Mathematik für 1nf0rmatiker:innen

Tobias Prisching

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Hier wird das Vorwort stehen.

Symbole

Symbol	Bedeutung	Beispiel
w, $\top$	logisches wahr (Tautologie)	-
f, $\perp$	logisches falsch (Antilogie)	-
$\neg$	logische Negation	$\neg A$
$\wedge$	logische Konjunktion (Und/AND)	$A \wedge B$
$\vee$	logische Disjunktion (Oder/OR)	ToBe $\vee$ $\neg$ToBe
$\tilde{\wedge}$	logisches Nicht-Und (NAND)	$A \tilde{\wedge} B$
$\tilde{\vee}$	logisches Nicht-Oder (NOR)	$A \tilde{\vee} B$
$\veebar$	logisches exklusives Oder (XOR)	$A \veebar B$
$\Rightarrow$	logische Implikation	$A \Rightarrow B$
$\Leftrightarrow$	logische Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$

Tabelle -1.1: Logik Symbole

Symbol	Bedeutung	Beispiel
$\in$	ist Element von	$x \in M$
$\notin$	ist nicht Element von	$y \notin M$
$\subseteq$	ist Teilmenge von	$N \subseteq M$
$\subset, \subsetneq, \subsetneqq$	ist echte Teilmenge von	$N \subset M$
$\not\subseteq$	ist nicht Teilmenge von	$N \not\subseteq M$
$\supseteq$	ist Obermenge von	$M \supseteq N$
$\supset, \supsetneq, \supsetneqq$	ist echte Obermenge von	$M \supset N$
$\not\supseteq$	ist nicht Obermenge von	$M \not\supseteq N$
$\mathcal{P}$	Potenzmenge	$\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$
$\cap$	Durchschnitt	$M \cap N$
$\cup$	Vereinigung	$M \cup N$
$\setminus$	Differenz	$M \setminus N$
$\overline{M}$, M^{C}	Komplement	$M^{\mathrm{C}} = \overline{M}$

Tabelle -1.2: Mengen Symbole

Logik

0 Grundlagen der Logik

Definition 0.0.1 (Aussage)**.** Unter einer **Aussage** verstehen wir einen Satz der natürlichen Sprache, welchem entweder der Wahrheitswert wahr (w, $\top$) oder falsch (f, $\perp$) zugeordnet werden kann.

Definition 0.0.2 (Logische Operatoren)**.** Mithilfe von **logischen Operatoren** (auch **Verknüpfungen**) können aus vorhandenen Aussagen neue Aussagen gebildet werden. Seien A und B Aussagen, so definieren wir folgende logische Operatoren:

Negation
(Nicht/NOT)

A	$\neg A$
f	w
w	f

Konjunktion
(Und/AND)

A	B	$A \wedge B$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Disjunktion
(Oder/OR)

A	B	$A \vee B$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

Implikation

A	B	$A \Rightarrow B$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Aufbauend auf diesen Operatoren lassen sich neue Verknüpfungen definieren, wie beispielsweise das Nicht-Und/-Oder, das exklusive Oder und die Äquivalenz:

Nicht-Und
(NAND)

A	B	$A \tilde{\wedge} B$
f	f	w
f	w	w
w	f	w
w	w	f

Nicht-Oder
(NOR)

A	B	$A \tilde{\vee} B$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	f

Exklusive Oder
(XOR)

A	B	$A \veebar B$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	f

Äquivalenz

A	B	$A \Leftrightarrow B$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Definition 0.0.3 (Atomare Aussage)**.** Unter einer **atomaren Aussage** verstehen wir eine Aussage welche keine logischen Verknüpfungen enthält.

Definition 0.0.4 (Tautologie)**.** Unter einer **Tautologie** verstehen wir eine Aussage welche immer *wahr* ist.[1]

Definition 0.0.5 (Antilogie, Kontradiktion)**.** Unter einer **Antilogie** (auch **Kontradiktion**) verstehen wir eine Aussage welche immer *falsch* ist.[2]

[1] Beispiel: Die Aussage $A \vee \neg A$ ist immer wahr da immer entweder A oder $\neg A$ wahr ist

[2] Beispiel: Die Aussage $A \wedge \neg A$ ist immer falsch da A und $\neg A$ nie gleichzeitig wahr sind

1 Beweistechniken

Definition 1.0.1 (Mathematische Aussage)**.** Unter einer **mathematischen Aussage** (auch **Satz** genannt) verstehen wir im Normalfall ein Konstrukt der Form $v \Rightarrow f$, bestehend aus einer Voraussetzung v und einer Folgerung f, welche beide ebenfalls wiederum Aussagen (auch mathematische Aussagen) sein können.

