Esercizi

venerdì 10 giugno 2022 10:40

1) Data la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^2+6}{5x}\right)^n$$
Valori per cui converge
$$-1<\frac{x^2+6}{5x}<1$$
$$\frac{x^2+6}{5x}<1 \to \frac{x^2+6}{5x}-1<0 \to \frac{x^2-5x+6}{5x}<0$$
$$x^2-5x+6<0$$
$$x_{12}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=3{,}2$$
$$2<x<3$$
$$\frac{x^2+6}{5x}>-1$$
$$-3<x<-2$$
Ris: $-3<x<-2 \ v \ 2<x<3$

$$Somma: \frac{1}{1-q}-1=\frac{1}{1-\frac{x^2+6}{5x}}-1$$
(Non ho voglia di fare i calcoli)

2) Studio
$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{3x(2x-1)}$$
Dominio:
$$3x(2x-1)\neq 0$$
$$3x\neq 0 \to x\neq 0$$
$$2x-1\neq 0 \to 2x\neq 1 \to x\neq\frac{1}{2}$$
$$x\neq 0 \ v \ x\neq\frac{1}{2}$$
Limiti:
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{3x(2x-1)}=\frac{x^2+2x}{6x^2-3x}\sim\frac{x^2}{6x^2}=\frac{1}{6}$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{6}$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)^2}{3x(2x-1)}=\frac{(0^-+1)^2}{0^- * 0^-}=+\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{(x+1)^2}{3x(2x-1)}=\frac{9}{4}*\frac{1}{\frac{3}{2}*0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)=+\infty$$
Asintodi:

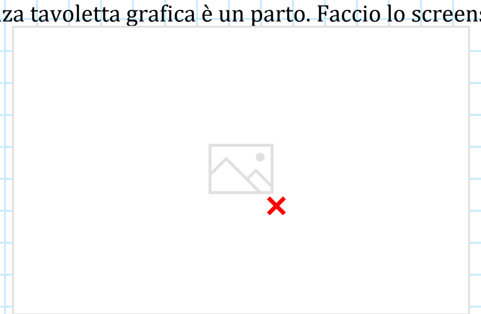
Verticali: $0,\frac{1}{2}$

Orizzontali: $\frac{1}{6}, x\to\pm\infty$

Monotonia:
$$f'\frac{(x+1)^2}{3x(2x-1)}=\frac{(x+1)^2}{6x^2-3x}=\frac{2(x+1)(6x^2-3x)-(x+1)^2(12x-3)}{(6x^2-3x)^2}$$
$$\frac{(x+1)(1-5x)}{3x^2(2x-1)^2}\geq 0$$
$$D\to VxeR$$
$$(x+1)(1-5x)\geq 0$$
$$x+1\geq 0\to x\geq -1$$
$$1-5x\geq 0\to -5x\geq -1\to x\leq\frac{1}{5}$$
$$[-1,0)u\left(0,\frac{1}{5}\right]$$
----[-1]++++[0]++++[1/5]-----

$-1\to minimo\ relativo$

$\frac{1}{5} \rightarrow massimo\ relativo$
Grafico:
Troviamo le coordinate di max/min relative
$f(-1) = 0$
$f\left(\frac{1}{5}\right) = -4$
(Disegnare su one note senza tavoletta grafica è un parto. Faccio lo screenshot della soluzione)



Sull'intervallo $[1, \infty)$ specificare gli estremi
L'estremo superiore, $f(1)$, è anche il massimo
Mentre l'estremo inferiore, $\frac{1}{2}$ non è il minimo siccome la funzione mai raggiunge $\frac{1}{2}$ per via dell'asintodo

3) $a_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
Ennunciare teorema esistenza del limite
$\mathrm{a_n} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
$a_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$
$a_{n+1} < a_n$
$1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1}$
$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$
Quindi, a_n è monotona decrescente

Calcolare limite
$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$
$\ln(1) = 0$
$\lim_{n\to+\infty} f(x) = 0$

Calcolare
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \ln\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} = diverge$$