

Métodos Numéricos Aplicados I

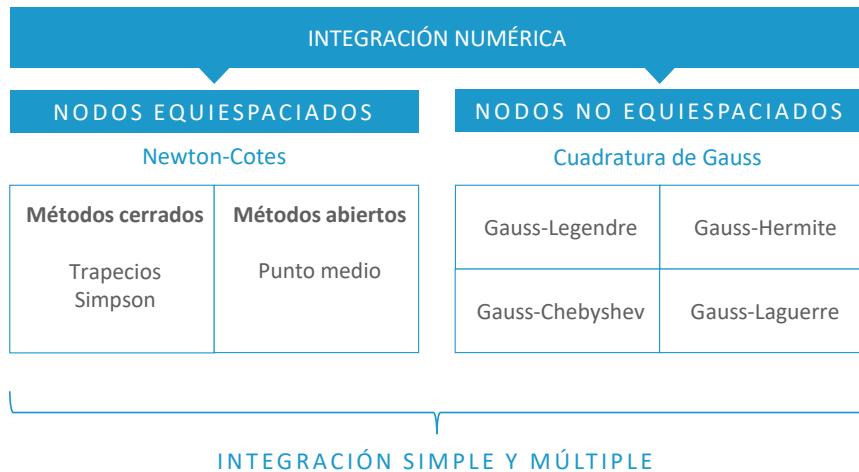
---

# Integración numérica

# Índice

<b>Esquema</b> . . . . .	<b>2</b>
<b>Ideas clave</b> . . . . .	<b>3</b>
5.1 Introducción y objetivos . . . . .	3
5.2 Cuadratura numérica y polinomio de Lagrange . . . . .	5
5.3 Fórmulas cerradas de Newton-Cotes . . . . .	7
5.4 Fórmulas abiertas de Newton-Cotes . . . . .	14
5.5 Cuadratura de Gauss. . . . .	18
5.6 Integración múltiple . . . . .	29

# Esquema



## 5.1 Introducción y objetivos

En ingeniería, el trabajo  $W$  necesario para trasladar un cuerpo de una posición a otra se define como

$$dW = \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle,$$

donde  $\vec{F}$  es el vector fuerza, y  $d\vec{l}$  es el vector desplazamiento, como se ilustra en la Figura 1.

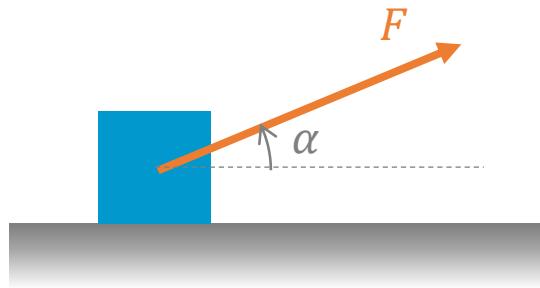


Figura 1: Representación del trabajo

Se trata de un producto escalar entre dos vectores, por lo que

$$dW = F dl \cos(\alpha),$$

donde  $F = |\vec{F}|$  y  $dl = |\vec{dl}|$ . Cuando la expresión anterior depende de  $x$ , podemos obtener el trabajo como

$$W = \int_a^b F(x) \cos(\alpha(x)) dx. \quad (1)$$

En ocasiones,  $F(x)$  tiene una expresión analítica que permite obtener el valor de  $W$

fácilmente; sin embargo, habitualmente nos encontramos con que los valores de  $F(x)$  y  $\alpha(x)$  vienen tabulados (como se representa en la Tabla 1) o no dan lugar a una expresión con una integral conocida.

$x$	$F(x)$	$\alpha(x)$
0.00	0.00	0.50
1.52	40.04	1.40
3.04	57.83	0.75
4.56	62.28	0.90
6.08	46.71	1.30
7.60	53.38	1.48
9.12	22.24	1.50

Tabla 1: Datos tabulados de  $F(x)$  y  $\alpha(x)$

La técnica de **cuadratura numérica** consiste en calcular una integral a partir de unos valores discretos; estos pueden tener origen en el valor del integrando en los diferentes nodos o en valores tabulados. En general, la cuadratura numérica consiste en obtener

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i).$$

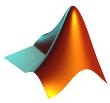
Cuando los nodos están equiespaciados, trabajaremos con las conocidas fórmulas de Newton-Cotes. Sin embargo, si los nodos no están equiespaciados, hablaremos de las cuadraturas de Gauss.

A lo largo del tema, trabajaremos principalmente con integrales simples. En la última parte del tema veremos cómo los conceptos de la integración simple son extrapolables a la integración múltiple en todos los casos.

Los objetivos que trataremos de alcanzar en este tema serán los siguientes:

- ▶ Conocer la expresión general de las técnicas de cuadratura

- Comprender e implementar las fórmulas derivadas de las expresiones de Newton-Cotes, cerradas y abiertas
- Comprender e implementar los casos particulares de la cuadratura de Gauss
- Aplicar la integración numérica sobre integración múltiple



#### Algunas funciones Matlab utilizadas en este tema

- `repmat(x, a, b)`. Repite el vector  $x$  en  $a$  filas y  $b$  columnas.

## 5.2 Cuadratura numérica y polinomio de Lagrange

Nuestro objetivo es obtener el valor de

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

utilizando la técnica de la cuadratura numérica. Los métodos que vamos a ver a lo largo del tema se basan en los polinomios de Lagrange  $l_n(x)$ . Sabemos que podemos expresar

$$f(x) = l_n(x) + \epsilon(x), \quad (3)$$

donde

$$\epsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i),$$

y el polinomio de interpolación de Lagrange  $l_n(x)$  viene dado por

$$l_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}. \quad (4)$$

Reemplazando (3) en (2), obtenemos

$$\begin{aligned}
 I &= \int_a^b (l_n(x) + \epsilon(x)) dx = \\
 &= \int_a^b \left\{ \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right\} dx = \\
 &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx.
 \end{aligned} \tag{5}$$

De este modo,

$$I \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx, \tag{6}$$

denominándose **error de cuadratura** al término

$$\frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx.$$

En lo sucesivo del tema, veremos los métodos que surgen del uso de la expresión (6).

En función del número de términos, podremos obtener el valor de  $I$  como se muestra en la Figura 2.

