

S2

17.12.15

Fakultätsübergreifendes Labor für Physik

Ostfalia
Hochschule für angewandte
Wissenschaften



Teilnehmer:

Versuchsdatum:

Note:

Bestimmung der Schallgeschwindigkeit mit dem Resonanzrohr

Vorbereitungstichpunkte

Schwingungen:

Kennzeichnung durch Amplitude, Schwingungsdauer, Frequenz und Phase;

Differentialgleichung der Schwingung aufstellen und lösen;

Erzwungene Schwingungen, Resonanz;

Wellen:

Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Schwingungen und Wellen;

Kennzeichnung durch Amplitude, Schwingungsdauer, Frequenz und Phase;

Ausbreitungsgeschwindigkeit, Wellenlänge, Wellenzahl;

Unterschied zwischen Transversalwellen und Longitudinalwellen;

Überlagerung von Wellen;

Stehende Wellen, Bäuche und Knoten, Bedingungen für das Zustandekommen von stehenden Wellen und Resonanzen;

Schallwellen:

Natur der Schallwellen: in welchen Medien sind Transversal- bzw. Longitudinalwellen möglich?

Messung der Wellenlänge, Frequenz, Ausbreitungsgeschwindigkeit;

Schallgeschwindigkeit in festen Stoffen (Hookesches Gesetz) und in (idealen) Gasen, Vergleich der Größenordnung;

1. Theorie

Schallausbreitung

In Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen breiten sich Schallwellen in Form von Longitudinalwellen aus. In Festkörpern sind auch Transversalwellen möglich.

Ebene, harmonische Schallwellen werden durch die Wellenfunktion ebener Wellen mit Ausbreitung in x-Richtung beschrieben:

$$s(x,t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0) \quad (1)$$

Hierin ist $s = s(x,t)$ die Abweichung der Ortskoordinate der schwingenden Teilchen vom mittleren Wert x , wobei x in der Ausbreitungsrichtung größer wird.

ω Kreisfrequenz

k Wellenzahl

φ_0 Nullphasenwinkel

Weitere wichtige Gleichungen sind:

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T} \quad (2)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3)$$

$$c = \lambda \cdot f \quad (4)$$

f Frequenz

T Periodendauer oder zeitliche Periode

λ Wellenlänge oder räumliche Periode

c Schallgeschwindigkeit oder Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit)

Die Teilchenschwingungen sind mit entsprechenden Druckänderungen in der Gasmenge verbunden, in der sich die Schallwelle ausbreitet, so dass es noch eine zweite Funktion zur Beschreibung einer ebenen, harmonischen Schallwelle gibt:

$$p_{\sim}(x,t) = \hat{p}_{\sim} \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \quad (5)$$

Der sogenannte Schallwechseldruck p_{\sim} , manchmal auch einfach als Schalldruck bezeichnet, ist die Abweichung des Gasdrucks vom mittleren Gasdruck, und \hat{p}_{\sim} ist die zugehörige Amplitude. Die p_{\sim} -Wellenfunktion ist relativ zur s -Wellenfunktion um $\pi/2 = 90^\circ$ phasenverschoben (um $\lambda/4$ in x -Richtung).

Für \hat{p}_{\sim} gilt:

$$\hat{p}_{\sim} = \rho \cdot c \cdot \omega \cdot \hat{s} \quad (5a)$$

ρ Gasdichte

$\rho \cdot c$ Schallkennimpedanz

Bei idealen Gasen und im hörbaren Frequenzbereich gilt für die Schallgeschwindigkeit c :

$$c = \sqrt{\kappa \cdot R_S \cdot T} = \sqrt{\kappa \cdot \frac{R}{M} \cdot T} = \sqrt{\kappa \cdot \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa \cdot \frac{p_N}{\rho_N \cdot T_N} \cdot T} \quad (6)$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_{mp}}{C_{mV}} \quad \text{und} \quad R_S = \frac{R}{M} = \frac{p_N}{\rho_N \cdot T_N}$$

κ Adiabatenexponent

M Molmasse

T absolute Temperatur

R allgemeine Gaskonstante

R_S spezielle Gaskonstante

c_p spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck

c_v spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen

C_{mp} molare Wärmekapazität bei konstantem Druck

C_{mV} molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen

p mittlerer Gasdruck

ρ Gasdichte

ρ_N Gasdichte im Normzustand

T_N 273,15 K (Normzustand)

p_N 101325 Pa (Normzustand)

Aus Gleichung (6) geht hervor, dass c druckunabhängig und proportional zu \sqrt{T} ist.

