

Labor Physik- Versuch S4

Untersuchung von erzwungenen Schwingungen mit einem Linear-Pendel

Marius Neumann & Nico Herkner

03. November 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	1
2	Vorbereitung	1
3	Durchführung	2
3.1	Bestimmung der Federkonstanten	2
3.2	Bestimmung der Periodendauer T_d	2
3.3	Bestimmung der Abklingkonstante δ	2
3.4	Aufnahme der Amplituden- und Phasengänge in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz und der Dämpfung	2
4	Auswertung	3
4.1	Bestimmung der Federkonstanten	3
4.2	Vergleich der gemessenen Periodendauer mit der theoretischen	3
4.3	Berechnung der Abklingkonstante δ	3
4.4	Darstellung der Amplituden- und Phasengänge	4
4.5	Bestimmung der Güten	6
4.6	Darstellung der Ortskurve	6
4.7	Diskussion der Messergebnisse	6
5	Geräteliste	7
	Anhang	7
6	Messprotokoll	8
6.1	Bestimmung der Federkonstanten	8
6.2	Bestimmung der Periodendauer T_d	8
6.3	Bestimmung der Abklingkonstante δ	8
6.4	Aufnahme der Amplituden- und Phasengänge in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz und der Dämpfung	8
7	Vorbereitungsstichpunkte	10

1 Theorie

Wir haben uns anhand [?, ?, ?] mit den genannten Themen vertraut gemacht und uns die Versuchsanleitung sorgfältig durchgelesen. Uns sind keine weiteren Fragen offengeblieben.

2 Vorbereitung

Wir haben die Vorbereitungsstichpunkte genau angeschaut.

Mit dem Zusammenhang aus Gleichung (20) in der Versuchsanleitung lässt sich nach einfachem Umformen folgender Ausdruck für δ bestimmen:

$$\delta = \frac{\omega_0}{2Q} \quad (2.1)$$

Setzen wir dies in Gleichung (18) ein:

$$\tan(\varphi_e) = \frac{-2 * \frac{\omega_0}{2Q} * \omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2} = \frac{-\omega_0 * \omega_e}{Q * (\omega_0^2 - \omega_e^2)} \quad (2.2)$$

Nun setzen wir die vorgegebenen Bedingungen ein:

$$Q_1 = 5 \quad (2.3)$$

$$\omega_e = 0,5 * \omega_0 \quad (2.4)$$

$$\tan(\varphi_e) = \frac{-\omega_0 * 0,5 * \omega_0}{5 * (\omega_0^2 - (0,5 * \omega_0)^2)} \quad (2.5)$$

$$= \frac{-0,5 * \omega_0^2}{5 * 0,75 * \omega_0^2} = -\frac{2}{15} \quad (2.6)$$

$$\varphi_e \approx \underline{\underline{-7,59^\circ}} \quad (2.7)$$

Tabelle 2.1 zeigt den zuvor berechneten Wert, zusammen mit den restlichen Werten, berechnet nach dem oben genannten Schema. Dabei wurden die Haupt- und Nebenwerte der Arcus-Tangens-Funktion berücksichtigt und gegebenenfalls $\pm\pi$ addiert.

Tabelle 2.1: Ergebnisse der Vorbereitungsaufgabe

Güten Q	$Q_1 = 5$	$Q_2 = 10$	$Q_3 = 20$
$\varphi(\omega_e = 0,5 * \omega_0, Q_\mu)$	$-7,59^\circ$	$-3,81^\circ$	$-1,91^\circ$
$\varphi(\omega_e = 2 * \omega_0, Q_\mu)$	$-172,41^\circ$	$-176,19^\circ$	$-178,09^\circ$

3 Durchführung

Wir haben uns sorgfältig mit dem Messaufbau beschäftigt und die Messeinheit justiert. Die Skizze zum Versuchsaufbau befindet sich in der Versuchsanleitung.

3.1 Bestimmung der Federkonstanten

Im Messprotokoll in Tabelle 6.1 sind die gemessene Längenänderungen zu den Massen m , deren Gewicht genau bestimmt wurde.

3.2 Bestimmung der Periodendauer T_d

Wir haben mit der Vorrichtung die Zeit zwischen einer Schwingung und mit der Stoppuhr die Zeit zwischen zehn Schwingungen für jede Gesamtmasse m jeweils dreimal gemessen und im Messprotokoll in Tabelle 6.2 protokolliert.