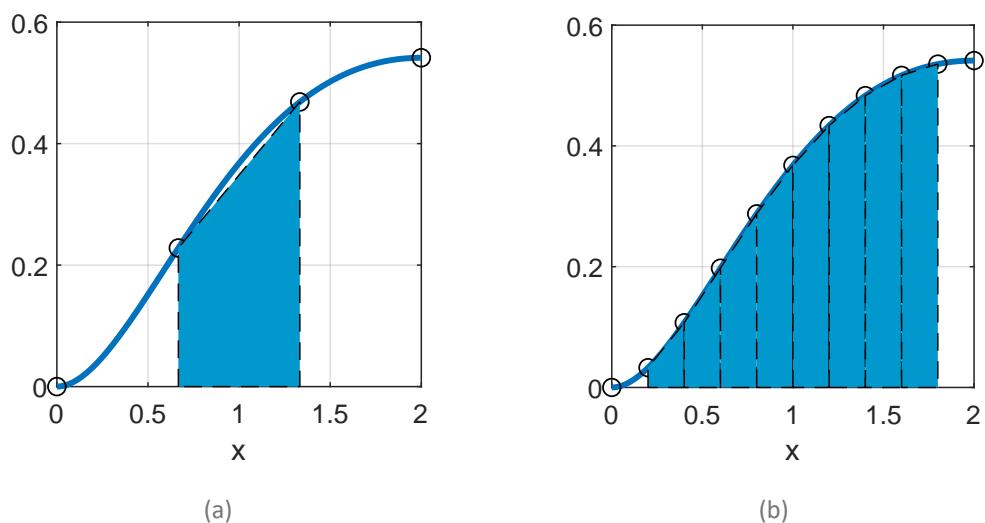


Figura 2: Diferentes aproximaciones de  $I$

Cuando trabajamos con nodos equiespaciados estaremos en el caso de fórmulas de Newton-Cotes, que desarrollaremos en los apartados 5.3 y 5.4. En el caso de nodos equiespaciados, en el apartado 5.5 nos adentraremos en las fórmulas de cuadratura de Gauss.

## 5.3 Fórmulas cerradas de Newton-Cotes

En este apartado nos centraremos en el caso en que los nodos están equiespaciados y, además, se toman todos los nodos del intervalo  $x \in [a, b]$ , con la situación de la Figura 3, con

$$h = \frac{b - a}{n}.$$



Figura 3: Esquema de nodos para fórmulas cerradas de Newton-Cotes

Para desarrollar cada una de las fórmulas de integración, recurriremos a particularizar la expresión (6) para algunos valores particulares de  $n$ . La Tabla 2 recoge estas expresiones en su versión simple, algunos de cuyos desarrollos veremos a lo largo del apartado. En todos los casos es de aplicación el Teorema 1.

Método	Aproximación de $\int_a^b f(x) dx$	$\epsilon$
Trapecios	$\frac{h}{2} (f(a) + f(b))$	$-\frac{h^3}{12} f''(\xi)$
Simpson	$\frac{h}{3} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$	$-\frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi)$
Simpson 3/8	$\frac{3h}{8} (f(a) + 3f(\frac{2a+b}{3}) + 3f(\frac{a+2b}{3}) + f(b))$	$-\frac{3h^5}{80} f^{IV}(\xi)$
Milne	$\frac{2h}{45} (7f(a) + 32f(\frac{3a+b}{4}) + 12f(\frac{a+b}{2}) + 32f(\frac{a+3b}{4}) + 7f(b))$	$-\frac{8h^7}{945} f^{VI}(\xi)$

Tabla 2: Fórmulas cerradas simples de Newton-Cotes

### Teorema 1: Error de las fórmulas cerradas de Newton-Cotes

Sea  $\sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$  la fórmula de Newton-Cotes cerrada de  $n + 1$  puntos donde  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$  y  $h = \frac{b-a}{n}$ . Entonces existe un  $\xi \in (a, b)$  tal que

- ▶ para valores pares de  $n$  y si  $f \in \mathcal{C}^{n+2}[a, b]$  se cumple que

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3}(n+2)}{f} (\xi)(n+2)! \int_0^n \tau^2(\tau-1)\cdots(\tau-n) d\tau.$$

- ▶ para valores impares de  $n$  y si  $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$  se cumple que

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2}(n+1)}{f} (\xi)(n+1)! \int_0^n \tau(\tau-1)\cdots(\tau-n) d\tau.$$

## Método de Trapecios

Se denomina método de Trapecios al caso en que (6) tiene  $n = 2$ . En este sentido,

$$\begin{aligned} I &\approx f(a) \int_a^b L_0(x) dx + f(b) \int_a^b L_1(x) dx = \\ &= -\frac{f(a)}{h} \int_a^b (x-b) dx + \frac{f(b)}{h} \int_a^b (x-a) dx = \\ &= \frac{h}{2} (f(a) + f(b)). \end{aligned} \tag{7}$$

El nombre del método de Trapecios viene dado porque (7) es la expresión del área de un trapecio.

Se puede demostrar que el error es

$$\epsilon = -\frac{h^3}{12} f''(\xi(x)).$$

Para disminuir el error, se divide el intervalo en subintervalos y se aplica el método de trapezios (7) sobre cada subintervalo, como se ilustra en la Figura 4.

