3.2. Necesidad de aumentar el tamaño de las colecciones de objetos numéricos

La aparición en el Neolítico de sociedades estatales y del entramado administrativo que una sociedad de este tipo conlleva plantea la necesidad de:

- obtener el cardinal de colecciones formadas por muchos objetos (colecciones muy numerosas).
- recordar los cardinales correspondientes a muchas colecciones.

La contabilidad de un Estado exige la representación de números grandes y el almacenamiento de esos números de forma que sean fácilmente localizables. Pero eso supone:

- la invención de muchas palabras numéricas o la utilización de muchos objetos numéricos para representar grandes números.
- la búsqueda de sistemas de representación de los números que permitan al receptor del mensaje entenderlo con rapidez.
- la búsqueda de sistemas de representación de los números que permitan guardarlos en memoria de forma duradera, accesible y ocupando poco espacio.

Para resolver estas exigencias, las diferentes sociedades han creado sistemas de numeración compuestos por un pequeño número de signos que combinados adecuadamente según ciertas reglas sirven para efectuar todo tipo de recuentos y representar todos los números necesarios a esas sociedades. Para ello se han basado en dos principios:

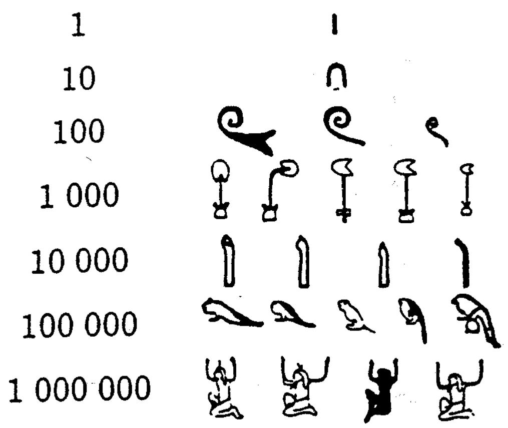
- los signos no representan sólo unidades sino también grupos de unidades. A cada uno de esos grupos de unidades se le llama unidad de orden superior. Al número de unidades que constituye cada unidad de orden superior se le llama base del sistema de numeración.
- cualquier número se representa mediante combinaciones de los signos definidos en el sistema de numeración.

3.3. Algunos ejemplos de sistemas de numeración escritos

Vamos a referirnos ahora a diversos sistemas de numeración escritos, todos ellos de base 10, pero que han sido construidos a partir de principios diferentes.

a) Sistema jeroglífico egipcio

Se basa en la definición de símbolos para la unidad, diez y las potencias de diez.

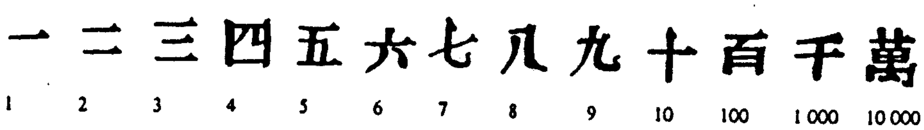


A partir de ahí los números se representan repitiendo esos símbolos todas las veces que haga falta. Por ejemplo, el número 243688 se representaría de la siguiente manera:

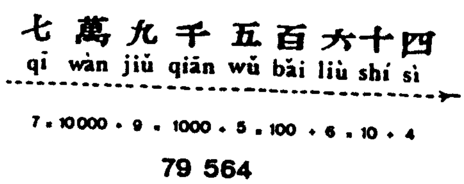
200 000 3000 800
40 000 600 8
243 688

b) Sistema chino

En el sistema chino no sólo se tienen símbolos para la unidad, diez y las potencias de diez sino para todos los números intermedios entre uno y diez



De esta manera se evitan repeticiones fastidiosas pues los números que preceden a las potencias de la base indican cuántas veces deben repetirse éstas. Por ejemplo, el número 79564 se escribiría:



aunque hay que tener en cuenta que los chinos escriben de arriba hacia abajo.

Este sistema incorpora un principio de tipo multiplicativo, es decir, el número representado ya no es la suma de los valores de los signos que lo componen, sino una mezcla de sumas y productos.

Ejercicios

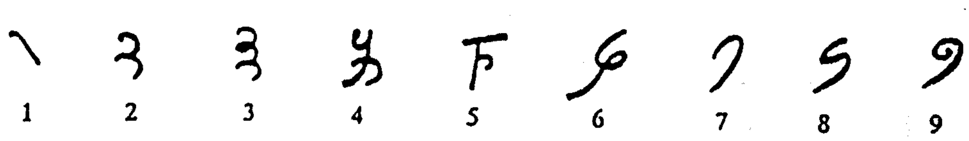
2. Escribe en el sistema egipcio, romano y chino el número 1386.

3 ¿Cuál es el menor número que se escribe con 25 símbolos en sistema egipcio?

