

Mathematik für 1nf0rmatiker:innen

Tobias Prisching

Fassung vom 24. September 2021

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
Symbole	4
Logik	5
1 Grundlagen der Logik	6
2 Beweistechniken	7
2.1 Arten von Beweisen	7
Mengen und Relationen	8
3 Mengenlehre	9
3.1 Mengen	9
3.2 Teilmenge und Obermenge	9
3.3 Potenzmenge	9
3.4 Operationen mit Mengen	10
3.5 Mächtigkeit	11
4 Spezielle Mengen	12
4.1 Natürliche (\mathbb{N}), Ganze (\mathbb{Z}) und Rationale (\mathbb{Q}) Zahlen	12
4.2 Reelle Zahlen \mathbb{R}	13
4.3 Komplexe Zahlen \mathbb{C}	13
5 Relationen	14
5.1 Grundlegendes	14
5.2 Äquivalenzrelationen	14
5.2.1 Äquivalenzklassen	14
5.2.2 Einschub: Teilbarkeit	14
5.2.3 Restklassen	15
5.3 Ordnungsrelationen	15
Funktionale Abhängigkeiten	17
6 Abbildungen	18
Algebra	19
7 Algebraische Strukturen	20
7.1 Gruppen	20
7.1.1 Permutationsgruppen	21
7.1.2 Restklassen als Gruppen	21
7.2 Ringe	21
7.2.1 Polynomringe	21
7.3 Körper	21

Vorwort

Hier wird das Vorwort stehen.

Symbole

Symbol	Bedeutung	Beispiel
w, \top	logisches wahr (Tautologie)	-
f, \perp	logisches falsch (Antilogie)	-
\neg	logische Negation	$\neg A$
\wedge	logische Konjunktion (Und/AND)	$A \wedge B$
\vee	logische Disjunktion (Oder/OR)	$\text{ToBe} \vee \neg \text{ToBe}$
$\tilde{\wedge}$	logisches Nicht-Und (NAND)	$A \tilde{\wedge} B$
$\tilde{\vee}$	logisches Nicht-Oder (NOR)	$A \tilde{\vee} B$
$\underline{\vee}$	logisches exklusives Oder (XOR)	$A \underline{\vee} B$
\Rightarrow	logische Implikation	$A \Rightarrow B$
\Leftrightarrow	logische Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$

Tabelle 0.1: Logik Symbole

Symbol	Bedeutung	Beispiel
\in	ist Element von	$x \in M$
\notin	ist nicht Element von	$y \notin M$
\subseteq	ist Teilmenge von	$N \subseteq M$
$\subset, \subsetneq, \subsetneq$	ist echte Teilmenge von	$N \subset M$
$\not\subseteq$	ist nicht Teilmenge von	$N \not\subseteq M$
\supseteq	ist Obermenge von	$M \supseteq N$
$\supset, \supsetneq, \supsetneq$	ist echte Obermenge von	$M \supset N$
$\not\supseteq$	ist nicht Obermenge von	$M \not\supseteq N$
\mathcal{P}	Potenzmenge	$\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$
\cap	Durchschnitt	$M \cap N$
\cup	Vereinigung	$M \cup N$
\setminus	Differenz	$M \setminus N$
\overline{M}, M^c	Komplement	$M^c = \overline{M}$

Tabelle 0.2: Mengen Symbole

Logik

1 Grundlagen der Logik

Definition 1.0.1 (Aussage). Unter einer **Aussage** verstehen wir einen Satz der natürlichen Sprache, welchem entweder der Wahrheitswert wahr (w , \top) oder falsch (f , \perp) zugeordnet werden kann.

Definition 1.0.2 (Logische Operatoren). Mithilfe von **logischen Operatoren** (auch **Verknüpfungen**) können aus vorhandenen Aussagen neue Aussagen gebildet werden. Seien A und B Aussagen, so definieren wir folgende logische Operatoren:

Negation
(Nicht/NOT)

A	$\neg A$
f	w
w	f

Konjunktion
(Und/AND)

A	B	$A \wedge B$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Disjunktion
(Oder/OR)

A	B	$A \vee B$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

Implikation

A	B	$A \Rightarrow B$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Aufbauend auf diesen Operatoren lassen sich neue Verknüpfungen definieren, wie beispielsweise das Nicht-Und/-Oder, das exklusive Oder und die Äquivalenz:

Nicht-Und
(NAND)

A	B	$A \tilde{\wedge} B$
f	f	w
f	w	w
w	f	w
w	w	f

Nicht-Oder
(NOR)

A	B	$A \tilde{\vee} B$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	f

Exklusive Oder
(XOR)

A	B	$A \veebar B$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	f

Äquivalenz

A	B	$A \Leftrightarrow B$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Definition 1.0.3 (Atomare Aussage). Unter einer **atomaren Aussage** verstehen wir eine Aussage welche keine logischen Verknüpfungen enthält.