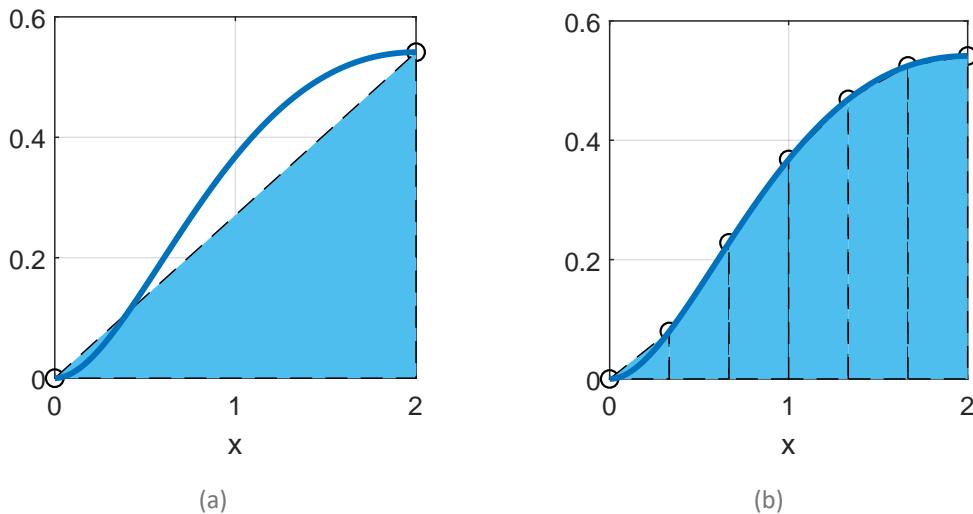


Figura 4: Método de trapezios (a) con el paso original, (b) dividiendo el intervalo en subintervalos

De este modo,

$$\begin{aligned}
 I &\approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1})) = \\
 &= \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)).
 \end{aligned} \tag{8}$$

A este método se le conoce como **fórmula de trapezios compuesta**. Su expresión del error es

$$\epsilon = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi(x)).$$

A continuación se muestra la implementación del método de trapezios en Matlab.



Trapecios.m

```
function I=trapezios(f,a,b,n)
```

```
% I=trapecios(f,a,b,n) obtiene la integral de f(x)
% con la fórmula de trapecios compuesta.
h = (b-a)/n;
x = a:h:b;
pesos = [1 2*ones(1,n-1) 1];
I=h/2*sum(pesos.*f(x));
end
```

## Método de Simpson

Cuando tomamos (6) con  $n = 3$ , tenemos el método de Simpson.

$$\begin{aligned} I &\approx f(a) \int_a^b L_0(x) dx + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b L_1(x) dx + f(b) \int_a^b L_2(x) dx = \\ &= \frac{h}{3} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right), \end{aligned} \tag{9}$$

siendo su error

$$\epsilon = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi(x)).$$

Al igual que en el método de trapecios, podemos disminuir el error si tomamos subintervalos. Por tanto,

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n-2} (f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})) = \\ &= \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + \\ &\quad + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)), \end{aligned} \tag{10}$$

dando lugar a la **fórmula de Simpson compuesta**. En este caso, el error pasa a ser

$$\epsilon = -\frac{h^4}{180} (b-a) f^{IV}(\xi(x)).$$

A continuación se muestra la implementación del método de Simpson en Matlab.



```
function I=simpson(f,a,b,n)
% I=simpson(f,a,b,n) obtiene la integral de f(x)
% con la fórmula de Simpson compuesta.
h = (b-a)/n;
x = a:h:b;
pesos = ones(1,n+1);
pesos(2:2:n) = 4; pesos(3:2:n-1) = 2;
I=h/3*sum(pesos.*f(x));
end
```

### Ejemplo 1. Calcula

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{-x} dx,$$

utilizando los métodos de Trapecios y Simpson tomando 4 y 8 subintervalos.

Para cada caso, calcula el error cometido sabiendo que el resultado analítico es

$$\frac{1 - e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}.$$

### Interpreta los resultados.

Ejecutamos en Matlab

```
>> f=@(x) sin(x).*exp(-x);
>> a=0; b=pi/2; n1=4; n2=8;
>> IT1=trapecios(f,a,b,n1)
IT1 =
0.380590604382816
>> IT2=trapecios(f,a,b,n2)
IT2 =
```

```

0.392182862002726
>> IS1=simpson(f,a,b,n1)
IS1 =
0.395839444235324
>> IS2=simpson(f,a,b,n2)
IS2 =
0.396046947876029
>> error=abs([IT1 IT2 IS1 IS2]-(1-exp(-pi/2))/2)
error =
0.015469607441803    0.003877349821893    ...
0.000220767589295    0.000013263948590

```

Vemos que para un mismo método, se obtiene menor error cuando disminuimos el tamaño de  $h$ . Además, comparando ambos métodos, las fórmulas de Simpson tienen menor error.

**Ejemplo 2. Con los datos de la Tabla 1, calcula el trabajo realizado utilizando la expresión (1) utilizando los métodos de Trapecios y Simpson. Toma como paso la diferencia entre los valores de  $x$ .**

En los programas Trapecios.m y Simpson.m hemos tomado como valor de entrada la función  $f(x)$ . Cuando trabajamos con datos tabulados, son estos datos los que tienen que ser el parámetro de entrada, y hacer ligeras modificaciones sobre los programas, que llamaremos TrapeciosDatos.m y SimpsonDatos.m.

Para obtener el trabajo realizado, ejecutamos en Matlab

```

>> x=0:1.52:9.12;
>> F=[0 40.04 57.83 62.28 46.71 53.38 22.24];
>> alpha=[.5 1.4 .75 .9 1.3 1.48 1.5];
>> datos=F.*cos(alpha);
>> IT=trapeciosDatos(datos,x)

```

```

IT =
1.610507484870318e+02
>> IS=simpsonDatos(datos,x)
IS =
1.583980289247424e+02

```

## 5.4 Fórmulas abiertas de Newton-Cotes

Si en el apartado anterior desarrollamos algunas fórmulas de Newton-Cotes cerradas, en este apartado nos centraremos en las fórmulas abiertas. En este caso, los nodos primero y último no se toman, y se utiliza la nomenclatura de la Figura 5. Ahora,

$$h = \frac{b - a}{n - 2}.$$

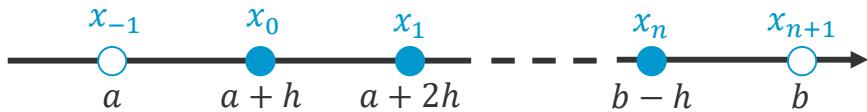


Figura 5: Esquema de nodos para fórmulas abiertas de Newton-Cotes

De nuevo partiremos de (6) para desarrollar las fórmulas de integración. La Tabla 3 recoge estas expresiones en su versión simple, desarrollando el método de punto medio en este apartado. Para todos los casos se puede aplicar el Teorema 2.