3.3 Bestimmung der Abklingkonstante δ

Tabelle 6.3 im Messprotokoll zeigt die Amplituden für die jeweilige Dämpfung und Messung

3.4 Aufnahme der Amplituden- und Phasengänge in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz und der Dämpfung

Wir haben die Einstellung wie im Laborumdruck beschrieben getätigt und Messreihen aufgenommen, die im Anhang wiederzufinden sind.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Federkonstanten

Aus der Formel und den Messergebnissen ergeben sich folgende Werte für c :

$$c_1 = \frac{m \cdot g}{\Delta x} = \frac{50,40 \cdot 9,81}{7,30} \frac{g \cdot \frac{m}{s^2}}{cm} = 10,52 \frac{N}{m} \quad (4.1)$$

$$c_2 = 10,45 \frac{N}{m} \quad (4.2)$$

$$\bar{c} = 10,48 \frac{N}{m} \quad (4.3)$$

4.2 Vergleich der gemessenen Periodendauer mit der theoretischen

Berechnungsschema der theoretischen Werte von T_d an einem Beispiel:

$$T_d(m_0) \approx 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_0}{\bar{c}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{51,20 \frac{g}{10,48 \frac{N}{m}}}{}} = \underline{\underline{0,44 \text{ s}}} \quad (4.4)$$

Tabelle 4.1 zeigt den Vergleich der theoretischen Werte mit den Durchschnittswerten der Messwerte für die Periodendauer T_d .

Tabelle 4.1: Vergleich der theoretischen und Messwerte (Absolut und Relativ)

Masse	$\overline{T_d(m_0)}$	Theoretische Werte	Abs. Abweichung	Rel. Abweichung
$m_0 = 51,20 \text{ g}$	$0,45 \text{ s}$	$0,44 \text{ s}$	$0,01 \text{ s}$	$2,27 \text{ \%}$
$m_1 = 101,24 \text{ g}$	$0,63 \text{ s}$	$0,62 \text{ s}$	$0,01 \text{ s}$	$1,61 \text{ \%}$
$m_2 = 151,30 \text{ g}$	$0,75 \text{ s}$	$0,75 \text{ s}$	$0,00 \text{ s}$	$0,00 \text{ \%}$

Es treten sehr geringe, maximale absolute Abweichungen von $10 \mu\text{s}$ auf.

4.3 Berechnung der Abklingkonstante δ

Verallgemeinert man die Gleichung (14) auf m Schwingungen, dann ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\frac{x_n}{x_{n+m}} = e^{mT_d\delta} \quad (4.5)$$

$$\delta = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{x_{n+m}}\right)}{m \cdot T_d} \quad (4.6)$$

$$\delta(\text{geringe Dämpfung}) = \frac{\ln\left(\frac{108,00 \text{ mm}}{33,00 \text{ mm}}\right)}{10 \cdot 0,46 \text{ s}} = \underline{\underline{0,26 \frac{1}{s}}} \quad (4.7)$$

In der Tabelle 4.3 sind die Abklingkonstanten für alle Messungen eingetragen. Der oben berechnete Wert gilt für die 1. Messung bei einer geringen Dämpfung.

Tabelle 4.2: Abklingkonstanten bei unterschiedlichen Dämpfungen

δ in 1/s	geringe Dämpfung	mittlere Dämpfung	starke Dämpfung
1. Messung	0,26	0,35	0,77
2. Messung	0,19	0,46	0,86
3. Messung	0,18	0,45	0,87
Mittelwert	0,21	0,42	0,83

Hier fällt auf, dass sich die Abklingkonstante δ von einer zur nächst stärkeren Dämpfung ca. verdoppelt.