4. Imagina que en un nuevo lenguaje, los primeros números son: Sis, boom, bah, tra, la, y después de contar un buen rato, la serie de números continúa: Hip, hoo, rah, fo, fum. Completa las operaciones siguientes:
  a. Hoo +bah=
  b. Fo-boom=
  c. Fum-hip=

c) Sistema hindú

En el norte de la India y desde el siglo III a. C., existió un sistema de numeración escrito cuyos primeros símbolos eran los siguientes:

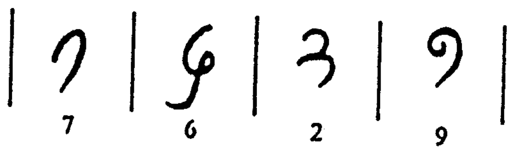


Pero además este sistema también tenía símbolos específicos para los números

10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	200	300	400	500	600	700	800	900
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
10000	20000	30000	40000	50000	60000	70000	80000	90000

y para escribir, por ejemplo, el número 5436 se escribía el símbolo que representaba al número “5000” seguido del que representaba al “400”, el del “30” y, por último, el del “6”. Se trataba por tanto de un sistema de tipo aditivo.

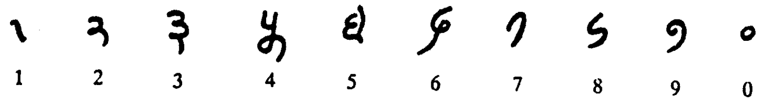
Por otro lado, para realizar las operaciones construían una tabla de calcular dibujando rayas verticales sobre la arena de manera que las fichas, según en qué casilla se situasen, significaban unidades, decenas, centenas, etc. Si colocaban tres fichas en la casilla más a la derecha significaba tres unidades. Si las colocaban en la casilla siguiente significaban tres decenas. Pero en algún momento se les ocurrió dibujar las nueve primeras cifras en las casillas en lugar de utilizar fichas. Así, por ejemplo, el número 7629 lo representaban de la siguiente manera:



Como consecuencia los símbolos que representaban los números del 1 al 9, se utilizaron regularmente en los cálculos mientras que los que representaban decenas, centenas, etc. no se utilizaban porque eso venía indicado por la casilla en que se encontraba la cifra (A los signos del 1 al 9 se les suele llamar cifras o dígitos). Aparece así una notación posicional en la que el significado de la cifra se complementa con la posición que ocupa. La cifra situada en la casilla de la derecha del número anterior significa 9 mientras que situada en la siguiente casilla significaría 90 y en la siguiente 900. Naturalmente, cuando faltaba una unidad de un orden determinado se dejaba la casilla correspondiente vacía.

Podría pensarse que el paso de este tipo de notación a una en que se eliminasen las barras verticales es inmediato. Sin embargo, este paso no se dio hasta varios siglos después pues exige definir un signo para el cero y esto es algo que muy pocas culturas han hecho. La razón es difícilmente inteligible para nosotros, acostumbrados desde niños a la existencia del signo 0, pero tenemos que comprender lo artificioso que resulta crear un símbolo para indicar el vacío, la nada, la no existencia de algo. Si algo no existe no hace falta apuntarlo. El vacío se indica mostrándolo, no rellenándolo con un signo. La idea de inventar un signo para indicar la no existencia de unidades o la existencia de un lugar vacío es una idea sorprendente y se les ocurrió, por fin, a los matemáticos hindúes a principios del siglo VI d. C., lo que les permitió prescindir de las barras verticales a la hora de representar los números. A partir de entonces un número, por ejemplo el 9100 se representó así:

Cuando los árabes conquistaron el norte de la India conocieron este sistema de numeración y al darse cuenta de lo mucho que facilitaba los cálculos lo adoptaron. Las cifras que vienen a continuación corresponden a la grafía habitual en el Califato de Bagdad.



Nuestro sistema de numeración escrito es, por tanto, una invención hindú que, posteriormente, fue asumida por los árabes, los cuales la difundieron por todo su imperio. Los contactos comerciales y culturales de Europa con el mundo árabe propiciaron la difusión de este sistema en la Europa occidental donde entró en competencia con el sistema de numeración romano. Lentamente fue ganando adeptos hasta que a finales del siglo XVIII quedo definitivamente implantado.