Método	Aproximación de $\int_a^b f(x) dx$	$\epsilon$
$n = 0$ : Punto medio	$(b - a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	$\frac{h^3}{3} f''(\xi)$
$n = 1$	$\frac{b-a}{2} \left(f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right)$	$\frac{3h^3}{4} f''(\xi)$
$n = 2$	$\frac{b-a}{3} \left(2f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)$	$\frac{14h^5}{45} f^{IV}(\xi)$

Tabla 3: Fórmulas abiertas simples de Newton-Cotes

## Teorema 2: Error de las fórmulas abiertas de Newton-Cotes

Sea  $\sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$  la fórmula de Newton-Cotes cerrada de  $n + 1$  puntos donde  $x_{-1} = a$ ,  $x_{n+1} = b$  y  $h = \frac{b-a}{n+2}$ . Entonces existe un  $\xi \in (a, b)$  tal que

- ▶ para valores pares de  $n$  y si  $f \in \mathcal{C}^{n+2}[a, b]$  se cumple que

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3}}{f} (\xi)(n+2)! \int_{-1}^{n+1} \tau^2(\tau-1) \cdots (\tau-n) d\tau.$$

- ▶ para valores impares de  $n$  y si  $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$  se cumple que

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2}}{f} (\xi)(n+1)! \int_{-1}^{n+1} \tau(\tau-1) \cdots (\tau-n) d\tau.$$

## Método de Punto Medio

Tomando (6) con  $n = 0$ , tendremos los nodos

$$x_{-1} = a, \quad x_0 = \frac{a+b}{2}, \quad x_1 = b.$$

Por tanto,

$$I \approx f(x_0) \int_a^b dx = (b-a)f(x_0) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (11)$$

siendo su error

$$\epsilon = -\frac{h^3}{3} f''(\xi(x)).$$

Para disminuir el error, tomamos subintervalos. Como el método de punto medio abarca los puntos anterior y posterior, tomaremos solo los puntos pares para no solapar;

además, el número de subintervalos  $n$  deberá ser par. Por tanto,

$$\begin{aligned} I &\approx \sum_{i=0}^{n/2} (x_{2i+1} - x_{2i-1}) f(x_{2i}) = \\ &= 2h (f(x_0) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_n)). \end{aligned} \tag{12}$$

dando lugar a la **fórmula de punto medio compuesta**, siendo su error

$$\epsilon = \frac{b-a}{6} h^2 f''(\xi).$$

A continuación se muestra la implementación del método de Punto Medio en Matlab.



PuntoMedio.m

```
function I=puntoMedio(f,a,b,n)
% I=puntoMedio(f,a,b,n) obtiene la integral de f(x)
% con la fórmula de punto medio compuesta.
h = (b-a)/(n+2);
x = a+h:h:b-h;
I=2*h*sum(f(x(1:2:end)));
end
```

### Ejemplo 3. Calcula

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) e^{-x} dx,$$

utilizando el método de Punto Medio tomando 4 y 8 subintervalos. Para cada caso, calcula el error cometido sabiendo que el resultado analítico es

$$\frac{1 - e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}.$$

### Interpreta los resultados.

Ejecutamos en Matlab

```

>> f=@(x) sin(x).*exp(-x);
>> a=0; b=pi/2; n1=4; n2=8;
>> IPM1=puntoMedio(f,a,b,n1)
IPM1 =
0.409710138362011
>> IPM2=puntoMedio(f,a,b,n2)
IPM2 =
0.401008515076530
>> error=abs([IPM1 IPM2]-(1-exp(-pi/2))/2)
error =
0.013649926537392    0.004948303251911

```

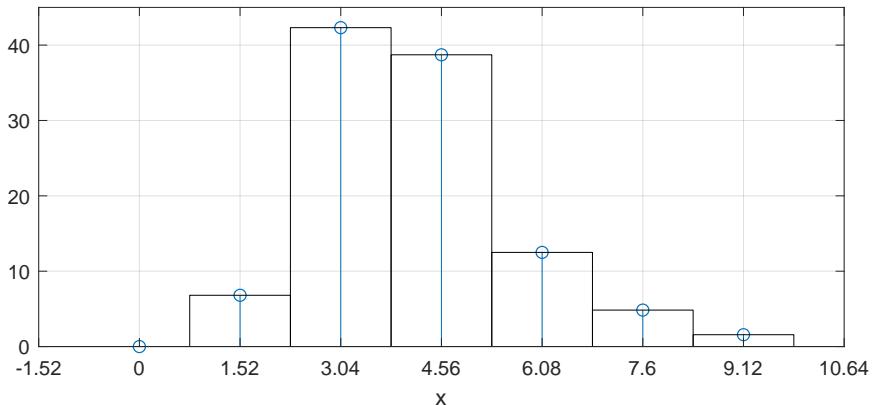
Se evidencia la reducción del error tomando un mayor número de subintervalos.

**Ejemplo 4. Con los datos de la Tabla 1, calcula el trabajo realizado utilizando la expresión (1) utilizando el método de Punto Medio.**

Debemos interpretar este problema a partir de la comprensión del método de Punto Medio. Este método calcula el área del rectángulo que tiene como base la diferencia entre tres puntos consecutivos y de altura el valor de la función en el punto intermedio. Si queremos utilizar el valor de la función en todos los puntos, podemos determinar unos nodos intermedios por los que no se calcula la función. Así, los nodos serán

$$x_i = \frac{1.52}{2}i, \quad i = -1, 0, \dots, 13,$$

siendo  $h = \frac{1.52}{2}$ , como refleja la siguiente figura.



Aplicando (12), obtenemos

$$I = 2h (f(x_0) + f(x_2) + \cdots + f(x_{10}) + f(x_{12})) = 162.24638.$$

## 5.5 Cuadratura de Gauss

La cuadratura de Gauss es un tipo de cuadratura para nodos no equiespaciados. Esta cuadratura pasa por la obtención de los nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y de los coeficientes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  que minimizan el error obtenido en la aproximación

$$\int_a^b w(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i),$$

donde a la función  $w(x)$  se la denomina **función peso**, y cumple  $w(x) > 0, x \in [a, b]$ . Para la obtención de estos coeficientes, se deben verificar las siguientes condiciones:

1. Hay que determinar unos polinomios  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  tales que

$$\langle p_i, p_j \rangle = 0, i \neq j.$$

2. Los nodos  $x_1, \dots, x_n$  son las raíces del polinomio  $p_n(x)$ .

A partir de estas dos condiciones, se pueden obtener los coeficientes  $c_1, \dots, c_n$  y, por

tanto, la fórmula de cuadratura.

