Teoremi limite

Monday, 1 May 2023 15:30

- Abbiamo X valori infiniti di variabili aleatorie
  Nella vita reale noi abbiamo tanti sample
  E da questi X valori noi vogliamo reperire delle informazioni
- Dalle osservazioni facciamo delle supposizioni sulle incognite
  Es. Abbiamo tante lampadine e di ognuna sappiamo il loro tempo di vita
  E supponiamo che la legge è una esponenziale
  E durante le osservazioni noi dovremo prendere i campioni in maniera casuale
  E questo campione aleatorio (quindi insieme di osservazioni) ha una ampiezza N
  EEEEEEE
- Noi lavoreremo con funzioni del campione = statistica campionaria
  Aka una variabile aleatoria definita come una funzione dei nostri campioni
  Es. Statistica campionaria

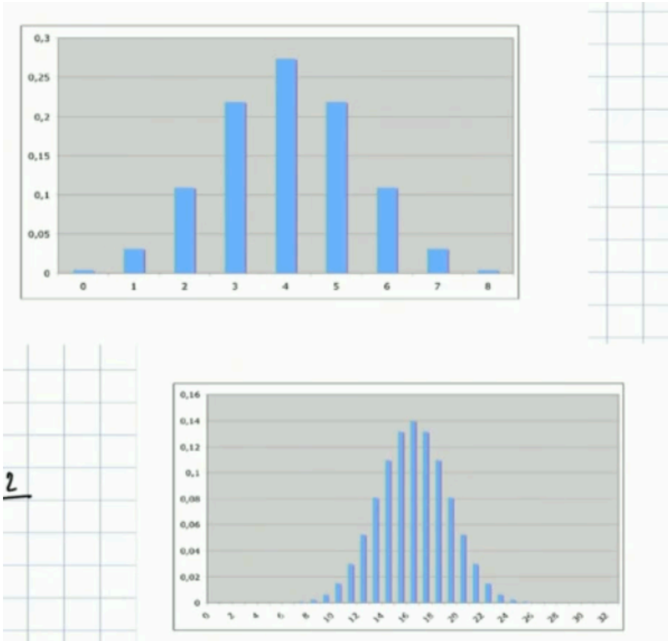
- Supponendo che
  $E(X_i) = m, \qquad var(X_i) = o^2$
  Allora
  $E(\overline{X_n}) = m, \qquad var(\overline{X_n}) = \frac{o^2}{n}$

- Data la legge dei grandi numeri, $P(|\overline{X_n} - n| > c) \to 0, n \to +\infty$
  Aka, se ci spostiamo infinitisamente dalla media allora la probabilità tenderà a 0
  Detto questo, definiamo la frequenza relativa
  $F_k^{(n)} := \frac{|\{\forall x \in A \to X_i(w) = k\}|}{n}$
  Aka quanti valori nella nostra variabile aleatoria sono uguali a k
  $P\left(\left|F_K^{(n)} - p(k)\right| \geq c\right) \to 0 \quad n \to \infty$

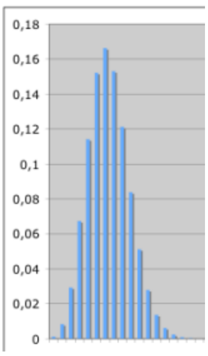
- $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$
  Per trasformare $N(x, y), x \neq 0, y \neq 1$
  In $N(0, 1)$
  Si usa la seguente formula:
  $\frac{\overline{x_n} - m}{\frac{o}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$
  Con

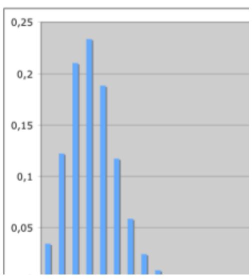
$$\bar{x} \sim N\left(m, \frac{o^2}{n}\right)$$

- Se abbiamo una discreta/continua simmetrica
  Es. $Be\left(\frac{1}{2}\right)$
  Noi notiamo che
  Più n è alto, aka più campioni abbiamo, e più $Be \sim N(0, 1)$



- Con una asimmetrica, tipo
  $Be\left(\frac{1}{10}\right)$





Anche qui si vede una approssimazione circa uguale ad una normale

- Nota che:
$$\frac{\overline{x_n} - m}{\frac{o}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$
Allora
$$\overline{x_n} - m \sim N\left(0, \frac{o^2}{n}\right)$$
Ed aggiungendo m
$$\overline{x_n} \sim N\left(m, \frac{o^2}{n}\right)$$

Per approssimare:
$$\frac{x_1 + \cdots x_n - nm}{\sqrt{n}o}$$

- Correzione di continuità
$P(40 \leq x_1 + \cdots + x_{100} \leq 70) = P(39 < x_1 + \cdots + x_{100} < 71)$
Ed il nostro valore desiderato è in mezzo a questi due valori
Quindi per avere una approssimazione più adatta
$P(39.5 \leq x_1 + \cdots + x_{100} \leq 70.5)$

