Министерство науки и высшего образования Российской федерации
ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова»
Институт математики и информатики
Кафедра прикладной математики и дифференциальных уравнений

«ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ»
Зав. кафедрой ________ Цыренжапов Н.Б.
«___» _______________2023 г.

Гылыпкилова Анастасия Зориктоевна

Построение квадратурных формул общего вида

(Выпускная бакалаврская работа)

Научный руководитель:
_________ Цыренжапов Нима Булатович, к.ф.-м.н., доцент
Дата защиты: ___ ____________2023 г.
Оценка: ______________

Улан-Удэ, 2023 г.

Оглавление

Введение

Задача вычисления интегралов затрагивает многие области, бывает приходится вычислять определенные интегралы, для которых невозможно получить точное значение. Встречаются определенные интегралы, у которых первообразные подынтегральной функции не выражаются через элементарные функции, а также и сами подынтегральные функции не являются элементарными. Понятие определенного интеграла широко используется для вычисления инженерно-технических, физических задач.

Уже с древних времен математики рассматривают проблему интегрального исчисления. Решением этой проблемы с математической точки зрения послужили квадратуры. Задачи квадратуры послужили одним из главных источников возникновения в конце $XVII$ века математического анализа. Общая же теория квадратурных формул была создана Карлом Гауссом, которому и принадлежит термин квадратурная формула. Не менее известными также являются квадратурные формулы Ньютона-Котеса. К квадратурам Ньютона-Котеса относятся, такие известные формулы численного интегрирования как: формула левых, правых, средних прямоугольников, формула трапеций и Симпсона, или как ее еще называют формула парабол.

Актуальностью данной работы является необходимость дальнейшего развития методов приближенного вычисления интегралов.

Целью дипломной работы является построение квадратурной формулы общего вида.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

1. Изучить необходимую литературу;
2. Построить элементарную квадратурную формулу с участием производных, при заданных праметрах G и σ;

3. Построить квадратурную формулу с участием производных на произвольном участке интегрирования;
4. Провести сравнение вычислений интегралов;
5. Составить программный код для вычисления интегралов по квадратурной формуле.

Объектом исследования дипломной работы являются формулы приближенного вычисления интегралов.

Практическая значимость работы заключается в применении полученных результатов при изучении дисциплины.

Данная дипломная работа состоит из двух глав. В первой главе рассматривается описание простейших квадратурных формул и построение квадратурных формул с участием производных на произвольном участке интегрирования. Вторая глава посвящена построению элементарной квадратурной формуле с участием производных, при параметрах $G = 3$ и $\sigma = 3$.

Глава 1

1.1 Квадратурная формула

Пусть для некоторой функции $f(x)$ непрерывной и определенной на участке $[a, b]$, необходимо найти определенный интеграл. Определенный интеграл находим по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

Такой метод не всегда является практичным, так как не всякая функция $f(x)$ имеет первообразную, определяемую через элементарные функции, а в ситуациях, где подынтегральное выражение задано таблично этот способ не используется совсем. Все это порождает потребность в приближенных методах вычисления интеграла (1), которые называются численными методами. Они позволяют найти числовое значение интеграла, основываясь на известных значениях подынтегральной функции (а иногда и ее производных), в заданных точках, называемых узлами. Процесс численного определения интеграла называется квадратурой, а соответствующие формулы - квадратурными формулами.

Тогда требуется отрезок $[a, b]$ разбить на n равных частей отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n$ длиной $h = \frac{(b-a)}{n}$, а интеграл (1) заменяем суммой n интегралов

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \qquad (2)$$

Далее, подынтегральное выражение на отдельном участке интегрирования $[x_i, x_{i+1}]$ приближаем некоторым интерполяционным многочленом $L_{s,i}(x)$ не старше степени s, и находим интеграл $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} L_{s,i}(x)dx$.

В итоге получаем приближенное решение интеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k) \quad (3)$$

Формула (3) называется квадратурной, где C_k- квадратурные коэффициенты, а x_k- узлы формулы. Разность

$$R_n = \int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k) \quad (4)$$

называют остаточным членом или погрешностью квадратурной формулы, которая зависит как от расположения узлов, так и от выбора коэффициентов квадратурной формулы.

1.2 Простейшие квадратурные формулы

Пусть $f(x)$ положительная непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Необходимо вычислить приближенно определенный интеграл.

Очень простое приближенное выражение интеграла представляет собой величина площади прямоугольника, основанием которого служит отрезок $[a, b]$, а высотой ордината $f(\frac{(a+b)}{2})$ графика функции $f(x)$ в средней точке $\frac{(a+b)}{2}$ этого отрезка.

Мы получили, таким образом, приближенную квадратурную формулу:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2}) \quad (1).$$

имеющую смысл для любой непрерывной функции, не обязательно положительной.

Левая часть здесь равна правой, если функция $f(x)$ есть произвольная линейная функция $Ax + B$, где A, B - константы. Мы будем говорить в связи с этим, что наша приближенная квадратурная формула точна для любой функция $f(x)$, представляющей собой произвольную линейную функцию.

Мы рассмотрели простейшую квадратурную формулу прямоугольников. Несколько более сложной является формула трапеций. В случае положительной функции $f(x)$ она сводится к тому, что определенный интеграл заменяется числом, равным площади трапеции, сторонами которой является отрезок $[a, b]$ оси Ox , отрезки прямых $x = a$ и $x = b$ и хорда AB графика функции.

Таким образом, квадратурная формула трапеций представляет собой следующее приближенное выражение:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}(b - a)[f(a) + f(b)] \quad (2)$$

имеющее смысл для произвольной непрерывной (не обязательно положительной) функции.

Квадратурная формула трапеций (2), так же как формула прямоугольников, точна для всех линейных функций $y = Ax + B$, графики которых представляют собой всевозможные прямые.

Наконец, мы рассмотрим еще одну широко распространенную на практике квадратурную формулу - формулу Симпсона. Она (в случае положительных функций) сводится к тому, что определенный интеграл приближенно выражается площадью фигуры, ограниченной отрезком $[a, b]$ оси Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ и параболой второй степени, проходящей через точки графика функции $f(x)$, имеющие абсциссы a , $\frac{(a+b)}{2}$ и b .

Эта формула имеет следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \quad (3)$$

Из способа получения формулы Симпсона непосредственно вытекает, что она точна для всех многочленов:

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (4)$$

второй степени. Графики этих многочленов представляют собой всевозможные параболы второй степени, оси которых параллельны оси Oy.

Более того, хорошо известно, что формула Симпсона на самом деле еще лучше: она точна не только для многочленов второй степени, но и для всех многочленов третьей степени:

$$P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (5)$$

В самом деле, мы можем представить многочлен P_3 в виде

$$P_3(x) = P_2(x) + a_3 x^3 \quad (6)$$

где $P_2(x)$ определяется равенством (4). Тогда

$$\int_a^b P_3(x)\,dx = \int_a^b P_2(x)\,dx + a_3\int_a^b x^3 dx = \int_a^b P_2(x)\,dx + \frac{a_3}{4}(b^4 - a^4) \quad (7)$$

Но уже известно, что

$$\int_a^b P_2(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left\{P_2(a) + 4P_2\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_2(b)\right\} \quad (8)$$

С другой стороны, величину $\frac{a_3}{4}(b^4 - a^4)$ можно формально записать в виде

$$\frac{a_3}{4}(b^4 - a^4) = \frac{b-a}{6}\left[(a_3 x^3)_{x=a} + 4(a_3 x^3)_{x=\frac{a+b}{2}} + (a_3 x^3)_{x=b}\right] \quad (9)$$

Отсюда следует равенство

$$\int_a^b P_3(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[P_3(a) + 4P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_3(b)\right] \quad (10)$$

Мы рассмотрели три квадратурные формулы. Первые две из них - формулы прямоугольников и трапеций - точны для многочленов первой степени. Третья - формула Симпсона - точна для многочленов третьей степени.

Этими конкретными примерами мы ограничимся. Скажем только, что можно построить бесчисленное множество квадратурных формул, точных для всех многочленов

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m \quad (11)$$

любой наперед заданной степени m . Источником получения таких формул могут служить классические интерполяционные многочлены Лагранжа.

Зададим на отрезке $[a, b]$ произвольную систему из $m + 1$ точек:

$$a \leq x_0 < x_1 < ... < x_m \leq b \quad (12)$$

которые мы будем называть узлами, и поставим задачу: требуется построить многочлен $P_m(x)$ степени m , совпадающий с заданной функцией $f(x)$ в этих точках. Требуется, таким образом, чтобы одновременно выполнялись равенства

$$f(x_k) = P_m(x_k) \qquad (k = 0, 1, ..., m) \quad (13)$$

Как известно, искомый многочлен, носящий название многочлена Лагранжа, будет единственным и выражается следующей формулой:

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} Q_m^{(k)}(x) f(x_k) \quad (14)$$

где $Q_m^{(k)}$ представляет собой многочлены степени m определяемые равенствами

$$Q_m^{(k)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_m)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_m)} \quad (k = 0, 1, ..., m) \quad (15)$$

Интерполяционным многочленом Лагранжа можно воспользоваться для получения квадратурной формулы, точной для многочленов степени m.

