Studio successioni

lunedì 7 febbraio 2022 18:00

1) $f(x) = \left\{ \begin{array}{c} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n} \end{array} \right\}$

- Per induzione 0<a<1
  - Base:
    $a_1 = \frac{1}{2} \rightarrow Siamo\ sicuri\ che\ a_n > 0 - a_n < 1$
    -> lo diamo per scontato
  - Passo:
    $a_{n+1} > 0 \rightarrow sempre \rightarrow logica: rimane\ sempre\ positivo$
    $a_{n+1} < 1$
    $\frac{2a_n}{1+a_n} < 1$
    $2a_n < 1 + a_n$
    $a_n < 1$
    Per induzione, sappiamo che a_n è sempre minore di 1
    Quindi è vero
- $a_{n+1} > a_n$
  - Base:
    $a_n = \frac{1}{2}$
    $a_{n+1} = \frac{2 * \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$
    $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} \rightarrow verificato$
  - Passo:
    $a_{n+1} > a_n$
    $\frac{2a_n}{1+a_n} > a_n$
    $2a_n > a_n + a_n^2$
    $0 > a_n^2 - a_n$
    $-a_n^2 + a_n < 0$
    Siccome sappiamo che a_n^2 è sicuramente maggiore di a_n
    Per induzione di prima
    Se noi rendiamo negativo un valore che è sicuramente maggiore di a_n
    E lo sommiamo sicuramente sarà < 0, quindi vero
  - $\lim_{x \to +\infty} a_n = \frac{2a_n}{1+a_n} \sim \frac{2a_n}{a_n} = 1$

2) $f(x) = \left\{ \begin{array}{c} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n \sqrt{4 + ne^2} \left(e^{\frac{1}{3x^2}} - 1 \right) \end{array} \right\}$

Usare il criterio del rapporto

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n \sqrt{4 + ne^2} \left(e^{\frac{1}{3n^2}} - 1 \right)}{a_n} \rightarrow l$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{4 + ne^2} \left(e^{\frac{1}{3n^2}} - 1 \right) = +\infty * 0 = 0 \rightarrow converge$

Se a=0
La successione rimane costante