Calcolo delle probabilità

Tuesday, 21 March 2023 15:14

- Studiare ciò di cui non conosciamo l'esito
  => Esperimenti aleatori => Fenomeni di cui non sappiamo l'esito
- Si calcola così:
  - Trovare lo spazio campionario Ω
    Aka lo spazio degli esiti
    Es. Dado 6 facce, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
    Es. Tempo emissione particella $\Omega = [0, \infty) = \{x \in R: x \geq 0\}$
    Es. Intervista 1000 elettori $\Omega = \{1, 2, \dots, 1000\}$
  - Determinare gli eventi
    - Affermazioni sugli esiti, intuizione
    - Esiti $\neq$ Eventi
    - Evento $A \subseteq \Omega$

    Es. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
    $A =$ Esce numero pari $= \{2,4,6\}$
    $B =$ Esce multiplo di 3 $= \{3,6\}$
    $C =$ Numero pari e multiplo 3 $= A \cap B = \{6\}$
    D = non esce un numero pari $= A^c = \{1,3,5\}$
    $E =$ Numero pari e multiplo 3 $= A \cup B = \{2,3,4,6\}$
    Nota: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
    $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
  - Definire una probabilità
    - E' un grado di fiducia di verificarsi A
    - Noi creiamo una funzione che associa valore → Valore tra 0-1

    Ogni probabilità deve soddisfare:
    - $P(\Omega) = 1$
    - $P(\{\ \}) = 0$
    - $A \cap B = \{\ \} \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
    - $A \cap B \neq \{\ \} \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
    - $P(A^c) = 1 - P(A)$

    In questo caso, $(\Omega, P) =$ Spazio di probabilità
    - $|A| =$ Cardinalità = Numero elementi
    - $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}\ \forall A \subseteq \Omega$
    - $P(\{w\}) = \frac{1}{N} \forall w \in \Omega$
      In questo caso la probabilità si chiama uniforme
      Però non per forza deve essere uniforme, l'importante è che

Però non per forza deve essere uniforme, l'importante è che

$$\sum P(w_i) = 1$$

- Indipendenza eventi
  - Un evento non dipende dall'altro
  - Possono avere una parte in comune
  - $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Probabilità uniforme $\rightarrow \Omega =$ Limitato
  Normalmente bisogna contare i valori, il problema è che non sempre si possono contare
  $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, P(\{w\}) = \frac{1}{\Omega}$$
  Non sempre però è possibile contare gli elementi
  In questo caso bisogna utilizzare il calcolo combinatorio.
  Il calcolo combinatorio ha bisogno di:
  - N esiti possibili
  - K numero scelte

- Disposizioni semplici senza ripetizioni
  Dati k elementi distinti scelti tra n possibilità
  Noi sappia che il numero massimo di possibilità è
  $$n * (n-1) * (n-2) * \cdots * (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$
  Esiste 1 caso speciale chiamato permutazioni dove $k = n$
  In questo caso
  $$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

- Combinazioni: Insieme di k elementi distinti non ordinati scelti tra n possibili
  Il numero è:
  $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Un piccolo riassunto:

- Disposizioni ripetute $= n^k$
  K elementi che si possono ripetere con N possibilità con ripetizioni
  Es. tipo 3 dadi a 6 facce, n=6 k=3
- Disposizioni semplici $= n(n-1) \ldots (n-k+1)$
  K elementi distinti con N possibilità ordinate
- Combinazioni $= \binom{n}{k}$
  K elementi distinti con N possibilità non ordinate

k elementi distinti con N possibilità non ordinate
Es. Mano di poker

- Esempi
  1) Probabilità ottenere almeno un 6 tirando 2 dadi a 6 facce non truccate
     $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} * \{1,2,3,4,5,6\} = \{(x, y): 1 \leq x, y \leq 6\}$
     Si suppone che P sia uniforme
     $A =$ esce almeno un $6 = \{w = (x, y) \in \Omega: x = 6 \; or \; y = 6\}$

$$\Omega = \{ \begin{array}{llllll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{array} \}$$