- Possiamo approssimare una binomiale in normale quando:
$X \sim Bin(n,p), \qquad n \geq 30, \qquad np \geq 5, \qquad n(1-p) \geq 5$
Allora
$$X \sim N\big(np, np(1-p)\big) = \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$
E per via di ciò che abbiamo detto prima sull'approssimazione
$$P(X = K) = P(k - 0.5 \leq X \leq K + 0.5) = P\left(\frac{K - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{K + 0}{\sqrt{np(}}\right.$$
E quindi
$$\sim \phi\left(\frac{k + 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \phi\left(\frac{k - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

- $Y \sim Be(p) \to 1 - Y_1 \sim Be(1-p)$
E siccome $1 - p$ è molto piccolo possiamo approssimare con una poisson
$Bein(n, 1-p) \sim Pois(\lambda)$
$\lambda = n(1-p)$

Esempio:

- Abbiamo un campione con ampiezza 100 -> n=100
  Con $v.a. = N(4, 25)$
  Calcolare che $P(3 < \overline{x_n} < 5)$
  Noi dobbiamo far si che $N(4, 25) \to N(0, 1)$
  Per farlo dobbiamo fare
  $$P(a < \overline{x_n} < b) = P\left(\frac{a-m}{\frac{o}{\sqrt{n}}} < \frac{\overline{x_n} - m}{\frac{o}{\sqrt{n}}} < \frac{a-m}{\frac{o}{\sqrt{n}}}\right)$$
  $n = 100$
  $m = 4$
  $o^2 = 25 \to o = 5$
  Grazie alle formule di sopra
  $E(\overline{x_n}) = m = 4$
  $$var(\overline{x_n}) = \frac{o^2}{n} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$
  Ed ora calcoliamo
  $N(0, 1)$
  Che per farlo dobbiamo usare la formula di sopra
  $$\frac{\overline{x_n} - m}{\frac{o}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{x_n} - 4}{\frac{5}{\sqrt{100}}} = \frac{\overline{x_n} - 4}{\frac{1}{2}} = 2(x_n - 4) \sim N(0, 1)$$
  Bene ora sostituiamo a sopra
  $$P\left(\frac{a-m}{\frac{o}{\sqrt{n}}} < \frac{\overline{x_n} - m}{\frac{o}{\sqrt{n}}} < \frac{a-m}{\frac{o}{\sqrt{n}}}\right) = P\big(2(3-4) < 2(\bar{x} - 4) < 2(5-4)\big) = P(-2 < 2$$
  Siccome $2(\bar{x} - 4) \sim N(0,1)$, allora $2(\bar{x} - 4) \sim \bar{x}$
  Quindi
  $P(-2 < 2(\bar{x} - 4) < 2) = P(-2 < \bar{x} < 2)$
  Supponiamo che $\bar{x} = z$ siccome così abbiamo gli stessi appunti della prof
  $P(-2 \leq z \leq 2) = P(z \leq 2) - P(z \leq -2) = \phi(2) - \phi(-2)$
  Quindi
  Ora dobbiamo usare la tabella
  Ed incrociando col risultato
  $\phi(2) = 0.9772$
  $\phi(-2) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772$
  Quindi ora s

- Lanciamo 100 volte una moneta equilibrata
  Qual'è la probabilità che il numero di teste sia compreso da 40 e 70? (Estremi incl
  $X_k = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$
  $k = 1 \ldots 100$

$k = 1, \dots, 100$

$X_k \sim Be\left(\frac{1}{2}\right)$

Aka singoli valori

$X_1 + \cdots + X_{100} \sim Bin\left(100, \frac{1}{2}\right)$

Aka più valori

Calcoliamo la probabilità nel modo normale

$$P(40 \leq x_1 + \cdots + x_{100} < 70) = \sum_{k=4}^{70} P(x_1 + \cdots + x_n = k)$$

$$= \sum_{40}^{70} \binom{100}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k * \left(\frac{1}{2}\right)^{100-k} \sim 0.982$$

Ora approssimando con $N(0, 1)$

$E(X_1) = \frac{1}{2} = m$

$Var(X) = \frac{1}{4} = o^2$

$o = \frac{1}{2}$

$n = 100$

Ora usiamo la formula

$$\frac{x_1 + \cdots x_n - nm}{\sqrt{n}o} = \frac{x_1 + \cdots x_{100} - 100 * \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} * \sqrt{100}} = \frac{x_1 + \cdots + x_{100} - 50}{5}$$

Noi sappiamo che

$\frac{x_1 + \cdots + x_{100} - 50}{5} \sim N(0, 1)$

Quindi

Ora usiamo la formula

$$P\left(\frac{a-m}{\frac{o}{\sqrt{n}}} < \frac{\overline{x_n} - m}{\frac{o}{\sqrt{n}}} < \frac{a-m}{\frac{o}{\sqrt{n}}}\right)$$

$m = 50$

$\frac{o}{\sqrt{n}} = 5$

Non mi chiedete come la prof ci è arrivata a questi valori, manco io lo so.