Definition 1.0.4 (Tautologie). Unter einer **Tautologie** verstehen wir eine Aussage welche immer *wahr* ist.¹

Definition 1.0.5 (Antilogie, Kontradiktion). Unter einer **Antilogie** (auch **Kontradiktion**) verstehen wir eine Aussage welche immer *falsch* ist.²

¹ Beispiel: Die Aussage $A \vee \neg A$ ist immer wahr da immer entweder A oder $\neg A$ wahr ist

² Beispiel: Die Aussage $A \wedge \neg A$ ist immer falsch da A und $\neg A$ nie gleichzeitig wahr sind

2 Beweistechniken

Definition 2.0.1 (Mathematische Aussage). Unter einer **mathematischen Aussage** (auch **Satz** genannt) verstehen wir im Normalfall ein Konstrukt der Form $v \Rightarrow f$, bestehend aus einer Voraussetzung v und einer Folgerung f , welche beide ebenfalls wiederum Aussagen (auch mathematische Aussagen) sein können.

Definition 2.0.2 (Mathematischer Beweis). Unter einem **mathematischen Beweis** (meist auch nur **Beweis**) verstehen wir den Nachweis dass der zu einem mathematischen Satz korrespondierende logische Ausdruck immer wahr ist, d.h. eine Tautologie ist.

Definition 2.0.3 (Axiom). Unter einem **Axiom** verstehen wir eine Aussage welche *unbewiesen* als wahr angenommen wird.³

Definition 2.0.4 (Axiomensystem). Unter einem **Axiomensystem** verstehen wir eine Ansammlung von Axiomen welche folgende Eigenschaften erfüllt:

- So wenig und einfache Axiome wie möglich welche genügen um eine Theorie vollständig zu beschreiben
- Die Axiome des Axiomensystems sind voneinander unabhängig
- Die Axiome des Axiomensystems müssen für sich selbst und untereinander widerspruchsfrei sein

³ Axiome dienen uns als Grundbausteine für Beweise usw. die wir allerdings selbst nicht beweisen können und daher als wahr annehmen *müssen*

2.1 Arten von Beweisen

Definition 2.1.1 (Direkter Beweis). Beim **direkten Beweis** nehmen wir an, dass die Voraussetzung v wahr ist und wir versuchen, durch Vereinigung von wahren Implikationen zur Aussage " f ist wahr" zu kommen.

$$((v \Rightarrow v_1) \wedge (v_1 \Rightarrow v_2) \wedge \dots (v_n \Rightarrow f)) \Rightarrow (v \Rightarrow f)$$

Definition 2.1.2 (Beweis durch Kontradiktion). Beim **Beweis durch Kontradiktion** nehmen wir an, dass die Folgerung f falsch ist und versuchen dann zu dem Schluss zu kommen, dass dies nur der Fall sein kann wenn die Voraussetzung v falsch ist.⁴

$$(v \Rightarrow f) \Leftrightarrow (\neg f \Rightarrow \neg v)$$

Definition 2.1.3 (Indirekter Beweis). Beim **indirekten Beweis** (auch **Beweis durch Widerspruch**) nehmen wir an, dass die Voraussetzung v wahr, aber die Folgerung f falsch ist. Nun versuchen wir zu zeigen, dass es sich dabei um einen (logischen) Widerspruch handelt, wodurch der einzige Fall in dem $v \Rightarrow f$ falsch ist ausgeschlossen werden kann und die (logische) Aussage zur Tautologie wird.

⁴ Dies entspricht einem direkten Beweis mit Voraussetzung $\neg f$ und Folgerung $\neg v$

Definition 2.1.4 (Vollständige Induktion). Bei der **vollständigen Induktion**

Mengen und Relationen

3 Mengenlehre

3.1 Mengen

Definition 3.1.1 (Menge). Unter einer **Menge** verstehen wir eine beliebige Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.⁵

⁵ Definiton nach Georg Cantor (1845-1918)

Eigenschaften und Regeln

- Mengen enthalten Objekte (= Elemente einer Menge) **ohne** einer vorgegebenen Reihenfolge
- Mengen selbst sind Objekte und können folglich in Mengen enthalten sein
- Explizite Notation: $M = \{0, 1, \pi, \{i\}\}$
- Implizite Notation: $\mathbb{N} = \{x | x \text{ ist eine natürliche Zahl}\}$
- Objekt x ist Element der Menge M : $x \in M$
- Ein Objekt innerhalb einer Menge gefasst ist ungleich dem Objekt selbst: $\{0\} \neq 0$
- $M = N \Leftrightarrow M$ und N enthalten die gleichen Elemente
- Leere Menge: $\emptyset = \{\}$

3.2 Teilmenge und Obermenge

Definition 3.2.1 (Teilmenge). Unter einer **Teilmenge** der Menge M verstehen wir eine Menge N von der jedes Element in M enthalten ist: $N \subseteq M$.

Ist N keine Teilmenge von M (d.h., N enthält mindestens ein Objekt x sodass gilt $x \in N$ und $x \notin M$), so schreiben wir: $N \not\subseteq M$

Definition 3.2.2 (Echte Teilmenge). Unter einer **echten Teilmenge** der Menge M verstehen wir eine Menge N von der jedes Element in M enthalten ist *und* $N \neq M$ gilt: $N \subset M$ (auch $N \subsetneq M$ oder $N \subsetneqq M$).