3.4. Tipos de sistemas de numeración

Los ejemplos anteriores nos muestran la existencia de diferentes tipos de sistema de numeración que ahora vamos a definir con más precisión.

a) Sistema aditivo regular

En este sistema se definen símbolos para la unidad, la base y las potencias de la base. El número representado se obtiene sumando los valores de los signos que componen su representación. El sistema egipcio es un ejemplo de sistema aditivo regular de base 10.

b) Sistema multiplicativo regular

En él se definen símbolos para la unidad, la base, las potencias de la base y todos los números comprendidos entre la unidad y la base. El número representado se obtiene multiplicando cada potencia de la base por el valor del símbolo que le precede y sumando los resultados junto con las unidades. Un ejemplo de este tipo de sistemas es el sistema chino de numeración que es un sistema multiplicativo regular de base 10.

c) Sistema posicional regular

En este sistema se definen símbolos para la unidad y los números comprendidos entre la unidad y la base. También se define un símbolo, el cero, para indicar la no existencia de unidades. En cambio, no se definen símbolos específicos para la base ni para las potencias de la base, representándose éstas por medio de combinaciones de los símbolos de la unidad y del cero. En estas condiciones, cada uno de los signos que componen la representación del número, dependiendo del lugar que ocupa, hace referencia a las unidades o a una determinada potencia de la base. El número representado se obtiene de la misma manera que en un sistema multiplicativo. Nuestro sistema de numeración escrito es un ejemplo de sistema posicional decimal.

Reglas de los sistemas de numeración posicionales

Las reglas de los sistema de numeración posicionales ordenados se pueden sintetizar de la siguiente manera:

1. Elegido un número b >1 como base del sistema de numeración, se utilizan b símbolos, llamados cifras o guarismos (0, 1, 2, …, b-1) que representan el cero y los primeros números naturales.
2. Cada b unidades simples (o de 1er orden) forman una unidad de 2º orden, y se escribe a la izquierda de las unidades de 1er orden. (Principio del valor relativo de las cifras)
3. Se continúa el proceso como en 2)
4. Cuando no hay unidades de un orden (carencia de unidades) se expresa mediante un 0 en la posición correspondiente.
5. La base b se representa por $10_{(b}$ (es la unidad de 2º orden); la unidad de tercer orden, b^2 se expresará como $100_{(b}$.

Teorema fundamental: Existencia y unicidad de la expresión de un número n en base cualquiera b

Dado un número natural b (que se llama base del sistema de numeración), todo número natural n Î N se puede expresar de manera única mediante el siguiente polinomio:

$$n= c_k b^k + r_k b^{k-1} + r_{k-1} b^{k-2} + ... + r_3 b^2 + r_2 b + r_1$$

donde r_1, r_2, ..., r_k, c_k, son números naturales menores que b.

3.5. Cambios de base en los sistemas de numeración

Para comprender las reglas de los sistemas de numeración posicionales ordenados, entre los que se encuentra el sistema decimal de numeración habitualmente usado, es conveniente realizar y analizar las tareas de paso del sistema de numeración base 10 a otras bases distintas, tanto menores que 10, como mayores, y viceversa.

Paso de la escritura en base 10 de un número n a la base b

En primer lugar habrá que determinar la cifra de las unidades (o de primer orden), para lo cual habrá que dividir *n* entre *b*; el resto será la cifra de la unidades de la nueva expresión. Para hallar la cifra a colocar en la posición de segundo orden se divide el primer cociente obtenido por *b* y se toma el resto; y así sucesivamente.

Ejemplo: El número $235_{(10}$, expresado en base 5 será $1420_{(5}$

$$\begin{array}{llllll}
235 & \multicolumn{1}{|l}{5} & & & & \\ \cline{2-2}
35 & 47 & \multicolumn{1}{|l}{5} & & & \\ \cline{3-3}
0 & 2 & 9 & \multicolumn{1}{|l}{5} & & \\ \cline{4-4}
 & & 4 & 1 & &
\end{array}$$

Paso de la escritura de un número n en base b a base 10

Basta expresar la escritura de *n* en forma polinómica (en forma de potencias de la base *b*) y realizar las operaciones indicadas en base 10; el resultado será la escritura en de *n* en base 10.

Ejemplo: El número $2034_{(5}$ será el $269_{(10}$ ya que,
$2034_{(5} = 2.5^3 + 0.5^2 + 3.5 + 4 = 269$ (haciendo las operaciones en base 10)

El paso de la escritura de un número de base b_1 a base b_2 se puede realizar pasando el número dado en base b_1 a base 10 y después dicho número en base 10 a base b_2 por el método explicado anteriormente.

Ejercicios

5. Efectúa los cambios de base siguientes: 3415 (de base 10 a base 3); 999 (de base 10 a base 7); 25842 (de base 10 a base 12); 1001110 (de base 2 a base 10); ABC6 (de base 13 a base 10); 33421 (de base 5 a base 3); 34250 (de base 6 a base 4) y 102102 (debase 3 a base 7).

6. Escribe las cifras del número siguiente en base 3:
$1 + 3 + 3^2 + 3^4 + 3^6$
Expresa el número anterior en base 9

7. Escribe en base 5 las cifras del siguiente número
5 x (5 x (5 x (5 + 4) + 3) + 2) + 1 ; x significa el signo de multiplicar.

