

CP Hausaufgabe 1

Nico Dichter, Florian Giefer

6. Mai 2020

H.1 Elektrostatistische Potential eines dünnen Drahtes

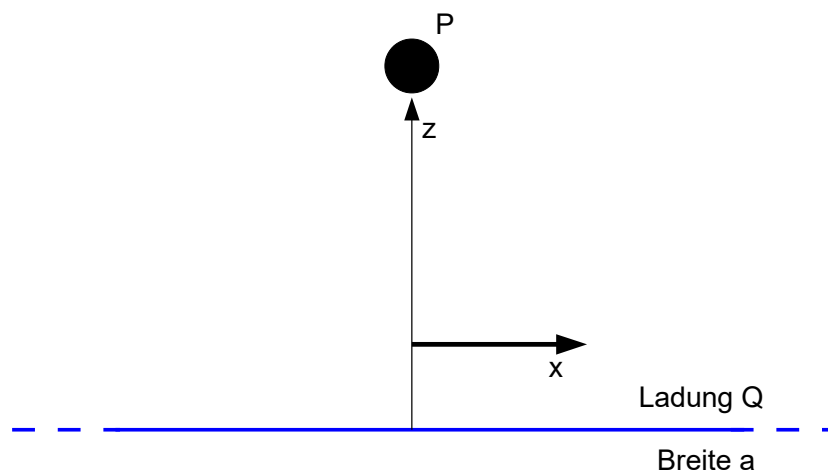


Abbildung 1: Ladungsanordnung für H1 und H2

Wir betrachten eine Punktladung P in einem Potential eines unendlich langen, dünnen Drahtes, welcher entlang der x -Achse liegt. Der Draht besitzt die Gesamtladung Q und Ladungsdichte aus Gleichung 1

H.1.1 Bestimmung der Normierung

Es ist gegeben, dass

$$\varrho(x, y, z) = \alpha \frac{Q}{a} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \delta(y) \delta(z) \quad (1)$$

und die Gesamtladung ist Q . Somit ergibt sich für die Normierung:

$$Q \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x, y, z) dx dy dz \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow Q \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \frac{Q}{a} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx \underbrace{=}_{\text{Gaußintegral}} \alpha \frac{Q}{a} \sqrt{\pi a^2} = \alpha \sqrt{\pi} Q \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad (4)$$

Der Integralausdruck ergibt sich aus der generell bekannten Formel:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Durch einsetzen erhält man:

$$V_1(z) := V(x = 0, y = 0, z) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \alpha \frac{Q}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x'^2}{a^2}\right) \delta(y') \delta(z')}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + (z - z')^2}} dx' dy' dz' \quad (6)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{Q}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx \quad (7)$$

H.1.2 Implementierung des Integrationsverfahrens

Um die Laufzeit des Programms zu verbessern kann die Symmetrie des Integranden ausgenutzt werden:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{Q}{a} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx + \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx \right) \quad (8)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{Q}{a} \left(- \int_{\infty}^0 \frac{\exp\left(-\frac{(-x')^2}{a^2}\right)}{\sqrt{x'^2 + z^2}} dx' + \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx \right) \quad (9)$$

$$= 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{Q}{a} \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx \quad (10)$$

Mit der Parameterlist

$$Q_1 = 1 \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1 \quad (11)$$

ergibt sich somit die zu verwendende Funktion als:

$$V(z) = 2 \frac{1}{a \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx \quad (12)$$

Zur Berechnung des Integrals haben wir das Verfahren der Rombergintegration implementiert, die Berechnung der Trapezsummen in Richtung ∞ haben wir durchgeführt, indem abgebrochen wird, sobald eine nicht mehr signifikante Fläche addiert wird. Wir haben des weiteren eine Abfrage implementiert, die automatisch dafür sorgt, dass bei nicht hinreichender Präzision eine höhere Anzahl an Stufen im Rombergverfahren genutzt wird (Es handelt sich um die Funktion „romberg_converge_check“).