Definition 3.2.3 (Obermenge). Analog zur Teilmenge verstehen wir bei der **Obermenge** von N eine Menge M die jedes Element von N enthält: $M \supseteq N$

Definition 3.2.4 (Echte Obermenge). Analog zur echten Teilmenge verstehen wir bei der **echten Obermenge** von N eine Menge M die jedes Element von N enthält *und* $N \neq M$ gilt: $M \supset N$ (auch $M \supsetneq N$ oder $M \supsetneqq N$)

Eigenschaften und Regeln

- Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge: $\emptyset \subseteq M$
- Die Gleichheit von Mengen lässt sich über Teilmengen ausdrücken: Gilt $N \subseteq M$ und $M \subseteq N$, so folgt $M = N$
- Ist N eine (echte) Teilmenge von M ($N \subseteq M$ bzw. $N \subsetneq M$), so ist M (echte) Obermenge von N ($M \supseteq N$ bzw. $M \supsetneq N$)

3.3 Potenzmenge

Definition 3.3.1 (Potenzmenge). Unter der **Potenzmenge** $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M verstehen wir eine Menge welche alle möglichen Teilmengen von M enthält.⁶ Es gilt: $M \in \mathcal{P}(M)$

⁶ Für $M = \{0, 1\}$ ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, M\}$

3.4 Operationen mit Mengen

Definition 3.4.1 (Durchschnitt, Vereinigung, Differenz). Seien M und N Mengen. Wir definieren folgende Operationen:

- **Durchschnitt:** Alle Elemente die in M und N enthalten sind:

$$M \cap N = \{x | x \in M \wedge x \in N\}$$

- **Vereinigung:** Alle Elemente die in M oder N enthalten sind:

$$M \cup N = \{x | x \in M \vee x \in N\}$$

- **Differenz:** Alle Elemente die in M aber nicht in N enthalten sind:

$$M \setminus N = \{x | x \in M \wedge x \notin N\}$$

- **Komplement:** Ist $N \subseteq M$, so ist $M \setminus N$ das Komplement von N in M : \overline{N}^M . Ist bekannt innerhalb welcher Menge das Komplement gebildet wird kann auch \overline{N} oder N^C geschrieben werden.

Definition 3.4.2 (Unendlicher Durchschnitt, Unendliche Vereinigung). Sei I eine unendliche Menge von Indizes, sodass es für jedes $i \in I$ eine Menge M_i gibt. Wir definieren folgende Operationen:

- **Unendlicher Durchschnitt:** Alle Elemente die in jeder Menge M_i enthalten sind:

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \{x | x \in M_i \forall i \in I\}$$

- **Unendliche Vereinigung:** Alle Elemente die in mindestens einer Menge M_i enthalten sind:

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x | \exists i \in I | x \in M_i\}$$

Ist I endlich (betrachten wir im folgenden Beispiel den konkreten Fall $I = \{1, \dots, n\}$), so handelt es sich um den Durchschnitt/die Vereinigung einer endlichen Anzahl von Mengen, welche gleich unserer bisherigen Definition dieser Operationen ist:

$$\bigcup_{i \in I} M_i = M_1 \cup \dots \cup M_n = \bigcup_{i=1}^n M_i$$

(Analog für Durchschnitt)

Definition 3.4.3 (Kartesisches Produkt). Unter dem **kartesischen Produkt** zweier Mengen M und N verstehen wir eine Menge aller *geordneter Paare*⁷ (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$:

$$M \times N = \{(m, n) | m \in M, n \in N\}$$

Eigenschaften und Regeln

- Die Differenzmenge einer Menge M mit der leeren Menge ist die Menge selbst:
 $M \setminus \emptyset = M$

- Kommutativgesetze:

$$M \cup N = N \cup M$$

$$M \cap N = N \cap M$$

- Assoziativgesetze:

$$(M \cup N) \cup O = M \cup (N \cup O)$$

$$(M \cap N) \cap O = M \cap (N \cap O)$$

⁷ Die Reihenfolge der Elemente des Paares spielt (im Gegensatz zu wie es bei Mengen der Fall ist) eine Rolle: $(0, 1) \neq (1, 0)$

Aber: $\{0, 1\} = \{1, 0\}$
→ Paare sind keine Mengen

- Distributivgesetze:

$$M \cap (N \cup O) = (M \cap N) \cup (M \cap O)$$

$$M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$$

- Rechenregeln der Komplementbildung:

- $\overline{\overline{M}} = M$

- $M \subseteq N \Rightarrow \overline{N} \subseteq \overline{M}$

- $M \setminus N = M \cap \overline{N}$

- $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$

- $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$

- Im Allgemeinen gilt $M \times N = N \times M$ **nicht**

- $M \times \emptyset = \emptyset$

3.5 Mächtigkeit

Definition 3.5.1 (Mächtigkeit, Kardinalität, Kardinalzahl). Unter der **Mächtigkeit** (auch **Kardinalität**) einer Menge M verstehen wir die Anzahl der in M enthaltenen Elemente (die **Kardinalzahl**), welche als $|M|$ notiert wird.

Definition 3.5.2 (gleichmächtig). Gilt $|M| = |N|$, so nennen wir die beiden Mengen M und N **gleichmächtig** (wir sagen auch, sie haben die gleiche Kardinalität). Des Weiteren halten wir fest, dass zwei Mengen M und N genau dann gleichmächtig sind, wenn es eine bijektive Abbildung⁸ $f : M \rightarrow N$ zwischen diesen Mengen gibt.