Quindi possiamo sostituire

$$P\left(\frac{40-50}{5} < \frac{x_1 + \cdots + x_{100} - 50}{5} < \frac{70-50}{5}\right)$$

Ora siccome
$$\frac{x_1+\cdots+x_{100}-50}{5}\sim N(0,1)\rightarrow\frac{x_1+\cdots+x_{100}-50}{5}=z$$
Quindi
$\sim P(-2\leq z\leq 4)=\phi(4)-\phi(-2)=\phi(4)-\big(1-\phi(2)\big)$
$\phi(4)\geq\phi(3.5)\rightarrow\phi(4)=1$
$\phi(2)=0.9772$
$\rightarrow 1-1+\phi(2)=0.9772$
Notiamo che abbiamo un errore dei centesimi
Per fixare questo errore si usa la seguente formula:
Siccome $P(40\leq x\_1+\cdots+x\_100\leq 70)=P(39<x_1+\cdots+x_{100}<71)$
Il nostro valore corretto è tra questi due intervalli
Quindi per avere una approssimazione più corretta si può fare
$P(39.5\leq x_1+\cdots+x_{100}\leq 70.5)$

- $X\sim U([0,2])$
  $E(X)=\frac{2+0}{2}=1=m$
  $var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}=o^2$
  Calcolare ora
  - $P(X_1+\cdots X_{147}<161)$
    Prima bisogna standardizzare
    $$\frac{x_1+\cdots+x_{147}-147*1}{\sqrt{147*\frac{1}{3}}}=\frac{x_1+\cdots+x_{147}-147}{7}\sim U(0,1)$$
  - $P\left(\left|\frac{x_1+\cdots+x_{147}-147}{7}\right|>\frac{7}{7}\right)=P(|z|>1)$
    A destra non moltiplichiamo per 147 siccome a sinistra abbiamo 147
    $P(|z|>1)=2P(Z>1)=2*\big(1-\phi(1)\big)$
  - $P(|x_1+\cdots+x_{147}-148|>6)$
    Siccome abbiamo il 148 qui si dovra moltiplicare (che la prof non fa)

  (Inserire il lancio del dado)

- Sia $x_1,\ldots x_n$ una uniforme discreta su $\{-1,0,1\}$
  - $P(|\bar{x}_{100}|>0.01)$
    Siccome è discreta
    $P(x_i=0)=P(x_i=1)=P(x_i=-1)=\frac{1}{3}$
    $E(x_i)=0=m$ per via delle regole dell'uniforme discreta
    $o^2=Var(x_i)=E\big(x_i^2\big)-\big(E(x_i)\big)^2$

$$E\left(x_i^2\right) = (-1)^2 * \frac{1}{3} + 0^2 * \frac{1}{3} + 1^2 * \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$X_i^2 = \{0, 1\}$

-1 scompare siccome del quadrato

Quindi

$$X_i^2 \sim Be\left(\frac{2}{3}\right)$$

Quindi possiamo iniziare a calcolare ora

$P(|\overline{x_{100}}| > 0.01)$

Iniziamo a standardizzare, bisogna prima togliere la media (0) e poi dividere per

$$P\left(\left|\frac{|\overline{x_{100}}|}{\sqrt{\frac{2}{3} * \frac{1}{10}}} > \frac{0.01}{\sqrt{\frac{2}{3} * \frac{1}{10}}}\right) \sim N(0, 1)$$

(Ops quella linea)

$$P\left(|z| > 0.1 * \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = P(|z| > 0.12247)$$

$$= 2 * \left(1 - \phi(0.12247)\right) = 0.904$$

(Il 2* siccome del valore assoluto)

- Noi dobbiamo trovare

$$P(|\overline{x_n}| > 0.01) < 0.1 = P\left(\frac{\overline{x_n} - 0}{\sqrt{\frac{2}{3} n}} > \frac{0.01}{\sqrt{\frac{2}{3} n}}\right) \sim P\left(|z| > 0.01 * \sqrt{\frac{3n}{2}}\right)$$

$$2 * \left(1 - \phi\left(0.01 * \sqrt{\frac{3n}{2}}\right)\right)$$

$$2 - 2\phi\left(0.01 * \sqrt{\frac{3n}{2}}\right) < 0.1 \rightarrow 2\phi(\dots) > 1.9 \rightarrow \phi(\dots) > 0.95$$

$\phi(x) = 0.95$

Quindi dobbiamo trovare un valore x che fà 0.95, o comunque ci è molto vici

E questo significa

$\phi^{-1}(x) = 0.95$

I due valori più vicini sono: 1.64, 1.65

$\phi(1.64) = 0.94555$

$\phi(1.65) = 0.94505$

$x \sim 1.645$

$$0.01 * \sqrt{\frac{3n}{2}} > x \to 0.01 * \sqrt{\frac{3n}{2}} > 1.645 \to \sqrt{\frac{3n}{2}} > 164.5 \to n > (164.5)^2 * \frac{2}{3} =$$

Bisogna troncare la virgola, arrotondare per eccesso

$n \geq 18041$