8. En base 16 (hexadecimal) los dígitos usados son 0 hasta 9 y las letras A, B, C, D, E, F para los números del diez hasta el quince.
a) Convierte $B6_{(16}$ a base 10;
b) Convierte $B6_{(16}$ a base 2;
c) Explica cómo se puede pasar $B6_{(16}$ a base 2 directamente, esto es, sin pasarlo primero a base 10.

3.6. Características de nuestros actuales sistemas de numeración escrito y oral

a) Sistema de numeración escrito

Como ya hemos dicho antes es un sistema posicional regular de base 10. Los símbolos que se definen son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

b) Sistema de numeración oral

Es un sistema multiplicativo y de base 10 pero con irregularidades. Es un sistema multiplicativo porque define símbolos no sólo para los números anteriores a la base sino también para la base y sus potencias. El número 3400 no lo leemos como "tres cuatro cero cero" sino como "tres mil cuatrocientos", es decir, hacemos referencia a las potencias de la base "mil" y "cien" o "ciento".

Las irregularidades dependen del idioma y en castellano son las siguientes:

- Once, doce, trece, catorce y quince. En un sistema regular se diría: dieciuno, diecidos, diecitrés, diecicuatro y diecicinco.
- Veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa. En un sistema regular se diría: dos dieces (o dos decenas), tres dieses, cuatro dieses, etc.
- Quinientos en lugar de cinco cientos
- Algunas de las potencias de diez no tienen un símbolo específico, sino un símbolo compuesto por los correspondientes a otras potencias. Así, por ejemplo, la potencia 10^4 no tiene un símbolo propio como le correspondería en un sistema regular, sino un símbolo compuesto: diez mil. Lo mismo sucede con otras potencias de la base (10^5 se dice cien mil, 10^7 se dice diez millones, 10^8 se dice cien millones, etc.), lo que hace que las potencias mil (10^3) y millón (10^6) se conviertan en bases auxiliares.
- La palabra 'billón' tiene un significado ambiguo. En España y otros países de origen latino quiere decir 'un millón de millones' (10^{12}), mientras que en los países de tradición anglosajona la palabra equivalente significa 'mil millones' (10^9).

c) Sistema de numeración oral ordinal

Se usa para nombrar a los ordinales, aun cuando también puede usarse para ello el sistema oral habitual. Es un sistema de numeración de base 10 en el que se definen símbolos para la unidad y los demás números anteriores a la base, para la base y sus potencias, y también para los nueve primeros múltiplos de la base y del cuadrado de la base. Un número viene dado por la suma de los valores de los signos que lo representan; es por tanto un sistema de tipo aditivo, pero con una sobreabundancia de términos. En muchas de las palabras que nombran a los diferentes múltiplos de la base o de la base al cuadrado se hace patente un criterio de tipo multiplicativo. Por ejemplo, el término 'octingentésimo' se relaciona con los términos 'ocho' y 'centésimo'.

Los símbolos de este sistema de numeración son los siguientes: primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno, décimo, undécimo (o décimo primero), duodécimo (o décimo segundo), vigésimo (20), trigésimo (30), cuadragésimo (40), quincuagésimo (50), sexagésimo (60), septuagésimo (70), octogésimo (80), nonagésimo (90), centésimo (100), ducentésimo (200), tricentésimo (300), cuadringentésimo (400), quingentésimo (500), sexcentésimo (600), septingentésimo (700), octingentésimo (800), noningentésimo (900), milésimo (1000), millonésimo (1.000.000). Según esto el ordinal 783 se diría septingentésimo octogésimo tercero. Hoy en día, bastantes de estos términos han caído en desuso.

Ejercicios

9.Utiliza nuestro sistema de numeración oral para expresar el número:
754.120.004.002000.000.000

10. Utiliza nuestro sistema posicional de numeración escrita para representar el número siete trillones, setenta mil siete billones, siete millones, setenta y siete. 2.

11. Expresa mediante nuestro sistema oral ordinal los números 11, 14, 27, 53, 99, 135, 366, 584 y 1336.

12. ¿Cuántos números capicúas hay comprendidos entre 1 y 1000?

A continuación vamos a describir otros sistemas de numeración, lo que nos permitirá ver cómo diferentes culturas han resuelto el problema de representar los números.