Wendet man die allgemeine Zustandsgleichung für ideale Gase an, so geht daraus hervor, dass sich auf den Quotienten p/ρ Druckänderungen nicht auswirken.

Bei trockener Luft rechnet man mit $\kappa = 1,4$ (Wert für ein zweiatomiges ideales Gas) und $\rho_N = 1,293 \text{ kg/m}^3$. Damit ergibt sich für trockene Luft bei 20°C

$$c_{\text{theor.}}(20^\circ\text{C}) = \sqrt{1,4 \cdot \frac{101325 \text{ Pa}}{1,293 \text{ kg/m}^3} \cdot \frac{293,15 \text{ K}}{273,15 \text{ K}}} = 343,14 \text{ m/s} \quad (7)$$

$$c_{\text{theor.}}(T) = 343,14 \text{ m/s} \cdot \sqrt{\frac{T}{293,15 \text{ K}}}$$

Bei feuchter Luft sind κ und ρ_N geringfügig kleiner als bei trockener Luft. Die Auswirkung dieser Abweichung auf die Schallgeschwindigkeit liegen jedoch in der Größenordnung "Promille" und können deshalb bei Praktikumsmessungen vernachlässigt werden.

Stehende Wellen

Stehende Wellen sind das Ergebnis der Interferenz von zwei Wellen gleicher Frequenz und gleicher Amplitude, aber entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung. Als Interferenz bezeichnet man eine Überlagerung von Wellen, wenn dabei ortsabhängige, zeitlich konstante Intensitätsschwankungen (Auslöschung bzw. Verstärkung) auftreten.

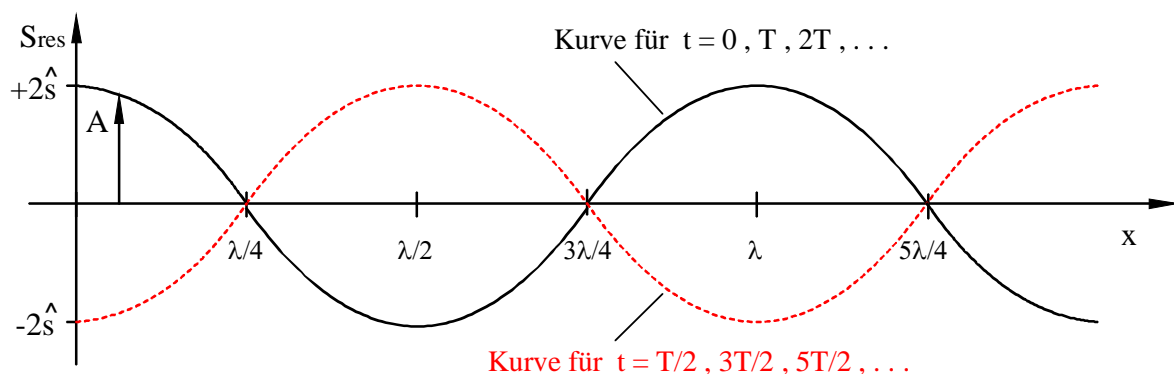
$$1. \text{ Welle: } s_1(x, t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

$$2. \text{ Welle: } s_2(x, t) = \hat{s} \cdot \cos(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

$$\text{Überlagerung: } s_{\text{res}}(x, t) = s_1 + s_2 = 2 \cdot \hat{s} \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (8)$$

Diese Gleichung (8) beschreibt eine Schwingung mit der Kreisfrequenz ω und der ortsabhängigen Amplitude $A = 2 \cdot \hat{s} \cdot \cos(k \cdot x)$. Für $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots$ ist $A = 2 \cdot \hat{s}$ (größtmöglicher Wert), für $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$ ist $A = 0$ (kleinstmöglicher Wert).