El error cometido al realizar la aproximación de la integral por las diferentes cuadraturas de Gauss es

$$\epsilon = \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!} \int_a^b p_n^2(x) w(x) dx, \quad \xi \in (a, b).$$

Las diferentes cuadraturas vienen definidas por la función  $w(x)$ .

## Cuadratura de Gauss-Legendre

La fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre utiliza la función peso  $w(x) = 1$ . El intervalo  $[a, b] = [-1, 1]$ , pero veremos más adelante que con un cambio de variable sencillo se puede extender a cualquier intervalo  $[a, b]$ . Por tanto, las integrales que aproximaremos serán de la forma

$$\int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Los polinomios  $p_i(x)$  de la cuadratura de Gauss-Legendre son

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_1(x) &= x, \\ p_{k+1}(x) &= \frac{1}{k+1} [(2k+1)x p_k(x) - kp_{k-1}(x)], \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Los polinomios anteriores cumplen con la condición de ortogonalidad. Además, las raíces de  $p_n(x)$  son

$$x_i = \left(1 - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{8n^3}\right) \cos\left(\pi \frac{4k-1}{4n+2}\right).$$

Los coeficientes  $c_i$  se obtienen a partir de la expresión

$$c_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)(p_n'(x_i))^2}.$$

La Tabla 4 recoge los valores de los nodos y de los coeficientes para diferentes valores de  $n$ .

	$i$	1	2	3	4	5
$n = 2$	$x_i$	-0.577350	0.577350	-	-	-
	$c_i$	1.000000	1.000000	-	-	-
$n = 3$	$x_i$	0.000000	-0.774597	0.774597	-	-
	$c_i$	0.888889	0.555556	0.555556	-	-
$n = 4$	$x_i$	-0.339981	-0.861136	0.339981	0.861136	-
	$c_i$	0.652145	0.347855	0.652145	0.347855	-
$n = 5$	$x_i$	0.000000	-0.538469	-0.906180	0.538469	0.906180
	$c_i$	0.568889	0.478629	0.236927	0.478629	0.236927

Tabla 4: Nodos y coeficientes de la cuadratura de Gauss-Legendre

Por ejemplo, si tuviéramos que obtener la expresión de la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre para  $n = 3$ , tendríamos que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) = \\ &= 0.888889 f(0) + 0.555556 f(-0.774597) + 0.555556 f(0.774597). \end{aligned}$$



Accede al vídeo: Obtención de nodos y coeficientes de la cuadratura de Gauss-Legendre en Matlab

Para transformar el intervalo  $[-1, 1]$  en el intervalo genérico  $[a, b]$  utilizamos el cambio de variable

$$x = \frac{b-a}{2}y + \frac{b+a}{2}, \quad dx = \frac{b-a}{2}dy, \quad (13)$$

por lo que podremos aproximar

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n c_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right).$$

### Ejemplo 5. Obtén el valor de

$$I = \int_1^{1.5} e^{-x^2} dx$$

con la cuadratura de Gauss-Legendre utilizando  $n = 2$  y  $n = 3$ .

Transformamos el intervalo  $[1, 1.5]$  en el  $[-1, 1]$  utilizando (13) como

$$x = \frac{1.5 - 1}{2}y + \frac{1.5 + 1}{2} = \frac{y + 5}{4}, \quad dx = \frac{y}{4},$$

de modo que

$$I = \int_1^{1.5} e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(y+5)^2}{16}} dy.$$

Con  $n = 2$  tenemos que

$$\frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(y+5)^2}{16}} dy \approx \frac{1}{4} \left( e^{-\frac{(-0.577350+5)^2}{16}} + e^{-\frac{(0.577350+5)^2}{16}} \right) = 0.109400.$$

Para  $n = 3$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(y+5)^2}{16}} dy &\approx \\ &\approx \frac{1}{4} \left( 0.888889 e^{-\frac{(0+5)^2}{16}} + 0.555556 e^{-\frac{(-0.774597+5)^2}{16}} + 0.555556 e^{-\frac{(0.774597+5)^2}{16}} \right) = \\ &= 0.109364. \end{aligned}$$

### Cuadratura de Gauss-Chebyshev

La fórmula de cuadratura de Gauss-Chebyshev utiliza la función peso  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

De nuevo, utilizamos el intervalo  $[a, b] = [-1, 1]$ , pero se puede generalizar para cualquier intervalo  $[a, b]$  con el cambio de variable (13). Las integrales que aproximaremos serán de la forma

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Los polinomios  $T_i(x)$  de la cuadratura de Gauss-Chebyshev son

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_k(x) &= 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Los polinomios anteriores cumplen con la condición de ortogonalidad. Las raíces de  $T_n(x)$  son

$$x_i = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2n}\right),$$

mientras que los coeficientes  $c_i$  tiene la expresión

$$c_i = \frac{\pi}{n}.$$

De este modo, la expresión genérica de la fórmula de cuadratura de Gauss-Chebyshev será

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

La Tabla 5 recoge los valores de los nodos para diferentes valores de  $n$ .

	$i$	1	2	3	4	5
$n = 2$	$x_i$	-0.707107	0.707107	-	-	-
$n = 3$	$x_i$	-0.866025	0.000000	0.866025	-	-
$n = 4$	$x_i$	-0.923880	-0.382683	0.382683	0.923880	-
$n = 5$	$x_i$	-0.951057	-0.587785	0.000000	0.587785	0.951057

Tabla 5: Nodos de la cuadratura de Gauss-Chebyshev

### Ejemplo 6. Calcular la integral

$$I = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

con seis decimales exactos. Es decir, encontrar el valor de  $n$  tal que

$$\epsilon = \frac{2\pi}{2^{2n}(2n)!} e^\xi < 10^{-6}, \quad \xi \in (-1, 1).$$

La única variable que aparece en la expresión de  $\epsilon$  es  $\xi$ , así que vamos a acotarla.

$$|e^\xi| \leq e \Leftrightarrow |\epsilon| = \left| \frac{2\pi}{2^{2n}(2n)!} e^\xi \right| \leq \left| \frac{2\pi}{2^{2n}(2n)!} e \right|.$$

