线性代数预习检测

TechX

June 2022

1 检测

1.1 向量点乘

给定向量 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，求 $v \cdot u$。

1.2 范数

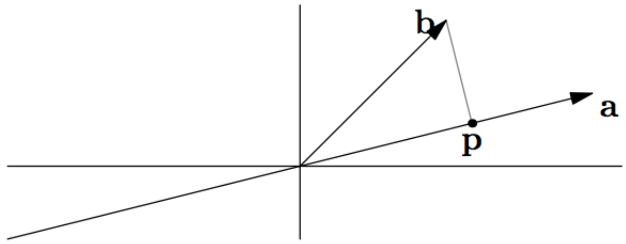
给定向量 v，在欧氏空间下，定义其范数（norm）为它与自身的点乘开根号，记为 $\|v\| := \sqrt{v \cdot v}$。给定向量 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，求 $\|v\|$ 和 $\|u\|$。

1.3 矩阵运算

给定 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，计算 $A + B$，AB，A^T，B^{-1}。

1.4 线性方程组

将线性方程组 $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = -4 \\ 7x_1 + 4x_2 = 8 \end{cases}$ 写成用矩阵表示并求解。



1.5 投影矩阵（选做）

如图，将向量 b 投影到向量 a 上得到 p。由于 p 在 a 上，存在标量 x 使得 $p = xa$。定义 $e := b - p$（从 p 指向 b 的向量），我们有 $a \perp e$，即 $a^T(b - xa) = 0$。展开得 $xa^Ta = a^Tb$（由于 x 是标量，可以写在向量前）。解出 $x = \frac{a^Tb}{a^Ta}$，得到 $p = ax = a\frac{a^Tb}{a^Ta} = Pb$，其中 $P = \frac{aa^T}{a^Ta}$，表示 a 上的投影矩阵（Projection matrix）。

注：一般我们将向量乘法（在这里为预习材料所说的点乘）写作 a^Tb，而不用点乘符号。互相垂直的向量点乘为 0

详细讲解可见视频 投影矩阵与最小二乘法。

投影也是线性变换的一种，关于线性变换可参考视频矩阵与线性变换。

给定向量 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，求 v 在 u 上的投影 p，和投影矩阵 P。

1.6 补充材料

更多有关线性代数基础知识的介绍与练习可见互动课本 *Linear Algebra with Applications by Xinli Wang*。

2 答案

2.1 向量点乘

$v \cdot u = 1 \times (-1) + 2 \times 0 + 3 \times 1 = 2.$

2.2 向量的范数

$\|v\| = \sqrt{14},\ \|u\| = \sqrt{2}.$

2.3 矩阵运算

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix},\ AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix},\ A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2.4 线性方程组

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 8 \\ 68 \end{bmatrix}.$$

2.5 投影矩阵（选做）

投影矩阵 $P = \frac{uu^T}{u^T u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

投影 $p = Pv = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$