U.S.T.H.B - 2025-2026
Faculté d'Informatique
N. Bensaou

Master Informatique Visuelle
Algorithmique et Complexité (M1 - MIV)

Rappel : Outils mathématiques et comparaisons d'ordre de complexité

<u>Exercice 1</u>.- Exercices sur les preuves par récurrence.

Montrer que :

a)

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

b)

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

c) Montrer par récurrence (et non en recherchant des expressions séparées pour les deux sommes) que :

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

d) $\forall n \geq 1$, $a \neq 1$, montrer :

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

<u>Exercice 2</u>.- Comparaison de croissance.

Soit un ordinateur pour lequel toute instruction a une durée de 10^{-6} secondes. On exécute un algorithme qui utilise pour une donnée de taille n, $f(n)$ instructions, où $f(n)$ peut être n, n^2, n^3, $\log n$, $n \log n$, ou 2^n.

a) Remplir un tableau qui donne, en fonction de la taille $n = 10, 20, 30, 60$ et de la fonction $f(n)$, la durée d'exécution de l'algorithme.

b) Reclassez le tableau en fonction de l'ordre croissant des $f(n)$.

<u>Exercice 3</u>.- Quelles sont les complexités de :

- $T_1(n) = 3n \log n + \log n$
- $T_2(n) = 2^n + n^3 + 25$
- $T_3(n, k) = k + n$ où $k \leq n$.

Classez-les dans l'ordre croissant.

Exercice 4.- Supposons que deux algorithmes résolvent le même problème. L'un s'exécute en $T_1(n) = 400n$ et l'autre en $T_2(n) = n^2$. Quelles sont les complexités de ces deux algorithmes ? Pour quelles valeurs de n doit-on préférer l'algorithme de complexité plus élevée ?

Exercice 5.- Soient $f(n)$ et $g(n)$ deux fonctions positives asymptotiques. En utilisant la définition de base de la notation Θ, prouver que :

$$\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$$

Exercice 6.- Soient deux fonctions $f(n)$ et $g(n)$ définies dans $\mathbb{N}$, telles que pour tout n, $f(n) < g(n)$. Est-ce que $O(g(n) - f(n))$ est toujours égal à $O(g(n))$? Si oui, démontrez-le ; sinon, donnez un contre-exemple.

Exercice 7.- Peut-on écrire :

$$2^{n+1} = O(2^n)$$
$$2^{2n} = O(2^n)$$

Exercice 8.- Montrer que les affirmations suivantes sont correctes :

$$5n^2 - 6n = \Theta(n^2)$$
$$n! = O(n^n)$$
$$2n^2 + n \log n = \Theta(n^2)$$
$$n^{\log n} = O(n^{\sqrt{n}})$$
$$\log(n!) = \Theta(n \log n)$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \Theta(n^{k+1})$$