⁸ Siehe Kapitel 6

4 Spezielle Mengen

4.1 Natürliche (\mathbb{N}), Ganze (\mathbb{Z}) und Rationale (\mathbb{Q}) Zahlen

Definition 4.1.1 (Natürliche Zahlen). Wir definieren die Menge \mathbb{N} der **natürlichen Zahlen** mithilfe des folgenden Axiomensystems, bekannt als die *Peano-Axiome*⁹:

⁹ nach Giuseppe Peano (1858-1932)

1. Die Zahl 0 ist eine natürliche Zahl:

$$0 \in \mathbb{N}$$

2. Sei n eine natürliche Zahl, so hat n genau einen Nachfolger n' ¹⁰ welcher ebenfalls eine natürliche Zahl ist:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n' \in \mathbb{N}$$

¹⁰ Unter dem Nachfolger n' einer Zahl n verstehen wir im Kontext dieser Definition $n + 1$

3. Sei n eine natürliche Zahl, so hat n genau einen Nachfolger n' ungleich 0:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n' \neq 0$$

4. Seien n und m natürliche Zahlen und n' und m' ihre respektiven Nachfolger, so gilt dass falls n' und m' gleich sind auch n und m gleich sind:

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : n' = m' \Rightarrow n = m$$

5. Sei M eine Menge. Enthält M die Zahl 0 und für jede in M enthaltene Zahl n auch ihren Nachfolger n' , so ist die Menge der natürlichen Zahlen eine Teilmenge von M :

$$\forall M : (0 \in M \wedge (n \in M \Rightarrow (n' \in M))) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq M$$

Es gibt verschiedene Formulierungen der Peano-Axiome denen man begegnet. Eine Weitere wäre beispielsweise:

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. Sei $n \in \mathbb{N}$, so hat n genau einen Nachfolger n' mit $n' \neq 1$ und $n' \in \mathbb{N}$
3. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ voneinander verschiedene natürliche Zahlen, so sind ihre Nachfolger n' bzw. m' ebenfalls voneinander verschieden ($n \neq m \Rightarrow n' \neq m'$)
4. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$. Erfüllt M die beiden Eigenschaften
 - $1 \in M$
 - Sei $n \in M$, so ist der Nachfolger n' von n ebenfalls in M ($n \in M \Rightarrow n' \in M$)

so gilt: $M = \mathbb{N}$

Wir sehen, dass diese Version der Axiome die Zahl 0 nicht zu den natürlichen Zahlen zählt. In weiterer Folge werden wir jedoch die Zahl 0 zu \mathbb{N} hinzunehmen.¹¹

¹¹ Falls doch einmal notwendig werden wir \mathbb{N}^* für $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ verwenden.

Definition 4.1.2 (Ganze Zahlen). Basierend auf der Menge der natürlichen Zahlen definieren wir die Menge der **ganzen Zahlen** \mathbb{Z} :

$$\mathbb{Z} = \{z | z \in \mathbb{N} \vee -z \in \mathbb{N}\}$$

Definition 4.1.3 (Rationale Zahlen). Basierend auf der Menge der natürlichen Zahlen und der ganzen Zahlen definieren wir die Menge der **rationalen Zahlen** \mathbb{R} :

$$\mathbb{R} = \{r | r = \frac{z}{n}, z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\}$$

Die Mächtigkeit von \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{Q}

Definition 4.1.4 (abzählbar unendlich). Intuitiv stelle wir fest dass es *unendlich* viele natürliche Zahlen gibt, da es für jede beliebige natürliche Zahl n einen Nachfolger $n + 1$ gibt welcher ebenfalls eine natürliche Zahl ist und ebenfalls einen Nachfolger hat usw. Folglich hat die Menge \mathbb{N} keine endliche Kardinalität, daher definieren wir $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ (gesprochen: Aleph Null) und sagen, dass \mathbb{N} **abzählbar unendlich** ist.

Nun zeigen wir, basierend auf den Definition 3.5.2 und 4.1.4, dass auch die Mengen \mathbb{Z} und \mathbb{Q} abzählbar unendlich sind. Dazu suchen wir uns bijektive Abbildungen¹² $f_Z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ und $f_Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ um zu zeigen dass \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{Q} gleichmächtig sind:

¹² Siehe Kapitel 6

- $f_Z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$: Eine solche Funktion wäre z.B.: $f_Z(0) = 0, f_Z(1) = 1, f_Z(2) = -1$, bei der wir 0 auf 0, die ungeraden Elemente von \mathbb{N} auf die positiven Elemente von \mathbb{Z} , und alle weiteren geraden Elemente aus \mathbb{N} (größer 0 natürlich) auf die negativen Elemente von \mathbb{Z} abbilden. Es folgt: $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$
- $f_Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$: Wir beginnen damit, Brüche systematisch in folgendem Schema aufzuschreiben und nacheinander über die eingezeichneten Diagonalen abzuzählen, wobei ungekürzte Brüche wie $\frac{2}{2}$ übersprungen werden:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & \nearrow & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} & \dots \\
 & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \\
 \frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & \dots \\
 \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
 \frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & \dots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
 \end{array}$$

Wir erhalten dadurch folgende Abbildung:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 1 & \frac{1}{2} & 2 & 3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \dots
 \end{array}$$

Des Weiteren bilden wir 0 auf 0 ab und fügen für jedes Bild zusätzlich dessen negatives Gegenstück hinzu, ähnlich wie bei der Funktion f_Z :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & -2 & 3 & -3 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \dots
 \end{array}$$

Durch diese Vorschrift¹³ erhalten wir die bijektive Abbildung f_Q , aus welcher folgt: $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

¹³ Bekannt als *Cantors erstes Diagonalargument*

4.2 Reelle Zahlen \mathbb{R}

Kommt später... c

Definition 4.2.1 (Reelle Zahlen).