Действительно, в качестве приближенного выражения определенного интеграла от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ можно взять определенный интеграл на этом отрезке от интерполирующего функцию $f(x)$ многочлена $P_m(x)$. В результате мы получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_m(x)dx = \sum_0^m f(x_k) \int_a^b Q_m^{(k)}(x)dx \text{ или}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_0^m p_x f(x_k) \quad (16)$$

$$\text{где } p_x = \int_a^b Q_m^{(k)}(x)dx \quad (k = 0, 1,..., m) \quad (17)$$

Приближенное равенство (16) определяет некоторую квадратурную формулу, точную для многочленов степени m.

Многие классические квадратурные формулы имеют такое происхождение.

Например, формулу Симпсона мы получим, если в (16) и (17) положим $m = 2,\ x_0 = a,\ x_1 = \frac{a+b}{2},\ x_2 = b$.

Нетрудно видеть, что, наоборот, если при помощи заданных различных между собой точек x_k отрезка $[a, b]$ и чисел p_k' $(k = 0, 1,..., m)$ получена квадратурная формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_0^m p_k' f(x_k) \quad (18)$$

точная для всех многочленов $P_m(x)$ степени m , то эта формула вытекает, как было показано выше, из соответствующей интерполяционной формулы Лагранжа

$$f(x) \approx \sum_0^m Q_m^{(k)}(x) f(x_k) \quad (19)$$

построенной по узлам x_k.

В самом деле, наряду с формулой (18) рассмотрим квадратурную формулу (16), где числа p_k определяются при помощи равенств (17). Обе формулы определяются одной и той же системой узлов x_k $(k = 0, 1,..., m)$, и обе они точны для многочленов степени m, в частности, для функций x^l ($l = 0, 1,..., m)$. Отсюда следует, что должны выполняться равенства

$$\sum_0^m (p_k - p_k')x_k^l = 0 \quad (l = 0, 1,..., m) \quad (20)$$

Определитель системы (20) $\left\{1... 1,\ x_0... x_m,\ x_0^m... x_m^m\right\}$, представляющий собой определитель Вандермонда, для системы различных точек x_k $(k = 0, 1,..., m)$ не равен нулю, а это возможно, лишь если $p_k = p_k'$, $(k = 0, 1,..., m)$.

Наряду с формулой (16) введем другую квадратурную формулу

$$\int_c^d F(u)du \approx \sum_0^m p_k^* F(x_k^*) \quad (16^*)$$

со следующими свойствами:

а) $p_k^*: p_k = (d - c):(b - a)$, $(k = 0, 1,..., m)$

б) узлы $x_0^* < x_1^* <... < x_m^*$ принадлежат к отрезку $[c, d]$ и делят его в том же отношении, как узлы x_k делят $[a, b]$:

$$(x_0^* - c):(x_1^* - c): \dots :(x_m^* - c) = (x_0 - a):(x_1 - a): \dots :(x_m - a).$$

Формулу (16*) мы будем называть подобной формуле(16).

Покажем, что подобные формулы (16) и (16*) одновременно точны для многочленов степени m. В самом деле, если $R(u)$ - многочлен степени m , то и $R(c + \frac{d-c}{b-a}(x - a))$ - многочлен степени m . Поэтому

$$\int_c^d R(u)du = \frac{d-c}{b-a}\int_a^b R(c + \frac{d-c}{b-a}(x - a))dx =$$

$$\frac{d-c}{b-a}\sum_{0}^{m} p_k R(c + \frac{d-c}{b-a}(x_k - a)) = \sum_{0}^{m} p_k^{*} R(x_k^{*}) \quad (21)$$

Из сказанного выше и из единственности квадратурной формулы (16*), имеющей заданные узлы $x_0^{*},..., x_m^{*} \in [c, d]$ и точной для многочленов степени m , следует, что если эти узлы удовлетворяют условиям б), то они удовлетворяют и а), т. е. веса формулы (16*) получаются из весов p_k умножением на $\frac{d-c}{b-a}$.

Формулу

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx \approx \sum_{0}^{m} p_k f(x_k) \quad (k = 0, 1,..., m) \quad (22)$$

мы будем называть симметрической, если выполняются условия

$$p_k = p_{m-k} \ , \ x_k = - x_{m-k} \ , \ (k = 0, 1,..., m)$$

Отметим, что, если в выведенной выше формуле (16) отрезок $[a, b]$ на самом деле имеет вид $[- a, a]$ и узлы $x_k \in [- a, a]$ удовлетворяют условию симметрии: $x_k = - x_{m-k}$, то отсюда автоматически следует, что $p_k = p_{m-k}$, т. е. формула (16) - симметрическая.

В самом деле, легко проверить, что из условий $x_k = - x_{m-k}$ следует, что $Q_m^{(k)}(- x) = Q_m^{(m-k)}(x) \quad (k = 0, 1,..., m)$ и тогда

$$p_{m-k} = \int_{-a}^{a} Q_m^{(m-k)}(x)dx = \int_{-a}^{a} Q_m^{(k)}(- x)dx = \int_{-a}^{a} Q_m^{(k)}(u)du = p_k \quad (23)$$

Формула (16), точная для всех многочленов степени m, на самом деле может оказаться точной для многочленов степени, больше чем m, как это имеет место в случае формулы Симпсона.

1.3 Квадратурные формулы Гаусса и Чебышева

Квадратурные формулы Гаусса

Случай $p = 2$ является важнейшим частным случаем метрики L_p .О многочлене, наименее уклоняющемся от нуля в метрике L_2, говорят, что он наименее уклоняется от нуля в смысле среднего квадратического. Это есть хорошо известный в математике многочлен n-й степени Лежандра. Обозначим его через $l_n(x)$. Таким образом,

$$\int_{-1}^{+1} l_n^2(x)dx = min\int_{-1}^{+1} \left[x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0\right]^2 dx \quad (1)$$

где минимум распространен на всевозможные коэффициенты a_k ($k = 0, 1,..., n - 1$).

Из равенства (1) следует, что частная производная по коэффициентам a_k от интеграла, стоящего в его правой части, равна нулю, откуда получаем

$$\int_{-1}^{+1} x^k l_n(x)dx = 0 \quad (k = 0, 1,..., n - 1) \quad (2)$$

т. е. известно свойство ортогональности многочлена Лежандра n-й степени к многочленам низшей степени.

Покажем, что многочлен Лежандра $l_{m+1}(x)$ степени $m + 1$ обладает тем замечательным свойством, что если

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_m \quad (3)$$

суть его нули, то квадратурная формула

$$\int_{-1}^{+1} f dx \approx \sum_0^m p_k f(x_k) \quad (4)$$

где весы p_k подобраны так, что она точна для всех многочленов степени m, на самом деле точна для всех многочленов степени $2m + 1$. Это и есть квадратурная формула Гаусса, соответствующая $m + 1$ узлам.

Из пункта 1.2 мы знаем, что веса p_k нашей квадратурной формулы вычисляются при помощи равенства

$$p_k = \int_{-1}^{+1} Q_m^{(k)}(x)dx \quad (5)$$

где $Q_m^{(k)}(x)$ можно записать в виде

$$Q_m^{(k)}(x) = \frac{l_{m+1}(x)}{(x-x_k)l_{m+1}'(x_k')} = \frac{l_{m+1}(x)-l_{m+1}(x_k)}{(x-x_k)l_{m+1}'(x_k)} \quad (k = 0, 1,..., m) \quad (6)$$

Если $f(x)$ есть многочлен степени $2m + 1$, то разность

$$f(x) - \sum_{k=0}^{m} f(x_k)\frac{l_{m+1}(x)-l_{m+1}(x_k)}{(x-x_k)l_{m+1}'(x_k)} = l_{m+1}(x)S(x) \quad (7)$$

где $S(x)$ есть многочлен степени не выше m.

Действительно, левая часть (7) обращается в нуль в точках (3) и представляет собой многочлен степени не выше $2m + 1$. Таким образом, левая часть (7) делится на $l_{m+1}(x)$ и частное $S(x)$ есть многочлен степени не выше m. Если мы теперь проинтегрируем равенство (7) на отрезке $[- 1, + 1]$, то левая часть превратится в

$$\int_{-1}^{+1} fdx - \sum_{0}^{m} p_k f(x_k) \quad (8)$$

а правая будет равна нулю, так как многочлен Лежандра $l_{m+1}(x)$ ортогонален на $[- 1, + 1]$ ко всем многочленам низшей степени.