Die folgende Abbildung veranschaulicht stehende Transversalwellen. Bei Longitudinalwellen schwingen die Teilchen in x-Richtung und entgegengesetzt um die Mittellage hin und her.



Stellen, an denen A den größtmöglichen Wert hat, nennt man Schwingungsbäuche. An diesen Stellen verstärken sich die beiden interferierenden Wellen. Stellen, an denen A Null ist, heißen Wellenknoten. Hier löschen sich die beiden interferierenden Wellen gegenseitig aus.

Wegen der Phasenverschiebung zwischen s -Welle und p -Welle (90°) ist ein s -Schwungsbauch zugleich ein p -Knoten und umgekehrt.

Der Abstand von zwei benachbarten Knoten bzw. Bäuchen ist $\lambda/2$

Stehende Wellen, vor allem stehende Lichtwellen, spielen in der Messtechnik eine große Rolle. Entweder misst man den Knotenabstand bzw. Bauchabstand und ermittelt so die Wellenlänge, oder es werden bei bekannter Wellenlänge die längs einer zu messenden Strecke x auftretenden Knoten und Bäuche gezählt und so die Länge x als Vielfaches von $\lambda/4$ gemessen.

Physikalische Messgeräte zur Längenmessung mit stehenden Wellen heißen Interferometer. Die erforderliche 2. Welle mit entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung erzeugt man meist durch Reflexion der 1. Welle. Die nachfolgend beschriebene Apparatur ist ein akustisches Interferometer.

2. Versuch

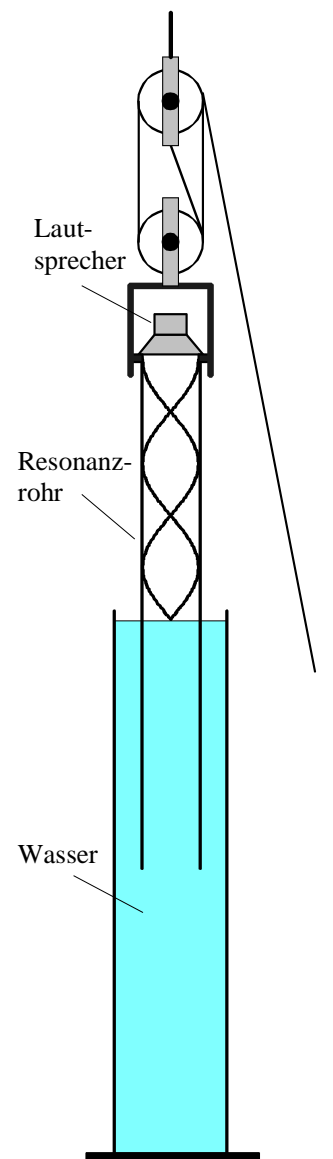
Versuchsaufbau

Die Abbildung zeigt eine schematische Skizze des Versuchsaufbaus. Ein etwa 1 m hoher Standzylinder aus Kunststoff ist fast vollständig mit Wasser gefüllt. Über dem Zylinder befindet sich ein Flaschenzug, an dem ein etwa 1 m langes Metallrohr aufgehängt ist. Auf die obere Rohrmündung kann ein kleiner Lautsprecher aufgesetzt werden, der mit dem Ausgang eines Sinus-Generators verbunden ist. Die Frequenz ist in weiten Grenzen einstellbar und kann mit einem Messgerät auf etwa ± 1 Hz genau gemessen werden. Das Rohr kann mit einem Seil in vertikaler Richtung hin und her bewegt werden, so dass die Länge der Luftsäule zwischen der Lautsprechermembran und der Wasseroberfläche im Bereich von wenigen Zentimetern bis zu etwa 1 m beliebig verändert werden kann. Die Position des Rohres kann mit einem am Rohr befestigten Metallbandmaß auf etwa 1 mm genau bestimmt werden (Ablesung an der Wasseroberfläche).