Definition 4.2.2 (überabzählbar unendlich). c

4.3 Komplexe Zahlen \mathbb{C}

Kommt später...

5 Relationen

5.1 Grundlegendes

Definition 5.1.1 ((2-stellige) Relation). Seien M und N Mengen und R eine Teilmenge des kartesischen Produkt der beiden ($R \subseteq M \times N$). Nun verstehen wir unter R eine **Relation** auf $M \times N$. Für den Spezialfall $M = N$ heißt R Relation auf M .¹⁴

Dabei gilt es vor allem zu beachten, dass eine Relation für ein Paar von Werten (= ein Element des kartesischen Produkts) nur entweder zutreffen kann oder nicht - entweder es gibt eine Relation zwischen den Werten oder nicht. Wir können eine Relation also als eine Aussagevorschrift über das Verhältnis zwischen diesen Werten betrachten.

Um auszudrücken dass beispielsweise die Elemente 0 und 1 die Relation $<$ erfüllen können wir eine der folgenden Schreibweisen verwenden: $R_{<}(0, 1)$ ¹⁵ oder $(0, 1) \in R_{<}$ oder schlicht $0 < 1$.

Definition 5.1.2 (n -stellige Relation). Basierend auf der vorangehenden Definition von 2-stelligen Relationen definieren wir diese nun für n Stellen: Seien M_1, \dots, M_n Mengen und $R \subseteq M_1 \times \dots \times M_n$ dann heißt R **n -stellige Relation** auf $M_1 \times \dots \times M_n$.

¹⁴ Der Punkt dabei ist, dass die Teilmenge R beliebig definiert werden kann um verschiedenste Relationen bilden zu können.

¹⁵ Es kann auch nur $R(0, 1)$ geschrieben werden, vorausgesetzt die Bezeichnung R ist eindeutig

5.2 Äquivalenzrelationen

Definition 5.2.1 (Äquivalenzrelation). Unter einer **Äquivalenzrelation**¹⁶ verstehen wir eine Relation R auf einer Menge M welche folgende Eigenschaften erfüllt:

- **Reflexivität:** Für alle Elemente m aus M gilt, dass diese mit sich selbst in Relation stehen:

$$\forall m \in M : R(m, m)$$

- **Symmetrie:** Für alle Paare von Elementen (m_1, m_2) aus $M \times M$ gilt, dass falls m_1 und m_2 in Relation stehen ($R(m_1, m_2)$) auch m_2 und m_1 in Relation stehen ($R(m_2, m_1)$):

$$\forall m_1, m_2 \in M : R(m_1, m_2) \Leftrightarrow R(m_2, m_1)$$

- **Transitivität:** Für alle Elemente m_1, m_2 und m_3 aus M gilt, dass falls m_1 und m_2 in Relation stehen ($R(m_1, m_2)$) und m_2 und m_3 in Relation stehen ($R(m_2, m_3)$) auch m_1 und m_3 in Relation stehen ($R(m_1, m_3)$):

$$\forall m_1, m_2, m_3 \in M : (R(m_1, m_2) \wedge R(m_2, m_3)) \Rightarrow R(m_1, m_3)$$

¹⁶ wie bspw. $R_{=}$

5.2.1 Äquivalenzklassen

Definition 5.2.2 (Äquivalenzklasse). Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M und $m \in M$. Nun verstehen wir unter einer **Äquivalenzklasse** $[m]$ eine Menge von Elementen welche zu m in Relation stehen (auch, *die zu m äquivalent sind*):

$$[m] = \{n \in M | R(n, m)\}$$

5.2.2 Einschub: Teilbarkeit

Definition 5.2.3 (teilbar, Quotient). Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ mit $z_2 \neq 0$. Wir sagen dass z_1 durch z_2 **teilbar** ist (geschrieben $z_2 | z_1$, " z_2 teilt z_1 ") wenn ein **Quotient** $q \in \mathbb{Z}$ existiert sodass $z_1 = z_2 \cdot q$ gilt.

Definition 5.2.4 (kongruent modulo n). Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Die beiden Elemente z_1, z_2 nennen wir **kongruent modulo n** wenn $z_1 - z_2$ durch n ohne Rest teilbar ist, geschrieben $z_1 \equiv z_2 \pmod{n}$.

Satz 5.2.1. Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$. Die beiden Elemente z_1, z_2 sind genau dann kongruent modulo n mit $n \in \mathbb{N}^*$ (also $z_1 \equiv z_2 \pmod{n}$) wenn z_1 und z_2 nach der Division mit n beide den gleichen Rest haben (also $z_1 \bmod n = z_2 \bmod n$).