3.7. Sistemas de numeración orales: ejemplos

En la lengua *Api de las Nuevas Hebridas* representan los 24 primeros números partiendo de 5 palabras: tai, lua, tolu, vari, luna (que significa literalmente "la mano") que equivalen a nuestras palabras: uno, dos, tres, cuatro y cinco. A partir de ahí los números siguientes los nombran combinando esas palabras: para 6 se dice: otai (literalmente 'el nuevo uno')

- para 7 se dice: olua (literalmente 'el nuevo dos')
- para 8 se dice: otolu (literalmente 'el nuevo tres')
- para 9 se dice: ovari (literalmente 'el nuevo cuatro')
- para 10 se dice: lualuna (literalmente 'las dos manos')
- para 11 se dice: lualuna i tai (literalmente 'dos manos y uno') para 15 se dice: toluluna (literalmente 'tres manos')
- para 16 se dice: toluluna i tai (literalmente 'tres manos y uno') para 20 se dice: variluna (literalmente 'cuatro manos')
- para 24 se dice: variluna i vari (literalmente 'cuatro manos y cuatro')

Se trata de un sistema de base cinco, pues los números se expresan indicando los grupos de cinco que los componen y el resto que queda.

En *euskera* las palabras que se utilizan para nombrar los diez primeros números son las siguientes: bat (uno), bi (dos), hiru (tres), lau (cuatro), bost (cinco), sei (seis), zazpi (siete), zortzi (ocho), bederatzi (nueve), hamar (diez). A partir de ahí, construyen las palabras numéricas como sigue:

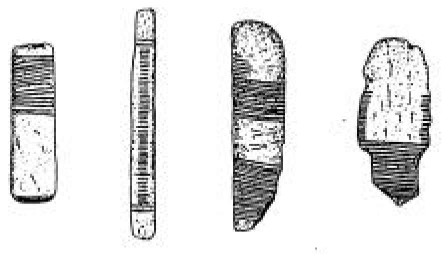
- once se dice: hamaika
- doce se dice: hamabi (literalmente 'diez y dos')
- trece se dice: hamahiru (literalmente 'diez y tres')
- catorce se dice: hamalau (literalmente 'diez y cuatro')
- quince se dice: hamabost (literalmente 'diez y cinco')
- dieciséis se dice: hamasei
- diecisiete se dice: hamazazpi
- dieciocho se dice: hemezortzi (no sigue la regla, pero actualmente se admite también 'hamazortzi ')
- diecinueve se dice: hemeretzi (no sigue la regla)
- veinte se dice: hogei
- treinta se dice: hogeitamar (literalmente 'veinte y diez')
- cuarenta se dice: berrogei (no sigue la regla)
- cincuenta se dice: berrogeitamar (literalmente 'cuarenta y diez')
- sesenta se dice: hirurogei (literalmente 'tres veintes')
- setenta se dice: hirurogeitamar (literalmente 'tres veintes y diez')

- ochenta se dice: larogei (literalmente 'cuatro veintes'')
- noventa se dice: larogeitamar (literalmente 'cuatro veintes y diez')
- cien se dice: ehun.

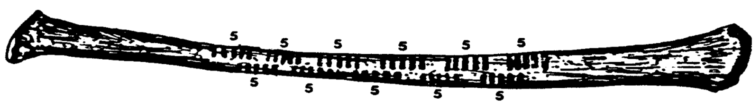
Se trata de un sistema de base 20 con una base auxiliar 10. En el sistema de numeración oral francés también se conservan vestigios de una base 20. Se dice, por ejemplo: 'quatre-vingts' (cuatro veintes) para indicar 'ochenta' y 'quatre-vingts-dix' (cuatro veintes diez) para indicar 'noventa' .

3.8. Sistemas de numeración basados en colecciones de objetos: ejemplos

a) Muescas: La utilización de muescas para llevar una cuenta está documentada desde la Prehistoria.



Entre los huesos prehistóricos con muescas existen algunos (como el reflejado en el dibujo siguiente) en los que las muescas han sido representadas en grupos de cinco. Es uno de los primeros ejemplos de agrupación para facilitar la lectura del número.

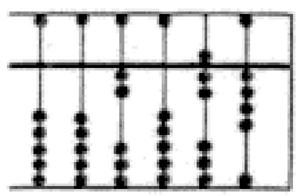


b) Objetos ensartados en hilos: collares

En algunas regiones de África occidental los pastores contaban sus rebaños haciendo desfilar a los animales uno detrás de otro. Cuando pasaba el primero ensartaban una concha en una tira blanca, otra cuando pasaba el segundo y así sucesivamente. Al llegar al décimo animal deshacían el collar y ensartaban una concha en una tira azul que asociaban a las decenas. Después ensartaban de nuevo conchas en la tira blanca hasta llegar al vigésimo animal y entonces ensartaban una segunda concha en la tira azul. Cuando había ya diez conchas en la tira azul deshacían el collar de las decenas y ensartaban una concha en una tira roja reservada para las centenas. Y así sucesivamente hasta que se acababa el recuento de los animales. Al llegar a los doscientos cincuenta y ocho animales, por ejemplo, habría dos conchas en la tira roja, cinco en la azul y ocho en la blanca. La base de este sistema es la decena.

c) Objetos ensartados en varillas: ábacos

El ejemplo que proponemos es el de un ábaco que se ha utilizado para contar y calcular incluso después de la segunda guerra mundial (ábaco japonés).



