Simplesso

Tuesday, 3 October 2023 09:17

- Metodo greedy per risolver ei problemi di programmazione lineare
    - Il tempo di computazione è lineare
    - Se però siamo sfigati potrebbe essere esponenziale
    - E' una procedura algebrica con concetti basi geometrici
    - Il metodo del simplesso si muove lungo gli spigoli
- Procedimento:
    - Imponiamo l'eguaglianza nei nostri vincoli
    - Definiamo i vertici che vengono reati attraverso l'intersezione di coppie di fronti
        - Due vertici sono detti adiacenti se condividono n-1 frontieri di vincoli
        - Due vertici adicanti sono collegati da un segmento che giace sull'intersezio
        - Il segmento che li collega verrà chiamato spigocolo, aka il segmento che co
        - Abbiamo 2 tipi di vertici:
            - Ammissibile, quello che sta nella regione ammissibile
            - Non ammissibile, si trova all'intersezione di 2 rette però non è nella
            - E' possibile creare una tabella con vertice ammissibile → Vertici amn
            - Essi godo di proprietà:
                - Test di ottimalità

                  Se una soluzione vertice non ammette soluzione vertici a lei a

                  obiettivo Z migliore allora la soluzione in questione è ottimale

                  Quindi basta guardare i vertici vicini per comprendere chi è il

            Es:

            Prendiamo vertice (2, 6), prendiamo i vertici a lui ammissibili a

            (0, 6) → $Z = 30$

            (4, 3)→ $z = 27$

            E siccome $(2, 6) \rightarrow Z = 36$

            Siamo certi che (2, 6) è la soluzione ottimale

- Applichiamo metodo simplesso

  Partiamo da (0, 0) → $Z = 0$ | ⇒ Inizializzazione, se possibile prendere (0, 0), nel caso b

  Abbiamo (4, 0)→ $Z = 30$

  Abbiamo (0, 6)→ $Z = 12$

  Quindi (0, 0) sicuramente non è la funzione ottimale

  Qual'è il migliore? (0, 6) | ⇒ Test di ottimalità, e và verso il più grande, scelta grande

  Abbiamo: (2, 6) → $Z = 36$ Delle prodedure di pre-ottimizzazione

  Andiamo a (2, 6)

Andiamo a (2, 6)

Abbiamo: (4, 3) → $Z = 27$

Quindi $(2, 6)$ è la funzione ottimale

- Per introdurlo in termini pratici lo dobbiamo introdurlo in forma algebrica
  - Che si basa sulla risoluzione di sistemi di equazioni lineari
  - Dobbiamo trasformare il sistema di disequazione in vincoli funzionali di eguaglia
    - Per farlo dobbiamo introdurre la variabile slack

      Esempio:

      $\max Z = 3 * x_1 + 5 * x_2$

      $x_1 \leq 4$ → Variabile slack = $x_3 = 4 - x_1$ ed è la quantità che manca

      E quindi $x_1 + x_3 = 4,\ \ x_3 \geq 0$

      $2 * x_2 \leq 12$

      $3 * x_1 + 2 * x_2 \leq 18$

      $x \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$

      La forma senza variabili slack è chiamata forma standard

      La forma aumentata:

      $\max Z = 3 * x_1 + 5 * x_2$

      $x_1 + x_3 = 4$

      $2 * x_2 + x_4 = 12$

      $3 * x_1 + 2 * x_2 + x_5 = 18$

      $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

      Le variabili slack sono x_3, x_4, x_5

      Nota che:

      - Se noi poniamo la variabile slack pari a 0, la variabile con cu per essere 0

        Quindi se $x_4 = 0$

        Allora $2 * x_2 = 12 \rightarrow x_2 = 6$
      - Se poniamo $x_4 = 1$

        Allora $2 * x_2 < 12$
      - Se invece $x_4 = negativo$

        Allora la soluzione non è ammissibile

      La soluzione aumentata è una soluzione in forma originale che vi

      Es. Se (3, 2) è la soluzione della forma originale,

      allora (3, 2, 1, 8, 5) è la soluzione della forma aumentata

      Con 5 variabile, 2 decisionali e 3 di slack, abbiamo (5-3)=2 gradi

      - Le variabili poste = 0 sono dette variabili non di base

        Es.

