Examen de complexité du 06/01/2026 - durée 1h30min

Exercice 1.- *les équations de récurrence.*

Soit un entier naturel $a \geqslant 1$:

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ \sum_{i=1}^{a} T\left(\frac{n}{2}\right) + n, & n \geq 2. \end{cases}$$

— En utilisant le théorème, résoudre $T(n)$ en fonction des valeurs de a.

Exercice 2.- *Sous-tableau équilibré.*

Soit $A[1..n]$ un tableau d'entiers tel que : $A[i] \in \{-1, +1\}$. Un sous-tableau $A[i..j]$ est dit *équilibré* si : $\sum_{k=i}^{j} A[k] = 0$.

1. Écrire une fonction qui prend deux indices i et j de A, $1 \leq i \leq j \leq n$, et retourne 1 si le sous-tableau $A[i..j]$ est équilibré, et 0 sinon.
   — Proposer un invariant de boucle pour prouver la validité de cet algorithme (sans le prouver).
   — Donner sa complexité.
2. Écrire une fonction qui prend en entrée A et retourne un tableau auxiliaire $Aux[1..n]$ tel que : $Aux[k] = \sum_{j=1}^{k} A[j]$. Donner sa complexité.
3. Que doivent vérifier $Aux[i]$ et $Aux[j]$ pour que le sous-tableau $A[i..j]$ soit équilibré ? Justifier.

- la complexite de qsta

Exercice 3.- *NP-complétude.*

1. Répondre par vrai ou faux en justifiant chaque réponse.
   (a) « $A \leq_p B$, et A est facile en pratique, donc B est facile. ».
   (b) « $X \leq_p Y$, donc Y est plus facile que X. »
   (c) « Tous les problèmes de NP se réduisent à X, donc X est NP-complet. »
   (d) « $SAT \in P$, donc $P = NP$. »
2. Soit la formule booléenne suivante :

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \ \wedge \ (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5).$$

   (a) En utilisant le problème *3-SAT* et φ, expliquer que *5-SAT* $\in NPC$.
   (b) En utilisant l'instance φ du *5-SAT*, expliquer les étapes de la transfromation des instances *5-SAT* aux instances du problème de somme de sous-ensemble (*SUBSETSUM*).
   (c) L'affectation : $s = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0)$ satisfait φ. Expliquer comment touver la solution de l'instance *SUBSETSUM* correspondante à φ à partir de s.