Definition 1.0.2 (Mathematischer Beweis)**.** Unter einem **mathematischen Beweis** (meist auch nur **Beweis**) verstehen wir den Nachweis dass der zu einem mathematischen Satz korrespondierende logische Ausdruck immer wahr ist, d.h. eine Tautologie ist.

Definition 1.0.3 (Axiom)**.** Unter einem **Axiom** verstehen wir eine Aussage welche *unbewiesen* als wahr angenommen wird. [3]

[3] Axiome dienen uns als Grundbausteine für Beweise usw. die wir allerdings selbst nicht beweisen können und daher als wahr annehmen *müssen*

Definition 1.0.4 (Axiomensystem)**.** Unter einem **Axiomensystem** verstehen wir eine Ansammlung von Axiomen welche folgende Eigenschaften erfüllt:

- So wenig und einfache Axiome wie möglich welche genügen um eine Theorie vollständig zu beschreiben
- Die Axiome des Axiomensystems sind voneinader unabhängig
- Die Axiome des Axiomensystems müssen für sich selbst und untereinander widerspruchsfrei sein

1.1 Arten von Beweisen

Definition 1.1.1 (Direkter Beweis)**.** Beim **direkten Beweis** nehmen wir an, dass die Voraussetzung v wahr ist und wir versuchen, durch Vereinigung von wahren Implikationen zur Aussage "f ist wahr"zu kommen.

$$((v \Rightarrow v_1) \land (v_1 \Rightarrow v_2) \land ...(v_n \Rightarrow f)) \Rightarrow (v \Rightarrow f)$$

Definition 1.1.2 (Beweis durch Kontradiktion)**.** Beim **Beweis durch Kontradiktion** nehmen wir an, dass die Folgerung f falsch ist und versuchen dann zu dem Schluss zu kommen, dass dies nur der Fall sein kann wenn die Voraussetzung v falsch ist. [4]

[4] Dies entspricht einem direkten Beweis mit Voraussetzung $\neg f$ und Folgerung $\neg v$

$$(v \Rightarrow f) \Leftrightarrow (\neg f \Rightarrow \neg v)$$

Definition 1.1.3 (Indirekter Beweis)**.** Beim **indirekten Beweis** (auch **Beweis durch Widerspruch**) nehmen wir an, dass die Voraussetzung v wahr, aber dier Folgerung f falsch ist. Nun versuchen wir zu zeigen, dass es sich dabei um einen (logischen) Widerspruch handelt, wodurch der einzige Fall in dem $v \Rightarrow f$ falsch ist ausgeschlossen werden kann und die (logische) Aussage zur Tautologie wird.

Definition 1.1.4 (Vollständige Induktion)**.** Bei der **vollständigen Induktion**

Mengen und Relationen

2 Mengenlehre

2.1 Mengen

Definition 2.1.1 (Menge)**.** Unter einer **Menge** verstehen wir eine beliebige Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. [5]

[5] Definiton nach Georg Cantor (1845-1918)

Eigenschaften und Regeln

- Mengen enthalten Objekte (= Elemente einer Menge) **ohne** einer vorgegebenen Reihenfolge
- Mengen selbst sind Objekte und können folglich in Mengen enthalten sein
- Explizite Notation: $M = \{0, 1, \pi, \{i\}\}$
- Implizite Notation: $\mathbb{N} = \{x|x$ ist eine natürliche Zahl$\}$
- Objekt x ist Element der Menge M: $x \in M$
- Ein Objekt innerhalb einer Menge gefasst ist ungleich dem Objekt selbst: $\{0\} \neq 0$
- $M = N \Leftrightarrow M$ und N enthalten die gleichen Elemente
- Leere Menge: $\emptyset = \{\}$

2.2 Teilmenge und Obermenge

Definition 2.2.1 (Teilmenge)**.** Unter einer **Teilmenge** der Menge M verstehen wir eine Menge N von der jedes Element in M enthalten ist: $N \subseteq M$.

Ist N keine Teilmenge von M (d.h., N enthält mindestens ein Objekt x sodass gilt $x \in N$ und $x \notin M$), so schreiben wir: $N \not\subseteq M$

Definition 2.2.2 (Echte Teilmenge)**.** Unter einer **echten Teilmenge** der Menge M verstehen wir eine Menge N von der jedes Element in M enthalten ist *und* $N \neq M$ *gilt*: $N \subset M$ (auch $N \subsetneq M$ oder $N \subsetneqq M$).

