Studio funzioni

domenica 6 febbraio 2022 21:35

1) $f(x) = x^2 - \ln(x)$
   X=1
   $y = 1 - 0 \to 0 \to y = x$
   - Y=x+1
   - Y=x
   - Y=-x
   - Y=-x+1
2) $f(x) = \begin{Bmatrix} x - e^x \to x \leq 0 \\ x^3 + x \to x > 0 \end{Bmatrix}, x = 0$
   $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^- - 1^- = -1^- \to cresce, decresce$
   $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+ \to cresce$
   - Minimo relativo: da una parte si, dall'altra no
   - Di massimo assoluto: no
   - Ne di massimo né di minimo: esclusione
   - Di massimo relativo: una parte si, l'altra no
3) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \to inversa\ di\ g, g'(1) = ?$
   $f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$
   $g'(x) = \frac{3}{x^{\frac{2}{3}}}$
   $g'(1) = \frac{3}{1} = 3$
4) $f(x) = e^{-x} - e^{-3x}$

   Dominio:
   $(-\infty, +\infty)$

   Limiti:
   $e^{-x} - e^{-3x} = e^{-x}(1 - e^3) \sim e^{-x}$
   $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$
   $\lim_{x\to \infty} f(x) = 0 \to asintodo\ orizzontale\ \to x \to +\infty, y = 0$

   Punti stazionari:
   $f(x) = e^{-x} - e^{-3x}$
   $f'(x) = -e^{-x} + 3e^{-3x}$
   $f'(x) > 0$
   $-e^{-x} + 3e^{-3x} > 0$
   $e^{-x}(-1 + 3e^{-2x})$
   $-1 + 3e^{-2x} > 0$
   $e^{-2x} > \frac{1}{3}$
   $-2x > \ln\frac{1}{3}$
   $x < \frac{-\ln\frac{1}{3}}{2} = \frac{\ln 3}{2}$
   $++++\frac{\ln 3}{2}$-------

   Immagine da $[0, 3]$
   Noi sappiamo che da 0 a $\frac{\ln 3}{2}$ la nostra funzione cresce
   $f(0) = 0$
   $f\left(\frac{\ln 3}{2}\right) =$ help
   Poi, decresce, dobbiamo controllare il valore in 3
   $f(3) > f(0)$
   Quindi
   $Im = \left[0, f\left(\frac{\ln 3}{2}\right)\right]$

   Ascissa punto flesso:
   $f'(x) = -e^{-x} + 3e^{-3x}$
   $f''(x) = e^{-x} - 9e^{-3x}$

$e^{-x} - 9e^{-3x}$
$e^{-x}(1 - 9e^{-2x})$
$e^{-x} > 0$
$1 - 9e^{-2x} > 0$
$-9e^{-2x} >$ -1
$e^{-2x} < \frac{1}{9}$
$-2x < \ln\frac{1}{9}$
$x >$ -$\frac{\ln 3^{-2}}{2}$
$x > \ln 3$
5) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + e^{-n} + \ln n}{\ln(1+n) + n^3 - 1} \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \to 0$
6) $f(x) = \sqrt{1 + \ln x}$
$\ln x > 0 \to x > 0$
$1 + \ln x \geq 0$
$\ln x \geq -1$
$x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$
$\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$
7) $R \to R, f(x) = x^3 - 3x, I = (-1, 1)$
E' crescente o decrescente nell'intervallo?
$f'(x) = 3x^2 - 3$
$3x^2 - 3 > 0$
$3x^2 > 3$
$x^2 > 1$
$x^2 > \pm 1$
$++++------+++++$
La funzione è decrescente
8) $f(x) = \left\{\begin{matrix} \cos x^2 + a \to x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x + e^x} \to x > 0 \end{matrix}\right\}$
E' continua se:
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$
$\cos x^2 + a = 0$
$\cos 0 + a = 0$
$1 + a = 0$
$a = -1$
9) $f(x) = e^{-x^2}$
Chiede se cresce/decresce/punti massimo
$f'(x) = -2xe^{-x^2}$
$-2x > 0 \to x < 0$
$e^{-x^2} > 0 \to sempre$
+++++0-------
-> 0 ha massimo assoluto
10) $\lim_{x\to+inf} e^x(\cos x + 1)$
-> cos(x)+1 varia da 0 a 2
Quindi, per +inf la funzione ha 2 comportamenti:
+infinito e 0
E quindi non abbiamo un limite standard, e quindi non ha limite
In questo caso:
Se infinito è divisibile per 2π allora è +inf
Invece se è divisibile per π allora sarà 0
11) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}} = 0$
12) $\lim_{x\to+inf} \left(\ln n - \sqrt{n} + \frac{3}{e^n} + \sin n^2\right)$
$\sim -\sqrt{n} = -inf$
13) $f(x) = x^2 - \ln x$
Tangente in x = 1
$f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$
$m = 2 - 1 = 1$
$y_0 = 1 - \ln 1 = 1$
$y - 1 = 1(x - 1)$
$y = x - 1 + 1 \to y = x$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}-1\right)} \sim \dfrac{\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n} = \dfrac{0}{\infty} \to indeterminata$

$$\ln\left(1+\left(-\frac{2}{n}\right)\right) * \frac{1}{n\left(\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^2}}-1\right)}$$

$$\to \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\ln\left(1+\left(-\frac{2}{n}\right)\right) * \frac{\left(-\frac{2}{n}\right)}{\left(-\frac{2}{n}\right)} = 1 * \left(-\frac{2}{n}\right)$$

$$-\frac{2}{n} * \frac{1}{n\left(\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^2}}-1\right)} = -\frac{2}{n} * \frac{1}{n} * \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^2}}-1}$$

$$\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^2}}-1 = \left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}-1$$

$$\to \frac{(1+f(x))^k-1}{f(x)} = k$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}-1} * \frac{\frac{1}{\frac{4}{n^2}}}{\frac{1}{\frac{4}{n^2}}} = \frac{\frac{1}{\frac{4}{n^2}}}{\frac{\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\frac{4}{n^2}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\frac{4}{n^2}}}{\frac{1}{3}}$$

$$-\frac{2}{n} * \frac{1}{n} * \frac{\frac{1}{\frac{4}{n^2}}}{\frac{1}{3}} = -\frac{2}{n^2} * \frac{1}{\frac{4}{n^2}} * 3 = -\frac{2}{n^2} * \frac{n^2}{4} * 3 = -\frac{3}{2}$$