Bei eingeschaltetem Generator strahlt der angeschlossene Lautsprecher Schallwellen ab (Schallfrequenz z.B. 500 Hz), die sich in der Luftsäule im Rohr linear ausbreiten und an der Wasseroberfläche nahezu vollständig reflektiert werden. Die reflektierte Welle überlagert sich mit der vom Lautsprecher herkommenden einfallenden Welle, und es können sich stehende Wellen ausbilden.

Grund für die Reflexion ist die sprunghafte Änderung der Schallkennimpedanz $\rho \cdot c$ beim Übergang von Luft in Wasser. Die Impedanz beträgt in Luft etwa $400 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$, in Wasser sind es etwa $1,45 \cdot 10^6 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$. Die Wasseroberfläche wirkt praktisch wie eine starre Wand. Die Schwingungsamplitude s ist unmittelbar an der Wasseroberfläche Null, und die Schalldruckamplitude \hat{p} hat dort ihr Maximum.

Die stehende Schallwelle hat somit an der Wasseroberfläche einen Schwingungsbauch des Schalldrucks $p_{\sim}(x, t)$ und einen Knoten in Bezug auf die Größe $s(x, t)$.

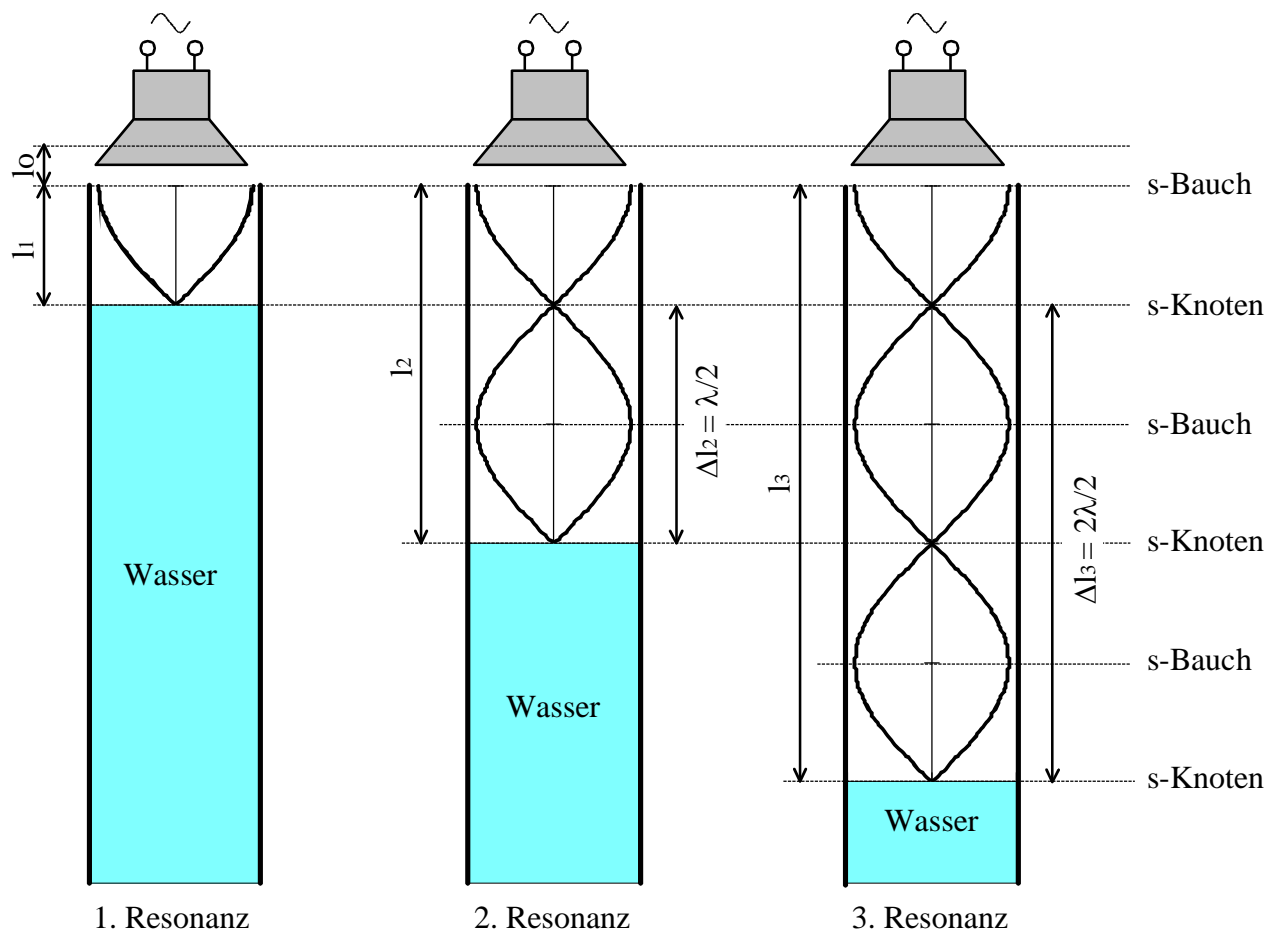


Die Reflexion ist also bei der s -Wellenfunktion mit einem Phasensprung von $180^\circ = \pi$ verbunden, denn nur dann ergibt sich, unabhängig von t , bei der Überlagerung $s_1 + s_2$ immer Null. Bei der p -Welle tritt dagegen kein Phasensprung auf.

Eine stehende Welle in einer Gasmenge ist physikalisch gleichbedeutend mit einer Schwingung dieser Gasmenge. Die Schwingung einer Gasmenge macht sich, ähnlich wie die Schwingung einer Lautsprechermembran, durch Abstrahlung von Schallwellen bemerkbar, ist also außerhalb des Rohres hörbar.