Beweis. Wir wollen zeigen:

$$z_1 \equiv z_2 \pmod{n} \Leftrightarrow z_1 \bmod n = z_2 \bmod n$$

Zeigen wir zunächst " \Leftarrow ": Dazu schreiben wir z_1 und z_2 um: $z_1 = q_1 \cdot n + r$ und $z_2 = q_2 \cdot n + r$ mit den Quotienten q_1, q_2 und dem Rest r (aus $z_1 \bmod n = z_2 \bmod n$ folgt dass beide den gleichen Rest r haben müssen). Folglich lautet die Differenz $z_1 - z_2$ der beiden Elemente: $z_1 - z_2 = q_1 \cdot n + r - (q_2 \cdot n + r) = q_1 \cdot n - q_2 \cdot n = (q_1 - q_2) \cdot n$. Diese Differenz ist durch n teilbar, also folgt $z_1 \equiv z_2 \pmod{n}$.

Nun zeigen wir den " \Rightarrow " Teil: Schreiben wir z_1 und z_2 erneut um: $z_1 = q_1 \cdot n + r_1$ und $z_2 = q_2 \cdot n + r_2$ mit den Quotienten q_1, q_2 und den Resten r_1, r_2 (aus $z_1 \equiv z_2 \pmod{n}$ ist nicht direkt ersichtlich dass beide den gleichen Rest haben müssen). Des Weiteren wissen wir dass die Differenz $z_1 - z_2$ ein Vielfaches von n ist: $z_1 - z_2 = q \cdot n$. Wir können die Differenz aber auch so schreiben: $z_1 - z_2 = q_1 \cdot n + r_1 - q_2 \cdot n + r_2 = (q_1 - q_2) \cdot n + (r_1 - r_2) (= q \cdot n)$. Da $(q_1 - q_2) \cdot n$ offensichtlich ein Vielfaches von n ist, muss auch $(r_1 - r_2)$ ein Vielfaches von n sein: $r_1 - r_2 = q_r \cdot n$. Durch Umformen erhalten wir: $r_1 = q_r \cdot n + r_2$. Da aber $r_1 < n$ sein muss (und der Rest r_2 positiv sein muss), muss $q_r = 0$ gelten, woraus folgt: $r_1 = 0 \cdot n + r_2 = r_2$. Da wir die Reste durch Anwendung von Modulo erhalten, folgt: $z_1 \bmod n = z_2 \bmod n$. \square

Satz 5.2.2. Die Relation \equiv ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis.

- Reflexivität: $z_1 \equiv z_1 \pmod{n}$ ist offensichtlich wahr (ob $z_1 - z_1$ oder $z_1 - z_1$ ¹⁷ durch n teilbar ist macht keinen Unterschied)
- Symmetrie: Aus $z_1 \equiv z_2 \pmod{n}$ folgt $z_2 \equiv z_1 \pmod{n}$, da dadurch schlichtweg das Vorzeichen der Differenz der Elemente (und folglich auch des Quotienten) umgedreht wird, der Rest aber unverändert bleibt.
- Transitivität: Dass wenn $z_1 \equiv z_2 \pmod{n}$ und $z_2 \equiv z_3 \pmod{n}$ wahr sind auch $z_1 \equiv z_3 \pmod{n}$ wahr ist, lässt sich dank Satz 5.2.1 einfach zeigen: z_1 und z_2 haben offensichtlich nach der Division mit n den gleichen Rest ($z_1 \bmod n = z_2 \bmod n$), gleiches gilt auch für z_2 und z_3 . Wenn $(z_1 \bmod n) = (z_2 \bmod n)$ und $(z_2 \bmod n) = (z_3 \bmod n)$ ¹⁸, dann muss auch $(z_1 \bmod n) = (z_3 \bmod n)$ gelten, woraus (dank Satz 5.2.1) folgt, dass $z_1 \equiv z_3 \pmod{n}$ wahr ist.

¹⁷ Nein, kein Tippfehler

¹⁸ Klammern gesetzt um " $=$ " als Äquivalenzrelation hervorzuheben

\square

5.2.3 Restklassen

Definition 5.2.5 (Restklasse). Sei $n \in \mathbb{N}^*$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Nun bilden jene Elemente welche zu m kongruent modulo n sind eine Äquivalenzklasse $[m]_n$, eine sogenannte **Restklasse**.

5.3 Ordnungsrelationen

Definition 5.3.1 (partielle Ordnungsrelation). Unter einer **partiellen Ordnungsrelation**¹⁹ verstehen wir eine Relation R auf einer Menge M welche folgende Eigenschaften erfüllt:

¹⁹ wie bspw. R_{\leq}

- Reflexivität (Siehe 5.2.1)
- Transitivität (Siehe 5.2.1)
- **Anti-Symmetrie:** Für alle Paare von Elementen (m_1, m_2) aus $M \times M$ gilt, dass falls m_1 und m_2 und auch m_2 und m_1 in Relation stehen ($R(m_1, m_2)$ und $R(m_2, m_1)$), m_1 und m_2 gleich sein müssen:

$$\forall m_1, m_2 \in M : (R(m_1, m_2) \wedge R(m_2, m_1)) \Rightarrow m_1 = m_2$$

Definition 5.3.2 (totale Ordnungsrelation). Unter einer **totalen Ordnungsrelation** verstehen wir eine Relation R auf einer Menge M welche neben den Eigenschaften der partiellen Ordnungsrelation auch die folgende Eigenschaft erfüllt:

- **Totalität:** Für alle Paare von Elementen m_1, m_2 mit $m_1 \in M$ und $m_2 \in M$ gilt, dass entweder m_1 und m_2 in Relation stehen oder aber m_2 und m_1 :

$$\forall m_1, m_2 \in M : R(m_1, m_2) \vee R(m_2, m_1)$$

Funktionale Abhängigkeiten

6 Abbildungen

Definition 6.0.1 (Abbildung, Funktion). Nehmen wir zwei Mengen M und N . Unter einer **Abbildung** (auch, und viel häufiger, **Funktion** genannt)

$$f : M \rightarrow N, m \mapsto f(m)$$

verstehen wir nun die Zuordnung *genau eines* Elements $n \in N$ zu jedem Element $m \in M$.²⁰

²⁰ In diesem Kontext:
" \rightarrow " für Mengen
" \mapsto " für Elemente

Definition 6.0.2 (Definitions-*menge*). Sei $f : M \rightarrow N, m \mapsto f(m)$ eine Abbildung, dann nennen wir $D(f) = M$ **Definitions-*menge*** von f .

Definition 6.0.3 (Argument). Sei $f : M \rightarrow N, m \mapsto f(m)$ eine Abbildung, dann nennen wir $m \in M$ das **Argument** von f .

Definition 6.0.4 (Bildmenge). Sei $f : M \rightarrow N, m \mapsto f(m)$ eine Abbildung, dann nennen wir

$$f(M) = \{n \in N \mid \exists m \in M : n = f(m)\}$$

Definition 6.0.5 (Bild, Urbild). Sei $f : M \rightarrow N, m \mapsto f(m)$ eine Abbildung, $m \in M$, $n \in N$ und $n = f(m)$. Dann nennen wir n das **Bild** von m und m das **Urbild** von n . Weiters sei $O \subseteq M$ und $P \subseteq N$. Dann heißt die Menge der Bilder von $o \in O$ **Bild von O** und die Menge der Urbilder von $p \in P$ **Urbild von P** :

Definition 6.0.6 (Injektiv, Surjektiv, Bijektiv). Sei $f : M \rightarrow N, m \mapsto f(m)$ eine Abbildung. So nennen wir f

- **Injektiv**: Für jedes Paar $m_1, m_2 \in M$ gilt, dass wenn die Bilder von m_1 und m_2 gleich sind, auch m_1 und m_2 gleich sind:

$$\forall m_1, m_2 \in M : (f(m_1) = f(m_2)) \Rightarrow m_1 = m_2$$

- **Surjektiv**: Für jedes $n \in N$ gibt es ein $m \in M$ sodass $f(m) = n$:

$$\forall n \in N : \exists m \in M : f(m) = n$$

- **Bijektiv**: Wenn f injektiv und surjektiv ist

Definition 6.0.7 (Umkehrabbildung). Sei $f : M \rightarrow N, m \mapsto f(m)$ eine bijektive Abbildung. Nun definieren wir die sogenannte **Umkehrabbildung**

$$f^{-1} : N \rightarrow M, n \mapsto m$$

mit $f^{-1}(n) = m$ wenn $f(m) = n$.

Algebra

7 Algebraische Strukturen

Definition 7.0.1 (Operation). Unter einer **Operation** verstehen wir eine Abbildung vom kartesischen Produkt einer zugrundeliegenden Menge mit sich selbst in eben diese Menge. Einfacher formuliert handelt es sich dabei um eine Verknüpfung von Elementen.²¹

Definition 7.0.2 (Algebraische Struktur). Unter einer **algebraischen Struktur** verstehen wir eine Menge auf welcher eine oder mehrere Operation(en) definiert ist/sind.

²¹ Addition und Multiplikation sind zwei Beispiele für Operationen

7.1 Gruppen

Definition 7.1.1 (Gruppe, neutrales Element, inverses Element, assoziativ). Unter einer **Gruppe** $(G, *)$ verstehen wir eine Menge G auf welcher eine Operation (Abbildung) $*$: $G \times G \rightarrow G$ definiert ist. Dabei müssen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

- **Neutrales Element:** Es existiert ein $e \in G$ sodass $e * g = g * e = g$ für alle $g \in G$ gilt. Dieses Element e nennen wir neutrales Element in G .
- **Inverses Element:** Für jedes $g \in G$ existiert genau ein eindeutiges Element $g^{-1} \in G$ sodass $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$ gilt. Jedes solche Element g^{-1} nennen wir das inverse Element zu g .
- **Assoziativ:** Es seien $g_1, g_2, g_3 \in G$ beliebig. Gilt für jedes solches Triplet dass $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$, so nennen wir G assoziativ.

Definition 7.1.2 (kommutativ, kommutative Gruppe, abelsche Gruppe). Es sei $(G, *)$ eine Gruppe. Erfüllt $(G, *)$ nun zusätzlich die Eigenschaft

- **Kommutativ:** Für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt, dass $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$

so nennen wir $(G, *)$ eine **kommutative** (oder auch **abelsche**²²) Gruppe.