Definition 2.2.3 (Obermenge)**.** Analog zur Teilmenge verstehen wir bei der **Obermenge** von N eine Menge M die jedes Element von N enthält: $M \supseteq N$

Definition 2.2.4 (Echte Obermenge)**.** Analog zur echten Teilmenge verstehen wir bei der **echten Obermenge** von N eine Menge M die jedes Element von N enthält *und* $N \neq M$ *gilt*: $M \supset N$ (auch $M \supsetneq N$ oder $M \supsetneqq N$)

Eigenschaften und Regeln

- Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge: $\emptyset \subseteq M$
- Die Gleichheit von Mengen lässt sich über Teilmengen ausdrücken: Gilt $N \subseteq M$ und $M \subseteq N$, so folgt $M = N$
- Ist N eine (echte) Teilmenge von M ($N \subseteq M$ bzw. $N \subsetneq M$), so ist M (echte) Obermenge von N ($M \supseteq N$ bzw. $M \supsetneq N$)

2.3 Potenzmenge

Definition 2.3.1 (Potenzmenge)**.** Unter der **Potenzmenge** $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M verstehen wir eine Menge welche alle möglichen Teilmengen von M enthält. [6] Es gilt: $M \in \mathcal{P}(M)$

[6] Für $M = \{0, 1\}$ ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, M\}$

2.4 Operationen mit Mengen

Definition 2.4.1 (Durschnitt, Vereinigung, Differenz)**.** Seien M und N Mengen. Wir definieren folgende Operationen:

- **Durchschnitt**: Alle Elemente die in M *und* N enthalten sind:

$$M \cap N = \{x | x \in M \wedge x \in N\}$$

- **Vereinigung**: Alle Elemente die in M *oder* N enthalten sind:

$$M \cup N = \{x | x \in M \vee x \in N\}$$

- **Differenz**: Alle Elemente die in M aber nicht in N enthalten sind:

$$M \setminus N = \{x | x \in M \wedge x \notin N\}$$

- **Komplement**: Ist $N \subseteq M$, so ist $M \setminus N$ das Komplement von N in M: $\overline{N}^M$ Ist bekannt innerhalb welcher Menge das Komplement gebildet wird kann auch $\overline{N}$ oder N^{C} geschrieben werden.

Definition 2.4.2 (Unendlicher Durchschnitt, Unendliche Vereinigung)**.** Sei I eine unendliche Menge von Indizes, sodass es für jedes $i \in I$ eine Menge M_i gibt. Wir definieren folgende Operationen:

- **Unendlicher Durchschnitt**: Alle Elemente die in jeder Menge M_i enthalten sind:

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x | x \in M_i \forall i \in I\}$$

- **Unendliche Vereinigung**: Alle Elemente die in mindestens einer Menge M_i enthalten sind:

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x | \exists i \in I | x \in M_i\}$$

Ist I endlich (betrachten wir im folgenden Beispiel den konkreten Fall $I = \{1, ..., n\}$), so handelt es sich um den Durschnitt/die Vereinigung einer endlichen Anzahl von Mengen, welche gleich unserer bisherigen Definition dieser Operationen ist:

$$\bigcup_{i \in I} M_i = M_1 \cup ... \cup M_n = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$$

(Analog für Durchschnitt)

Definition 2.4.3 (Kartesische Produkt)**.** Unter dem **kartesischen Produkt** zweier Mengen M und N verstehen wir eine Menge alle *geordneter Paare* [7] (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$:

$$M \times N = \{(m, n) | m \in M, n \in N\}$$

[7] Die Reihenfolge der Elemente des Paars spielt (im Gegensatz zu wie es bei Mengen der Fall ist) eine Rolle: $(0, 1) \neq (1, 0)$
Aber: $\{0, 1\} = \{1, 0\}$
$\rightarrow$ Paare sind keine Mengen

Eigenschaften und Regeln

- Die Differenzmenge einer Menge M mit der leeren Menge ist die Menge selbst: $M \setminus \emptyset = M$

- Kommutativgesetze:

$$M \cup N = N \cup M$$
$$M \cap N = N \cap M$$

- Assoziativgesetze:

$$(M \cup N) \cup O = M \cup (N \cup O)$$
$$(M \cap N) \cap O = M \cap (N \cap O)$$

