Variabili aleatorie

Monday, 20 March 2023 12:33

1) $X = \{-1, 0, 3\}$

   $P(x = -1) = \frac{1}{2}, P(x = 0) = \frac{1}{6}, P(x = 3) = z \in R$

   Quanto vale z e media X

   $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + z = 1 \rightarrow z = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{6-3-1}{6} = \frac{1}{3}$

   Calcoliamo media

   $\bar{x} = -1 * \frac{1}{2} + 0 * \frac{1}{6} + 3 * \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

2) Urna con 6 palline numerate

   0-1-1-2-2-3

   Si estrae a caso una pallina

   E sia X il numero della pallina estratta (X = variabile aleatoria)

   A. Trovare densità discreta p_x di X
      E calcolare media e varianza
   B. Decido di partecipare a:
      Pago 1eur in entrata ed estraggo 1 pallina, ricevo in euro una quantità in base alla metà della pallina estratta
      Sia Y il mio guadagno
      Trovare media Y e varianza

   Iniziamo punto A

   $X = \{0, 1, 2, 3\}$

   $p_x(0) = \frac{1}{6}, p_x(1) = \frac{1}{3}, p_x(2) = \frac{1}{3}, p_x(3) = \frac{1}{6}$

   $\bar{x} = 0 * \frac{1}{6} + 1 * \frac{1}{3} + 2 * \frac{1}{3} + 3 * \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$

   $var(X) = \left(\overline{X - \bar{X}}\right)^2 = \overline{X^2} - (\bar{X})^2$

   $(\bar{X})^2 = \frac{9}{4}$

   $\overline{X^2} = 0^2 * \frac{1}{6} + 1^2 * \frac{1}{3} + 2^2 * \frac{1}{3} + 3^2 * \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$

   $Var(X) = \overline{X^2} - (\bar{X})^2 = \frac{16}{6} - \frac{9}{4} = \frac{11}{12}$

Facciamo il punto B
Iniziamo a collegare Y con X

$$Y = \frac{X}{2} - 1$$

-1 siccome pago 1 euro
$\frac{X}{2}$ = il guadagno che io ottengo
Quindi

$$\bar{Y} = \overline{\frac{x}{2} - 1} \rightarrow \bar{Y} = \bar{X} * \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2} * \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

$$Var(Y) = Var\left(\frac{X}{2} - 1\right) = Var\left(\frac{X}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 * var(X) = \frac{Var(X)}{4} = \frac{11}{48}$$

-> -1 viene tolto

-> Tutto ciò che non è X viene levato alla quadrata

3) In un ospedale nascono ogni giorno mediamente 2.2 bambini
Assumendo la distribuzione di poisson

A. Qual è la probabilità che in un dato giorno non nasca nessuno
B. Qual è la probabilità che in un dato giorno nascono >2 bambini

Iniziamo con A

- Calcoliamo poisson
  X = numero bambini che nascono in un dato giorno in questo ospedale
  $X \sim Poisson(?)$
  Dobbiamo trovare ?
  $\bar{X} = 2{,}2$
  E siccome $Poisson(\lambda) = \bar{X} = \lambda$
  Quindi $X \sim Poisson(2{,}2)$
- Calcoliamo probabilità discreta
  $$p_x(k) = e^{-2{,}2} * \frac{(2{,}2)^k}{k!}$$
- Ora possiamo calcolare tutto quanto
  $$p_x(0) = e^{-2.2} * \frac{(2{,}2)^0}{0!} = e^{-2.2} = \frac{1}{e^{2.2}} \approx 0.11$$
- Calcoliamo probabilità nascita di >2 bambini
  $$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \left(p_x(0) + p_x(1) + p_x(2)\right)$$
  $$p_x(1) = e^{-1} * 2{,}2 = \frac{2{,}2}{e}$$
  $$p_x(2) = e^{-2} * \frac{(2{,}2)^2}{2}$$

$$= 1 - e^{-2,2}\left(1 + 2,2 + \frac{(2,2)^2}{2}\right)$$

4) Ciascuna pagina di un libro può contenere errori
Con probabilità $\frac{1}{20}$ indipendentemente dalle altre pagine
Qual'è la probabilità che, scegliendo a caso un libro di 100 pagine, questo contenga >1 pagina con errori