La varilla situada a la derecha indica centésimas, la segunda varilla décimas, la tercera unidades, la cuarta decenas, la quinta centenas, etc. En la varilla de las unidades cada una de las cuatro bolas de la parte de abajo indica una unidad, pero la bola situada en la parte de arriba indica cinco unidades. De esa manera el número siete se representará moviendo la bola superior y dos bolas inferiores hacia el eje central. En la varilla de las decenas la bola superior indica cincuenta y cada una de las bolas inferiores diez y así sucesivamente. Se trata pues de un sistema de base diez con una base auxiliar cinco.

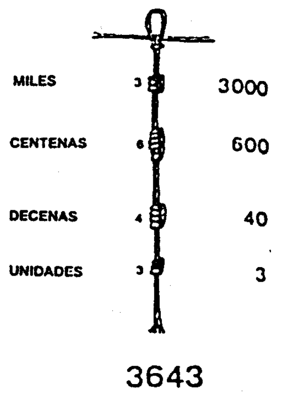
Ejercicios

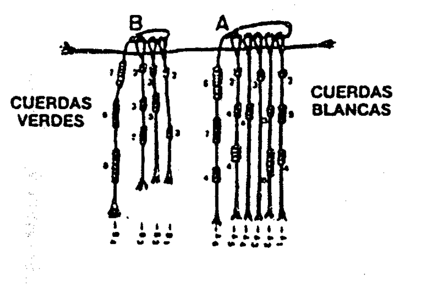
13. Expresa los números 457 y 17089 mediante:
- un ábaco japonés
- el sistema de numeración romano
- sistema de numeración egipcio
- sistema de numeración chino

14. Supongamos que cuentas usando manos y dedos. ¿Cómo representarías el número 12?

d) Nudos

Los incas representaban números y contaban haciendo nudos en una cuerda. Según la posición en que estaban situados los nudos indicaban unidades, decenas, centenas, millares, etc. A estas cuerdas se les llamaba quipus.





El dibujo de la derecha representa una contabilidad de ganado bovino (cuerdas blancas y ganado ovino (cuerdas verdes). Las cuerdas blancas de derecha a izquierda representan el número de toros, vacas lecheras y vacas estériles. Las cuerdas verdes indican número de borregos, corderos, cabras, etc. Las cuerdas que enlazan a las otras indican las sumas de las cantidades representadas en las cuerdas enlazadas.

e) Objetos sueltos: valor definido por la posición

Existen sistemas de numeración basados en guijarros o fichas en los que el valor numérico de los objetos viene dado por la posición que ocupan en un tablero distribuido en casillas. Así, según que el guijarro o ficha esté situado en una u otra casilla significará una unidad, una decena, una centena, etc. Estas tablas de fichas se utilizaron en Europa para efectuar cálculos hasta el siglo XVIII.

f) Objetos sueltos: valor definido por alguna característica del objeto

Los sumerios utilizaban pequeños objetos de arcilla para contar y representar los números. El valor numérico de cada objeto venía dado por su forma de la siguiente manera:
1 = cono pequeño; 10 = bola pequeña; 60 = cono grande; 600 = cono grande perforado; 3600 = bola grande; 36000 bola grande perforada.

Se trataba de un sistema de numeración de base 60 ($3600 = 60^2$) con una base auxiliar 10 ($600 = 10 \times 60$, $36000 = 10 \times 60^2$).

Para garantizar el pago de una deuda, por ejemplo, el conjunto de objetos que representaba el valor numérico de la deuda se encerraba en una esfera hueca sobre la que se imprimían los sellos del acreedor, el deudor y el notario. Este último guardaba la esfera y, posteriormente, en el momento de saldar la deuda, la abría y las partes implicadas se aseguraban de que el pago estaba conforme.

3.9. Sistemas de numeración basados en partes del cuerpo humano: el origen de algunas bases

Se cree que la mayor parte de los sistemas de numeración tienen su origen en otros más primitivos basados en la utilización de distintas partes del cuerpo humano como objetos numéricos. Las bases más utilizadas: 5, 10, 12, 20, 60 pueden explicarse como un intento de aumentar la capacidad contable de los dedos.

a) Base cinco

Si utilizamos los dedos de la mano derecha para contar unidades hasta cinco y por cada cinco unidades levantamos un dedo de la mano izquierda estaremos en un sistema de numeración de base cinco. Cada cinco unidades dan lugar a una unidad de orden superior, los dedos de la mano izquierda, y toda la mano izquierda representará una unidad de segundo orden compuesta de 25 unidades.

b) Base diez

Aparece al utilizar los dedos de las dos manos para contar unidades. Un hombre representaría una unidad de orden superior, la decena.

c) Base veinte

Aparece al utilizar los dedos de las dos manos y de los dos pies para contar unidades. Un hombre representaría la unidad de orden superior que en este caso sería una veintena.

d) Base doce

Se explica si se utiliza el dedo pulgar de la mano derecha para contar las falanges de los otros dedos de la misma mano. Tenemos así doce falanges en la mano derecha. Si además por cada doce unidades señalamos una falange de la mano izquierda tendremos una unidad de primer orden, la docena, y las dos manos representaran una unidad de segundo orden ($144 = 12^2$).

e) Base sesenta

Aparece como una combinación de cinco y doce si contamos falanges con la mano derecha y por cada docena levantamos un dedo de la mano izquierda. Las dos manos representan entonces una “sesentena”.