H.1.3 Nähere Betrachtung des Potentials

Wir haben für das Potential eine $\frac{1}{z}$ -Abhängigkeit erwartet, denn die Ladungsverteilung nähert sich einer δ -Distribution für $a \rightarrow 0$ an, da diese auf eine Gesamtladung von Q normiert ist:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' dz' \frac{Q\delta(x')\delta(y')\delta(z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \quad (13)$$

$$V(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|z|} \quad (14)$$

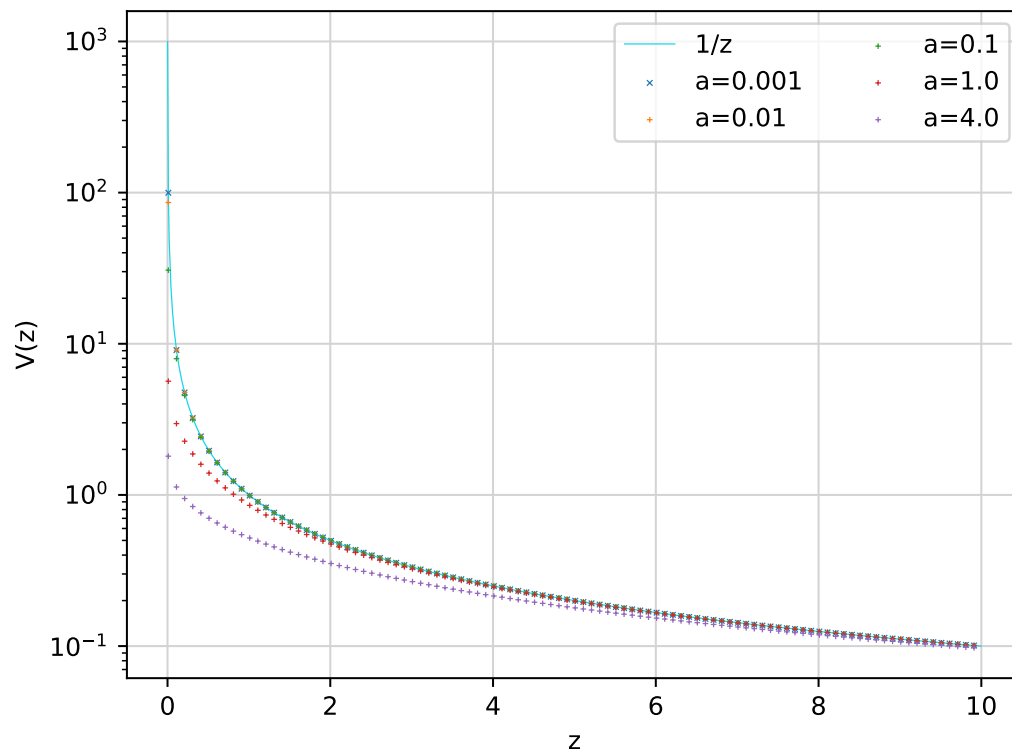


Abbildung 2: Darstellung des elektrischen Potential aus Aufgabenteil H1 für verschiedene Werte von a

Wie erwartet nähert sich das Potential für $a \rightarrow 0$ einer $\frac{1}{z}$ -Abhängigkeit an. Für größere a ist der Wert des Potentials Richtung $z = 0$ grundsätzlich geringer, was wegen der Aufweitung der gaußverteilten Ladungsdichte logisch erscheint.

H.2 Elektrisches Feld

H.2.1 Bestimmung des elektrischen Feldes

Um das elektrische Feld in z -Richtung zu bestimmen ist es notwendig ein Verfahren zur numerischen Ableitung zu implementieren, wir verwenden die symmetrische Methode, da es in diesem Problem keine präferierte Richtung gibt. Wir haben außerdem eine Überprüfung hinzugefügt, damit bei Ableiten nicht die Funktion an der Stelle 0 aufgerufen wird.

H.2.2 Prüfung des Resultats durch analytische Ableitung und numerische Integration

Es gilt für die analytische Ableitung von Gleichung 7:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha Q}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/a^2}}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha Q}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/a^2}}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2z dx \quad (15)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha Q}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/a^2}}{(x^2 + z^2)^{3/2}} z dx \quad (16)$$

Auch bei der hier anfallenden anschließenden numerischen Integration haben wir das Rombergverfahren genutzt. Zur Vereinfachung und aufgrund der gegebenen Parameterlisten haben wir auch hier und in Aufgabenteil H.2.1 die berechneten Größen dimensionslos gewählt und die Symmetrie des Integranden wie in H.1.2 ausgenutzt.