Si chiami X variabile aleatoria che conta numero di pagine con errori nel libro di 100 pagine

$$\Rightarrow X \sim Bin\left(100, \frac{1}{20}\right)$$

Questo perché la binomiale conta le probabilità di X pagine con Y probabilità
Calcoliamo la densità discreta

$$p_x(k) = \binom{100}{k} * \left(\frac{1}{20}\right)^k \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{100-k}$$

Ora calcoliamo $P(X > 1) = 1 - \big(P(0) + P(1)\big)$

$$P(0) = \binom{100}{0}\left(\frac{1}{20}\right)^0 \left(\frac{17}{20}\right)^{100}$$

$$p(1) = \binom{100}{1}\left(\frac{1}{20}\right)^1 \left(\frac{19}{20}\right)^{99}$$

$$\approx 0,963$$

Il tutto però si può semplificare con una legge di poisson
Quando può accadere? Quando X è grande e Y è piccolo
E $\lambda = X * Y$

$$\Rightarrow Y \sim Pois(X * Y) \sim Pois\left(100 * \frac{1}{20}\right) = Pois(5)$$

$$P(X > 1) = 1 - P_x(0) - P_x(1) \approx 1 - P_Y(0) - P_Y(1)$$

$$P(0) = e^{-5} * \left(\frac{5}{0}\right)^0$$

$$P(1) = e^{-5} * \frac{5^1}{1}$$

$$= 1 - \frac{6}{e^5} \approx 0.96$$

5) Lanciamo un dato fino a che non si vede il numero 6

X = variabile aleatoria che conta il numero di lanci necessari per ottenere 6

Determinare $p_x(X)$ aka densità discreta

$k \in N - \{0\}$

$$p_x(1) = \frac{1}{6}$$

-> Esce 6 al primo lancio

$$p_x(2) = \frac{5}{6} * \frac{1}{6}$$

-> Non esce 6 al primo lancio, esce 6 al secondo lancio

$$p_x(3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 * \frac{1}{6}$$

-> Non esce 6 al primo+secondo lancio, esce 6 al secondo lancio

$$p_x(k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} * \frac{1}{6}$$

6) Nel gioco del lotto vengono estratti 5 numeri da 1 a 90
Giocando (1,2,3,4,5), qual è la probabilità di vincita:

- Giocando la 5 secca (ordine è importante)
  Quindi è una disposizione semplice di n elementi su k
  N=90
  K=5
  $$|\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!} = 90 * 89 * 88 * 87 * 86$$
  Quindi qui ci interessa ordinati, quindi
  $A = \{(1,2,3,4,5)\}$
  $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{90 * 89 * 88 * 87 * 86}$$
- 5 semplice (ordine non è importante)
  Ora invece l'ordine non è importante, quindi
  $A = \{(1,2,3,4,5)\}$
  Deve essere aumentato di N volte
  $B = \{< 1,2,3,4,5 >, < 2,1,3,4,5 >, \dots\}$
  $|B| = 5!$
  $$P(B) = \frac{5!}{90 * 89 * 88 * 87 * 86}$$

7) In una fabbrica 10 000 circuiti sono prodotti
E ciascuno ha 1/2 500 di guasto

a. Probabilità che domani più di 2 circuiti difettosi
   Questa è una variabile aleatoria dove abbiamo N prove con 0, 1 risultato

Quindi

$$A \sim Bin\left(10\,000, \frac{1}{2500}\right)$$

Noi vogliamo calcolare

$$P(X > 2)$$

Per comodità, è più facile calcolare il complementare

$$1 - \big(P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\big)$$

$$= 1 - \sum \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{10\,000}{k} \left(\frac{1}{2500}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2500}\right)^{1000-k}$$

$$\simeq 0.763$$

b. Usare poisson

Siccome abbiamo N elevato e P piccolo, è possibile approssimarlo

$$\lambda = 10\,000 * \frac{1}{2500} = 4$$

$$P(X > 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = 1 - e^{-4} * 13 \simeq 0.762$$