Ниже приводятся примеры многочленов $l_n(x)$ Лежандра для малых n :

$$l_0(x) = 1 ,$$

$$l_1(x) = x ,$$

$$l_2(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 1) ,$$

$$l_3(x) = \frac{1}{5}(5x^3 - 3x) ,$$

$$l_4(x) = \frac{1}{35}(35x^4 - 30x^3 + 3) ,$$

$$l_5(x) = \frac{1}{63}(63x^5 - 70x^3 + 25x).$$

Нули многочлена $l_n(x)$ Лежандра являются узлами соответствующей квадратурной формулы Гаусса (с n узлами).

Квадратурная формула Чебышева

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{+1} f(t)dx = \sum_{i=1}^{n} B_i f(t_i) \qquad (9)$$

где B_i - постоянные коэффициенты.

Чебышев предложил выбрать абсциссы t_i таким образом, чтобы:

1) коэффициенты B_i были равны между собой;
2) квадратурная формула (9) являлась точной для всех полиномов степени n включительно.

Найдем коэффициенты B_i и узлы t_i, полагая $B_1 = B_2 = \dots = B_n = B$. Возьмем функцию $f(t) = 1$, будем иметь $2 = \sum_{i=1}^{n} B_i$, откуда $B = \frac{2}{n}$.

Следовательно, квадратурная формула Чебышева имеет вид

$$\int_{-1}^{+1} f(t)dx = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \qquad (10)$$

Для определения абсцисс t_i заметим, что формула (10), согласно условию 2), должна быть точной для функций вида

$$f(x) = t,\ t^2,\ \dots,\ t^n \qquad (11)$$

Подставляя эти функции в формулу (10), получим систему уравнений

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n = 0\,,$$

$$t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 = \frac{n}{3}\,,$$

$$t_1^3 + t_2^3 + \ \dots\ + t_n^3 = 0\,, \qquad (12)$$

$$t_1^4 + t_2^4 + \ \dots\ + t_n^4 = \frac{n}{5}\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$t_1^n + t_2^n + \ \dots\ + t_n^n = \frac{n\left[1-(-1)^{n+1}\right]}{2(n+1)}\,.$$

из которой могут быть определены неизвестные t_i $(i = 1, 2, \dots, n)$. Решение системы (12) сводится к нахождению корней алгебраического уравнения степени n .

Чтобы применить квадратурную формулу Чебышева к интегралу вида

$$\int_a^b f(x)dx \quad (13)$$

следует преобразовать его с помощью подстановки

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t \qquad (14)$$

переводящей отрезок $a \le x \le b$ в отрезок $-1 \le t \le 1$. Применяя к преобразованному интегралу формулу Чебышева (10), будем иметь

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \quad (15)$$

где $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$, t_i - корни системы (12).

1.4 Квадратурные формулы Рало и Лобатто

Квадратурные формулы Радо и Лобатто строятся по тому же принципу, что и квадратурные формулы Гаусса, только учитываются дополнительные ограничения на узлы сетки. Полагается, что либо первый узел $x_0 = 0$ (первая формула Радо), либо последний узел $x_n = 1$ (вторая формула Радо), либо оба заданы: $x_0 = 0$, $x_n = 1$ (формула Лобатто). Заданные узлы сокращают количество переменных в системе нелинейных уравнений, и приходится понижать степень полиномов, чтобы квадратурные формулы оставались точными. Максимально достижимая степень для формул Радо — $2n$, для формул Лобатто — $2n - 1$. Узлы сеток располагаются в узлах соответствующих полиномов:

$$\text{Радо I} \qquad l_n(x) = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{n+1}(x-1)^n\right)$$

$$\text{Радо II} \qquad l_n(x) = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n(x-1)^{n+1}\right)$$

$$\text{Лобатто III} \qquad l_n(x) = \frac{(2n)!}{(n+1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(x^n(x-1)^n\right)$$

А коэффициенты рассчитываются той же системой линейных уравнений для формулы Гаусса. Смотрите приложенный скрипт для системы компьютерной алгебры Maxima.

По формуле Лобатто III при $n = 0$ интеграла не существует.

Глава 2

2.2 Построение элементарная квадратурная формула с участием производных, при известных G и σ

Рассмотрим элементарную квадратурную формулу общего вида

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{y=0}^{G} \sum_{\alpha}^{\sigma} \sum_{y}^{\alpha} \varphi^{(\alpha)}(y), \qquad (1)$$

где $G+1$-число точек, лежащих на оси Ox, σ-порядок старшей производной.

Академик С.М. Никольский отмечает, что если известны не только значения значения функции, но и значения производных в узлах, то при правильном применении всех этих данных мы можем получить более точный ответ, чем в случае употребления только значений функции.

Известно, что при построении этой элементарной квадратурной формулы возникает переопределенная линейная система, с помощью которой мы должны найти коэффициенты квадратурной формулы. Но так как единственным образом определить коэффициенты в данном случае не возможно, то в диссертационной работе Урбаханова Александра Валерьевича был предложен следующий алгоритм устранения этой проблемы.

Во-первых, для нахождения приближенного значения определенного интеграла мы используем Ньютоновскую систему узлов, тем самым уменьшим количество узлов. Пусть N- число узлов, M- число одночленов от n переменных, тогда $M = \frac{(m+n)!}{m!n!}$, где n- размерность, m- гладкость пространства. Так как взята Ньютоновская система узлов , то M=N.

При этом образуется следующий случай:

1. при известном m и G, неизвестном σ;
2. при известном m и σ, неизвестном G;

3. при известном σ и G, неизвестном m;

Пусть m- точность квадратурной формулы (1), m+1- число всех одночленов, входящих в произвольный многочлен степени m, которое будет зависеть от выбора параметров G и σ, G+1- число всех узлов лежащих на оси Ox, $\sigma + 1$- число значений функции и ее производных в одной точке, то $(G + 1)(\sigma + 1)$- число всех коэффициентов формулы (1). Тогда точность m формулы (10) определяется из уравнения:

$$m + 1 = (G + 1)(\sigma + 1). \qquad (2)$$

Во-вторых, используем полученное уравнения связанности (2).

В-третьих, используем разложение функции в ряд Маклорена в операторной форме.

Теперь, когда при выполнении вышеперечисленных условий, наша система будет иметь единственное решение, исследуем выбор параметров G и σ.Рассмотри следующий параметр, пусть G=3, $\sigma = 3$. Тогда из формулы (2), получаем, что точность квадратурной формулы равна $m = (3 + 1)(3 + 1) - 1 = 15$.

Тогда элементарная квадратурная формула приобретает, следующий вид:

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{y=0}^{3}\sum_{\alpha=0}^{3} C_y^{\alpha} d^{\alpha} f(y) = C_0^0 f(0) + C_0^1 df(0) + C_0^2 d^2 f(0) + C_0^3 d^3 f(0) + C_1^0 f(1) + C_1^1 df(1) + C_1^2 d^2 f(1) + C_1^3 d^3 f(1) + C_2^0 f(2) + C_2^1 df(2) + C_2^2 d^2 f(2) + C_2^3 d^3 f(2) + C_3^0 f(3) + C_3^1 df(3) + C_3^2 d^2 f(3) + C_3^3 d^3 f(3).$$

Рассмотрим подынтегральное выражение в левой части нашего равенства. Разложим функцию $f(x)$ в ряд Маклорена в операторной форме:

1) Разложим нашу функцию $f(x)$ в ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + x * f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} * x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} * x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} * x^n$$

Запишем разложение в операторной записи. Введем замену

$$f^{'}(x) = df(x),\ f^{''}(x) = d^2 f(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = d^{(n)} f(x).$$

Получим

$$f(x) = f(0) + \frac{dx}{1!} f(0) + \frac{d^2x^2}{2!} f(0) + \ \ldots \ + \frac{d^nx^n}{n!} f(0) = f(0) + \frac{xd}{1!} f(0) +$$

$$+ \frac{x^2d^2}{2!} f(0) + \ \ldots \ + \frac{x^nd^n}{n!} f(0) = f(0)\left(1 + \frac{xd}{1!} + \frac{x^2d^2}{2!} + \ \ldots \ + \frac{x^nd^n}{n!}\right) =$$

$$= \sum_{\alpha}^{\infty} \frac{x^{\alpha}d^{\alpha}}{\alpha!} f(0) = e^{xd} f(0), \text{ где } d = \frac{d}{dx}.$$