        Posti $x_1 = 0, x_4 = 0$

        Troveremo che

        $x_2 = 6, x_3 = 4, x_5 = 6$

        E tutto questo sarà la nostra soluzione di base

      Proprietà:

- Una variabile o è di base oppure non di base
- Numero di variabile di base eguaglia il numero dei vincoli
- Le variabili non di base vengono poste a 0
- I valori delle variabili di base sono ottenuti come risoluzion equazione lineare, e l'insieme delle variabili è chiamata Bas
- Se l variabili di base soddisfano i vincoli di non negatività, l

Ma come ci accorgiamo se le soluzioni di base ammissibili sono a

- Sappiamo se sono adiacenti una variabile di base diventa d ed una non-base diven
- Quindi una variabile entra ed una esce
- Es: $(0, 0), (0, 6)$
  $(0, 0) \rightarrow (0, 0, 4, 12, 18)$
  $(0, 6) \rightarrow (0, 6, 4, 0, 6)$
  Notiamo che il $0 \rightarrow 6$, $12 \rightarrow 0$

Bisogna cercare di rendere la funzione obiettivo dentro il nostro

$\max Z = 3 * x_1 + 5 * x_2 \rightarrow Z - 3 * x_1 - 5 * x_2 = 0$

Ora possiamo unire il tutto e risolvere

- Passo passo:
  $\max Z = 3 * x_1 + 5 * x_2$
  $x_1 + x_3 = 4$
  $2 * x_2 + x_4 = 12$
  $3 * x_1 + 2 * x_2 + x_5 = 18$
  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$
  1) Inizializzazione, cerchiamo di prendere $(0, 0)$
     Ed ora dobbiamo calcolare x_{3-4-5}
     E calcolandolo scopriamo che $x_3 = 12, x_4 = 12, x_5 = 18$
     Ed è una soluzione di base amissibile $(0, 0, 4, 12, 18)$
  2) Verificare se è ottimale o meno, e per farlo:
     Prendiamo la funzione obiettivo $\max Z = 3 * x_1 + 5 * x_2$
     Noi sappiamo che $Z = 0$ sostituendo $x_1, x_2 = 0$
     Ed ora dobbiamo calcolare il tasos di crescita
     I tassi di crescita è 3, 5 (Coefficenti di x1, x2)
     E notiamo che aumentando x_1, x_2 rappresenta un miglioramento, e quindi
     - Dobbiamo aumentare il valore di una variabile non di base
     - Per la scelta di quale variabile deve aumentare per prima viene fatto at
       x_1 ha un tasso di miglioramento di 3
       x_2 ha un tasso di miglioramento di 5
       Notiamo che x_2 comporta un miglioramento migliore, x_2 è una variabil fare aumentare
       Questa varaibile verrà chiamata variabile entrante di base.
     - Ora dobbiamo aumentare x_2 fino al punto dove non perdiamo l'amissil
       E per farlo dobbiamo soddisfare i vincoli funzionali

$x_1 = 0$
E quindi $x_3 = 4$ per forza
Ora calcoliamo cosa succede ad x_4 alla variazione di x_2
$x_4 = 12 - 2x_2$
E questo ci dice quanto può cambiare x_2 affinchp x_4 rimane dentro i vinco
E facciamo lo stesso con $x_5 = 18 - 2 * x_2$
Ora ricaviamo x_2
$x_4 = 12 - 2 * x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq \frac{12}{2} = 6$
$x_5 = 18 - 2 * x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq \frac{18}{2} = 9$
Tra le 2 il minimo è 6 e quindi $x_2 = 6$
$\Rightarrow$ Test del rapporto minimo
Nota che ora $x_4 = 0$
Quindi entra x_2 ed esce x_4