A^c A

     Qui possiamo vedere visivamente A
     $|\Omega| = 6 * 6 = 36$
     Soluzioni:
     - Calcoliamo A
       Contando, possiamo notare che abbiamo 5+5+1 possibilità
       $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 11/36$
     - Calcoliamo A^c
       $A^c =$ "Non esce 6" $= \{1,2,3,4,5\} * \{1,2,3,4,5\}$
       $|\{1,2,3,4,5\}| = 5$
       $P(A^c) = \frac{25}{36}$
       Ed ora
       $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

  2) Probabilità di ottenere almeno 1 6 lanciando 8 dadi regolari a 6 facce
     $|\Omega| = \{1 \leq x \leq 6\}^8 = 6^8$
     Usiamo lo stesso ragionamento di sopra
     $A =$ "Esce un 6"
     $A^c = \left(\frac{5}{6}\right)^8$

$P(A) = 1 - A^c = 77\%$

3) 30% è obeso
3% diabetico
2% entrambi
Quali ha almeno uno di questi fattori?
$A =$ "Obeso" $\Rightarrow P(A) = 0.3$
$B =$ "Diabetico $\Rightarrow P(B) = 0.03$
$A \cap B =$ Obeso e diabetico $\Rightarrow P(A \cap B) = 0.02$
$A \cup B =$ Obeso oppure diabetico $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0.3 + 0.03 - 0.02 = 0.31 = 31\%$

4) Estraggo 3 persona casuali, qual è la probabilità siano tutte nate in primavera?
$|\Omega| = 365^3$
Questi sono tutti i giorni nell'anno
$A =$ Nati in primavera $=$ [20 marzo:21 giugno) $= 92$ giorni
$|A| = 93^3$
Tutte le possibilità in cui loro possono essere nati in primavera
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{93^3}{365^3} \simeq 1.6\%$$
Ora però supponiamo k persone
$$P(A) = \left(\frac{92}{365}\right)^k \simeq \frac{1}{4^k}$$

5) Quanti sono i possibili ordini di 3 squadre?
Qui noi vogliamo contare una sequenza ordinata con 3 valori distinti a, b, c
Detto questo,
$N =$ Lunghezza $= |\{a, b, c\}| = 3$
$K =$ Numero valori distinti = $| < a, b, c > | = 3$
Quindi siamo nel caso $k = n$
Quindi il numero è $n! \coloneqq 3! = 3 * 2 = 6$

6) Estraggo casualmente k persone
Qual è la probabilità che almeno 2 abbiamo lo stesso compleanno?
$|\Omega| = 356^k$
Con $k =$ numero persone, ed ogni numero equivale ad un giorno
$A =$ "Almeno 2 persone hanno lo stesso compleanno"
Per semplicità calcoliamo
$A^c =$ "Nessuno ha lo stesso compleanno"
Siccome nessuno ha lo stesso compleanno, questo vuol dire che

Siccome nessuno ha lo stesso compleanno, questo vuol dire che
abbiamo una disposizione semplice con valori distinti

$|A^c| = N * (N-1) * \cdots * (N-k+1)$

$$P(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{365 * 364 \dots (365-k+1)}{365^k}$$

$P(A) = 1 - P(A^c)$

7) Un giocatore a poker riceve 5 carte in un mazzo da 52
Quali sono il numero di possibili mani?
Qui noi abbiamo un insieme non ordinato scelto tra N possibilità

$$|\Omega| = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\,47!}$$

8) Estraiamo un comitato di 4 persone da una classi di 10 maschi e 10 fammine
Qual è la probabilità che sia composto da 2 maschi e 2 femmine?
Dobbiamo iniziare a comprendere il numero totale di possibilità, quindi tutte le possibile uscite, e possiamo notare che abbiamo N possibilità $= 20$
Con 4 particolari scelte

$$|\Omega| = \binom{20}{4} = \frac{20!}{4!\,16!} = 4\,845$$

Ora, in questo insieme di 4 845, dobbiamo trovare
$A =$ Sottinsieme di Ω con 2 maschi e 2 femmine
Quindi noi abbiamo

$$|A| = \binom{10}{2} * \binom{10}{2} = 2\,025$$

Abbiamo 2 gruppo di N=10 e vogliamo prendere 2 elementi
Ora possiamo finalmente calcolare la probabilità

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2025}{4835} = 0.42 = 42\%$$