2) Вычислим производные

$$(e^{xd})^{'} = \left(1 + \frac{xd}{1!} + \frac{x^2d^2}{2!} + \ \ldots \ + \frac{x^nd^n}{n!}\right)^{'} = d + \frac{xd^2}{1!} + \frac{x^2d^3}{2!} + \ \ldots \ + \frac{x^nd^{n+1}}{n!} + \ \ldots$$

$$(e^{xd})^{''} = \left(d + \frac{xd^2}{1!} + \frac{x^2d^3}{2!} + \ \ldots \ + \frac{x^nd^{n+1}}{n!} + \ \ldots\right)^{'} = d^2 + \frac{xd^3}{1!} + \frac{x^2d^4}{2!} + \ \ldots \ + \frac{x^nd^{n+2}}{n!} + \ \ldots$$

$$(e^{xd})^{'''} = \left(d^2 + \frac{xd^3}{1!} + \frac{x^2d^4}{2!} + \ \ldots \ + \frac{x^nd^{n+2}}{n!} + \ \ldots\right)^{'} = d^3 + \frac{xd^4}{1!} + \frac{x^2d^5}{2!} + \ \ldots \ + \frac{x^nd^{n+3}}{n!} + \ \ldots$$

3) Вычислим интеграл от этой функции

$$\int_0^1 e^{xd}dx = \frac{e^{xd}}{d}\Big|_0^1 = \frac{1}{d}\left(1 + \frac{d}{1!} + \frac{d^2}{2!} + \ \ldots \ + \frac{d^n}{n!} + \ \ldots \ - 1\right) = 1 + \frac{d}{2!} + \frac{d^2}{3!}$$

$$+ \ \ldots \ + \frac{d^n}{(n+1)!} + \ldots$$

Используя, полученное разложение в операторной форме, вычислим значение функции и производных в точках в правой части нашего неравенства:

$$C_0^0 f(0) + C_0^1 df(0) + C_0^2 d^2 f(0) + C_0^3 d^3 f(0) + C_1^0 f(0) \times \left(1 + d + \frac{d^2}{2!} + \frac{d^3}{3!} + \right.$$

$$\left. \frac{d^4}{4!} + \frac{d^5}{5!} + \frac{d^6}{6!} + \frac{d^7}{7!} + \frac{d^8}{8!} + \frac{d^9}{9!} + \frac{d^{10}}{10!} + \frac{d^{11}}{11!} + \frac{d^{12}}{12!} + \frac{d^{13}}{13!} + \frac{d^{14}}{14!} + \frac{d^{15}}{15!}\right) +$$

$$C_2^0 f(0) \times \left(1 + 2d + \frac{2^2d^2}{2!} + \frac{2^3d^3}{3!} + \frac{2^4d^4}{4!} + \frac{2^5d^5}{5!} + \frac{2^6d^6}{6!} + \frac{2^7d^7}{7!} + \frac{2^8d^8}{8!} + \frac{2^9d^9}{9!} + \right.$$

$$\left. \frac{2^{10}d^{10}}{10!} + \frac{2^{11}d^{11}}{11!} + \frac{2^{12}d^{12}}{12!} + \frac{2^{13}d^{13}}{13!} + \frac{2^{14}d^{14}}{14!} + \frac{2^{15}d^{15}}{15!}\right) + C_1^1 f(0) \times \left(d + d^2 + \frac{d^3}{2!} + \right.$$

$$\frac{d^4}{3!} + \frac{d^5}{4!} + \frac{d^6}{5!} + \frac{d^7}{6!} + \frac{d^8}{7!} + \frac{d^9}{8!} + \frac{d^{10}}{9!} + \frac{d^{11}}{10!} + \frac{d^{12}}{11!} + \frac{d^{13}}{12!} + \frac{d^{14}}{13!} + \frac{d^{15}}{14!}) + C_2^1 f(0)$$

$$\times (d + 2d^2 + \frac{2^2d^3}{2!} + \frac{2^3d^4}{3!} + \frac{2^4d^5}{4!} + \frac{2^5d^6}{5!} + \frac{2^6d^7}{6!} + \frac{2^7d^8}{7!} + \frac{2^8d^9}{8!} + \frac{2^9d^{10}}{9!} +$$

$$\frac{2^{10}d^{11}}{10!} + \frac{2^{11}d^{12}}{11!} + \frac{2^{12}d^{13}}{12!} + \frac{2^{13}d^{14}}{13!} + \frac{2^{14}d^{15}}{14!}) + C_1^2 f(0) \times (d^2 + d^3 + \frac{d^4}{2!} + \frac{d^5}{3!}$$

$$+ \frac{d^6}{4!} + \frac{d^7}{5!} + \frac{d^8}{6!} + \frac{d^9}{7!} + \frac{d^{10}}{8!} + \frac{d^{11}}{9!} + \frac{d^{12}}{10!} + \frac{d^{13}}{11!} + \frac{d^{14}}{12!} + \frac{d^{15}}{13!}) + C_2^2 f(0) \times$$

$$(d^2 + 2d^3 + \frac{2^2d^4}{2!} + \frac{2^3d^5}{3!} + \frac{2^4d^6}{4!} + \frac{2^5d^7}{5!} + \frac{2^6d^8}{6!} + \frac{2^7d^9}{7!} + \frac{2^8d^{10}}{8!} + \frac{2^9d^{11}}{9!} +$$

$$\frac{2^{10}d^{12}}{10!} + \frac{2^{11}d^{13}}{11!} + \frac{2^{12}d^{14}}{12!} + \frac{2^{13}d^{15}}{13!}) + C_3^0 f(0) \times (1 + 3d + \frac{3^2d^2}{2!} + \frac{3^3d^3}{3!} + \frac{3^4d^4}{4!} +$$

$$\frac{3^5d^5}{5!} + \frac{3^6d^6}{6!} + \frac{3^7d^7}{7!} + \frac{3^8d^8}{8!} + \frac{3^9d^9}{9!} + \frac{3^{10}d^{10}}{10!} + \frac{3^{11}d^{11}}{11!} + \frac{3^{12}d^{12}}{12!} + \frac{3^{13}d^{13}}{13!} + \frac{3^{14}d^{14}}{14!} +$$

$$\frac{3^{15}d^{15}}{15!}) + C_3^1 f(0) \times (d + 3d^2 + \frac{3^2d^3}{2!} + \frac{3^3d^4}{3!} + \frac{3^4d^5}{4!} + \frac{3^5d^6}{5!} + \frac{3^6d^7}{6!} + \frac{3^7d^8}{7!} +$$

$$\frac{3^8d^9}{8!} + \frac{3^9d^{10}}{9!} + \frac{3^{10}d^{11}}{10!} + \frac{3^{11}d^{12}}{11!} + \frac{3^{12}d^{13}}{12!} + \frac{3^{13}d^{14}}{13!} + \frac{3^{14}d^{15}}{14!}) + C_3^2 f(0) \times (d^2 + 3d^3 +$$

$$\frac{3^2d^4}{2!} + \frac{3^3d^5}{3!} + \frac{3^4d^6}{4!} + \frac{3^5d^7}{5!} + \frac{3^6d^8}{6!} + \frac{3^7d^9}{7!} + \frac{3^8d^{10}}{8!} + \frac{3^9d^{11}}{9!} + \frac{3^{10}d^{12}}{10!} + \frac{3^{11}d^{13}}{11!} +$$

$$\frac{3^{12}d^{14}}{12!} + \frac{3^{13}d^{15}}{13!}) + C_1^3 f(0) \times (d^3 + d^4 + \frac{d^5}{2!} + \frac{d^6}{3!} + \frac{d^7}{4!} + \frac{d^8}{5!} + \frac{d^9}{6!} + \frac{d^{10}}{7!} + \frac{d^{11}}{8!}$$

$$+ \frac{d^{12}}{9!} + \frac{d^{13}}{10!} + \frac{d^{14}}{11!} + \frac{d^{15}}{12!}) + C_2^3 f(0) \times (d^3 + 2d^4 + \frac{2^2d^5}{2!} + \frac{2^3d^6}{3!} + \frac{2^4d^7}{4!} + \frac{2^5d^8}{5!} +$$

$$\frac{2^6d^9}{6!} + \frac{2^7d^{10}}{7!} + \frac{2^8d^{11}}{8!} + \frac{2^9d^{12}}{9!} + \frac{2^{10}d^{13}}{10!} + \frac{2^{11}d^{14}}{11!} + \frac{2^{12}d^{15}}{12!}) + C_3^3 f(0) \times (d^3 + 3d^4 +$$

$$\frac{3^2d^5}{2!} + \frac{3^3d^6}{3!} + \frac{3^4d^7}{4!} + \frac{3^5d^8}{5!} + \frac{3^6d^9}{6!} + \frac{3^7d^{10}}{7!} + \frac{3^8d^{11}}{8!} + \frac{3^9d^{12}}{9!} + \frac{3^{10}d^{13}}{10!} + \frac{3^{11}d^{14}}{11!} + \frac{3^{12}d^{15}}{12!})$$