Ejercicios

15. El uso de la base 10 en el sistema de numeración indoarábigo se puede suponer que se debe a que tenemos 10 dedos entre ambas manos. Supongamos que entre los marcianos ocurrió lo mismo, esto es, usaron un sistema de numeración basado en el número de dedos de sus manos. ¿Cuántos dedos tenían los marcianos en sus manos si sabemos que en dicho planeta el número diecisiete se escribía 21?.

16. Construye un sistema aditivo de base 12 y utilízalo para expresar los números 1245674, 23478 y 100.

17. Construye un sistema aditivo de base 20 y utilízalo para representar los números del ejercicio anterior.

18. En la siguiente tabla escribimos los números del 0 al 35 en base 6. Describe todos los patrones numéricos que puedes encontrar:

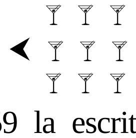
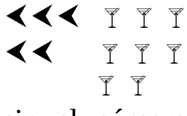
0	1	2	3	4	5
10	11	12	14	14	15
20	21	22	24	24	25
30	31	32	33	34	35
40	41	42	43	44	45
50	51	52	53	54	55

3.10. Otros ejemplos históricos de sistemas de numeración escritos

La necesidad de almacenar información numérica propia de las sociedades estatales propicia la aparición de los sistemas escritos de numeración. Estos números escritos se conservan bien, ocupan poco lugar y su almacenamiento se organiza con facilidad; tienen, por tanto, ventajas frente a las representaciones numéricas orales o mediante objetos. A continuación vamos a ver algún ejemplo más :

a) Los sumerios empezaron a desarrollar una contabilidad escrita a partir del 3200 a.C. consistente en dibujar en tablillas de arcilla las figuritas de barro que utilizaban para indicar los números. En la figura de una "factura" sumeria descubierta en Uruk (hacia el 2850 antes de J.C.) se observa el dibujo de las esferas y conos de barro que se utilizaban para representar los números. Aparecen también unos dibujos que representan sacos, dibujos de espigas que indican distintos tipos de cereal y unos dibujos de patos que representan aves en general.

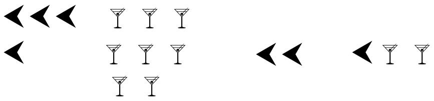
b) Los matemáticos y astrónomos de Babilonia fueron los primeros en construir un sistema de numeración escrito en el que se utilizaba en parte un criterio posicional. Para escribir los números utilizaban sólo dos signos: un 'clavo' vertical 𒁹 que indicaba la unidad y una 'espiga' 𒌋 que indicaba la decena. Los números de 1 a 59 se representaban de manera aditiva repitiendo esos signos las veces que hiciera falta. Así, por ejemplo, 19 y 58 se escribían:

 (1 espiga + 9 clavos)  (5 espigas + 8 clavos)

Pero a partir de 59 la escritura era posicional, es decir, el número 69, por ejemplo, no se escribía

60 9 1 ; 9

Así pues, una escritura como:



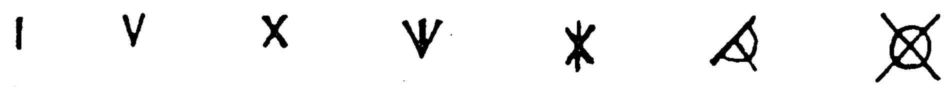
4 8 20 12

correspondía al número 48 x 60^2 + 20 x 60 + 12 = 174.012. Nos encontramos ante un sistema posicional de base 60 donde los signos que indican cuántas unidades o diferentes potencias de la base tiene el número constituyen un sistema aditivo de base 10. Este sistema tenía muchos inconvenientes porque la falta de un cero y la mezcla de sistema posicional con aditivo creaba muchas ambigüedades en la escritura de los números. Por ejemplo, ‘clavo’ nunca se sabía bien si indicaba una unidad, 60 unidades o cualquier otra potencia de la base; dos 'clavos' tanto podían representar dos unidades como el número 61, etc.

