

Задание

Когда следует добавлять молоко в кофе, дабы тот дольше оставался тёплым?

Решение

Для ответа на поставленный вопрос проведем построение и анализ приближенной модели изменения температуры кофе с течением времени. Процесс остывания кофе можно разделить на три этапа:

1. Остывание заваренного кофе за счет теплообмена с окружающей средой
2. Добавление в заваренный кофе молока с образованием смеси с новой температурой
3. Остывание полученной смеси до полного термодинамического равновесия с окружающей средой

Остывание кофе (или смеси) за счет теплообмена с окружающей средой подчиняется дифференциальному уравнению:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - T_{amb}), \quad (1)$$

где k – скорость остывания [с^{-1}], T_{amb} – температура окружающей среды. Начальное условие для первого этапа:

$$T|_{t=0} = T_0 \quad (2)$$

Третий этап физически ничем не отличается от первого, поэтому закон остывания смеси такой же как и для первого этапа, но с другими параметрами. В частности, изменится начальное условие – начальной температурой будет являться температура после смешивания кофе и молока. Будем считать, что скорости остывания кофе до добавления молока и после одинаковы. При добавлении молока в кофе теплообмен между кофе и молоком осуществляется с конечной скоростью. Однако при достаточно медленной скорости остывания жидкости и при перемешивании смеси можно считать, что установление температуры смеси происходит мгновенно в момент добавления молока.

Для подсчета температуры смеси T_{mix} можно воспользоваться следующим выражением:

$$T_{mix} = \frac{m_c c_c T_c + m_m c_m T_m}{m_c c_c + m_m c_m}, \quad (3)$$

где m_c – масса заваренного кофе, c_c – теплоемкость заваренного кофе, T_c – начальная температура заваренного кофе, m_m – масса молока, c_m – теплоемкость молока, T_m – начальная температура молока. Будем считать, что теплоемкости молока и кофе равны теплоемкости воды, что приводит к упрощению выражения для T_{mix} :

$$T_{mix} = \frac{m_c T_c + m_m T_m}{m_c + m_m} \quad (4)$$

Кроме того, будем считать, что плотности молока и кофе также равны плотности воды $\rho = 999.97 \text{ кг/м}^3$. Масса заваренного кофе:

$$m_c = \gamma_c N_{spoon} + m_w, \quad (5)$$

где γ_c – масса кофе на одну чайную ложку до заварки, N_{spoon} – количество чайных ложек кофе, m_w – масса воды для заварки, которое можно подсчитать следующим образом:

$$m_w = \rho(V_{cup} - N_{spoon}V_{spoon})p, \quad (6)$$

где V_{cup} – объем чашки, V_{spoon} – объем чайной ложки, p – процентное содержание заваренного кофе в чашке. Масса добавляемого молока:

$$m_m = \rho(V_{cup} - N_{spoon}V_{spoon})(1 - p) \quad (7)$$

Численное решение дифференциального уравнения будем проводить с помощью метода Эйлера. Для i -ой итерации:

$$T_i = T_{i-1} - (t_i - t_{i-1})k(T_{i-1} - T_{amb}), \quad (8)$$

Для учета температуры смеси, необходимо сначала найти номер итерации, который будет соответствовать времени добавления молока и для этой итерации температура будет равна температуре смеси T_{mix} (начальной температурой кофе до смешивания будет являться температура кофе на предыдущей итерации).

Проведем расчет для следующих параметров:

Обозначение	Значение	Описание
T_0	85°	Температура кофе сразу после заварки
T_{cool}	25°	Температура окружающей среды
T_m	4°	Температура молока
T_{opt}	50°	Температура кофе, при которой его можно пить
k	1/60 с ⁻¹	Скорость остывания
V_{cup}	350 мл	Объем чашки
V_{spoon}	4.92 мл	Объем чайной ложки
N_{spoon}	2	Количество чайных ложек кофе
γ_c	3.3 кг	Масса кофе на одну чайную ложку
p	0.8	Процентное содержание кофе в чашке
t_0	20 с	Время добавления молока

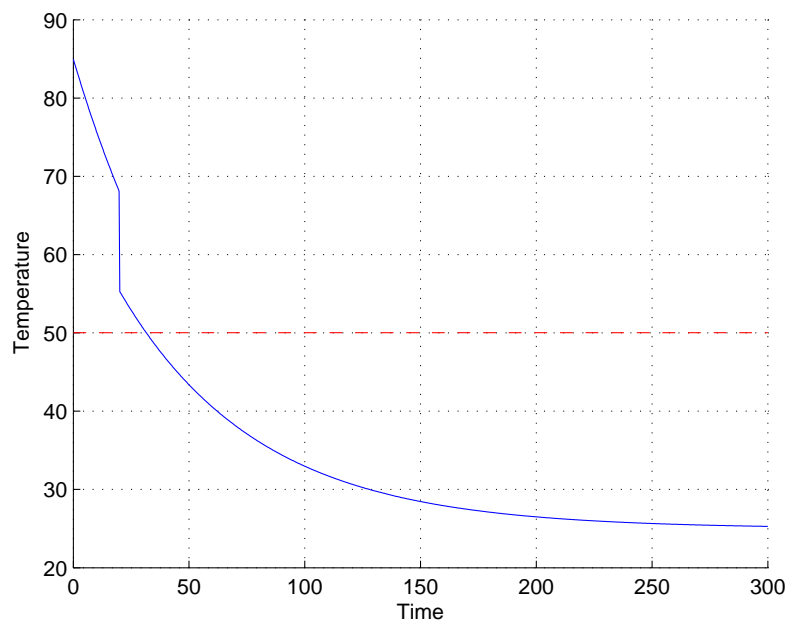


Рис. 1: Остывание кофе при добавлении молока (красной пунктирной линией отмечен уровень, соответствующий температуре T_{opt})

Из графика видно, что при разбавлении кофе молоком, температура которого ниже температуры кофе, то общая температура смеси снизится относительно изначальной температуры кофе. Так как скорость остывания не снижается после разбавления, то для максимизации времени остывания до температуры, при которой кофе можно пить, необходимо добавлять молоко сразу после заварки.