4.4 Darstellung der Amplituden- und Phasengänge

Abbildung 4.1 zeigt auf einer logarithmisch skalierten Amplitudenachse den Amplitudenfrequenzgang. Durch diese logarithmische Skalierung ist der Abstand zwischen dem Amplitudenmaximum und der $-3dB$ Grenze für alle Dämpfungen gleich groß. Außerdem sind hier die Bandbreiten B und Grenzfrequenzen gut abzulesen. Tabelle 4.3 zeigt die abgelesenen Grenz- und Resonanzfrequenzen

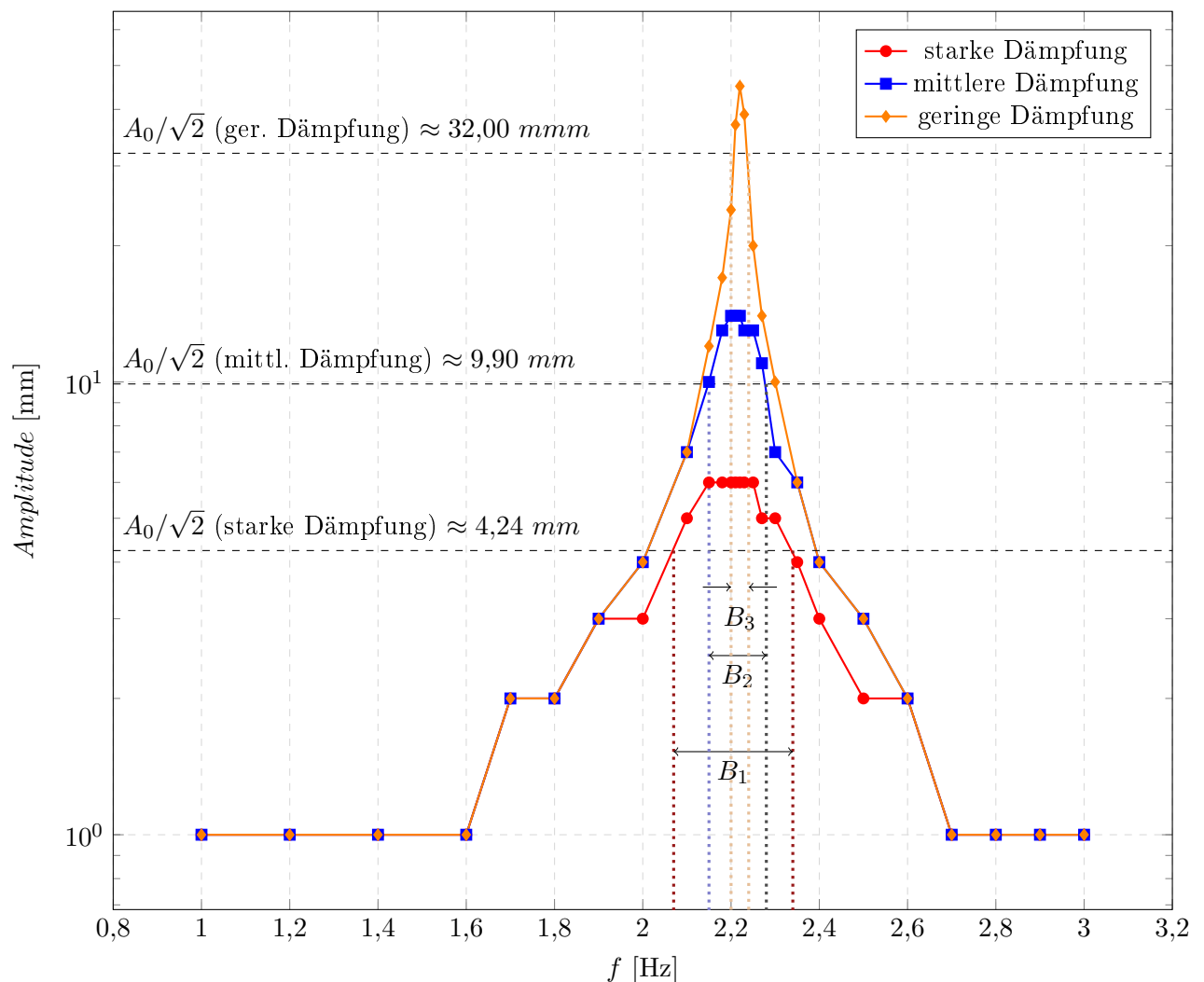


Abbildung 4.1: Darstellung der Amplitudengänge für die drei unterschiedlichen Dämpfungsstärken aus Abbildung 4.1.

Tabelle 4.3: Resonanz- und Grenzfrequenzen

Dämpfung	untere Grenzfrequenz	Resonanzfrequenz	obere Grenzfrequenz
stark	2,07 Hz	2,21 Hz	2,34 Hz
mittel	2,15 Hz	2,21 Hz	2,28 Hz
gering	2,20 Hz	2,22 Hz	2,24 Hz

Abbildung 4.2 zeigt den Phasenfrequenzgang.