Сократим обе части равенства на f(0), раскроем скобки, приравняем коэффициенты при соответствующих степенях d, а степень, которых больше чем m=15 приравняем к нулю и запишем систему:

$$\{C_0^0 + C_1^0 + C_2^0 + C_3^0 = 1\,,$$

$$C_0^1 + C_1^0 + 2C_2^0 + 3C_3^0 + C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 = \frac{1}{2!}\,,$$

$$C_0^2 + \frac{1}{2!}C_1^0 + \frac{2^2}{2!}C_2^0 + \frac{3^2}{2!}C_3^0 + C_1^1 + 2C_2^1 + 3C_3^1 + C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = \frac{1}{3!},$$

$$C_0^3 + \frac{1}{3!}C_1^0 + \frac{2^3}{3!}C_2^0 + \frac{3^3}{3!}C_3^0 + \frac{1}{2!}C_1^1 + \frac{2^2}{2!}C_2^1 + \frac{3^2}{2!}C_3^1 + C_1^2 + 2C_2^2 + 3C_3^2 + C_1^3 +$$
$$C_2^3 + C_3^3 = \frac{1}{4!},$$

$$\frac{1}{4!}C_1^0 + \frac{2^4}{4!}C_2^0 + \frac{1}{3!}C_1^1 + \frac{2^3}{3!}C_2^1 + \frac{1}{2!}C_1^2 + \frac{2^2}{2!}C_2^2 + \frac{3^4}{4!}C_3^0 + \frac{3^3}{3!}C_3^1 + \frac{3^2}{2!}C_3^2 + C_1^3 +$$
$$2C_2^3 + 3C_3^3 = \frac{1}{5!},$$

$$\frac{1}{5!}C_1^0 + \frac{2^5}{5!}C_2^0 + \frac{1}{4!}C_1^1 + \frac{2^4}{4!}C_2^1 + \frac{1}{3!}C_1^2 + \frac{2^3}{3!}C_2^2 + \frac{3^5}{5!}C_3^0 + \frac{3^4}{4!}C_3^1 + \frac{3^3}{3!}C_3^2 + \frac{1}{2!}C_1^3 +$$
$$\frac{2^2}{2!}C_2^3 + \frac{3^2}{2!}C_3^3 = \frac{1}{6!},$$

$$\frac{1}{6!}C_1^0 + \frac{2^6}{6!}C_2^0 + \frac{1}{5!}C_1^1 + \frac{2^5}{5!}C_2^1 + \frac{1}{4!}C_1^2 + \frac{2^4}{4!}C_2^2 + \frac{3^6}{6!}C_3^0 + \frac{3^5}{5!}C_3^1 + \frac{3^4}{4!}C_3^2 + \frac{1}{3!}C_1^3 +$$
$$\frac{2^3}{3!}C_2^3 + \frac{3^3}{3!}C_3^3 = \frac{1}{7!},$$

$$\frac{1}{7!}C_1^0 + \frac{2^7}{7!}C_2^0 + \frac{1}{6!}C_1^1 + \frac{2^6}{6!}C_2^1 + \frac{1}{5!}C_1^2 + \frac{2^5}{5!}C_2^2 + \frac{3^7}{7!}C_3^0 + \frac{3^6}{6!}C_3^1 + \frac{3^5}{5!}C_3^2 + \frac{1}{4!}C_1^3 +$$
$$\frac{2^4}{4!}C_2^3 + \frac{3^4}{4!}C_3^3 = \frac{1}{8!},$$

$$\frac{1}{8!}C_1^0 + \frac{2^8}{8!}C_2^0 + \frac{1}{7!}C_1^1 + \frac{2^7}{7!}C_2^1 + \frac{1}{6!}C_1^2 + \frac{2^6}{6!}C_2^2 + \frac{3^8}{8!}C_3^0 + \frac{3^7}{7!}C_3^1 + \frac{3^6}{6!}C_3^2 + \frac{1}{5!}C_1^3 +$$
$$\frac{2^5}{5!}C_2^3 + \frac{3^5}{5!}C_3^3 = \frac{1}{9!},$$

$$\frac{1}{9!}C_1^0 + \frac{2^9}{9!}C_2^0 + \frac{1}{8!}C_1^1 + \frac{2^8}{8!}C_2^1 + \frac{1}{7!}C_1^2 + \frac{2^7}{7!}C_2^2 + \frac{3^9}{9!}C_3^0 + \frac{3^8}{8!}C_3^1 + \frac{3^7}{7!}C_3^2 + \frac{1}{6!}C_1^3 +$$
$$\frac{2^6}{6!}C_2^3 + \frac{3^6}{6!}C_3^3 = \frac{1}{10!},$$

$$\frac{1}{10!}C_1^0 + \frac{2^{10}}{10!}C_2^0 + \frac{1}{9!}C_1^1 + \frac{2^9}{9!}C_2^1 + \frac{1}{8!}C_1^2 + \frac{2^8}{8!}C_2^2 + \frac{3^{10}}{10!}C_3^0 + \frac{3^9}{9!}C_3^1 + \frac{3^8}{8!}C_3^2 +$$
$$\frac{1}{7!}C_1^3 + \frac{2^7}{7!}C_2^3 + \frac{3^7}{7!}C_3^3 = \frac{1}{11!},$$

$$\frac{1}{11!}C_1^0 + \frac{2^{11}}{11!}C_2^0 + \frac{1}{10!}C_1^1 + \frac{2^{10}}{10!}C_2^1 + \frac{1}{9!}C_1^2 + \frac{2^9}{9!}C_2^2 + \frac{3^{11}}{11!}C_3^0 + \frac{3^{10}}{10!}C_3^1 + \frac{3^9}{9!}C_3^2 +$$

$$\frac{1}{8!}C_1^3 + \frac{2^8}{8!}C_2^3 + \frac{3^8}{8!}C_3^3 = \frac{1}{12!}\ ,$$

$$\frac{1}{12!}C_1^0 + \frac{2^{12}}{12!}C_2^0 + \frac{1}{11!}C_1^1 + \frac{2^{11}}{11!}C_2^1 + \frac{1}{10!}C_1^2 + \frac{2^{10}}{10!}C_2^2 + \frac{3^{12}}{12!}C_3^0 + \frac{3^{11}}{11!}C_3^1 + \frac{3^{10}}{10!}C_3^2 +$$

$$\frac{1}{9!}C_1^3 + \frac{2^9}{9!}C_2^3 + \frac{3^9}{9!}C_3^3 = \frac{1}{13!}\ ,$$

$$\frac{1}{13!}C_1^0 + \frac{2^{13}}{13!}C_2^0 + \frac{1}{12!}C_1^1 + \frac{2^{12}}{12!}C_2^1 + \frac{1}{11!}C_1^2 + \frac{2^{11}}{11!}C_2^2 + \frac{3^{13}}{13!}C_3^0 + \frac{3^{12}}{12!}C_3^1 + \frac{3^{11}}{11!}C_3^2 +$$

$$\frac{1}{10!}C_1^3 + \frac{2^{10}}{10!}C_2^3 + \frac{3^{10}}{10!}C_3^3 = \frac{1}{14!}\ ,$$

$$\frac{1}{14!}C_1^0 + \frac{2^{14}}{14!}C_2^0 + \frac{1}{13!}C_1^1 + \frac{2^{13}}{13!}C_2^1 + \frac{1}{12!}C_1^2 + \frac{2^{12}}{12!}C_2^2 + \frac{3^{14}}{14!}C_3^0 + \frac{3^{13}}{13!}C_3^1 + \frac{3^{12}}{12!}C_3^2 +$$

$$\frac{1}{11!}C_1^3 + \frac{2^{11}}{11!}C_2^3 + \frac{3^{11}}{11!}C_3^3 = \frac{1}{15!}\ ,$$

$$\frac{1}{15!}C_1^0 + \frac{2^{15}}{15!}C_2^0 + \frac{1}{14!}C_1^1 + \frac{2^{14}}{14!}C_2^1 + \frac{1}{13!}C_1^2 + \frac{2^{13}}{13!}C_2^2 + \frac{3^{15}}{15!}C_3^0 + \frac{3^{14}}{14!}C_3^1 + \frac{3^{13}}{13!}C_3^2 +$$

$$\frac{1}{12!}C_1^3 + \frac{2^{12}}{12!}C_2^3 + \frac{3^{12}}{12!}C_3^3 = \frac{1}{16!}\ \}$$