- Calcoliamo ora la nuova base
$max\,Z = 3 * x_1 - 5 * x_2$
$x_1 + x_3 = 4$
$2 * x_2 + x_4 = 12$
$3 * x_1 + 2 * x_2 + x_5 = 18$
Ora vogliamo fare (...)
Cerchiamo di cancellare x_2
Dividiamo la 2 equazione per 2 per avere 1
$max\,Z = 3 * x_1 + 5 * x_2$
$x_1 + x_3 = 4$
$1 * x_2 + \frac{1}{2} x_4 = 6$
$3 * x_1 + 2 * x_2 + x_5 = 18$
Ora vogliamo lo 0 in 1 posizione
Per farlo dobbiamo (...)
E diventa
$< -3 * x_1 + \frac{5}{2} x_4 = 30$
E ora vogliamo 0 nell'ultima posizione
$3 * x_1 - x_4 + x_5$

Quindi ora calcoliamo la nuova soluzione amissibile di base
$(0, 0, 4, 12, 18)$

3) Ripetiamo al punto 1 fino a che non troviamo l'ottima
$Z = 30 + 3 * x_1 - \frac{5}{2} x_4$
Qui notiamo che solamente x_1 può migliorare

Quindi facciamo entrare in base x_1
E ora dobbiamo trovare quanto può cambiare x_1
E noteremo che $x_3 = 4 - x_1$
$x_5 = 6 - 3x_1$
Facciamo l'equazione
$x_3 \Rightarrow x_1 \leq 4$
$x_5 \Rightarrow x_1 \leq 2$
E qui comprendiamo che x_1 entra in base mentre x_5 esce in base.
Per farla uscire in base deve far si che $x_5 = (0, 0, 0, 1)$
Dopo tanti calcoli noteremo che la soluzione sarà $(2, 6, 2, 0, 0)$
E ricominciamo...
$Z = 36$
$Z = -\frac{3}{2}x_4 - x_5 + 36$
E quindi non abbiamo nessuna posizione di miglioramento
E quindi questo ci garantisce che la soluzione che abbiamo trovato è la soluzione

- Forma tabellare
  Salva:
  - Coefficenti delle variabili
  - Termini noti delle equazioni
  - Variabili di base per ogni equazioni

  Quindi non salva: simboli delle variabili

FORMA ALGEBRICA	FORMA TABELLARE								
	VARIABILE DI BASE	Eq.	COEFFICIENTE Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	TERMINE NOTO
(0) $Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
(1) $x_1 + x_3 = 4$	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
(2) $2x_2 + x_4 = 12$	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
(3) $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18

Z->X5 = TABLEU

Passi per risolvere:
1) Inizializzazione
   - Inizializzazioni variabili slack
   - Selezionare le variabili di decisine da porre a 0 (non base)
   - Selezionare le variabili slack come base

   Soluzione base amissibile: (0, 0, 4, 12, 18)
2) E' la soluzione base corrente la soluzione ottimale del nostro problema?
   - Conduciamo un test di ottimalità
     - Se gli efficenti della riga 0 sono non negativi (Eq. 0)
     - Se questo è vero lo finiamo, senò eseguaimo la prima iterazione
       - Determinare chi entra in base

- Determinare chi entra in base
- Determinare chi esce
- Determinare nuova soluzione ammissibile di base

- Se guardiamo la riga 0 notiamo 2 elementi con negativi, quindi la soluzion
  - Variabile che entra
    Dobbiamo selezionare tra quelle non di base
    - La scelta è muoveris in maniera golosa, dobbiamo segliere tra
      Ovviamente scegliamo -5, quindi scegliamo colonna PIVOT la
      E verrà chiamata PIVOT
  - Variabile che esce
    Determinazione della variabile che si sposta, e lo si fa con il test del
    - Si sceglie gli elementi strettamente positivi della colonna pivo
      Esse sono: 2, 2: x_4, x_5
    - Dividiamo i termini noti per questi coefficenti
      Dividiamo ora i termini noti per 2, 2
      Quindi diventeranno

x_2	x_3	x_4	x_5	NOTO
-5	0	0	0	0
0	1	0	0	4
2	0	1	0	$12 \rightarrow \frac{12}{2}$
2	0	0	1	$18 \rightarrow \frac{18}{2}$

