Teoremi convergenza

Friday, 16 June 2023 13:24

1) Una lampadina ha un tempo di vita che segue una legge esponenziale di media 10 giorni.
Non appena la lampada smette di funzionare, viene sostituita con una nuova.
    a. Probabilità che 40 lampadine siano sufficenti per 1 anno? (365 giorni)
    $X_1, X_2, \dots, X_{40} \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda}\right) = Exp\left(\frac{1}{10}\right) \rightarrow \lambda = \bar{x}$
    X_i = tempo di vita della i lampada
    Dobbiamo calcolare che
    $P(X_1 + ? X_{40} > 365)$
    40 è abbastanza grande, quindi possiamo stimare con TLC
    $$E[X_1 + \cdots X_{40}] = \sum E[X_i] = 10 * 40 = 400$$
    $$Var(X_1 + \cdots + X_{40}) = \sum Var(X_i) = 40 * 100 = 4000$$
    Siccome sono indipendenti è la somma delle varianza

    $$P(X_1 \dots X_{40} > 365)$$
    $$= P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{40} - E[X_1 + \cdots X_{40}]}{\sqrt{Var(\dots)}} > \frac{365 - E[\dots]}{\sqrt{Var(\dots)}}\right)$$
    $$= P\left(\frac{X_1 + X_{40} + 100}{\sqrt{4000}} > \frac{365 - 4000}{\sqrt{4000}}\right)$$
    $$= P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{40} - 100}{\sqrt{4000}} > -\frac{35}{20\sqrt{10}}\right)$$
    E questo è possibile approssimarla in una gaussiana
    Passiamo al complementare
    $$1 - P\left(\frac{\dots - 400}{\sqrt{4000}} \le -\frac{35}{20\sqrt{10}}\right)$$
    $$\sim 1 - P\left(Z \le -\frac{35}{20\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{35}{20\sqrt{10}}\right)$$
    $Z \sim N(0, 1)$
    Siccome la phi è negativa
    $$\phi\left(-\frac{35}{20\sqrt{10}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{35}{20\sqrt{10}}\right)$$

Quindi

$$P(\ldots) = 1 - 1 + \phi\left(\frac{35}{20\sqrt{10}}\right) = \phi(0.55) = 0.7088 \simeq 0.71$$

b. Numero minimo n di lampade da comprare affinchè la probabilità dell'evento "N lampade sono sufficenti per 1 anno" sia almeno (≥*)* 0.95?

$P(X_1 + \square X_n > 365) > 0.95$

Dobbiamo trovare

$$E[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} E[i] = \sum_{i=1}^{n} E[i] = n * E[i] = 10n$$

$$Var(X_1 + \cdots X_n) = \sum Var(x_i) = 100n$$

$$P\left(\frac{X_1 + \cdots X_n - 10n}{\sqrt{100n}} > \frac{365 - 10n}{\sqrt{100n}}\right)$$

Si passa al complementare

$$1 - P\left(\frac{X_1 + \cdots X_n - 10n}{10\sqrt{n}} \leq \frac{365 - 10n}{10\sqrt{n}}\right)$$

$$1 - \phi\left(\frac{365 - 10n}{10\sqrt{n}}\right)$$

Siccome n deve essere un numero molto grande

Noi abbiamo il problema che quel numero sarà sicuramente negativo

E quindi si deve passare al complementare

$$1 - 1 - \phi\left(\frac{10n - 365}{10\sqrt{n}}\right)$$

$$\phi\left(\frac{10\mathrm{n} - 365}{10\sqrt{\mathrm{n}}}\right) \geq 0.95 \simeq \phi(0.1645) = 0.95$$

Ed ora dobbiamo trovare n

$$\phi\left(\frac{10n - 365}{10\sqrt{n}}\right) \geq \phi(1645) \rightarrow \frac{10n - 365}{10\sqrt{n}} \geq 1.645$$

Quindi supponiamo

$$\sqrt{n} = x$$

$$\frac{10x^2 - 365}{10x} \geq 1.645 \rightarrow 10x^2 + 16.45x - 365 \geq 0$$

$$x = 6.92, -5.27$$

La soluzione negativa non è una soluzione siccome noi vogliamo positivo

Siccome $x = \sqrt{n}$, $x^2 = n \to (6.92)^2 \simeq 48$

2) Probabilità di ottenere almeno 29 teste in 50 lanci di una moneta bilanciata

$X_1, \ldots X_{50} \sim Be\left(\frac{1}{2}\right)$
$P(X_1 + \cdots + X_{50} \geq 29)$

Questo è possibile da calcolare anche senza il TLC
Siccome sappiamo che è una binomiale:
$X_1 + \cdots + X_{50} \sim Bi\left(\frac{1}{2}, 50\right)$
E quindi è possibile calcolarlo come
$$\sum_{k=29}^{50} \binom{50}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{50}$$
Però è lungo da calcolare, e quindi si può usare una gaussiana