In dem Diagramm ist gut zu sehen, dass sich die unterschiedlichen Phasenfrequenzgänge bei ca. 90° schneiden.

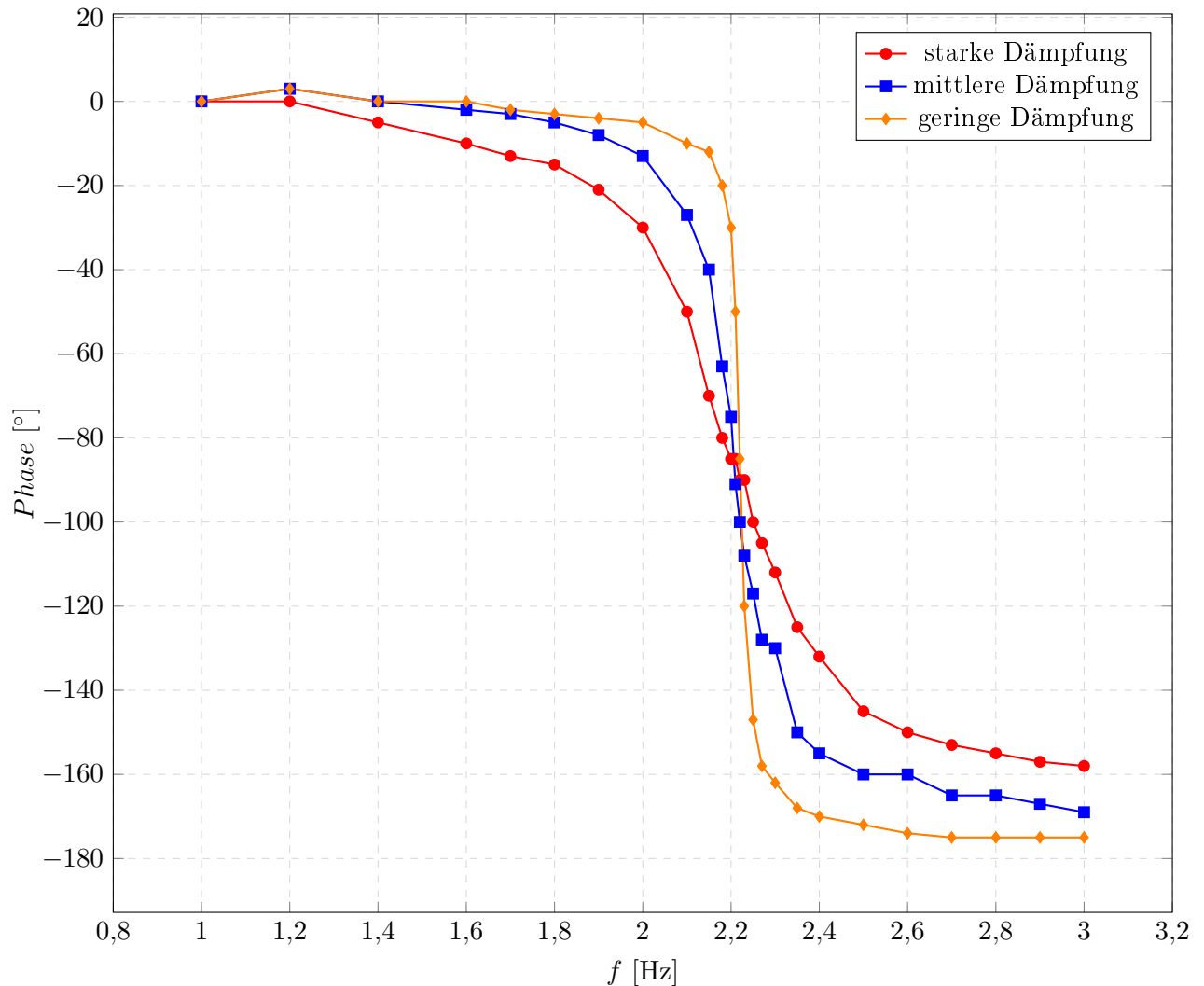


Abbildung 4.2: Darstellung des Phasenganges für die drei unterschiedlichen Dämpfungsstärken

