灰色模型时间序列预测

灰度模型可以在数据量很少的情况下对时间序列进行建模一般4-5个数据点就可以了。

数据的生成

1.累加生产（AGO）

设原始序列为$x^{(0)}=（x^0(1),x^0(2),x^0(3),...x^0(n)）$,令

$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^0(i),k=1,2,3...n.$$

生产数列$x^{(1)}=（x^1(1),x^1(2),x^1(3),...x^1(n)$生成数列为$x^{(0)}$的一次累加同理也可以定义$x^{(0)}$的r次累加

$$x^{(r)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(r-1)}(i),k=1,2,3...n.$$

2.累减生成（IAGO）

若原始序列为$x^{(1)}=(x^1(1),x^1(2),x^1(3)...x^1(n))$,令$x^0(k)=x^1(k)-x^1(k-1)$,则称所得数列$x^{(0)}$为$x^{(1)}$的累减生成数列，通过累减数列可以还原出累加数列的原始数列

3.加权临值生成

若原始序列为$x^{(0)}=（x^0(1),x^0(2),x^0(3),...x^0(n)）$,任意一相邻元素$x^0(k)$,$x^0(k-1)$互为临值，对于常数$\alpha\in[0,1]$,有$z(0)=\alpha x^{(0)}(k)+(1-\alpha)x^{(0)}(k-1),k=2,3,4...n$,$\alpha$称为生成系数

灰色模型GM(1,1)

我们定义$x^{(1)}$的灰导数为$d(k)=x^0(k)=x^1(k)-x^1(k-1)$

定义$z^{(1)}(k)$为数列$x^{(1)}(k)$的邻值生成数列$z^{(1)}(k)=\alpha x^{(1)}(k)+(1-\alpha)x^{(1)}(k-1),k=2,3,4...n$

我们定义GM(1,1)灰微分方程模型为$d(k)+\alpha z^{(1)}(k)=b$或$x^0(k)+\alpha z^{(1)}(k)=b$其中$x^0(k)$称为灰导数，$\alpha$称为发展系数，$z^{(1)}(k)$称为白化背景值，$b$称为灰作用量。

将时刻k = 2,3,4,...n。带入模型公式

$$\begin{cases}x^0(2)+\alpha z^{(1)}(2)=b\\ x^0(3)+\alpha z^{(3)}(k)=b\\ ...\\ x^0(n)+\alpha z^{(n)}(k)=b\end{cases}$$

令$u=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$,$Y=\begin{bmatrix} x^0(2) \\ x^0(3) \\ \dots \\ x^0(n) \end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix} -z^0(2) & 1 \\ -z^0(3) & 1 \\ \dots \\ -z^0(n) & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(x^{(1)}(1)+x^{(1)}(2)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(2)+x^{(1)}(3)) & 1 \\ \dots \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(n-1)+x^{(1)}(n)) & 1 \end{bmatrix}$,于是GM(1,1)模型可以表示为$Y=Bu$

利用最小二乘法求得$\hat{u}=\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}=\left(B^TB\right)^{-1}B^TY$

GM(1,1)白化模型

对于GM（1,1）的灰微分方程，如果将时刻k=2,3,...,n视为连续变量t，则之前的$x^{(1)}$视为时间t函数，于是灰导数$x^{(0)}(k)$变为连续函数的导数$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}$,白化背景值$z^{(1)}(k)$对应于导数$x^{(1)}(t)$。于是GM（1,1）的灰微分方程对应于的白微分方程为:

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}+\alpha x^{(1)}(t)=b$$

预测条件&前期处理

- 原始数据应均为非负值，若存在负值应该做适当的平移变换
- 设原始数列为$x^{(0)}=(x^0(1),x^0(2),x^0(3),\dots x^0(n))$，定义数列的级比

  $$\lambda(k)=\frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)},\qquad k=2,3,4\dots n$$

  如果所有的级比都落在可容覆盖区间$X=(e^{\frac{-2}{n+1}},e^{\frac{2}{n+1}})$内则数列$x^{(0)}$可以进行灰度预测，否则应该对数列进行适当的变换处理如

  $$y^{(0)}(k)=x^{(0)}(k)+c$$

模型建求解

若$x^{(0)}$满足上诉条件，建立GM(1,1)模型$x^0(k)+\alpha z^{(1)}(k)=b$并求得$\alpha,b$求出其离散解为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=(x^{(0)}(1)-\frac{b}{\alpha})e^{-\alpha b}+\frac{b}{\alpha}\quad k=2,3,4\cdots n.$$

从而得到相应的预测值$\hat{x}^{(0)}=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k),\quad k=1,2,3\cdots n$

预测效果检验

1. **残差检验**

$$\varepsilon(k)=\frac{x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)}$$

若$|\varepsilon(k)|<0.1$则达到较高要求,$|\varepsilon(k)|<0.2$合格

2. **级比偏差值检验**

$$\rho(k)=1-\frac{1-0.5\alpha}{1+0.5\alpha}\lambda(k)$$

若$|\rho(k)|<0.1$ 则达到较高要求$|\rho(k)|<0.2$ 合格

.