Calculamos para diferentes valores de  $n$ , obteniendo:

- $n = 1 : |\epsilon| < 2.134933555$
- $n = 2 : |\epsilon| < 0.044477782$
- $n = 3 : |\epsilon| < 3.70648 \cdot 10^{-4}$
- $n = 4 : |\epsilon| < 1.65468 \cdot 10^{-6}$
- $n = 5 : |\epsilon| < 4.59633 \cdot 10^{-9}$

Por tanto, para  $n = 5$  se garantiza que el error es menor a  $10^{-6}$ . Así, la integral se obtiene como

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \\ &\approx \frac{\pi}{5} (e^{-0.951057} + e^{-0.587785} + e^0 + e^{0.587785} + e^{0.951057}) = 3.977463. \end{aligned}$$

## Cuadratura de Gauss-Laguerre

La fórmula de cuadratura de Gauss-Laguerre tiene como función peso a  $w(x) = e^{-x}$  en el intervalo  $[a, b] = [0, +\infty)$ , por lo que las integrales a aproximar serán de la forma

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx.$$

Los polinomios  $L_i(x)$  de la cuadratura del Gauss-Laguerre son

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= 1 - x, \\ L_{k+2}(x) &= (2k + 3 - x)L_{k+1}(x) - (k + 1)^2 L_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, n - 2. \end{aligned}$$

Los polinomios anteriores son ortogonales respecto del producto escalar. Las raíces de  $L_n(x)$  son

$$x_i = \frac{j_{0i}^2}{4h_n} \left( 1 + \frac{-2 + j_{0k}^2}{48h_n^2} \right),$$

siendo  $h_n = n + \frac{1}{2}$  y  $j_{0i}$  la raíz  $i$ -ésima de la función  $J_0(x)$ , es decir, la función de Bessel de primera especie y orden. Los coeficientes  $c_i$  se calculan como

$$c_i = \frac{(n!)^2 x_i}{L_{n+1}^2(x_i)}.$$

### Ejemplo 7. Calcular la integral

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-10x} \sin(x) dx$$

utilizando la cuadratura de Gauss-Laguerre para  $n = 2$  y  $n = 4$ .

Vemos que el dominio de la integral están en  $[0, +\infty)$ . Sin embargo, no es de la forma

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx,$$

así que hagamos un cambio de variable. Si tomamos  $y = 10x \rightarrow dy = 10 dx$ ,

entonces

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-10x} \sin(x) dx = \frac{1}{10} \int_0^{+\infty} e^{-y} \sin\left(\frac{y}{10}\right) dy.$$

Esta última integral ya tiene la forma esperada. Calculamos los polinomios de Laguerre hasta  $n = 5$ .

$$\begin{aligned}L_0(x) &= 1, \\L_1(x) &= 1 - x, \\L_2(x) &= x^2 - 4x + 2, \\L_3(x) &= -x^3 + 9x^2 - 18x + 6, \\L_4(x) &= x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24, \\L_5(x) &= -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 + 120.\end{aligned}$$

Calculamos las raíces de  $L_2(x)$  y  $L_4(x)$  ejecutando en Matlab

```
>> raicesL2=roots([1 -4 2])
raicesL2 =
3.414213562373095
0.585786437626905
>> raicesL4=roots([1 -16 72 -96 24])
raicesL4 =
9.395070912301119
4.536620296921135
1.745761101158346
0.322547689619392
```

Obtenemos los coeficientes ejecutando en Matlab

```
>> syms x
>> L3=-x^3+9*x^2-18*x+6;
```

```

>> c2=(factorial(2))^2*raicesL2./...
(double(subs(L3,x,raicesL2))).^2
c2 =
0.146446609406726
0.853553390593274
>> L5=-x^5+25*x^4-200*x^3+600*x^2+120;
>> c4=(factorial(4))^2*raicesL4./...
(double(subs(L5,x,raicesL4))).^2
c4 =
0.000539294705561
0.038887908515005
0.357418692437800
0.603154104341635

```

Por tanto, el valor de la integral para  $n = 2$  y  $n = 4$  será

```

>> I2=(c2(1)*sin(raicesL2(1)/10)+...
c2(2)*sin(raicesL2(2)/10))/10
I2 =
0.009900565097779
>> I4=(c4(1)*sin(raicesL4(1)/10)+...
c4(2)*sin(raicesL4(2)/10)+...
c4(3)*sin(raicesL4(3)/10)+...
c4(4)*sin(raicesL4(4)/10))/10
I4 =
0.009900990092799

```

## Cuadratura de Gauss-Hermite

La fórmula de cuadratura de Gauss-Hermite tiene como función peso a  $w(x) = e^{-x^2}$  en el intervalo  $[a, b] = (-\infty, +\infty)$ , por lo que las integrales a aproximar serán de la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx.$$

Los polinomios  $H_i(x)$  de la cuadratura del Gauss-Hermite son

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= 2x, \\ H_{k+2}(x) &= 2xH_{k+1}(x) - 2(k+1)H_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Los polinomios anteriores son ortogonales respecto del producto escalar. A partir de las raíces  $x_i$  de  $H_n(x)$ , obtenemos los coeficientes

$$c_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 H_{n-1}^2(x_i)}.$$

### Ejemplo 8. Calcular la integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x^2} |x| dx$$

utilizando la cuadratura de Gauss-Hermite para  $n = 2$  y  $n = 4$ .