4.5 Bestimmung der Güten

In Abbildung 4.1 haben wir die obere und untere Grenzfrequenz aus dem Amplitudenfrequenzgang abgelesen und mit diesen Werten Güten mit der Näherung $f_0 = f_r$ bestimmt. Nachfolgend das Berechnungsschema an einem Beispiel:

$$Q_1 = \frac{f_r}{f_2 - f_1} = \frac{2,21 \text{ Hz}}{2,34 \text{ Hz} - 2,07 \text{ Hz}} = \underline{\underline{8,19}} \quad (4.8)$$

Güten bei der Näherung $Q \approx \frac{A_{\max}}{A_e}$ (Berechnungsschema):

$$Q_1 = \frac{6,00 \text{ mm}}{1,00 \text{ mm}} = \underline{\underline{6,00}} \quad (4.9)$$

Tabelle 4.4 zeigt die berechneten Güten für die vorgegebenen Näherungen nach dem oben gezeigten Schema und deren Vergleich.

Tabelle 4.4: Berechnete Güten für die drei verschiedenen Dämpfungen mit Vergleich (Differenz und Quotient)

Dämpfung	Güte für $f_0 = f_r$	Güte für $A_{max}/A_e = Q$	Differenz	Quotient
starke Dämpfung	8,19	6,00	2,19	1,37
mittlere Dämpfung	17,00	14,00	3,00	1,21
geringe Dämpfung	55,50	45,00	10,50	1,23

4.6 Darstellung der Ortskurve

Abbildung 4.3 zeigt die Ortskurve aus den Messwerten der geringen Dämpfung. Zusätzlich ist eine Schätzung unsererseits der idealen Ortskurve eingezeichnet.

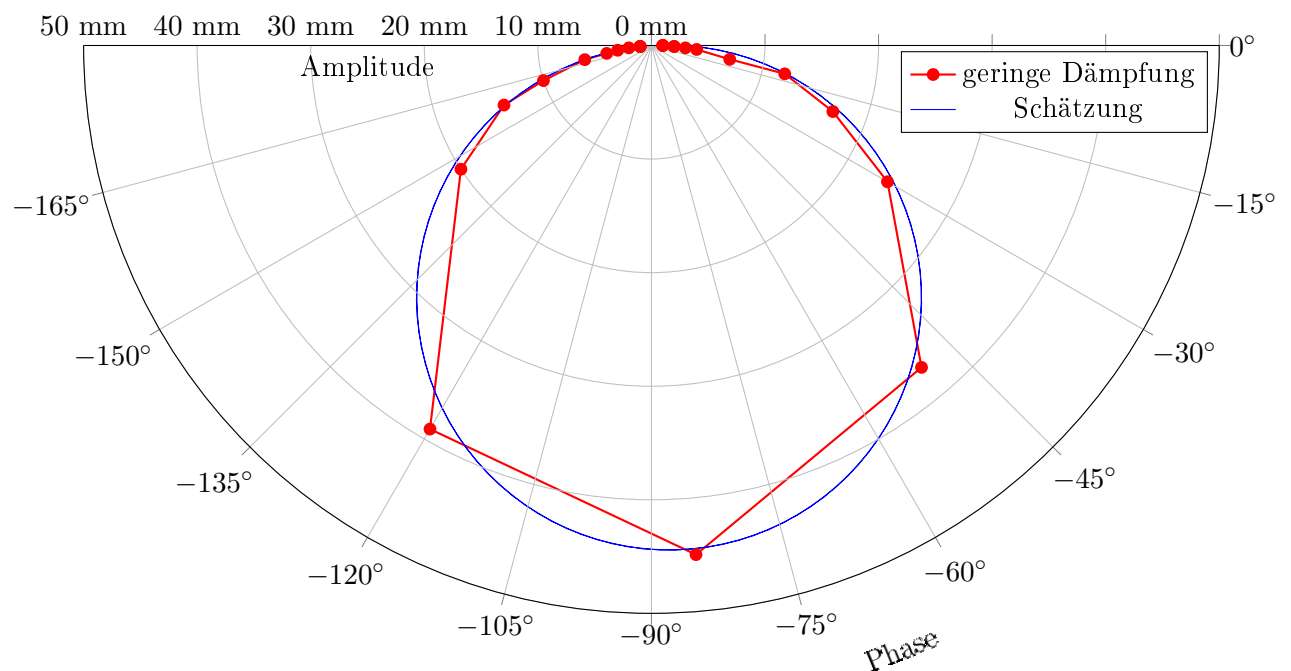


Abbildung 4.3: Ortskurve

4.7 Diskussion der Messergebnisse

Die Resonanzfrequenz kann theoretisch berechnet werden:

$$f_r = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{2\pi} = \frac{\sqrt{(2\pi/T_d)^2 - \delta^2}}{2\pi} \quad (4.10)$$

$$f_r(\text{ger. Dämpfung}) = \frac{\sqrt{(2\pi/0,45 \text{ s})^2 - (0,21 \cdot 1/s)^2}}{2\pi} \approx \underline{\underline{2,2220 \text{ Hz}}} \quad (4.11)$$

$$f_r(\text{mittl. Dämpfung}) = \frac{\sqrt{(2\pi/0,45 \text{ s})^2 - (0,42 \cdot 1/s)^2}}{2\pi} \approx \underline{\underline{2,2212 \text{ Hz}}} \quad (4.12)$$

$$f_r(\text{starke Dämpfung}) = \frac{\sqrt{(2\pi/0,45 \text{ s})^2 - (0,83 \cdot 1/s)^2}}{2\pi} \approx \underline{\underline{2,2183 \text{ Hz}}} \quad (4.13)$$

Allerdings gehen hierbei auch die Messungenauigkeiten aus 4.2 und 4.3 ein und sorgen so für keinen rein theoretischen Wert. Vielleicht sind auch daher diese Werte sehr nah an den abzulesenden Werten. Die Fehler der Messungen der Federkonstante, der Periodendauer und der Abklingkonstante kommen primär aus Ableseungenauigkeiten und der Messungenauigkeit des Messgeräts. Diese Fehler sind allerdings nur sehr klein. Die Resonanzfrequenz sollte noch einmal gesondert betrachtet werden, da die Frequenz am Oszillator nur in einer Schrittweite von $0,01 \text{ Hz}$ eingestellt werden konnte. Dies hat dazu geführt, dass, besonders im Bereich der Resonanzfrequenz, weniger Werte vorhanden sind, als man brauchen würde, um ein präzises Ergebnis zu erzielen. Mit den Formeln [19] und [4] kann man den theoretischen Wert für die Resonanzfrequenz berechnen:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (4.14)$$

$$f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{2\pi} \quad (4.15)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (4.16)$$

In diese Gleichungen kann man die ermittelten Werte von δ , c und m einsetzen. Diese Werte sind in der Tabelle 4.7 dargestellt.

Tabelle 4.5: Theoretische und gemessene Werte für die Resonanzfrequenz bei verschiedenen Dämpfungen

	$f_r(\text{theoretischer Wert})$	$f_r(\text{abgelesener Wert})$	Abweichung
schwache Dämpfung	2,28 Hz	2,22 Hz	2,51 %
mittlere Dämpfung	2,28 Hz	2,21 Hz	2,92 %
starke Dämpfung	2,27 Hz	2,21 Hz	2,80 %

An den Werten kann man erkennen, dass die abgelesenen Werte relativ stark Abweiche und immer deutlich unter dem theoretischen Wert liegen. Diese große Abweichung liegt zum einen an der Schrittweite, aber zum anderen auch an der eventuellen Ungenauigkeit durch den Einschwingvorgang. Ein Wert wurde von uns zum Beispiel erneut aufgenommen, da wir bei der ersten Messung den Einschwingvorgang nicht berücksichtigt hatten.

5 Geräteliste

Tabelle 5.1: Geräteliste

Nr.	Gerät
1	Messaufnehmer
2	Feder
3	Dämpfungsfahne mit Magneten
4	2 Zusatzmassen
5	Stoppuhr
6	Waage
7	2 Dämpfungsabstandshalter

Anhang

6 Messprotokoll

6.1 Bestimmung der Federkonstanten

Tabelle 6.1: Messwerte zur Durchführung 3.1

	$m_1 =$ <input type="text"/> g	$m_2 =$ <input type="text"/> g
$x(m_\mu)$	<input type="text"/>	<input type="text"/>

