微积分预习检测

TechX

June 2022

1　检测

1. **微分**

   1.1 给定函数 $f(x) = e^{2x} + \sin(x^2)$，求 f 的二阶导数表达式。

   1.2 给定函数 $f(x) = \ln \frac{1}{x^2} + x^3$，求 f 的二阶导数表达式。

2. **偏微分**

   给定多元函数 $f(x_1, x_2) = 2e^{2x_1} + 3x_1x_2 + \sin(x_2^2)$，求 f 分别对于变量 x_1，x_2 的偏导数。

3. **梯度**

   给定多元函数 $f(x_1, x_2) = 2e^{2x_1} + 3x_1x_2 - \ln(x_2)$，求梯度。

4. **积分（选做）**

   阅读材料并完成该网页后附的十道练习题 Introduction to Integration。

5. **补充材料**

   更多有关微积分基础知识的介绍与练习可见该网页 Calculus。

2 答案

1. **微分**

1.1 令函数 f 定义为 $f(x) = e^{2x} + \sin(x^2)$。求 f 的二阶导数表达式。

解： 首先我们需要求出 f 的一阶导数 f'，请注意链式法则的使用：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = f'(x) &= \big(e^{2x}\big)' + \big(\sin(x^2)\big)' \\ &= e^{2x}\cdot(2x)' + \cos(x^2)\cdot\big(x^2\big)' \\ &= 2e^{2x} + 2x\cos(x^2)\end{aligned}$$

接着，我们再根据 f' 求出二阶导数 f''，注意此时不仅需要用到链式法则，还需要用到乘法法则：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x) = f''(x) &= \big(2e^{2x}\big)' + \big(2x\cos(x^2)\big)' \\ &= 2\big(e^{2x}\big)' + (2x)'\cdot\cos(x^2) + (2x)\cdot\big(\cos(x^2)\big)' \\ &= 4e^{2x} + 2\cos(x^2) + 2x\cdot\big(-\sin(x^2)\big)\cdot\big(x^2\big)' \\ &= \boxed{4e^{2x} + 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)}\end{aligned}$$

1.2 给定函数 $f(x) = \ln\frac{1}{x^2} + x^3$，求 f 的二阶导数表达式。

解：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = f'(x) &= \big(\ln\frac{1}{x^2}\big)' + \big(x^3\big)' \\ &= \frac{-2}{x} + 3x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x) = f''(x) &= \big(\frac{-2}{x}\big)' + \big(3x^2\big)' \\ &= \boxed{\frac{2}{x^2} + 6x}\end{aligned}$$

2. **偏微分**

令多元函数 f 定义为 $f(x_1, x_2) = 2e^{2x_1} + 3x_1x_2 + \sin(x_2^2)$。求 f 分别对于变量 x_1，x_2 的偏导数。

解： 此题与第一题难度相差不大，只是要记住在求对于 x_1 的偏导数时，x_2 这个变量即可看作一个常量。例如，在求 $3x_1x_2$ 对于 x_1 的偏导数时，我们将 x_2 视作常量，从而得出偏导数为 $3x_2$。因此，

$$\frac{\partial}{\partial x_1}f(x_1, x_2) = 4e^{2x_1} + 3x_2 + 0 = \boxed{4e^{2x_1} + 3x_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}f(x_1, x_2) = 0 + 3x_1 + 2x_2\cos x^2 = \boxed{3x_1 + 2x_2\cos x^2}$$

3. 令多元函数 f 定义为 $f(x_1, x_2) = 2e^{2x_1} + 3x_1x_2 - \ln(x_2)$

解： 这道题本质和第二题是一样的，只是需要我们知道“梯度”这个概念其实就是若干个不同的偏导数放在一起。题中的函数是二元函数，所以我们需要求两个偏导数，分别是对于 x_1 和 x_2 的偏导数。过程如下：

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4e^{2x_1} + 3x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_1 - \frac{1}{x_2}$$

因此得到 f 的梯度为

$$\nabla f \equiv f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \boxed{\left(4e^{2x_1} + 3x_2,\ 3x_1 - \frac{1}{x_2}\right)}$$