- Distributivgesetze:

$$M \cap (N \cup O) = (M \cap N) \cup (M \cap O)$$

$$M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$$

- Rechenregeln der Komplementbildung:
  - $\overline{\overline{M}} = M$
  - $M \subseteq N \Rightarrow \overline{N} \subseteq \overline{M}$
  - $M \setminus N = M \cap \overline{N}$
  - $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$
  - $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$
- Im Allgemeinen gilt $M \times N = N \times M$ **nicht**
- $M \times \emptyset = \emptyset$

2.5 Mächtigkeit

Definition 2.5.1 (Mächtigkeit, Kardinalität)**.** Unter der **Mächtigkeit** (auch **Kardinalität**) einer Menge M verstehen wir die Anzahl der in M enthaltenen Elemente, welche als $|M|$ notiert wird.

Gilt $|M| = |N|$, so nennen wir die beiden Mengen M und N gleichmächtig.

3 Spezielle Mengen

3.1 Natürliche ($\mathbb{N}$), Ganze ($\mathbb{Z}$) und Rationale ($\mathbb{Q}$) Zahlen

Definition 3.1.1 (Natürliche Zahlen)**.** Wir definieren die Menge $\mathbb{N}$ der **natürlichen Zahlen** mithilfe des folgenden Axiomensystems, bekannt als die *Peano-Axiome*[8]:

1. Die Zahl 0 ist eine natürliche Zahl:
$$0 \in \mathbb{N}$$
2. Sei n eine natürliche Zahl, so hat n genau einen Nachfolger n'[9] welcher ebenfalls eine natürliche Zahl ist:
$$\forall n \in \mathbb{N} : n' \in \mathbb{N}$$
3. Sei n eine natürliche Zahl, so hat n genau einen Nachfolger n' ungleich 0:
$$\forall n \in \mathbb{N} : n' \neq 0$$
4. Seien n und m natürliche Zahlen und n' und m' ihre respektiven Nachfolger, so gilt dass falls n' und m' gleich sind auch n und m gleich sind:
$$\forall n, m \in \mathbb{N} : n' = m' \Rightarrow n = m$$
5. Sei M eine Menge. Enthält M die Zahl 0 und für jede in M enthaltene Zahl n auch ihren Nachfolger n', so ist die Menge der natürlichen Zahlen eine Teilmenge von M:
$$\forall M : (0 \in M \land (n \in M) \Rightarrow (n' \in M)) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq M$$

[8] nach Giuseppe Peano (1858-1932)

[9] Unter dem Nachfolger n' einer Zahl n verstehen wir im Kontext dieser Definition $n + 1$

Es gibt verschiedene Formulierungen der Peano-Axiome denen man begegnet. Eine Weitere wäre beispielsweise:

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. Sei $n \in \mathbb{N}$, so hat n genau einen Nachfolger n' mit $n' \neq 1$ und $n' \in \mathbb{N}$
3. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ voneinander verschiedene natürliche Zahlen, so sind ihre Nachfolger n' bzw. m' ebenfalls voneinander verschieden ($n \neq m \Rightarrow n' \neq m'$)
4. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$. Erfüllt M die beiden Eigenschaften
   - $1 \in M$
   - Sei $n \in M$, so ist der Nachfolger n' von n ebenfalls in M ($n \in M \Rightarrow n' \in M$)

   so gilt: $M = \mathbb{N}$

Wir sehen, dass diese Version der Axiome die Zahl 0 nicht zu den natürlichen Zahlen zählt. In weiterer Folge werden wir jedoch die Zahl 0 zu $\mathbb{N}$ hinzunehmen.[10]

[10] Falls doch einmal notwendig werden wir $\mathbb{N}^*$ für $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ verwenden.

Definition 3.1.2 (Ganze Zahlen)**.** Basierend auf der Menge der natürlichen Zahlen definieren wir die Menge der **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$:
$$\mathbb{Z} = \{z | z \in \mathbb{N} \lor -z \in \mathbb{N}\}$$

Definition 3.1.3 (Rationale Zahlen)**.** Basierend auf der Menge der natürlichen Zahlen und der ganzen Zahlen definieren wir die Menge der **rationalen Zahlen** $\mathbb{R}$:
$$\mathbb{R} = \{r | r = \frac{z}{n}, z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\}$$

Die Mächtigkeit von $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

$\aleph_0$

3.2 Irrationale Zahlen $\mathbb{R}$

c

3.3 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$