Quindi dobbiamo standardizzare
$n = 50, \qquad p = \frac{1}{2}$
$\mathrm{E[X]} = 25$
$\mathrm{Var(x)} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$
Ora per avere una approssimazione più corretta si toglie .5 al 29
$$P(X_1 + \cdots + X_{50} \geq 28.5) = P\left(\frac{\ldots - 25}{\sqrt{\frac{25}{2}}} \geq \frac{28.5 - 25}{\sqrt{\frac{25}{2}}}\right)$$
Ora quindi si può approssimare
$$\simeq P\left(z > \frac{7}{\sqrt{50}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{7}{\sqrt{50}}\right) = 1 - \phi(0.99) = 1 - 0.8390$$
$P(X_1 + \cdots + X_{50} \geq 29) \simeq 1 - 0.8389 = 0.1611$
(Come è uscito 50, non lo so ha semplicemente semplificato

3) Sia X...Xn una v.a. i.i.d. con media u e varianza 1
E sia Z~N(0, 1) aka gaussiana standard
Dato x ∈ R quale delle seguenti delle relazioni, per n sufficentemente grande, è una conseguenza del TLC?

a. $P\left(\frac{X_1 + \square + X_n}{n} < m + x\right) \simeq P(Z \leq x)$
b. $P\left(\frac{X_1 + \square + X_n}{\ldots} > m + x\right) \simeq P(Z \leq x)$

b. $P\left(\frac{\dots}{\sqrt{n}} \le m + x\right) \simeq P(Z \le x)$

c. $P\left(\frac{\dots}{\sqrt{n}} \le m\right) \simeq \frac{1}{2}$

d. $P(\dots \le nm + \sqrt{n}x) \simeq P(Z \le x)$

Iniziamo trovando la media
$E[X_1 + \square] = E[X_1] + \square = nm$
$Var(X_1 + \square) = Var(X_1) \dots = 1 * n$
Quindi ora dobbiamo standardizzare

$$P\left(\frac{\dots - nm}{\sqrt{n}} \le x\right) \simeq P(Z \le x)$$

(Per teoria)
Quindi ora riscriviamo meglio
$P(\dots \le nm + \sqrt{n}x) \simeq P(z \le x)$

4) $X \sim Bin\left(50, \frac{1}{2}\right)$
$P(X > 30)$
Quale è la migliore approssimazione
$50 = n$
$\frac{1}{2} = p$
Siccome è una binomiale
$m = n * p = 25$
$\sigma^2 = np * (1 - p) = 25 * \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$
$\sigma = \frac{5}{\sqrt{2}}$
$$\mathrm{t} = \frac{30 - \mathrm{m}}{\sigma} = \frac{30 - 25}{\frac{5}{\sqrt{2}}} = 5 * \frac{\sqrt{2}}{5} = \sqrt{2}$$
Noi stiamo applicando indirettamente il teorema del limite centrale in qualche modo a me sconosciuto
E questo teorema utilizza $\le$
Noi però abbiamo $>$
Quindi si ribalta
$1 - \phi(\sqrt{2})$

5) Su un campione di 1000 insegnanti ci sono 518 donne
   a. Fornire una stima puntuale della proporzione usando uno stimatore non distorto
      $X_1 \dots X_n \sim Be(p)$

Allora $\overline{X_n} = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \rightarrow$ non è distorto

$\overline{x_n} = 0.518$

b. Costruire un IC di livello 95% per la proporzione

$n = 1000 \geq 30 \rightarrow ok$

$1000 * 0.518 > 5 \rightarrow ok$

$1000(1 - p) > 5 \rightarrow ok$

Allora

$$\left(\overline{x_n} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x_n}(1 - \overline{x_n}}{n}}\right) = \left(0.518 \pm 1.96 * \sqrt{\frac{0.518 * 0.482}{1000}}\right)$$

c. Vogliamo un IC al 99% la cui ampiezza non sia maggiore di 0.03

Quanto dovrebbe essere numeroso il campione?