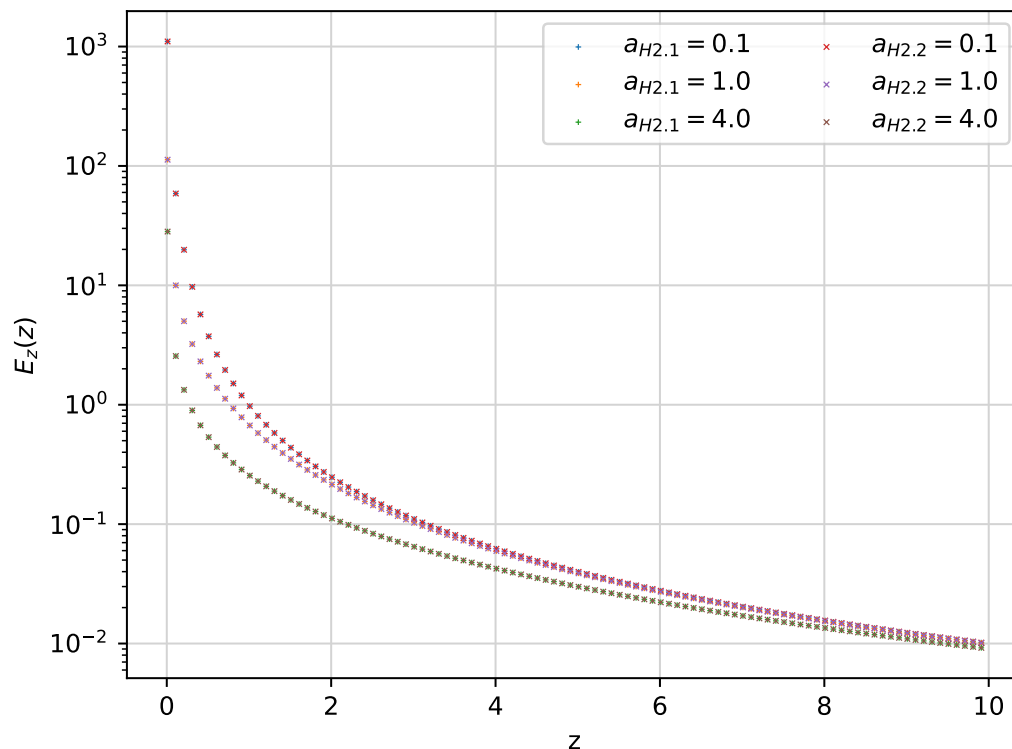


Abbildung 3: Darstellung des elektrischen Feldes aus Aufgabenteil H2 für verschiedene Werte von a .

Es wurden zum Vergleich die Werte aus der numerischen Ableitung (H2.1) und der analytischen Ableitung mit numerischer Integration (H2.2) dargestellt.

Die z -Komponente des E -Feldes ist für positive z auch positiv, was logisch wirkt, da die Ladung auf dem Draht auch positiv ist. Man kann erkennen, dass es sich bei dem angewendeten numerischen Verfahren um eine sehr gute Näherung handelt.

H.3 Gleichgewichtspunkt

Nun kommt im Anstand $d = 12$ ein zweiter Draht hinzu (Ladung Q_2 , charakteristische Breite a_2).

H.3.1 Berechnung der neuen Anordnung

Wir haben unser Programm auf diese Situation erweitert, indem wir die Potentiale der beiden Drähte je einzeln berechnet, diese dann addiert und mit umgekehrtem Vorzeichen nu-

merisch abgeleitet haben, um das wirkende elektrische Feld zu erhalten. Das funktioniert, weil:

$$\varrho_1(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{Q_1}{a_1} \exp\left(-\frac{x^2}{a_1^2}\right) \delta(y) \delta(z) \quad (17)$$

$$\varrho_2(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4Q_1}{a_2} \exp\left(-\frac{x^2}{a_2^2}\right) \delta(y) \delta(z - 12) \quad (18)$$

$$\Rightarrow V_2(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q_1}{a_2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{a_2^2}\right)}{\sqrt{x^2 + (z - 12)^2}} dx \quad (19)$$

$$= 4V_1(z - 12) \quad (20)$$

und weil hier gilt:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \quad (21)$$

$$= -q(\vec{\nabla}V_1 + \vec{\nabla}V_2) \quad (22)$$

$$= -q\vec{\nabla}(V_1 + V_2) \quad (23)$$

Wir haben hier bewusst nicht das Integral über die analytische Lösung verwendet, da wir dieses lediglich zum Testen unserer Genauigkeit nutzen wollten.