Verändert man die Eintauchtiefe des Rohres, so hört man auffällige Lautstärkeänderungen. Offenbar sind die Amplituden der Gasschwingung von der Länge der Gassäule abhängig. Ein Lautstärke-Maximum tritt immer dann auf, wenn die reflektierte Welle an der Stelle, wo sich die Lautsprechermembran befindet, die gleiche Phase hat, wie die Membran. Es kommt dann zu einem Aufschaukeln der Schwingungen. Dies entspricht dem Aufschaukeln bei erzwungenen Schwingungen im Resonanzfall. Man bezeichnet deshalb die Einstellung auf maximale Lautstärke auch als Einstellung auf Resonanz und nennt das Rohr, in dem sich die schwingende Gassäule befindet, Resonanzrohr.

Die nachfolgenden Abbildungen sollen die Resonanzbedingungen veranschaulichen.



Gemäß der obigen Abbildungen gilt unter der Annahme l_1 sei $\lambda/4$:

$$l_n = (2n - 1) \cdot \lambda/4. \quad (9)$$

Davon unabhängig gilt immer:

$$\Delta l_n = l_n - l_1 = (n - 1) \cdot \lambda/2 \quad (10)$$

n Anzahl der Knoten im Resonanzrohr

Da die Strecke l_0 wegen der nicht ebenen Form der Lautsprechermembran nicht genau bestimmt werden kann, ist es bei den Messungen zweckmäßiger, die sehr gut zu bestimmende Größe Δl_n bei möglichst großem n zu messen und zur weiteren Auswertung Gleichung (10) zu benutzen.

3. Versuchsdurchführung

Achtung!

Bei der Bedienung des Flaschenzuges ist darauf zu achten, dass

1. das Seil zum Hochziehen bzw. Absenken einigermaßen senkrecht verläuft und
2. das Rohr nicht bis zum Aufliegen der Lautsprecherhalterung abgesenkt wird.

Bei Nichtbeachtung dieser Hinweise kann die Schnur aus den Rollen rutschen.