6.2 Bestimmung der Periodendauer T_d

Tabelle 6.2: Messwerte zur Durchführung 3.2

	$m_0 =$ <input type="text"/> g	$m_1 =$ <input type="text"/> g	$m_2 =$ <input type="text"/> g
$T_{d,1}$ (Gerät)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
$T_{d,2}$ (Gerät)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
$T_{d,3}$ (Gerät)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
$10 * T_{d,1}$ (Stoppuhr)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
$10 * T_{d,2}$ (Stoppuhr)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
$10 * T_{d,3}$ (Stoppuhr)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

6.3 Bestimmung der Abklingkonstante δ

Tabelle 6.3: Messwerte zur Durchführung 3.3

Dämpfung	ger. Dämpfung		mittl. Dämpfung		starke Dämpfung	
Periodendauer T_d	<input type="text"/>		<input type="text"/>		<input type="text"/>	
Schwingung	1.	11.	1.	11.	1.	11.
Amplitude (1. Messung)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Amplitude (2. Messung)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Amplitude (3. Messung)	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

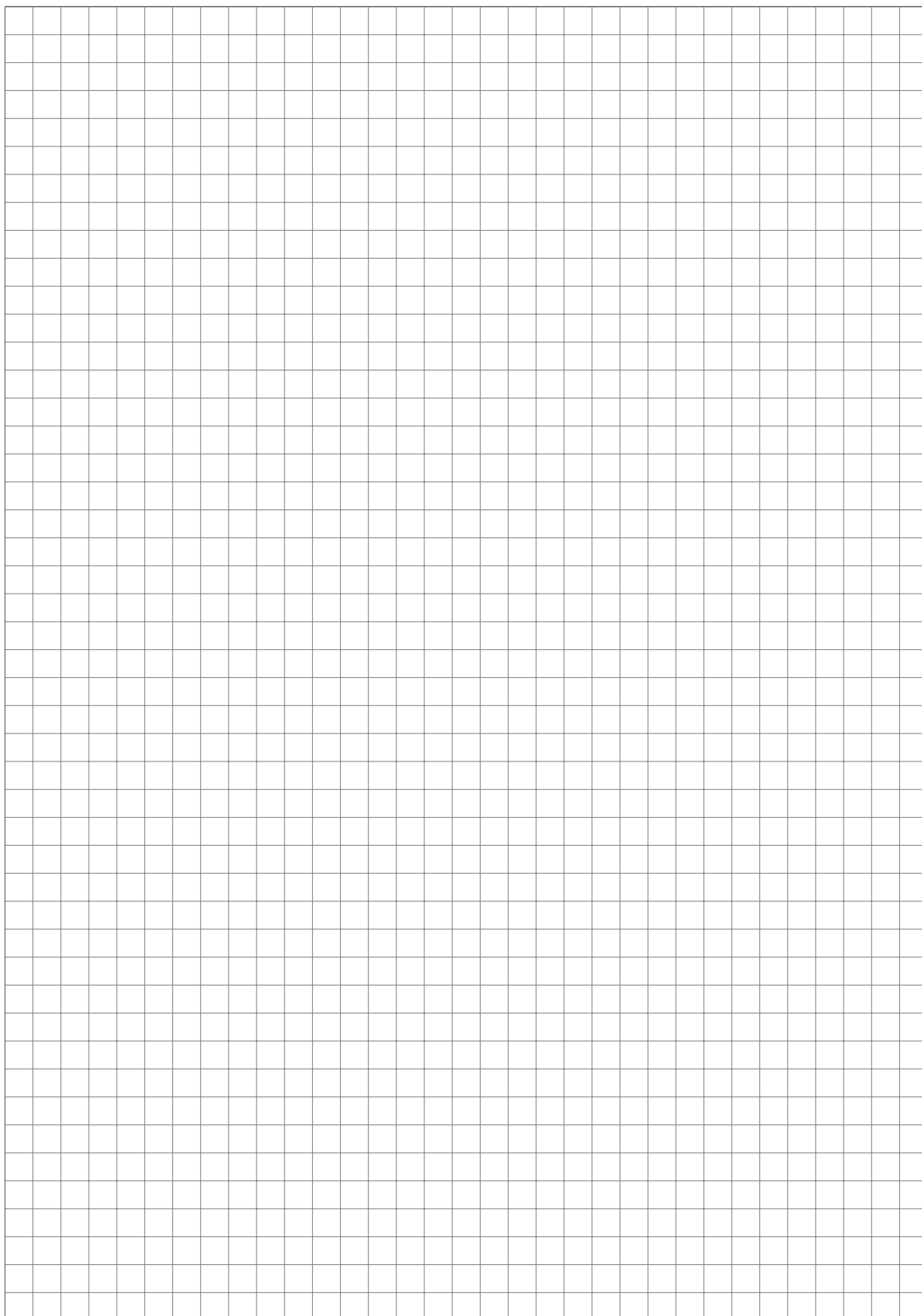
Zusätzliche Bemerkungen:

6.4 Aufnahme der Amplituden- und Phasengänge in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz und der Dämpfung

Wir haben mit einer Frequenzschrittweite von _____ Hz bis _____ Hz in Abhängigkeit vom Abstand zur Resonanzfrequenz die Messreihen aufgenommen: Diese sind auf der nächsten Seite zu finden.

Nico Herkner, 70452700
Marius Neumann, 70453277
D1, 03. November 2017

Frau Dr. Nicolaus
Labor Physik- Versuch S4
Messprotokoll



7 Vorbereitungsstichpunkte

Ungedämpfte Schwingung:

Ein schwingungsfähiges System, welches keine Dämpfung erfährt, schwingt, wenn es einmal Angeregt wurde, unendlich mit einer festen Frequenz weiter. Dies ist in der Realität nicht möglich, da immer eine Dämpfung vorhanden ist. Die Schwingung kann durch folgende Differentialgleichung (DGL) beschrieben werden:

$$m\ddot{y} + cy = 0 \quad (7.1)$$

Gedämpfte Schwingung:

Ein System, welches eine Dämpfung erfährt, hat eine abklingende Amplitude. Die Schwingung kann durch folgende DGL beschrieben werden:

$$m\ddot{y} + \beta\dot{y} + cy = 0 \quad (7.2)$$

$$y(t) = A_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_\delta + \varphi) \quad (7.3)$$

$$\delta = \frac{\beta}{2m} \quad (7.4)$$

$$\omega_\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (7.5)$$

Es gibt drei Fälle:

- Kriechfall: $\delta < \omega_0$
Die Auslenkung nähert sich langsam an den Nullpunkt an.
- Aperiodischer Grenzfall: $\delta = \omega_0$
Die Auslenkung nähert sich schnell an den Nullpunkt an.
- Schwingfall: $\delta > \omega_0$
Die Auslenkung schwingt über den Nullpunkt hinaus.

Erzwungene Schwingung:

Das System wird von außen mit einem periodischen Signal angeregt. Es schwingt anschließend mit der aufgezungenen Frequenz. Die Dämpfung bestimmt hierbei das Verhältnis der Amplitude des Systems zur Amplitude der anregenden Schwingung. In der DGL wird die erzwingende Schwingung als Störfunktion hinzugefügt:

$$m\ddot{y} + \beta\dot{y} + cy = g(x) \quad (7.6)$$

Herleitung:

Die DGL kann aus dem Grundgesetz der Mechanik hergeleitet werden:
Ohne Dämpfung:

$$F = m \cdot a = -c \cdot x \quad (7.7)$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{c}{m}x = 0 \quad (7.8)$$

$$(7.9)$$

Mit Dämpfung:

$$F = -\beta \cdot \frac{dx}{dt} \quad (7.10)$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{c}{m}x = 0 \quad (7.11)$$

Resonanzerscheinung:

In einem bestimmten Frequenzbereich kann ein von außen angeregtes System mit einer höheren Amplitude schwingen, als die der anregenden Funktion. Dies ist eine Resonanzerscheinung.

Resonanzfrequenz:

Die Frequenz, bei der die Amplitude innerhalb der Resonanzerscheinung maximal wird.

Kennkreisfrequenz:

Die Kreisfrequenz, bei welcher ein einmal angeregtes ungedämpftes System schwingt.

Eigenkreisfrequenz:

Die Kreisfrequenz, bei welcher ein einmal angeregtes gedämpftes System schwingt.

Amplituden- und Phasengang:

Zeigen die Amplitude beziehungsweise Phase in Abhängigkeit der Frequenz.

Ortskurven:

Zeigen den Real- und Imaginärteil in Abhängigkeit der Frequenz.