Решая систему линейных уравнений, получим следующие коэффициенты:

$$C_0^0 = \frac{427519381}{1120863744};\ C_0^1 = \frac{331133249}{5604318720};\ C_0^2 = \frac{4135199}{934053120};\ C_0^3 = \frac{50857}{373621248};$$

$$C_1^0 = \frac{1730473}{4612608};\ C_1^1 = -\frac{7097579}{23063040};\ C_1^2 = \frac{965}{2306304};\ C_1^3 = -\frac{37603}{5322240};$$

$$C_2^0 = \frac{1071529}{4612608};\ C_2^1 = -\frac{398083}{3294720};\ C_2^2 = \frac{224473}{11531520};\ C_2^3 = -\frac{2617}{1064448};$$

$$C_3^0 = \frac{12457877}{1120863744};\ C_3^1 = -\frac{20331329}{5604318720};\ C_3^2 = \frac{401183}{934053120};\ C_3^3 = -\frac{34637}{1868106240}$$

Квадратурная формула для данного случая будет иметь вид:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{427519381}{1120863744}f(0) + \frac{331133249}{5604318720}f'(0) + \frac{4135199}{934053120}f''(0) + \frac{50857}{373621248}f'''(0)$$

$$+ \frac{1730473}{4612608}f(1) - \frac{7097579}{23063040}f'(1) + \frac{965}{2306304}f''(1) - \frac{37603}{5322240}f'''(1)$$

$$+ \frac{1071529}{4612608}f(2) - \frac{398083}{3294720}f'(2) + \frac{224473}{11531520}f''(2) - \frac{2617}{1064448}f'''(2)$$

$$+\frac{12457877}{1120863744}f(3)-\frac{20331329}{5604318720}f'(3)+\frac{401183}{934053120}f''(3)-\frac{34637}{1868106240}f'''(3)$$

2.2 Построение квадратурной формулы с участием производных на произвольном участке интегрирования

Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x)dx$, при тех же заданных параметрах G и σ что и выше. Из курса численного интегрирования известно, что данный интеграл можно разбить на сумму N интегралов, где N- количество разбиений:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx, \text{ где } a = x_0,\ b = x_N,\ x_i = a + i * h,$$

$$i = \overline{0, N}, h - \text{шаг разбиения.}$$

Таким образом, получаем:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{N-2}}^{x_{N-1}} f(x)dx +$$

$$+\int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)dx.$$

Затем каждый полученный интеграл распишем по полученной элементарной квадратурной формуле выше, меняя при этом соответственно значения функции в точках:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{N}(C_0^0 f\left(x_{i-1}\right) + C_0^1 df\left(x_{i-1}\right) + C_0^2 d^2 f\left(x_{i-1}\right) +$$

$$C_0^3 d^3 f\left(x_{i-1}\right) + C_1^0 f\left(x_i\right) + C_1^1 df\left(x_i\right) + C_1^2 d^2 f\left(x_i\right) + C_1^3 d^3 f\left(x_i\right) + C_2^0 f\left(x_{i+1}\right)$$

$$+ C_2^1 df\left(x_{i+1}\right) + C_2^2 d^2 f\left(x_{i+1}\right) + C_2^3 d^3 f\left(x_{i+1}\right) + C_3^0 f\left(x_{i+2}\right) + C_3^1 df\left(x_{i+2}\right) +$$

$$C_3^2 d^2 f\left(x_{i+2}\right) + C_3^3 d^3 f\left(x_{i+2}\right))$$

Исходя из этого, получаем

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = C_0^0 f\left(x_0\right) + C_0^1 df\left(x_0\right) + C_0^2 d^2 f\left(x_0\right) + C_0^3 d^3 f\left(x_0\right) + C_1^0 f\left(x_1\right) + C_1^1 df\left(x_1\right)$$
$$+ C_1^2 d^2 f\left(x_1\right) + C_1^3 d^3 f\left(x_1\right) + C_2^0 f\left(x_2\right) + C_2^1 df\left(x_2\right) + C_2^2 d^2 f\left(x_2\right) + C_2^3 d^3 f\left(x_2\right)$$
$$+ C_3^0 f\left(x_3\right) + C_3^1 df\left(x_3\right) + C_3^2 d^2 f\left(x_3\right) + C_3^3 d^3 f\left(x_3\right);$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = C_0^0 f\left(x_1\right) + C_0^1 df\left(x_1\right) + C_0^2 d^2 f\left(x_1\right) + C_0^3 d^3 f\left(x_1\right) + C_1^0 f\left(x_2\right) + C_1^1 df\left(x_2\right)$$
$$+ C_1^2 d^2 f\left(x_2\right) + C_1^3 d^3 f\left(x_2\right) + C_2^0 f\left(x_3\right) + C_2^1 df\left(x_3\right) + C_2^2 d^2 f\left(x_3\right) + C_2^3 d^3 f\left(x_3\right)$$
$$+ C_3^0 f\left(x_4\right) + C_3^1 df\left(x_4\right) + C_3^2 d^2 f\left(x_4\right) + C_3^3 d^3 f\left(x_4\right);$$

$$\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = C_0^0 f\left(x_2\right) + C_0^1 df\left(x_2\right) + C_0^2 d^2 f\left(x_2\right) + C_0^3 d^3 f\left(x_2\right) + C_1^0 f\left(x_3\right) + C_1^1 df\left(x_3\right)$$
$$+ C_1^2 d^2 f\left(x_3\right) + C_1^3 d^3 f\left(x_3\right) + C_2^0 f\left(x_4\right) + C_2^1 df\left(x_4\right) + C_2^2 d^2 f\left(x_4\right) + C_2^3 d^3 f\left(x_4\right)$$
$$+ C_3^0 f\left(x_5\right) + C_3^1 df\left(x_5\right) + C_3^2 d^2 f\left(x_5\right) + C_3^3 d^3 f\left(x_5\right);$$

$$\int_{x_{N-2}}^{x_{N-1}} f(x)dx = C_0^0 f\left(x_{N-2}\right) + C_0^1 df\left(x_{N-2}\right) + C_0^2 d^2 f\left(x_{N-2}\right) + C_0^3 d^3 f\left(x_{N-2}\right) + C_1^0 f\left(x_{N-1}\right)$$
$$+ C_1^1 df\left(x_{N-1}\right) + C_1^2 d^2 f\left(x_{N-1}\right) + C_1^3 d^3 f\left(x_{N-1}\right) + C_2^0 f\left(x_N\right) + C_2^1 df\left(x_N\right) + C_2^2 d^2 f\left(x_N\right)$$
$$+ C_2^3 d^3 f\left(x_N\right) + C_3^0 f\left(x_{N+1}\right) + C_3^1 df\left(x_{N+1}\right) + C_2^2 d^2 f\left(x_{N+1}\right) + C_3^3 d^3 f\left(x_{N+1}\right);$$

$$\int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)dx = C_0^0 f\left(x_{N-1}\right) + C_0^1 df\left(x_{N-1}\right) + C_0^2 d^2 f\left(x_{N-1}\right) + C_0^3 d^3 f\left(x_{N-1}\right) + C_1^0 f\left(x_N\right)$$

$$+ C_1^1 df(x_N) + C_1^2 d^2 f(x_N) + C_1^3 d^3 f(x_N) + C_2^0 f(x_{N+1}) + C_2^1 df(x_{N+1}) + C_2^2 d^2 f(x_{N+1})$$
$$+ C_2^3 d^3 f(x_{N+1}) + C_3^0 f(x_{N+2}) + C_3^1 df(x_{N+2}) + C_2^2 d^2 f(x_{N+2}) + C_3^3 d^3 f(x_{N+2}).$$