8) Lancia 3 volte un dado a 6 facce

X=Numero di volte che è uscito 1

a. $E[X], Var(X), distribuizione(x)$

Noi abbiamo N tentativi con K possibilità con 0-1 output

$$X \sim Bin\left(3, \frac{1}{6}\right)$$

$$E[X] = np = 3 * \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$Var(x) = np(1-p) = 3 * \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{12}$$

b. Pago 1$ entrata, lancio dado 3 volte e ricevo 2.5$ ogni volta che esce 1

Y=Guadagno

$E[Y], Var(Y)$

Prima dobbiamo trovare la nostra formula Y in funzione di X

$$Y = 2.5X - 1$$

Il -1 siccome è il costo di partecipazione

$$E[Y] = E[2.5X - 1] = 2.5E[X] - 1 = \frac{5}{} * \frac{1}{} - 1 = \frac{5}{}$$

$$Var(Y) = Var(2.5X - 1) = Var(2.5X) = (2.5)^2 Var(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 * \frac{5}{12}$$
$$= \frac{125}{48}$$

9) Un azienda afferma che il numero di incidenti **in un mese** è una S.A. (non so cosa significa) distribuita secondo poisson con $\lambda = 1.5$
Calcolare probabilità:

a. In un mese non ci siano incidenti
$X \sim Pois(1.5)$
$P(X = 0) = e^{-1.5}$

b. In un mese ci siano più di 3 incidenti
$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = 1 - e^{-1.5} * 41875$$
$$\simeq 0.066$$

10) Si lancia una moneta equilibrata fino a che non esce testa

a. Densità discreta
Devo essere sincero, non ho la più pallida idea da dove iniziare
Beh ovviamente
$$p_x(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
Dove 1/2 è la probabilità di testa, e k i nostri lanci

b. Quanti lanci in media per ottenere testa
Media, quindi si calcola E
$$E[X] = \sum k * p_x(k) = \sum k * \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
NOOOO ANALISI
Allora, grazie agli appunti della prof si sa che
$$\sum_{n=1} k * q^{m-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$
Non mi chiedete di dimostrarlo.

Quindi dobbiamo cercare di raggiungere questo valore
$$\sum_{k=0} k * \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1} k * \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{(1-k)^2}$$
Sappiamo che questa converge siccome è una serie geometrica

Quindi
Spero che non uscirà sta cosa in esame

$$= \frac{1}{2} * \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

c. Testa esca in un lancio pari/dispari

$$\sum P(X = 2k) = \sum_{k=1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=1} \frac{1}{4}^k = \frac{1}{4} \sum \frac{1}{4}^{k-1}$$

$j = k - 1$

$$\frac{1}{4} \sum \frac{1}{4}^j = \frac{1}{4} * \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Per lancio dispari

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

11) *Si lancia una moneta equilibrata 5 volte*
X = "*Numero di teste nei* 5 *lanci*"

a. $P(X \geq 2), \qquad E[X]$
E' questa una legge notevole oppure no?
Si, abbiamo N valori con X probabilità

$$X \sim Bin\left(5, \frac{1}{2}\right)$$

$$P_X(k) = P(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big)$$

$$= 1 - \left(\binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right) = 1 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)$$

$$= 1 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{13}{16}$$

$E[X] = np = 5/2$

b. *Partecipiamo al seguente gioco:*
Pago 3$ *entrata, e ricevo tanti* $ *quante il doppio delle teste ritrov*
Y = "*Guadagno con segno*"
Calcolare $E[Y], \qquad P(Y \geq 0)$

$Y = 2X - 3$

$$E[Y] = E[2x - 3] = 2E[X] - 3 = 2 * \frac{5}{2} - 3 = 5 - 3 = 2$$

$$P(Y \geq 0) = P(2x - 3 \geq 0) = P\left(X \geq \frac{3}{2}\right)$$

Dobbiamo approssimare in eccesso

$P(X \geq 2) =$ *Lo avevamo calcolato prima*

12) X, Y *variabili aleatorie indipendenti t.c.*

$$X \sim V(1, 1/2), \qquad Y \sim V\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

a. $X + Y$

Noi sappiamo che

$X + Y = \sim V(E[X+Y], Var(X+Y))$

La somma di un gaussiane indipendenti è *una gaussiana*

$E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 1 - 1 = 0$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$X + Y \sim V(0, 1)$

b. $P(X + Y \geq 0)$

$$P(X + Y \geq 0) = \frac{1}{2}$$

Perché? Siccome nella gaussiana abbiamo a metà una parte di grafico e dall'altra metà l'altro