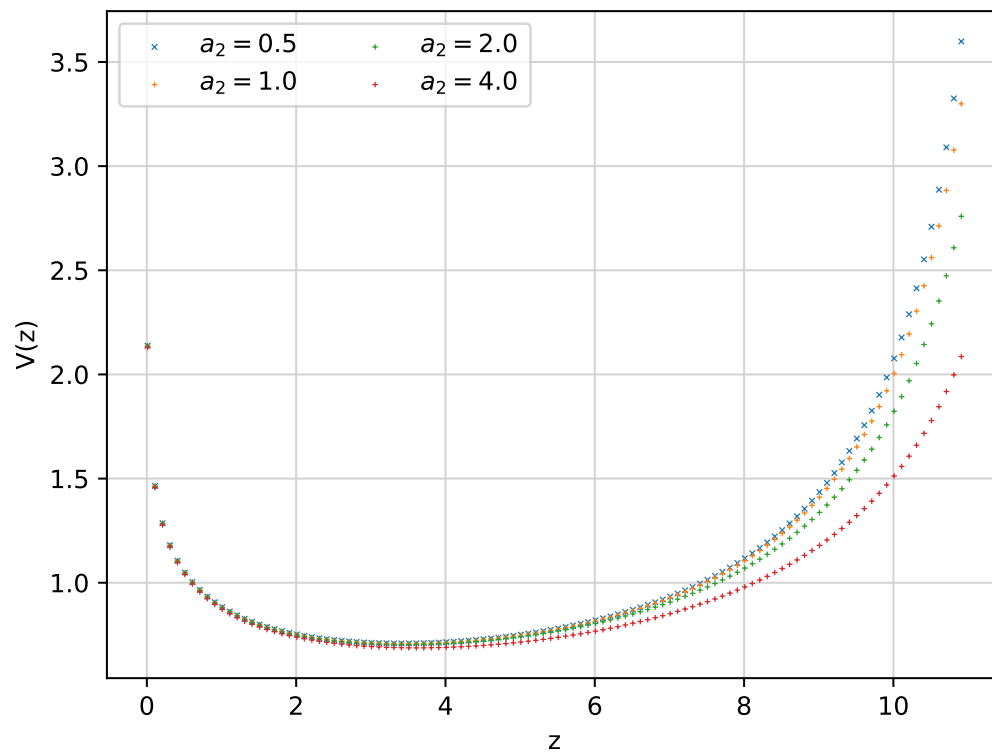


Abbildung 4: Darstellung des elektrischen Potential aus Aufgabenteil H3 für verschiedene Werte von a

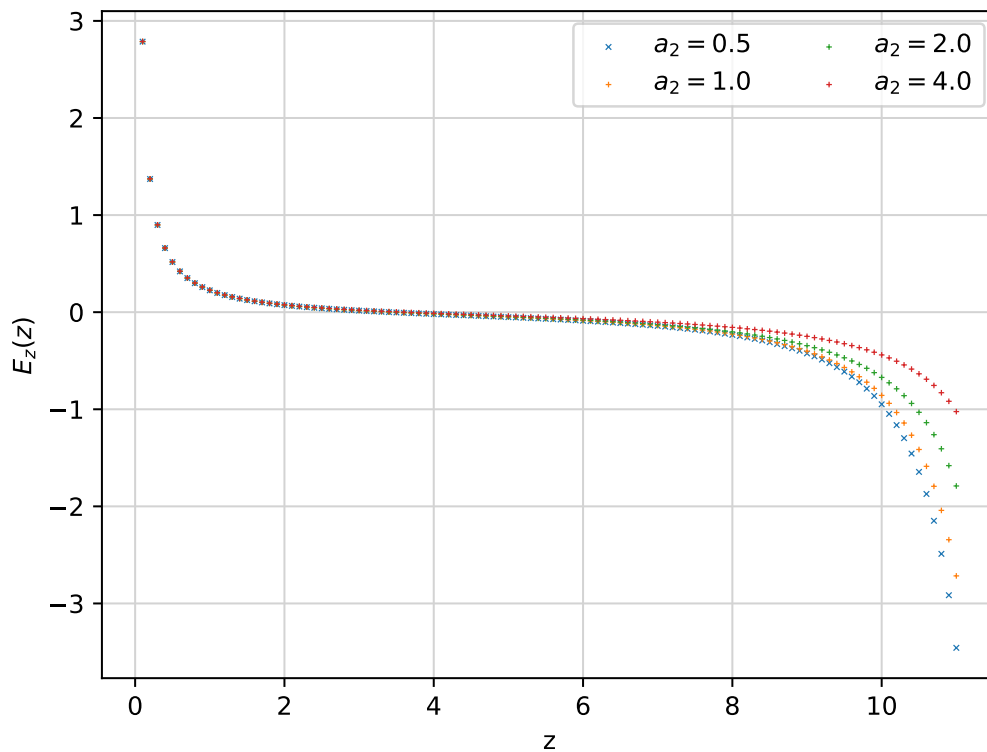


Abbildung 5: Darstellung des elektrischen Feldes aus Aufgabenteil H3 für verschiedene Werte von a