Далее произведем преобразования относительно коэффициентов:

$$\int_a^b f(x)dx = C_0^0 (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{N-2}) + f(x_{N-1})) + C_0^1 \times$$
$$\times (f^{'}(x_0) + f^{'}(x_1) + f^{'}(x_2) + \ldots + f^{'}(x_{N-2}) + f^{'}(x_{N-1})) + C_0^2 (f^{''}(x_0) +$$
$$+ f^{''}(x_1) + f^{''}(x_2) + \ldots + f^{''}(x_{N-2}) + f^{''}(x_{N-1})) + C_0^3 (f^{'''}(x_0) + f^{'''}(x_1)$$
$$+ f^{'''}(x_2) + \ldots + f^{'''}(x_{N-2}) + f^{'''}(x_{N-1})) + C_1^0 (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$$
$$+ \ldots + f(x_{N-1}) + f(x_N)) + C_1^1 (f^{'}(x_1) + f^{'}(x_2) + f^{'}(x_3) + \ldots + f^{'}(x_{N-1}) + f^{'}(x_N))$$
$$+ C_1^2 (f^{''}(x_1) + f^{''}(x_2) + f^{''}(x_3) + \ldots + f^{''}(x_{N-1}) + f^{''}(x_N)) + C_1^3 (f^{'''}(x_1) + f^{'''}(x_2)$$
$$+ f^{'''}(x_3) + \ldots + f^{'''}(x_{N-1}) + f^{'''}(x_N)) + C_2^0 (f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + \ldots +$$
$$f(x_N) + f(x_{N+1})) + C_2^1 (f^{'}(x_2) + f^{'}(x_3) + f^{'}(x_4) + \ldots + f^{'}(x_N) + f^{'}(x_{N+1}))$$
$$+ C_2^2 (f^{''}(x_2) + f^{''}(x_3) + f^{''}(x_4) + \ldots + f^{''}(x_N) + f^{''}(x_{N+1})) + C_2^3 (f^{'''}(x_2) + f^{'''}(x_3)$$
$$+ f^{'''}(x_4) + \ldots + f^{'''}(x_N) + f^{'''}(x_{N+1})) + C_3^0 (f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + \ldots +$$
$$f(x_{N+1}) + f(x_{N+2})) + C_3^1 (f^{'}(x_3) + f^{'}(x_4) + f^{'}(x_5) + \ldots + f^{'}(x_{N+1}) + f^{'}(x_{N+2}))$$
$$+ C_3^2 (f^{''}(x_3) + f^{''}(x_4) + f^{''}(x_5) + \ldots + f^{''}(x_{N+1}) + f^{''}(x_{N+2})) + C_3^3 (f^{'''}(x_3) + f^{'''}(x_4)$$
$$+ f^{'''}(x_5) + \ldots + f^{'''}(x_{N+1}) + f^{'''}(x_{N+2})).$$

Итак, получаем:

$$\int_a^b f(x)dx = C_0^0 \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1}) + C_0^1 \sum_{i=1}^{N} f^{'}(x_{i-1}) + C_0^2 \sum_{i=1}^{N} f^{''}(x_{i-1}) + C_0^3 \sum_{i=1}^{N} f^{'''}(x_{i-1})$$

$$+ C_1^0 \sum_{i=1}^{N} f\left(x_i\right) + C_1^1 \sum_{i=1}^{N} f^{'}\left(x_i\right) + C_1^2 \sum_{i=1}^{N} f^{''}\left(x_i\right) + C_1^3 \sum_{i=1}^{N} f^{'''}\left(x_i\right) + C_2^0 \sum_{i=1}^{N} f\left(x_{i+1}\right)$$

$$+ C_2^1 \sum_{i=1}^{N} f^{'}\left(x_{i+1}\right) + C_2^2 \sum_{i=1}^{N} f^{''}\left(x_{i+1}\right) + C_2^3 \sum_{i=1}^{N} f^{'''}\left(x_{i+1}\right) + C_3^0 \sum_{i=1}^{N} f\left(x_{i+2}\right) + C_3^1 \sum_{i=1}^{N} f^{'}\left(x_{i+2}\right)$$

$$+ C_3^2 \sum_{i=1}^{N} f^{''}\left(x_{i+2}\right) + C_3^3 \sum_{i=1}^{N} f^{'''}\left(x_{i+2}\right).$$

Затем каждую сумму перед коэффициентами согласно виду усложненной квадратурной формулы, для точности вычисления умножим на уточняющее число $h^{\propto+1}$, где $\propto$- порядок старшей производной у функции, стоящей после коэффициента:

$$\int_a^b f(x)dx = C_0^0 h \sum_{i=1}^{N} f\left(x_{i-1}\right) + C_0^1 h^2 \sum_{i=1}^{N} f^{'}\left(x_{i-1}\right) + C_0^2 h^3 \sum_{i=1}^{N} f^{''}\left(x_{i-1}\right) + C_0^3 h^4 \sum_{i=1}^{N} f^{'''}\left(x_{i-1}\right)$$

$$+ C_1^0 h \sum_{i=1}^{N} f\left(x_i\right) + C_1^1 h^2 \sum_{i=1}^{N} f^{'}\left(x_i\right) + C_1^2 h^3 \sum_{i=1}^{N} f^{''}\left(x_i\right) + C_1^3 h^4 \sum_{i=1}^{N} f^{'''}\left(x_i\right) + C_2^0 h \sum_{i=1}^{N} f\left(x_{i+1}\right)$$

$$+ C_2^1 h^2 \sum_{i=1}^{N} f^{'}\left(x_{i+1}\right) + C_2^2 h^3 \sum_{i=1}^{N} f^{''}\left(x_{i+1}\right) + C_2^3 h^4 \sum_{i=1}^{N} f^{'''}\left(x_{i+1}\right) + C_3^0 h \sum_{i=1}^{N} f\left(x_{i+2}\right) +$$

$$C_3^1 h^2 \sum_{i=1}^{N} f^{'}\left(x_{i+2}\right) + C_3^2 h^3 \sum_{i=1}^{N} f^{''}\left(x_{i+2}\right) + C_3^3 h^4 \sum_{i=1}^{N} f^{'''}\left(x_{i+2}\right).$$

Значения коэффициентов $C_y^{\propto}$ берутся, полученные для элементарной квадратурной формулы с участием производных выше.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} [h^{1+0}\left(C_0^0 f\left(x_{i-1}\right) + C_1^0 f\left(x_i\right) + C_2^0 f\left(x_{i+1}\right) + C_3^0 f\left(x_{i+2}\right)\right) + h^{1+1}(C_0^1 f^{'}\left(x_{i-1}\right)$$

$$h^{1+1}\left(C_0^1 f^{'}\left(x_{i-1}\right) + C_1^1 f^{'}\left(x_i\right) + C_2^1 f^{'}\left(x_{i+1}\right) + C_3^1 f^{'}\left(x_{i+2}\right)\right) + h^{1+2}$$

$$\left(C_0^2 f^{''}\left(x_{i-1}\right) + C_1^2 f^{''}\left(x_i\right) + C_2^2 f^{''}\left(x_{i+1}\right) + C_3^2 f^{''}\left(x_{i+2}\right)\right) + h^{1+3}$$

$$\left(C_0^3 f^{'''}\left(x_{i-1}\right) + C_1^3 f^{'''}\left(x_i\right) + C_2^3 f^{'''}\left(x_{i+1}\right) + C_3^3 f^{'''}\left(x_{i+2}\right)\right)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} h^{n+r} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x_{i-1}) dx_{i-1}, \text{ где } r - \text{ порядок старшей производной}$$

Таким образом, была получена квадратурная формула общего вида на произвольном отрезке интегрирования.

2.3 Вычислительные эксперименты

Для примера, пусть $f(x) = sin\,(3x) \; + x^3$. Вычислим и сравним полученные значения по формуле численного интегрирования, в частности формуле Симпсона и полученной квадратурной формуле общего вида.

Сначала вычислим значения интеграла на участке интегрирования от 0 до 1 по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^1 \left(sin\,(3x) \; + x^3\right)dx = \left(-\frac{cos\,(3x)}{3}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = -\frac{cos\,(3)}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

$$= 0.91333083220015$$

Затем посчитаем значение интеграла по полученной элементарной квадратурной формуле, вычислив при этом производную функции $f(x)$:

$$\int_0^1 \left(sin\,(3x) \; + x^3\right)dx = \frac{427519381}{1120863744} f(0) + \frac{331133249}{5604318720} f^{'}(0) + \frac{4135199}{934053120} f^{''}(0) +$$

$$\frac{50857}{373621248} f^{'''}(0) + \frac{1730473}{4612608} f(0.1) - \frac{7097579}{23063040} f^{'}(0.1) + \frac{965}{2306304} f^{''}(0.1) -$$

$$\frac{37603}{5322240} f^{'''}(0.1) + \frac{1071529}{4612608} f(0.2) - \frac{398083}{3294720} f^{'}(0.2) + \frac{224473}{11531520} f^{''}(0.2) -$$

$$\frac{2617}{1064448} f^{'''}(0.2) + \frac{12457877}{1120863744} f(0.3) - \frac{20331329}{5604318720} f^{'}(0.3) + \frac{401183}{934053120} f^{''}(0.3) -$$

$$\frac{34637}{1868106240} f^{'''}(0.3) = 0.913330832200149$$

Теперь вычислим интеграл по формуле Симпсона, пусть количество разбиений равно 10, тогда h=0.1:

$$\int_0^1 \left(sin\,(3x) \; + x^3\right)dx = \frac{1}{30} \bullet (f(0) + 4\cdot(f(0.1) + f(0.3) + f(0.5) + f(0.7) +$$

$$f(0.9)) + 2\cdot(f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8)) + f(1))$$

$$\approx 0.9133327028271381$$

Оценим погрешность вычисления сначала для нашей квадратурной формулы, для этого от точного значения вычисления вычтем наш полученный результат:

$$\Delta = |0.9133308322001485 - 0.913330832200149| = 0.0000000000000005$$

Проделаем то же самое и для формулы Симпсона:

$$\Delta = |0.9133308322001485 - 0.9133327028271381| = 0.0000018706269881$$

Видно, что погрешность вычисления квадратурной формулой меньше, чем погрешность вычисления формулы Симпсона.

