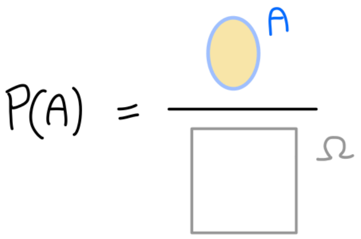
Probabilità condizionata

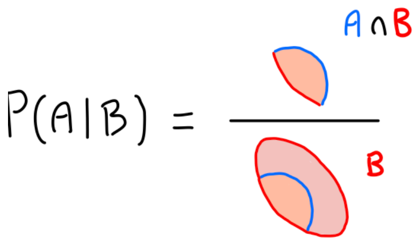
Thursday, 23 March 2023 08:24

- La probabilità che un evento A si verifichi
  Con la consapevolezza che un evento B si è verificato
  $P(A|B) \coloneqq \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
  $P(A \cap B) = P(B) * P(A|B)$
  $P(A) = P(A \cap B) * P(A \cap B^c)$
  $P(A) = P(B) * P(A|B) + P(B^c) * P(A|B^c)$
  $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
  Aka probabilità di A sapendo che B

- Formula bayes
  $P(B|A) = \frac{P(A|B) * P(B)}{P(A)}$

- Può capitare che $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$
  In questo caso si dice che due eventi sono indipendenti
  Cioè, la uscita di uno non influenza l'altro
  In questo caso
  $P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
  E ricorda che, due eventi disgiunti non sono indipendenti
  $P(A^C|B) = 1 - P(A|B)$





- Che cosa succede però se abbiamo più eventi e vogliamo verificare se

sono indipendenti?
In questo caso dobbiamo verificare:

- $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
- $P(A \cap C) = P(A)P(C)$

Esempio:

- Lancio 2 dadi regolari a 6 facce
  Qual è la probabilità che la somma valga 4?
  $\Omega = \{1 \dots 6\}^2 \Rightarrow |\Omega| = 6^2 = 36$
  Detto questo, le coppie che ci danno somma = 4 sono:
  $A =< 1,3 >, < 2,2 >, < 3,1 > \Rightarrow |A| = 3$
  Quindi
  $$P(A) = \frac{3}{36} = 8.3$$
  Okay, detto questo
  Noi ora partiamo dal presupposto che il primo dado è 2
  Quant'è la probabilità, sapendo che il primo dado è uscito 2, che la somma = 4?
  B="Il primo dado vale 2"
  $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$
  Questo funziona siccome il sottoinsieme è lo stesso per tutti e due
  Ora calcoliamo:
  $|A \cap B| = \text{Somma fa 4 ed inizia con 2} = |< 2,2 >| = 1$
  $|B| = \text{Il primo dado vale 2} = |< 2,1 >< 2,2 >< 2,3 >< 2,4 >< 2,5 >< 2,6 >| = 6$
  Quindi possiamo sostituire
  $$P(A|B) = \frac{1}{6}$$
- Presenza di un virus si effettuano:
  Sensibilità: Virus è presente, test positivo = 99%
  Specificità, virus non presente e test negativo = 99.7%
  4 persone su 1000 hanno il virus

  Qual è la probabilità che un individuo a caso dia esito positivo?
  $A =$"Test positivo"
  B ="Individuo ha virus"
  Iniziamo ad analizzare il testo

Iniziamo ad analizzare il testo

Virus presente + test positivo = $P(A|B) = 0.99$

Virus non presente + test negativo = $P(A^c|B^c) = 0.996$

4 persone su 1000 hanno il virus = $P(B) = 0.004$

Da questo possiamo calcolare:

- Test negativo con virus = $P(A|B^c) = 1 - P(A^c|B^c) = 1 - 0.996 = 0.003$
- Persone senza virus = $P(B^C) = 1 - P(B) = 0.996$

Noi vogliamo calcolare la probabilità che il testo sia positivo = P(A)

$P(A) = P(A|B) * P(B) + P(A|B^c) * P(B^c) = 0.7\%$

Ora invece calcoliamo che, se il test è positivo, qual è la probabilità che effettivamente il tizio ha il virus?

$P(B|A)$

Aka probabilità individuo ha il virus dato che il test è positivo

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) * P(B)}{P(A)} = 57\%$$

- Una classe B è composta da 12 femmine e 4 maschi
  Una classe A è composta da 10 femmine e 10 maschi
  Qual è la probabilità che, estraendo una classe a caso, una persona a caso:
  A) Scegliere la 1b ed estrarre una femmina
  B) Estrarre 1 femmina
  C) Se estraggo 1 femmina, sia della 1b
  Iniziamo a dare le lettere
  A="Estraggo femmina"
  B="Scelgo 1b"
  $P(B) = \frac{1}{2}$
  Ora calcoliamo per il futuro:
  $P(A|B) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$
  Estraggo una femmina sapendo di aver estratto 1b
  $P(A|B^c) = \frac{1}{2}$
  Estraggo una femmina sapendo di aver estratto 1c

  A) Scegliere 1b ed estrarre una femmina
     Noi qui dobbiamo fare un intersezione di
     $P(A \cap B)$

Quindi estraiamo una femmina e scelgo 1b

$$P(A \cap B) = P(B) * P(A|B) = \frac{3}{8}$$

B) Estrarre una femmina

Qui invece ci interessa P(A)

$$P(A) = P(A|B) * P(B) + P(A|B^c) * P(B^c) = \frac{5}{8}$$

C) Se estraggo una femmina, che sia della 1b

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) * P(B)}{P(A)} = \frac{3}{5}$$

- Si lancino 2 dadi regolari
  Qual è la probabilità che il primo dado facci 2 e l'altro 5?
  A=Primo dado 2
  B=Secondo dado 5

  $$P(A) = \frac{1}{6}$$

  $$P(B) = \frac{1}{6}$$

  $$P(A \cap B) = P(A) * P(B) = \frac{1}{36}$$