    - Selezionare la riga cui corrisponde il più piccolo rapporto calc
      Scegliamo la più piccola nei termini noti, e qui la più piccola è
    - La variabile di base di quella riga è la variabile uscente, rimpia
      Incrociamo la riga $x_4, la\ colonna\ x_2$
      E facendo così otteniamo il valore pivot = 2

VARIABILE DI BASE	Eq.	COEFFICIENTE Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	TERMI NOTO
Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	RIGA PIVOT
x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18 →

TERAZIONE: PASSO 2
COLONNA PIVOT
NUMERO PIVOT

  - Nuovi valori
    - Dividiamo la riga pivot per il numero pivot, ottenendo un nuo
      Noi vogliamo cercare di ottenere il pattern (0, 0, 1, 0) nella co
      Iniziamo a fare scomparire il numero pivot e renderlo 1

0	1	0	$\frac{1}{2}$	0

- Calcoliamo la nuova riga 0resima
  Noi vogliamo fare scompare il -5
  E con calcoli otterremo
  -3, 0, 0, 5/2, 0

-3	-5	0	0	0	0
1	0	1	0	0	4
0	2	0	1	0	12
3	2	0	0	1	18
-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6

- Ora vogliamo togliere il 2 dalla 3 riga 2 colonna

1	-3	0	0	$\frac{5}{2}$
0	1	0	1	0
0	0	1	0	$\frac{1}{2}$
0	3	0	0	-1

- Ed abbiamo ottenuto il pattern (0, 0, 1, 0) nella colonna pivot
  Ora le nostre variabili di base saranno: x2, x3, x5
  (quelle con gli 0 nella riga Z)
  La nuova soluzione ammissibile è: (0, 6, 4, 0, 6)

□ E' questa una soluzione ottimale?
  - Controlliamo guardando la riga Zesima e controlliamo coeffice
    Ce n'è 1, quindi prendiamo x_1 come pivot
  - Ricominciamo come prima, (0, 6, 4, 0, 6)
  - Determiniamo la variabile che entrerà in base, e l'unica è x_1
    QUindi diventa la colonna pivot
  - Scegliamo la variabile che esce dalla base, e la calcoliamo con

-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30	
1	0	1	0	0	4	$\frac{4}{1} = 4$
0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	
3	0	0	-1	1	6	$\frac{6}{3} = 2 \leftarrow$ mir

Prendiamo il minimo, 2, e quindi entrerà in base x_5

Ed ora sappiamo la riga pivot e l'elemento pivot
Dobbiamo ottenere (0, 0, 0, 1) nella colonna pivot

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix}$$

- Notiamo che la riga Zesima ha tutti valori positivi, quindi è la s
  Ed otterremo (2, 6, 2, 0, 0)

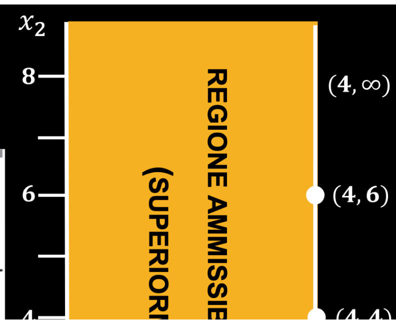
- Tie breaking, aka situazioni anomale nei nostri algoritmi
  - Alternative multiple per la variabili entrante di base

