Teoria della dualità

Tuesday, 24 October 2023 09:34

- Serve per comprendere come il metodo del simplesso risolve
- Ogni problema di programmazione lineare ne esiste uno corrispondente chiamato duale
  - La correlazione tra problema duale e problema primale sono utili
  - Es. Concetto prezzi ombra
  - Analisi sensitività = Fa riferimento alle 4 assunzioni della programmazione lineare
    Es.
    $\max Z = 3x_1 + 5x_2$
    $x_1 \leq 4$
    $2x_2 \leq 12$
    $3x_1 + 2x_2 \leq 18$
    $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

    Notiamo che i parametri sono ipotesi del futuro
    Quindi ciò che succederà nel futuro potrà essere diverso dal teorizzato
    Ed i valori di alcuni parametri dipendono dalle decisioni manageriali
- Comprendiamo cos'è il problema duale

  $$primale: \max Z = \sum c_j * x_j$$

  $$duale: \min W = \sum b_i * y_i$$

  $$primale: \sum a_{ij} * x_j \leq b_i$$

  $$duale: \sum a_{ij} * y_i \geq c_j$$

  $primale: x_i \geq 0$
  $duale: y_j \geq$
  Quindi:
  - Da massimo a minimo
  - Coefficenti del primale diventano temini noti del duale
  - Coefficenti del duale diventano temini noti del primale
  - Coefficenti do ogni variabile nei vincoli dei primale diventano i

corrispondenti del duale

Quindi:

C = Output

Y = Variabili per ottenere gli output

- Dimenticato qualcosa
- Un altra rappresentazione: forma algebrica
  - Primale:

    $\max Z = 3x_1 + 5x_2$

    $1 * x_1 \leq 4$

    $2x_2 \leq 12$

    $3x_1 + 2x_2 \leq 18$
  - Duale:

    $\min W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$

    $1y_1 + 3y_3 \geq 3$

    $2y_2 + 2y_3 \geq 5$
  - Primale

    $$\max Z = [3, 5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

    $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$
  - Duale

    $$\min Z = [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

    $$[y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$
- E' possibile passare da una forma in maniera tabellare:

			Problema Primale					
			coefficiente di				termine noto	
			x_1	x_2	...	x_n		
Problema Duale	coefficiente di	y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\leq b_1$	coefficienti della funzione obiettivo (minimizzazione)
		y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$\leq b_2$	
		...	...	...	...	...	$\leq \cdots$	
		y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$\leq b_m$	
	termine noto		VI c_1	VI c_2	VI ...	VI c_n		
			coefficienti della funzione obiettivo (massimizzazione)					

- Leggere righe/colonne

	X1	X2	
Y1	1	0	*<=4*
Y2	0	2	*<=12*
Y3	3	2	*<=18*
	VI 3	VI 5	

Notiamo che
I vincoli i sono fortemente correlati ai vincoli j
E che la funzione obiettivo ai termini noti

- Origine del duale
  - I valori delle variabili slack diventeranno la nostra y

ITERAZIONE	VARIABILE DI BASE	EQ	COEFFICIENTE									TERMINE NOTO
			Z	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}	
OGNI	Z	(0)	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\cdots$	$z_n - c_n$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	W

Trasformaimo il nostro solito
Formukla:
$\max Z = 3x_1 + 5x_2$
$x_1 \leq 4$
$2x_2 \leq 12$
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$
Ora facciamo l'latro:

$\min W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$

Notiamo che abbiamo preso tutti i valori dopo <=
Ora facciamo le equazioni

$z_1 = y_1 + 3y_3$

$z_2 = 2y_2 + 2y_3$

Questo lo possiamo notare guardiando le colonne delle nostre equazioni

- Il problema duale è una diversa formulazione
  - Il risultato sarà lo stesso tra i due
  - I valori delle variabili stack forniscono i prezzi ombra
- Esempio

iterazione	Problema Primale (coefficiente)						Problema Duale					W
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	y_1	y_2	y_3	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	
0	[−3,	−5	0,	0,	0	0]	0	0	0	−3	−5	0
1	[−3,	0	0,	$\frac{5}{2}$,	0	30]	0	$\frac{5}{2}$	0	−3	0	30
2	[0,	0	0,	$\frac{3}{2}$,	1	36]	0	$\frac{3}{2}$	1	0	0	36

$z_1 - c_1 = y_1 + 3y_3 - 3$

Aka ho preso

$y + 3y_3 \geq 3$

Ci ho fatto questo
$y + 3y_3 - (z_1 - c_1) = 3$
E poi ho portato a destra
$z_1 - c_1 = y_1 + 3y_3 - 3$

Iterazioni:

0) Abbiao la soluzione $(y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 0)$
   Non è accettabile, e le variabili suprlus (-3, -5) sono negative
   $(z_1 - c_1), (z_2 - c_2)$
1) Rimuovo $z_2 - c_2$ dalle due ragioni di inabmissiblità y_1, y_2, y_3
2) $(z_1 - c$_1

- *Relazione primale duale*
  - $cx \leq yb$
    Aka la funzione obbiettivo primale è minore uguale della duale (Dualità debole)
  - Dualità forte
    $cx = yb$
    Questo vale solo quando entrambe sono soluzioni ottimali amissibili

  Durante il metodo del simplesso se la soluzione del primale è amissibile quella del duale non è amissibile fino all'ultima iterazione
  - Quindi ci muoviamo su soluzioni inamissibile fino a trovare l'amissibile, che sarà l'ottimo
  - Troviamo cotntemporaneamente un vertice x amissibile del problema primale ed una soluzione complementare y duale dove
    $cx = yb$
    Dove x è amissibile ed y no
  - Le sole relazioni possibili sono riassumibili:
    - Se il problema ha soluzioni amissibili e funzione obiettiva limitata, allora la stessa cosa identica vale per l'altro problema, e quindi proprietà debole e forte applicabili
    - Se un problema ha soluzioni amissibili e funzione obiettivo illimitato allora l'altro problema non ha soluzioni amissibili
    - Se un problema non ha soluzioni possibili, o l'altra non ha soluzioni amissibili oppure è illimitata
- I prezzi ombra rappresentano