Siccome IC=99%

$\alpha = 0.01$

$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.576$

Per motivi che non ho capito

$$\frac{z_{0.005}}{\sqrt{n}} \leq 0.03$$

E quindi, ora voogliamo n isolato

$$n \geq \left(\frac{z_{0.005}}{0.03}\right)^2 \rightarrow n \geq 7374$$

6) N=200

18 = 18 insoddisfatti

a. Intervallo confidenza *α = 95%*

Comprendiamo che questa è una bernulli

$$X \sim Be\left(\frac{18}{200}\right)$$

$$n * \bar{x} > 5 \rightarrow 200 * \frac{18}{200} > 5 \rightarrow vera$$

$$n * \left(1 - \frac{18}{200}\right) > 5 \rightarrow vero$$

$$\left(\bar{x}_n \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\overline{x_n}(1 - \overline{x_n})}{n}}\right) = \left(\frac{18}{200} \pm z_{0.025} \sqrt{\frac{\frac{18}{200}\left(1 - \frac{18}{200}\right)}{200}}\right)$$

$$z_{0.025} = \frac{0.5120 + 0.5080}{2} = 0.51$$

$\approx (0.0503, 0.1297)$

b. $\alpha = 2\%$

$\mathrm{n} \geq 30 \rightarrow \mathrm{si}$

$np \geq 5 \rightarrow si$

$n(1-p) \geq 5 \rightarrow si$
$H_0: p < 0.1$
$H_1: p > 0.1$
$$\frac{\overline{x_n} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} > z_\alpha$$
$$\frac{\frac{18}{200} - 0.1}{\sqrt{0.1(1-0.1)}}\sqrt{200} > z_{0.02}$$
$0.4714 > 2.055$
Siccome è falso si accetta con livello significavità 2%
Quindi per $\alpha = 1\%$ siamo sicuro che è vero

c. $0.4714 = z_{\bar{\alpha}}$
$\bar{\alpha} = 0.6772$

7)

Bombe	0	1	2	3	4	5	6+
Regioni	229	211	93	35	7	1	*0*

Numero di bombe segue Poisson parametro λ ?

a. Fornire stima λ dai dati
$E[X] = \lambda$
$$E[X] = \frac{1}{576} * (211 + 2 * 93 + 3 * 35 + 4 * 7 + 5) = 0.92$$

b. Frequenze attese
$$\pi_0 = e^{-0.92} * \frac{0.9^0}{0!} = e^{-0.92} = 0.4$$
$$\pi_1 = e^{-0.92} * \frac{0.92^1}{1!} = 0.368$$
$$\pi_2 = 4 * \frac{0.92^2}{2} = 0.17$$
$f_0 = 576 * 0.4 = 230.4$
$f_1 = 212$
$f_2 = 98$

Bombe	0	1	2	3	4	5	6+
f_i	227.5	211.3	98.2	30.4	7.1	1.3	0.2

Si accorpa 5+6

Bombe	0	1	2	3	4	5
Frequenza attesa	227.5	211.3	98.2	30.4	7.1	1.5

c. $\alpha = 0.05$
$$q = \sum \frac{(n_j - f_j)^2}{f_j} > X^2_{k-1-1,\alpha}$$

$\sum \quad f_j$

$$q = \left(\frac{(229 - 227.5)^2}{227.5} + \frac{(211 - 211.3)^2}{211.3} + \cdots \right) \approx 1.15$$

$X^2_{6-1-1,0.05} = 9.48$

$1.15 > 9.48$

Quindi non posso rifiutare

Quindi potrebbe essere una poisson

8) Si lanciano 100 monete

Qual'è la probabilità di ottenere almeno 45 teste?

$\phi(45)$ è impossibile siccome non abbiamo 45

$\phi(1) = 0.8$

Qual'è più probabile?

$\phi(1)$ oppure $1 - \phi(1)$

Direi $\phi(1)$

9) F

Domanda 6. Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione uniforme sull'intervallo $(0, \lambda)$. Uno stimatore non distorto per λ è: (Sugg: può essere utile calcolare la media di una variabile aleatoria con distribuzione uniforme sull'intervallo $(0, \lambda)$.)

Allora

$$\bar{X}_n = \frac{0 + \lambda}{2}$$

Quindi

$\lambda = \overline{X_n} * 2$

10) F

Domanda 7. Si vuole verificare l'uguaglianza delle medie di due campioni di numerosit n, con varianze ignote. Allora

Noi di questi campioni non sappiamo se

SOno indipendenti

Oppure accoppiati

Quindi non abbiamo abbastanza informazioni.

11) F

Domanda 6. Si lancia 900 volte un dado non truccato, sia X la variabile aleatoria che conta il numero di volte in cui è uscito 6 in questi 900 lanci. Qual è la migliore approssimazione di $\mathbf{P}(X > 150)$? (nel seguito indichiamo con Z una variabile aleatoria Gaussiana standard)

$$X \sim Bin\left(900, \frac{1}{6}\right)$$

Noi qui la dobbiamo approssimare ad una gaussiana

$$E[X] = 900 * \frac{1}{6} = \cdots = 150$$

$$\sigma^2 = np(1-p) = 125$$

$$t = 150$$

$$\frac{t-m}{\sigma} = \frac{150-150}{120} = 0$$

Quindi $P(Z > 0)$

12) F

$$\frac{S(n_x - 1 + n_y - 1)}{n_x + n_y - 2} = \frac{S(-_x + n_y - 2)}{n_x + n_y - 2} = S$$

13)