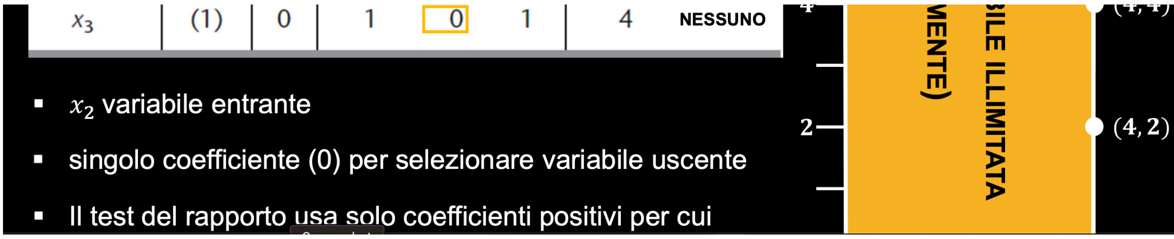
    $$\boxed{(0) \quad Z - 3 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 = 0}$$
    $$(1) \quad x_1 + x_3 = 4$$
    $$(2) \quad 2 \cdot x_2 + x_4 = 12$$
    $$(3) \quad 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_5 = 18$$

    Come risolvere questa situazione di pareggio (tie) tra x_1 e x_2?
    - La scelta è arbitraria
  - Alternative multiple per la variabile uscente dalla base
    Al passo 2 dell'algoritmo del simplesso abbiamo almeno 2 rapporti minimi ugual
    - Raggiungeranno contemporaneamente il valore 0
    - Non sappiamo più dire chi è in base e chi non
    - Se poi la variabile non scelta è il minimo nella iterazione è anche il minimo
      avremo una situazione dove il valore della funzione obiettivo resta costan
    - Tornerà indietro ed entrerà in un loop infinito
  - Mancanza di variabili uscente
    E' possibile che la funzione obiettivo è illimitata, e succede con sbagliati vincoli
    - E quindi una variabile può incrementare illimitatamente senza intoccare l'
    - Ce ne accorgiamo nell'ultimo step quando notiamo valori non positivi

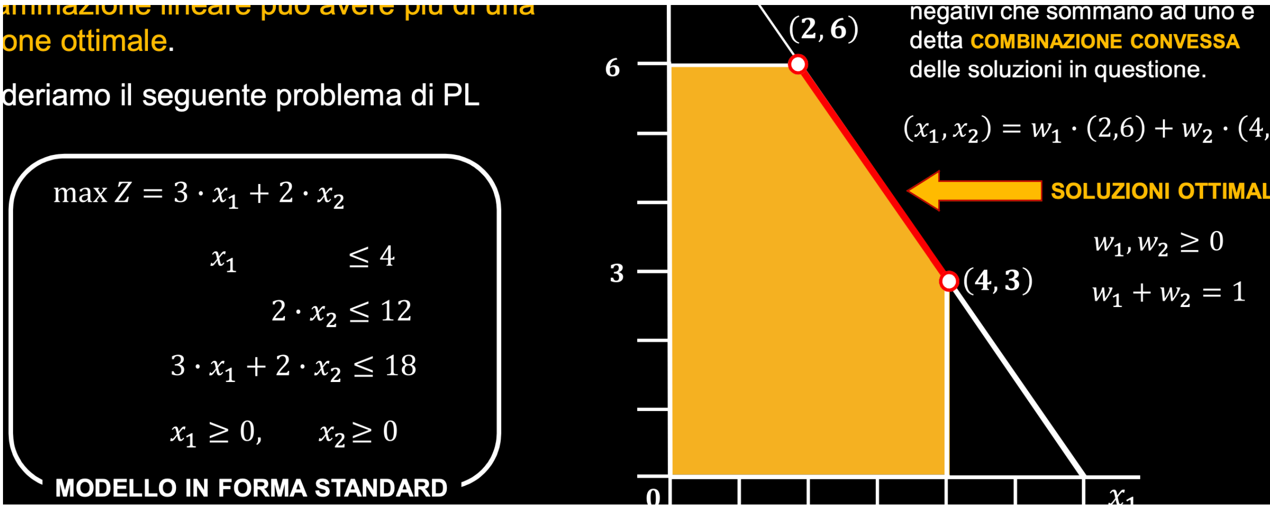
Nella **FORMA TABELLARE** significa che ogni coefficiente della **COLONNA PIVOT** (esclusa la riga 0) assume valore non positivo.

