Esercizi

domenica 12 giugno 2022 18:35

1) $\sum a_n \, , a_n \geq 0$

La successione è regolare siccome è monotona crescente

La somma delle serie coincide con
$\lim_{x \to +\infty} a_m$

Studiare carattere di
$$\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{1-\frac{1}{n}} * \sin \frac{1}{n^a}$$
Se a>2, la serie
$$n * e^{1-\frac{1}{n}} * \sin \frac{1}{n^a} \sim ne^{1-\frac{1}{n}} * \frac{1}{n^a}$$
$$ne^{1-\frac{1}{n}} * \frac{1}{n^3} \to converge$$
Se a < -2
$$n * e^{1-\frac{1}{n}} * \frac{1}{n^{-3}} \to n * e^{1-\frac{1}{n}} * n^3 \to diverge$$
Se a 0<a<2
$$n * e^{1-\frac{1}{n}} * \frac{1}{n} = e^{1-\frac{1}{n}} = e$$
$$e > 1 \to diverge$$

2) $f(x) = e^{-x} - e^{-3x}$
Dominio: R
Limiti
$$e^{-x} - e^{-3x}$$
$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{-\infty}} = e^{\infty}$$
$$\lim_{x \to -\infty} -e^{-3x} = -\frac{1}{e^{3x}} = -\frac{1}{e^{-\infty}} = -e^{\infty} = -\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} - e^{-3x} \sim -e^{-3x} = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0 \to \lim_{x \to +\infty} \to a.o. y = 0$$
Punti stazionari:
$$f'(x) = -e^{-x} + 3e^{-3x}$$
$$-\frac{1}{e^x} + \frac{3}{e^{3x}} = \frac{-e^{2x} + 3}{e^{3x}}$$
$$e^{3x} > 0 \to VxeR$$
$$-e^{2x} + 3 > 0 \to -e^{2x} > \text{-3} \to e^{2x} < 3 \to 2x < \ln 3 \to x < \frac{\ln 3}{2}$$
$++++++++\frac{\ln 3}{2}$--------
Quindi è un punto di massimo assoluto
$$I = [0, 2]$$
$$\left[0, \frac{\ln 3}{2}\right] u \left[\frac{\ln 3}{2}, 2\right]$$
$$f(0) = e^0 - e^0 = 0$$
$$f\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = e^{-\frac{\ln 3}{2}} - 3^{-\frac{3 \ln 3}{2}}$$
Posso intuire che $f(0) < f(2)$
$$= \left(0, e^{-\frac{\ln 3}{2}} - 3^{-\frac{3 \ln 3}{2}}\right)$$
(Non ho voglia di fare calcoli)
Punto flesso
$$f'(x) = -e^{-x} + 3e^{-3x}$$
$$f''(x) = e^{-x} - 9e^{-3x}$$
$$\frac{1}{e^x} - \frac{9}{e^{3x}} = \frac{e^{2x} - 9}{e^{3x}}$$
$$e^{3x} - 9 > 0 \to e^{3x} > 9 \to 3x > \ln(9) \to x > \frac{\ln(9)}{3}$$

3) Questo è un esercizio che ho fatto per uno di un gruppo di whatsapp
$$\sum \frac{n^a}{n^2 + \ln n}$$

$a = \frac{3}{2}$

$a_n = \sum \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2 + \ln n}$

$b_n = n^b$

$a_n = o(b_n)$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2 + \ln n} * \frac{1}{n^b}$

Noi dobbiamo far si che

$\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^b} < n^2$

$n^{\frac{3}{2} - b} < n^2$

$\frac{3}{2} - b < 2$

$-b < 2 - \frac{3}{2}$

$-b < \frac{4}{2} - \frac{3}{2}$

$-b < \frac{1}{2}$

$b > \frac{-1}{2}$