x + 4 > 0$
$D = 25 - 16 = 9$
$x_{12} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \to 4$

Trovare:
$\int_0^1 \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{(x^2 - x)e^{-x}}{x} = \dfrac{e^{-x}x^2 - xe^{-x}}{x} = \int e^{-x}x - e^{-x} = \int xe^{-x} - \int e^{-x}$
$x \to 1$
$e^{-x} \to -e^{-x}$
$-xe^{-x} - \int -e^{-x} + e^{-x}$
$-xe^{-x} - e^{-x} + e^{-x} = xe^{-x}$
$[-xe^{-x}]_0^1 = -\dfrac{1}{e}$

2) Data la serie
$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$
Converge se $-1 < q < 1$
Diverge se $q \geq 1$

La seguente serie converge se e solo se:
$\sum_{n=0}^{+\infty} (2e^x - 3)^n$

$-1 < 2e^x - 3 < 1$
$2e^x - 3 < 1 \rightarrow 2e^x < 4 \rightarrow e^x < 2 \rightarrow x < \ln 2$
$2e^x - 3 >$ -1 $\rightarrow 2e^x > 2 \rightarrow e^x > 1 \rightarrow e^x > \ln 1 \rightarrow x > 0$
Diverge se: $x \geq \ln 2$

3) Date 2 serie an e bn, cosa significa che an = o(bn)
$a_n = o(b_n) \rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
Quindi, questo significa che b_n è infinitisamente più grande di a_n
Nota per me: $a_n = o(b_n) \rightarrow a_n < b_n$
$a_n = O(b_n) \rightarrow a_n > b_n$

4) Dati $a_n = \frac{n^2+\ln n}{n\sqrt{n}+e^{-n}}, b_n = \frac{n\sqrt{n}+\ln n}{n+e^n}$
Stabilire chi è o piccolo
$a_n ?= o(b_n) \rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \rightarrow \frac{n^2+\ln n}{n\sqrt{n}+e^{-n}} * \frac{n+e^n}{n\sqrt{n}+\ln n} = \frac{(n^2+\ln n)(n+e^n)}{(n\sqrt{n}+e^{-n})(n\sqrt{n}+\ln n)}$
$\frac{n^3+n^2e^n}{n^3} = n^2e^n \rightarrow +\infty$
Andando a logica, l'opposto sarebbe 0
Quindi
$b_n = o(a_n)$