Hagamos un cambio de variable para que el integrando tenga la forma sobre la que podemos aplicar la cuadratura de Gauss-Hermite. Si tomamos  $y = 2x \rightarrow dy = 2 dx$ , entonces

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x^2} |x| dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} |y| dy.$$

Calculamos los polinomios de Hermite hasta  $n = 4$ .

$$\begin{aligned}H_0(x) &= 1, \\H_1(x) &= 2x, \\H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12.\end{aligned}$$

Calculamos las raíces de  $H_2(x)$  y  $H_4(x)$  ejecutando en Matlab

```
>> raicesH2=roots([4 0 -2])
raicesH2 =
0.707106781186548
-0.707106781186547
>> raicesH4=roots([16 0 -48 0 12])
raicesH4 =
-1.650680123885785
1.650680123885786
-0.524647623275290
0.524647623275290
```

Obtenemos los coeficientes ejecutando en Matlab

```
>> syms x
>> H1=2*x;
>> c2=2^(2-1)*factorial(2)*sqrt(pi)/...
2^2./(double(subs(H1,x,raicesH2)).^2)
c2 =
0.886226925452758
0.886226925452758
>> H3=8*x^3-12*x;
```

```

>> c4=2^(4-1)*factorial(4)*sqrt(pi) ...
/4^2./(double(subs(H3,x,raicesH4)).^2)
c4 =
0.081312835447245
0.081312835447245
0.804914090005513
0.804914090005513

```

Por tanto, el valor de la integral para  $n = 2$  y  $n = 4$  será

```

>> I2=(c2(1)*abs(raicesH2(1))+...
c2(2)*abs(raicesH2(2)))/4
I2 =
0.313328534328875
>> I4=(c4(1)*abs(raicesH4(1))+...
c4(2)*abs(raicesH4(2))+...
c4(3)*abs(raicesH4(3))+...
c4(4)*abs(raicesH4(4)))/4
I4 =
0.278258872775874

```



Accede al vídeo: Interpretación geométrica de la integración numérica

## 5.6 Integración múltiple

La integración múltiple consiste en integrar sobre más de una variable. Es decir, que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . En este apartado nos centraremos en el caso de  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  en el dominio  $(x, y) = [a, b] \times [c, d]$ , pero es extrapolable a otras dimensiones. La Figura 6

muestra un ejemplo de función con estas características.

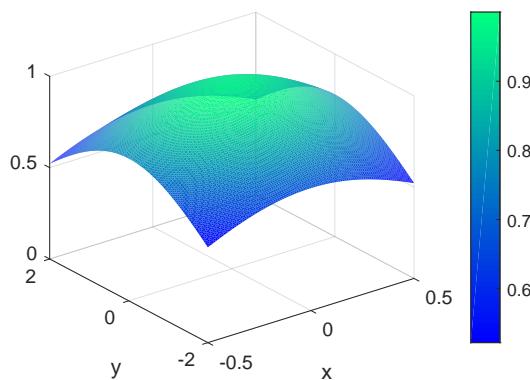


Figura 6: Ejemplo de  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  en recinto rectangular

## Nodos equiespaciados

La técnica que se va a utilizar en esta sección es el uso del método de Trapecios para la aproximación de una integral doble. Se podría utilizar perfectamente otro método.

Podemos escribir la integral doble como

$$I = \iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx.$$

Si nombramos

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad (14)$$

entonces

$$I = \int_a^b g(x) dx.$$

Aplicaremos ahora el método de trapecios compuesto (8). Nombrando

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad k = \frac{d-c}{m},$$

podemos decir que

$$I = \int_a^b g(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i) + g(x_{i+1}),$$

pero como  $g(x)$  viene definida en (14),

$$I \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \int_c^d f(x_i, y) dy + \int_c^d f(x_{i+1}, y) dy \right\}. \quad (15)$$

Desarrollemos la primera integral fijando  $x_i$  y utilizando trapecios sobre la variable  $y$ .

$$\int_c^d f(x_i, y) dy \approx \frac{k}{2} \sum_{j=0}^{m-1} f(x_i, y_j) + f(x_i, y_{j+1}).$$

Procediendo de forma similar sobre la segunda integral y reemplazando en (15), obtenemos

$$I \approx \frac{hk}{4} \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} f(x_i, y_j) + f(x_i, y_{j+1}) + f(x_{i+1}, y_j) + f(x_{i+1}, y_{j+1}) \right\}. \quad (16)$$

Supongamos que  $n = m = 2$ . Entonces (16) pasa a ser

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{hk}{4} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_0) + 2f(x_i, y_1) + f(x_i, y_2) + f(x_{i+1}, y_0) + 2f(x_{i+1}, y_1) + f(x_{i+1}, y_2) = \\ &= \frac{hk}{4} [f(x_0, y_0) + 2f(x_0, y_1) + f(x_0, y_2) + \\ &\quad + 2f(x_1, y_0) + 4f(x_1, y_1) + 2f(x_1, y_2) + \\ &\quad + f(x_2, y_0) + 2f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2)]. \end{aligned}$$

La Figura 7 muestra la distribución de los nodos.

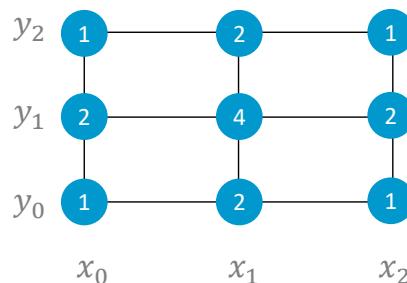


Figura 7: Distribución de los nodos para  $n = m = 2$

Para cualesquiera valores de  $n$  y  $m$ , la distribución de nodos es la que se representa en la Figura 8.

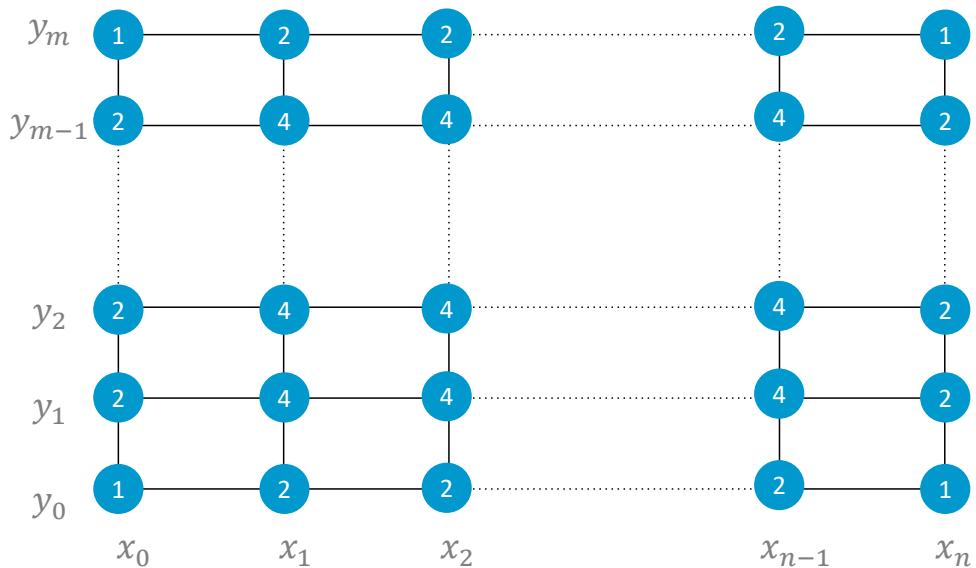


Figura 8: Distribución de los nodos para cualesquiera  $n$  y  $m$

## Nodos no equiespaciados

Cuando trabajamos con nodos no equiespaciados, mencionamos la diferentes cuadraturas de Gauss. De nuevo, deberemos transformar el recinto de integración  $[a, b] \times [c, d]$  en el que corresponda a la cuadratura.