H.3.2 Bestimmung des Gleichgewichtspunktes

Den Gleichgewichtspunkt haben wir dann durch Nullstellensuche des elektrischen Feldes mittels des Sekantenverfahrens bestimmt, denn wenn das E-Feld verschwindet wirkt auch keine Kraft auf ein Testteilchen zwischen den Drähten in z -Richtung. Die Implementierung des Sekantenverfahrens brachte einige Schwierigkeiten mit sich, denn die Konvergenz gestaltete sich je nach Startwertpositionierung als schwerfällig, weswegen wir in unserem Programm Startwerte von 1 und 5 wählten, damit bereits anfangs eine relativ hohe Steigung im Steigungsdreieck vorliegt um eine zügigere Konvergenz zu gewährleisten. Gleichzeitig haben wir damit darauf geachtet, dass wir nicht zu nah an die Drähte kommen, um zu vermeiden, dass die nächste Iteration der Nullstellensuche außerhalb des Intervalls $[0, 12]$ liegt.

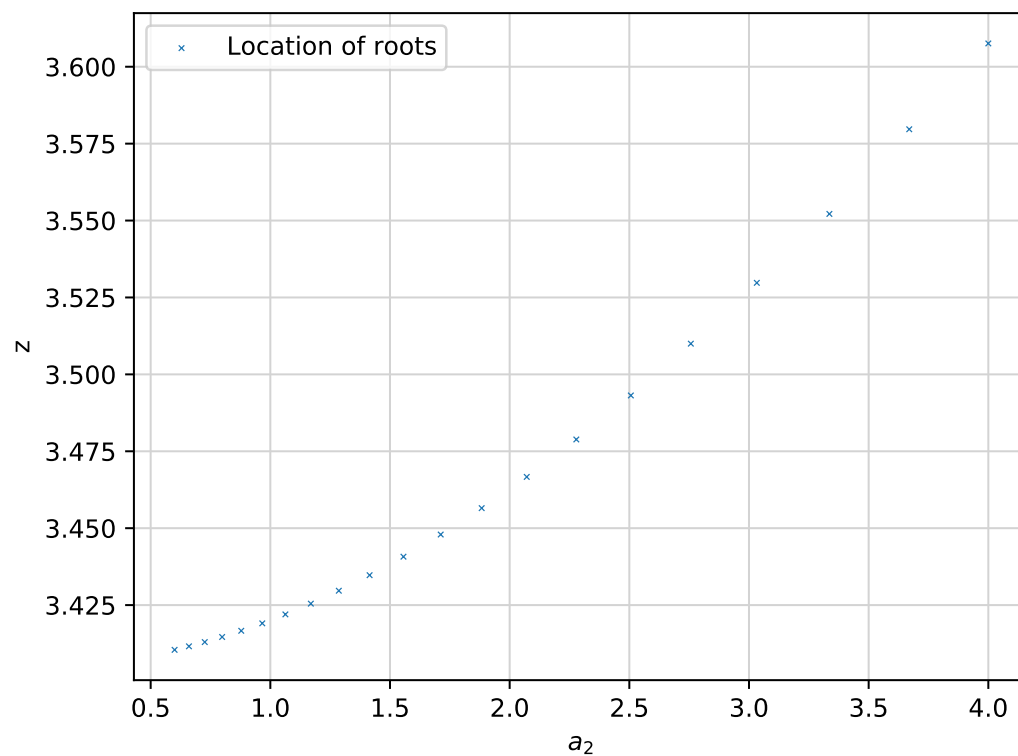


Abbildung 6: Darstellung des Gleichgewichtspunktes in z-Richtung, aus Aufgabenteil H3, in Abhängigkeit von a_2

Abbildungsverzeichnis

1	Ladungsanordnung	1
2	Potential der H1 für verschiedene Werte von a	4
3	Elektrisches Feld in z-Richtung der H2 für verschiedene Werte von a	6
4	Potential der H3 für verschiedene Werte von a	8
5	Elektrisches Feld in z-Richtung der H3 für verschiedene Werte von a	9
6	Position des Gleichgewichtspunktes in Abhängigkeit von a_2	10