VARIABILE DI BASE	Eq.	COEFFICIENTE				TERMINE NOTO	TASSO
		Z	x_1	x_2	x_3		
Z	(0)	1	-3	$\boxed{-5}$	0	0	





- Molteplici soluzioni ottimali



  - Ha almeno 2 vertici ammissibili che ono ottimali
  - Ogni soluzione ottimale è una combinazione convessa di questi vertici am
  - Le soluzioni ottimale sono equivalenti però potrebbero diventare diversi r
  - Per identificarne basta:
    - Almeno una delle variabili non di base ha 1 coefficente nullo nella ri
    - Per trovarle basta effettuare ulteriori iterazioni del sistema del simp
      - Forziamo una variabile ad entrare in base

ITER	VARIABILE DI BASE	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	TERMINE NOTO	SOLUZIONE OTTIMALE
0	Z	(0)	1	−3	−2	0	0	0	0	NO
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18	
1	Z	(0)	1	0	−2	3	0	0	12	NO
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	x_5	(3)	0	0	2	−3	0	1	6	
2	Z	(0)	1	0	0	$\boxed{0}$	0	1	18	SI
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	0	3	1	−1	6	
	x_2	(3)	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	

Le soluzioni di base ottimali sono: (4, 3, 0, 6, 0), (2, 6, 2, 0, 0)

      - Se continuassimo semplicmenete faremmo uno swapping
      - Da notare che il valore della funzione obiettivo è lo stesso

- Il metodo del simplesso ha forme alternative
  Quando non siamo nella forma standard, dobbiamo riuscire a trasformarlo durante la
  La nostra forma standard:

La nostra forma standard:

- Problema massimizzazione
- Vincoli $\leq$
- Variabili di decisioni non negative

Es:

$\min Z = -2x_1 + 3x_2$
$x_1 + x_2 = 7$
$x_1 - 2 * x_2 \leq 4$
$x_1 \geq 0$
Trasformiamolo in forma standard:

- Trasformiamo al funzione obiettivo da min a max
  Per farlo si applica la funzione $\min(x) = \max(-x)$:
  $\min Z = -2x_1 + 3x_1 \Rightarrow \max Z = 2 * x_1 - 3x_2$
- Abbiamo solo $x_1 \geq 0$ e dobbiamo cercare di trovare $x_2 \geq 0$
  Per farlo dobbiamo creare 2 nuove variabili:
  $x_1, x_2', x_2'' \geq 0$
  Dove
  $x_2 = x_2' - x_2''$
  E quindi la nostra funzione diventerà:
  $\max Z = 2 * x_1 - 3x_2' + 3x_2''$
  $x_1 + x_2' - x_2'' = 7$
  $x_1 - 2x_2' + 2x_2'' \leq 4$
  $x_1, x_2', x_2'' \geq 0$
- Abbiamo un vincolo di eguaglianza
  E possiamo però trasformarlo in:
  $x_1 + x_2' - x_2'' \Rightarrow x_1 + x_2' - x_2'' \leq 7$
  $x_1 + x_2' - x_2'' \geq 7$
  Però abbiamo $\geq$, sistemiamolo con -1
  $-x_1 - x_2' + x_2'' \leq -7$
  Però qui abbiamo il problema che abbiamo un -7
  Che risolveremo nel prossimo punto
- Variabili (...)

- Slack e surplus
  Quando noi abbiamo i $\leq$ oppure $\geq$ li possiamo gestire con:
  - $\leq$ li trattiamo con i slack
    $0.3 * x_1 + 0.1 * x_2 \leq 2.7$
    $\Rightarrow 0.3 * x_1 + 0.1 * x_2 + x_3, \qquad x_3 \geq 0$
  - $\geq$ li trattiamo con i surplus
    $0.6 * x_1 + 0.4 * x_2 \geq 6$
    $\Rightarrow 0.6 * x_1 + 0.4 * x_2 - x_4 = 6, \qquad x_4 \geq 0$