En el Ejemplo 9 vemos una adaptación de la cuadratura de Gauss-Legendre para el caso de integrales dobles.

### Ejemplo 9. Calcular la integral

$$\int_{1.4}^2 \int_1^{1.5} \ln(x + 2y) \, dy \, dx,$$

utilizando la cuadratura de Gauss-Legendre con  $n = m = 3$ .

Como  $1.4 \leq x \leq 2$  y  $1 \leq y \leq 1.5$ , aplicamos los cambios de variables para que

tengan el recinto  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , de modo que

$$u = \frac{2x - 3.4}{0.6} \rightarrow du = \frac{2}{0.6} dx = \frac{10}{3} dx, \quad v = \frac{2y - 2.5}{0.5} \rightarrow dv = \frac{2}{0.5} dy = 4 dy,$$

es decir,

$$x = 0.3u + 1.7 \rightarrow dx = 0.3 du, \quad y = 0.25v + 1.25 \rightarrow dy = 0.25 dv.$$

Por tanto,

$$\int_{1.4}^2 \int_1^{1.5} \ln(x + 2y) dy dx = 0.075 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln(0.3u + 0.5v + 4.2) dv du.$$

Con los valores de la Tabla 4, los coeficientes y los nodos de la cuadratura de Gauss-Legendre son

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 = 0, c_1 = 0.888889; \\ u_2 &= v_2 = -0.774597, c_2 = 0.555556; \\ u_3 &= v_3 = 0.774597, c_3 = 0.555556. \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} 0.075 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln(0.3u + 0.5v + 4.2) dv du &\approx \\ &\approx 0.075 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_i c_j \ln(0.3u_i + 0.5v_j + 4.2). \end{aligned}$$

Resolvemos este sumatorio en Matlab como

```
>> c=[0.888889 0.555556 0.555556];
>> C=c'*c
C =
0.7901 0.4938 0.4938
0.4938 0.3086 0.3086
0.4938 0.3086 0.3086
```

```

>> u=[0 -0.774597 0.774597]';
>> U=repmat(u,1,3)
U =
0 0 0
-0.7746 -0.7746 -0.7746
0.7746 0.7746 0.7746
>> v=[0 -0.774597 0.774597];
>> V=repmat(v,3,1)
V =
0 -0.7746 0.7746
0 -0.7746 0.7746
0 -0.7746 0.7746
>> I=sum(sum(0.075*C.*log(0.3*U+0.5*V+4.2)))
I =
0.4296

```

Así pues,

$$I = \int_{1.4}^2 \int_1^{1.5} \ln(x + 2y) \, dy \, dx = 0.429554959579526.$$

### Ejemplo 10. Calcular la integral

$$I = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2} \, dA,$$

donde  $f(x, y)$  es la superficie de la semiesfera

$$x^2 + y^2 + f^2(x, y) = 9,$$

y el recinto de integración es

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Utiliza los métodos de Simpson con  $n = m = 8$  y de Gauss-Legendre con  $n = 4$ .

La función  $f$  que aparece en el integrando es

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2},$$

y sus derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}},$$

de modo que el integrando es

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{9 - x^2 - y^2}}.$$

El recinto de integración es un cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ , por lo que la integral a resolver es

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{9 - x^2 - y^2}} dy dx.$$

Procediendo de forma análoga al apartado de «Nodos equiespaciados» de la Sección 5.6 pero con el método de Simpson, la distribución de nodos es la expuesta en la siguiente tabla para  $n = m = 8$ .

1	4	2	4	2	4	2	4	1
4	16	8	16	8	16	8	16	4
2	8	4	8	4	8	4	8	2
4	16	8	16	8	16	8	16	4
2	8	4	8	4	8	4	8	2
4	16	8	16	8	16	8	16	4
2	8	4	8	4	8	4	8	2
4	16	8	16	8	16	8	16	4
1	4	2	4	2	4	2	4	1

El resultado es

$$I_{\text{Simpson}} = 0.267814255559730.$$

Para aplicar el método de Gauss-Legendre, aplicamos los cambios de variables

$$u = 2x - 1 \rightarrow du = 2 dx, \quad v = 2y - 1 \rightarrow dv = 2 dy.$$

Por tanto,

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{9 - x^2 - y^2}} dy dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{u^2 + 2u + v^2 + 2v + 2}{34 - u^2 - 2u - v^2 - 2v}} dv du$$

Con los valores de la Tabla 4, los coeficientes y los nodos de la cuadratura de Gauss-Legendre para  $n = 4$  son

$$u_1 = v_1 = -0.339981, c_1 = 0.652145;$$

$$u_2 = v_2 = -0.861136, c_2 = 0.347855;$$

$$u_3 = v_3 = -u_1, c_3 = c_1;$$

$$u_4 = v_4 = -u_2, c_4 = c_2.$$

De este modo,

$$\frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{u^2 + 2u + v^2 + 2v + 2}{34 - u^2 - 2u - v^2 - 2v}} dv du \approx$$

$$\approx \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_i c_j \sqrt{\frac{u_i^2 + 2u_i + v_j^2 + 2v_j + 2}{34 - u_i^2 - 2u_i - v_j^2 - 2v_j}}.$$

Procediendo de forma análoga al Ejemplo 9,

$$I_{\text{Gauss-Legendre}} = 0.267770529696778.$$