Die Beseitigung dieses harmlosen Schadens kostet viel Zeit und Mühe.

Da die Schallgeschwindigkeit temperaturabhängig ist, wird vor und nach jeder Resonanzmessung die Temperatur der Luftsäule mit einem Thermometer auf etwa $0,1^\circ\text{C}$ genau gemessen.

Der Versuch beginnt also mit einer Temperaturmessung: Zunächst wird der Lautsprecher vom Resonanzrohr entfernt, damit die Öffnung des Resonanzrohrs frei zugänglich ist. Danach wird das Rohr mit Hilfe des Flaschenzuges vorsichtig so weit aus dem wassergefüllten Zylinder herausgezogen, dass die Rohrmündung gerade noch in das Wasser eintaucht. Zur Vermeidung von Temperaturverfälschungen durch Verdunstung wird das Rohr außen abgetrocknet.

Das Thermometer wird in das herausgezogene und abgetrocknete Rohr eingehängt. Nach einer ausreichenden Messzeit wird das Thermometer zur Ablesung aus dem Rohr herausgezogen und der Temperaturwert unmittelbar abgelesen. Hierbei wird das Thermometer stets nur am oberen Ende gehalten!

Nach Beendigung der Temperaturmessung wird der Lautsprecher vorsichtig wieder auf die obere Rohrmündung aufgesetzt. Die Eintauchtiefe des Rohrs bleibt unverändert.

Bei der eigentlichen Resonanzmessung wird zunächst die Rohreintauchtiefe bei der Resonanz mit der größtmöglichen Länge der Luftsäule zehnmal hintereinander gemessen. Hierbei wird über den Flaschenzug jeweils die maximale Lautstärke eingestellt und die zugehörige Position an der Wasseroberfläche auf der Skalierung abgelesen und notiert. Danach wird das Rohr langsam und vorsichtig (s.o.) immer tiefer in das Wasser eingetaucht. Die dabei beobachteten Resonanzen werden gezählt. Die Positionen bei den Zwischenresonanzen brauchen nicht gemessen zu werden. Die Position bei der Resonanz mit der kleinstmöglichen Luftsäule wird dagegen wieder wie zuvor zehnmal hintereinander gemessen. Danach wird das Rohr wieder langsam und vorsichtig herausgezogen und abgetrocknet.

Nach einer erneuten Temperaturmessung wird eine neue Frequenz eingestellt. Insgesamt sollen Resonanzmessungen bei 4 verschiedenen Frequenzen im Bereich von 500 Hz bis 2000 Hz ausgeführt werden. Nach der letzten Resonanzmessung ist, wie nach jeder Resonanzmessung, noch einmal die Lufttemperatur im Rohr zu messen.

4. Auswertung

Für jede der 4 gewählten Frequenzen wird eine gesonderte Auswertung durchgeführt.

1. Berechnen sie $\overline{\Delta l_n}$.
2. Berechnen Sie die zur jeweiligen Frequenz gehörende Wellenlänge λ .
3. Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit c .
4. Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit bei 20°C mit der Gleichung.

$$c_{\text{exp.}}(20^\circ\text{C}) = c_{\text{exp.}}(T) \cdot \sqrt{\frac{293,15 \text{ K}}{T}} \quad (11)$$

$$\text{mit } T = \frac{T_{\text{vorher}} + T_{\text{nachher}}}{2}$$

5. Fassen Sie ihre einzelnen Ergebnisse zu einem Gesamtergebnis zusammen und vergleichen sie es mit dem Literaturwert.

Diskutieren Sie die Ergebnisse.

Dieser Versuch eignet sich für eine ausführliche Fehlerbetrachtung.

Für eine vollständige Fehlerrechnung werden neben den systematischen Beiträgen, die Sie selbst abschätzen, folgende Unsicherheiten angesetzt:

Längenmaßstab: 0,1 %

Thermometer: $\pm 0,1^\circ\text{C}$ (gilt für die Temperatur des Thermometers und nicht unbedingt für den Messprozess)