La astronomía Babilonia nos ha transmitido su manera de representar los números en algunos ámbitos muy relacionados con la astronomía, como la medida del tiempo en horas, minutos y segundos y la de la amplitud de ángulos en grados, minutos y segundos. Cuando decimos que un intervalo de tiempo es de 3h 23m 55s estamos utilizando un sistema de numeración posicional de base 60 (sexagesimal) ya que cada hora equivale a 60 minutos y cada minuto a 60 segundos. La diferencia con el sistema babilonio consiste en que no representamos las horas, minutos y segundos utilizando un sistema aditivo de base 10, sino utilizando nuestro sistema posicional de base 10.

c) En Italia, antes del Imperio Romano existían pueblos de pastores que habían desarrollado una cultura de muescas. Por cada cabeza de ganado que contaban grababan una muesca en un palo o hueso. Para facilitar la lectura de las muescas empezaron a agruparlas de cinco en cinco haciendo marcas separadoras que sintetizasen la información numérica contenida en las muesca.

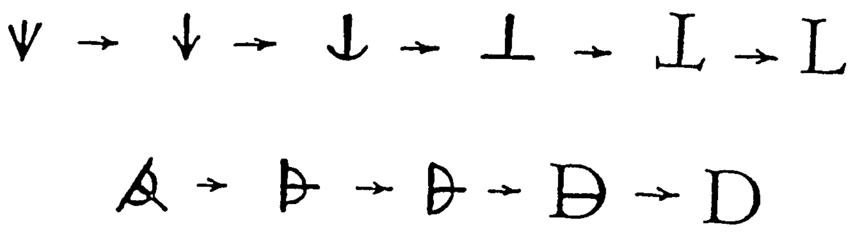
Al llegar a la quinta muesca grababan un trazo oblícuo y en la décima dos trazos oblícuos cruzados. Volvían a grabar el trazo oblícuo en la muesca número 15 y el aspa en la número 20. Para facilitar la lectura de números más grandes inventaron signos específicos para 50, 100, 500 y 1000.



1 5 10 50 100 500 1 000

El siguiente avance se produce cuando esos pastores se dan cuenta de que no es necesario grabar todas las muescas puesto que algunas de ellas ya recogen toda la información anterior. Es decir, cuando descubren que para expresar el número IIIIV IIIIV IIIIX IIIV II es suficiente con escribir XXVII

Los romanos heredaron estas marcas y acabaron por identificarlas con algunas letras.



500

Así, el trazo oblicuo se identificó con la letra V, el aspa con la X, la marca para 50 se transformó en una L, la de 100 en una C, y la de 500 y 1000 en una D y una M, respectivamente. Además añadieron una última modificación al sistema consistente en introducir un principio sustractivo para acortar la escritura de ciertos números. De acuerdo con este principio escribían IV en vez de IIII, IX en vez de VIIII, XL en ve de XXXX, etc. Estamos pues ante un sistema de tipo aditivo, aunque con irregularidades, de base 10 y con una base auxiliar 5. Este sistema todavía lo usamos nosotros para indicar ordinales y fechas.

Actualmente para escribir en números romanos seguimos las siguientes reglas de escritura:

i) Los símbolos *I* (uno), *X* (diez) , *C* (cien) y *M* (mil) son los 'principales' y los símbolos *V* (cinco), *L* (cincuenta) y *D* (quinientos) los 'secundarios'.
ii) Los símbolos principales no se pueden repetir más de tres veces y los secundarios no pueden repetirse ninguna vez.
iii) Todo símbolo situado a la derecha de uno de igual o mayor valor se suma. Si un símbolo principal está situado a la izquierda de un símbolo de mayor valor se resta.
iv) A la izquierda de un símbolo solo se puede poner como símbolo de menor valor el símbolo principal inmediatamente anterior.
v) Los millares, diezmillares, cienmillares, etc. de los números mayores o iguales que 4.000 se escriben como si fueran unidades, decenas, centenas, etc., colocándoles una raya horizontal por encima. Por ejemplo, 583.459 se escribe, $\overline{DLXXXIII}\ CDLIX$.

4. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. En los siguientes ejercicios, escribe todas las posibilidades utilizando un código de escritura adecuado y cuenta después cuántas son. Si salen muchos casos posibles encuentra algún procedimiento que permita hallar el número total sin tener que contar y describe cómo podrían escribirse todos los casos.

a) Distribuye, de todas las maneras posible, 15 monedas de peseta en cuatro montones.

b) Ana, Marisa, Luis y Pedro quedan en una cafetería. Llegan de uno en uno. Escribe las posibilidades de orden de llegada de esas cuatro personas.

c) Escribe todos los números de tres cifras que se pueden formar con los dígitos 3, 4, 7, y 9. ¿Cuántos son mayores de 700?

2. Averigua cuántos cuadrados se pueden trazar sobre la trama siguiente con la condición de que los vértices de cada cuadrado sean puntos de la trama:

```
*   *   *   *   *
*   *   *   *   *
*   *   *   *   *
*   *   *   *   *
```