Ниже приведены примеры, подсчитанные на разных участках интегрирования и при разных шагах разбиения, результаты которых представлены в таблице:

Вычисление интегралов с помощью квадратурной формулы с участием производных на участке от 0 до 10.

Таблица 1

Функция	N=50	N=100	N=1000	Метод
$8 * sin(7x)$	**0.4190637679013716**			Точное значение
	0.419657125909 8053	**0.41909**92205603583	**0.4190637**713955342	Симпсон
	0.419063767897583	**0.419063767901372**	**0.41906376790137**2	Квадр. формула
$sin(x) + cos(x)$	**1.295050418187083**			Точное значение
	1.295051138516953	**1.2950504**63167498	**1.2950504181**91579	Симпсон
	1.295050418187083	**1.295050418187083**	**1.295050418187083**	Квадр. формула

$6x^4 - 5x^2 + 3x - 1$	**118473.3333333333**			Точное значение
	118473.3341333333	**118473.3333**833333	**118473.33333333**83	Симпсон
	118473.3333333333	**118473.3333333333**	**118473.3333333333**	Квадр. формула
$x^2 cos(3x) + x$	**17.48158105769871**			Точное значение
	17.48004610718645	**17.481**4858982743	**17.4815810**4820818	Симпсон
	17.48158105769871	**17.48158105769871**	**17.48158105769871**	Квадр. формула

Вычисление интегралов с помощью квадратурной формулы с участием производных на участке от -4 до 5.

Таблица 2

Функция	N=50	N=100	N=1000	Метод
$8 * sin(7x)$	**-0.06732989853949696**			Точное значение
	-0.06739172840497948	**-0.0673**3362529647328	**-0.067329898**90782161	Симпсон
	-0.067329898539357	**-0.06732989853949**7	**-0.06732989853949**7	Квадр. формула
$sin(x) + cos(x)$	**-2.653032576297905**			Точное значение
	-2.653033544261566	**-2.653032**636751877	**-2.653032576**303949	Симпсон
	-2.653032576297905	**-2.653032576297905**	**-2.653032576297905**	Квадр. формула

$6x^4 - 5x^2 + 3x - 1$	**4668.300000000000**			Точное значение
	4668.300472391999	**4668.300**29524500	**4668.30000000**2952	Симпсон
	4668.300000000000287	**4668.300000000000**280	**4668.300000000000**276	Квадр. формула
$x^2 cos(3x) + x$	**6.954914504547795**			Точное значение
	6.954998349243061	**6.95491**9709139824	**6.95491450**5067084	Симпсон
	6.954914504547795	**6.954914504547795**	**6.954914504547795**	Квадр. формула

Заключение

При написании данной работы были изучены и проанализированы материалы и литература математического анализа, алгебры, численных методов. Особенно можно выделить научные работы Урбаханова А.В. “Оценка погрешности кубатурных формул общего вида с узлами на ньютоновской решетке в пространстве Соболева $W_p^m(E_n)$” и Цыренжапова Н.Б. “ Оценка погрешности кубатурных формул общего вида с пограничным слоем и узлами на решетке в пространстве Соболева $L_p^m(E_n)$ ”. Был рассмотрен алгоритм нахождения узлов и коэффициентов элементарной квадратурной формулы, в которую входят как значения функции, так и значения ее производных. Практическая значимость данной работы состоит в выведении элементарной квадратурной формулы, точно интегрирующих многочлены до пятнадцатой степени соответственно, а также осуществлен переход квадратурной формулы на произвольный участок интегрирования, с произвольным шагом и количеством разбиений. Затем были проведены соответствующие вычислительные эксперименты. Таким образом, построены квадратурная формула общего вида с участием производных более высокого порядка точности, чем известные формулы. Задачи решены в полном объеме, цель достигнута. Работа представляет практический и научный интерес, может быть продолжена в рамках магистратуры.

Список литературы

1. Никольский С.М. Квадратурные формулы. С доб. Корнейчука Н.П. - 4-е изд. - Москва : Наука, 1988. - 254 с. - ISBN 5-02-013786-3.
2. Добрынина Н.Ф., Домнин Л.Н. Квадратурные и кубатурные формулы. - Пенза : Издательство Пензенского государственного Университета, 2007. - 44 с.
3. Березин И.С. Методы вычислений. - Москва : Гос. изд. физ. - мат. литературы, 1959. - 464 с.
4. Гулин А.В. Численные методы. - Москва : Наука, 1989. - 432 с.

Приложение

Код для вычисления интегралов по квадратурной формуле общего вида.

```
#include <iostream>
#include <math.h>
#include<iomanip>


using namespace std;
long double f(long double x)
{
   return  sin(3*x)+pow(x,3);  //подынтегральная функция
}
long double f1(long double x)
{
   return 3*cos(3*x)+3*pow(x,2);  //1 производная
}
long double f2(long double x)
{
   return -9*sin(3*x)+6*x;  //2 производная
}
long double f3(long double x)
{
   return -27*cos(3*x)+6;  //3 производная
}
int main()
{
setlocale(0,"");
long double a,b,h = 0, n, s1=0, s11=0, s12=0, s13=0, s2=0, s21=0, s22=0, s23=0, s3=0, s31=0, s32=0, s33=0, s4=0, s41=0, s42=0, s43=0;
```

```
long double integral=0;
cout<<"Введите пределы интегрирования и количество разбиений: ";
cin>>a>>b>>n;
h=(b-a)/n;
cout<<"h= "<<h<<endl;
for(int i=1;i<=n;i++)  //значение функции и производных в точках
{
   s1=s1+f(a+(i-1)*h);
   s11=s11+f1(a+(i-1)*h);
   s12=s12+f2(a+(i-1)*h);
   s13=s13+f3(a+(i-1)*h);
   s2=s2+f(a+i*h);
   s21=s21+f1(a+i*h);
   s22=s22+f2(a+i*h);
   s23=s23+f3(a+i*h);
   s3=s3+f(a+(i+1)*h);
   s31=s31+f1(a+(i+1)*h);
   s32=s32+f2(a+(i+1)*h);
   s33=s33+f3(a+(i+1)*h);
   s4=s4+f(a+(i+2)*h);
   s41=s41+f1(a+(i+2)*h);
   s42=s42+f2(a+(i+2)*h);
   s43=s43+f3(a+(i+2)*h);
}
long double c00,c01,c02,c03,c10,c11,c12,c13,c20,c21,c22,c23,c30,c31,c32,c33;
//16 коэффициентов
c00=427519381.0/1120863744.0;    //0.3814195822538;
c01=331133249.0/5604318720.0;    //0.0590853706835;
c02=4135199.0/934053120.0;    //0.0044271561343;
```

```
c03=50857.0/373621248.0;    //0.000136119132;
c10=1730473.0/4612608.0;    //0.3751615138333;
c11=-7097579.0/23063040.0;    //-0.3077468972;
c12=965.0/2306304.0;    //0.0004184183871;
c13=-37603.0/5322240.0;    //-0.007065258237;
c20=1071529.0/4612608.0;    //0.2323043709762;
c21=-398083.0/3294720.0;     //-0.120824531371;
c22=224473.0/11531520.0;     //0.0194660374347;
c23=-2617.0/1064448.0;     //-0.002458551286;
c30=12457877.0/1120863744.0;    //0.0111145329364;
c31=-20331329.0/5604318720.0;     //-0.003627796707;
c32=401183.0/934053120.0;     //0.0004295076922;
c33=-34637.0/1868106240.0;     //-0.000018541236712;
integral=c00*h*s1+c01*h*h*s11+c02*h*h*h*s12+c03*h*h*h*h*s13+c10*h*s
2+c11*h*h*s21+c12*h*h*h*s22+c13*h*h*h*h*s23+c20*h*s3+c21*h*h*s31+
c22*h*h*h*s32+c23*h*h*h*h*s33+c30*h*s4+c31*h*h*s41+c32*h*h*h*s42+
c33*h*h*h*h*s43;  //общая квадратурная формула
cout<<"Значение интеграла: "<<endl;
cout<<fixed<<setprecision(15)<<integral;
return 0;
}
```