Satz 7.1.1. Es sei $(G, *)$ eine Gruppe, so gilt für alle $g_1, g_2 \in G$:

- Das inverse Element von $(g_1 * g_2)$ lässt sich folgendermaßen umschreiben:²³

$$(g_1 * g_2)^{-1} = g_2^{-1} * g_1^{-1}$$

Beweis. Wir wollen folgendes zeigen: $(g_1 * g_2) * (g_2^{-1} * g_1^{-1}) = e$. Dazu wenden wir das Assoziativgesetz an: $(g_1 * g_2) * (g_2^{-1} * g_1^{-1}) = g_1 * (g_2 * g_2^{-1}) * g_1^{-1}$. Nun können wir die Eigenschaft des inversen Elements anwenden: $g_2 * g_2^{-1} = e \Rightarrow g_1 * (g_2 * g_2^{-1}) * g_1^{-1} = g_1 * e * g_1^{-1}$. Aufgrund der Eigenschaft des neutralen Elements wissen wir: $g_1 * e = g_1$, woraus folgt: $g_1 * e * g_1^{-1} = g_1 * g_1^{-1}$. Wir wenden erneut die Eigenschaft des inversen Elements an: $g_1 * g_1^{-1} = e$ \square

- Das inverse Element eines Elements $g \in G$ ist eindeutig.

Beweis. Nehmen wir an, es gibt zwei inverse Elemente g^{-1} und \hat{g} zu $g \in G$. Wir wollen zeigen, dass diese beiden inverse Elemente gleich sind: $g^{-1} = \hat{g}$. Wir wissen, dass wir ein Element mit dem neutralen Element erweitern können: $g^{-1} = g^{-1} * e$. Des Weiteren erhalten wir das neutrale Element durch Verknüpfung: $g^{-1} * e = g^{-1} * (g * \hat{g})$. Nun wenden wir das Assoziativgesetz an und erneut die Eigenschaften des inversen und des neutralen Elements: $g^{-1} * (g * \hat{g}) = (g^{-1} * g) * \hat{g} = e * \hat{g} = \hat{g}$ \square

Definition 7.1.3 (Untergruppe). Es sei $(G, *)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$, so ist $(U, *)$ eine **Untergruppe** von G ²⁴, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Für jedes in U enthaltene Element ist auch dessen inverses Element in U .²⁵

$$\forall g \in G : (g \in U) \Rightarrow (g^{-1} \in U)$$

- Die Verknüpfung zweier Elemente aus U ist ebenfalls in U :

$$\forall g_1, g_2 \in G : (g_1, g_2 \in U) \Rightarrow (g_1 * g_2 \in U)$$

²² benannt nach Niels Henrik Abel (1802-1829)

²³ Wichtig: $(g_1 * g_2)^{-1} = g_1^{-1} * g_2^{-1}$ gilt nur in abelschen Gruppen

²⁴ bspw. ist $(\mathbb{Z}, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$

²⁵ Achtung: Der Allquantor \forall besagt *nicht* dass jedes Element von G auch in U ist!

7.1.1 Permutationsgruppen

7.1.2 Restklassen als Gruppen

7.2 Ringe

Definition 7.2.1 (Ring). Unter einem **Ring** (R, \oplus, \odot) verstehen wir eine Menge auf welcher zwei Operation \oplus und \odot definiert sind. Dabei müssen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

- **Kommutative Gruppe:** (R, \oplus) ist eine kommutative Gruppe
- **Assoziativ:** Es seien $r_1, r_2, r_3 \in R$ beliebig. Gilt für jedes solche Triplett dass $r_1 \odot (r_2 \odot r_3) = (r_1 \odot r_2) \odot r_3$, so nennen wir R assoziativ (bezüglich \odot).
- **Distributiv:** Es seien $r_1, r_2, r_3 \in R$ beliebig. Gilt für jedes solche Triplett dass
 - $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$
 - $(b \oplus c) \odot a = (b \odot a) \oplus (c \odot a)$so nennen wir R distributiv.

Definition 7.2.2 (kommutativer Ring). Es sei (R, \oplus, \odot) ein Ring. Erfüllt (R, \oplus, \odot) nun zusätzlich die Eigenschaft

- **Kommutativ (bezüglich \odot):** Für alle $r_1, r_2 \in R$ gilt, dass $r_1 \odot r_2 = r_2 \odot r_1$

so nennen wir (R, \oplus, \odot) einen **kommutativen Ring**.

Definition 7.2.3 (Ring mit Eins, unitärer Ring). Kommt später...

Definition 7.2.4 (Unterring). Kommt später...

7.2.1 Polynomringe

7.3 Körper

Definition 7.3.1 (Körper). Unter einem **Körper** (K, \oplus, \odot) verstehen wir eine Menge K auf welcher zwei Operation \oplus und \odot definiert sind. Dabei müssen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

- **Kommutativer Ring:** (K, \oplus, \odot) ist ein kommutativer Ring
- **"1"-Element:** Es existiert ein Element "1"²⁶ in K sodass $1 \odot k = k \odot 1 = k$ für jedes $k \in K$ mit $k \neq 0$
- **Inverses Element (bezüglich \odot):** Für jedes Element $k \in K$ mit $k \neq 0$ existiert genau ein eindeutiges Element $k^{-1} \in K$ sodass $k^{-1} \odot k = 1$ gilt.

Daraus folgt dass $(K \setminus \{0\}, \odot)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1 ist.

²⁶ "1" statt 1 da es um "die Idee hinter 1 als neutrales Element" und nicht um $1 \in \mathbb{N}$ geht. Dies wird später bspw. bei der Identitätsmatrix verständlicher.