אלגוריתמים 1 234247 אביב תשפ"א

תרגיל בית מספר 5

<u>מתרגל ממונה על התרגיל:</u> נתן קמינסקי

שאלות אדמיניסטרטיביות וטכניות הנוגעות לתרגיל יש להפנות למתרגל הממונה על התרגיל. בנושאים הקשורים לחומר הלימוד ניתן לפנות לכל אחד מצוות הקורס.

<u>תאריך ושעת הגשה:</u> יום חמישי 1.7 בשעה 23:59. ההגשה הינה אלקטרונית דרך מערכת GR. ניתן להגיש בבודדים או בזוגות. חובה להגיש פתרון מוקלד (לא בכתב יד).

<u>חומר התרגיל:</u> תכנון דינאמי ומושגי יסוד ברשתות זרימה. הרצאות 8,9,10 ו-11, תרגולים 10 ו-11.

<u>הנחיות כלליות:</u>

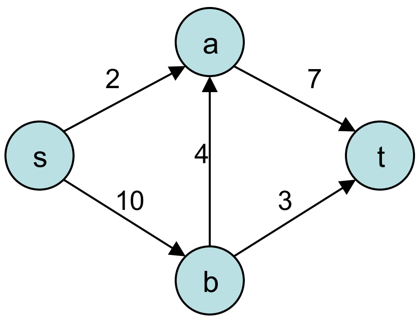
תרגיל בית זה מורכב משני סוגים של שאלות. שאלות 1 ו-2 הינן שאלות סגורות בהן יש לתת רק תשובה סופית (רשימת צמתים, או נכון/לא נכון). שאלות 3 ו-4 הינן שאלות פתוחות. בשאלות אלו יש להוכיח נכונות ולנתח סיבוכיות לכל אלגוריתם מוצע.

בסוף התרגיל מופיעות שאלות לתרגול נוסף. שאלות אילו אינן להגשה.

שימו לב: כל גרף הוא סופי ופשוט (חסר קשתות מקבילות ולולאות עצמיות).

<u>שאלה 1 (15 נקודות)</u>

נתונה רשת הזרימה הבאה:



כלומר $G=(V,E)$ כאשר $V=\{s,a,b,t\}$, $E=\{(s,a),(s,b),(a,t),(b,a),(b,t)\}$ וקיבולי הקשתות הם $c(s,a)=2,\ c(s,b)=10,\ c(a,t)=7,\ c(b,a)=4\,, c(b,t)=3$. רשת הזרימה היא $N=(G,s,t,c)$.

א. (5 נקודות) כתבו (או ציירו) את הקשתות וקיבוליהן ברשת השיורית (residual network) המתקבלת לאחר שנבחר ומיושם מסלול השיפור $s-b-a-t$ עם זרימה 4.

ב. (5 נק') תארו זרימת מקסימום ברשת (כתבו באופן מפורש או ציירו).

ג. (5 נק') רשמו האם הטענה הבאה נכונה: קבוצת הצמתים $\{s,b\}$ מגדירה חתך מינימום ב-N. (אין צורך לנמק)

<u>שאלה 2 (15 נקודות)</u>

א. נזכר כי בבעיית כפל המטריצות נתונות n מטריצות $A_1, \dots, A_n$ כאשר מטריצה i הינה ממימדים $p_{i-1} \times p_i$. כמו כן, נתון כי הכפלה של זוג מטריצות $A \in \mathbb{R}^{p\times q}, B \in \mathbb{R}^{q\times r}$ דורשת $p \cdot q \cdot r$ פעולות כפל. עלינו למצוא סדר לביצוע פעולות ההכפלה של המטריצות כך שמספר פעולות הכפל שידרשו לחישוב יהיה מינימלי. נאמר שמספר פעולות הכפל הינו ערך הפתרון.

נביט באלגוריתם הבא.

<u>כפל מטריצות</u>

<u>קלט</u>: $n+1$ מספרים $p_0, p_1, \dots, p_n$.

1. אתחל מטריצה B בגודל $n \times n$ באפסים.
2. עבור s מ-1 עד $n-1$ בצע:
   a. עבור i בין 1 ל-$n-s$ בצע:

$$B(i, i+s) = \min_{i \le k < i+s}\left(p_{i-1} \cdot p_k \cdot p_{i+s} + B(i,k) + B(k+1, i+s)\right)$$

3. החזר את $B(1,n)$.

אזי האלגוריתם מחזיר את ערך הפתרון האופטימלי לבעיית כפל המטריצות.

ב. נביט בהרצה של אלגוריתם פורד פלקרסון על רשת זרימה (G,s,t,c) כך ש-$c(e) \in \{2,3\}$ לכל $e \in E$. אזי בריצת האלגוריתם נמצאו לכל היותר $3 + \frac{|f^*|}{2}$ מסלולי שיפור.

ג. תהי $N = (G,s,t,c)$ רשת זרימה ו-f^* זרימת מקסימום ברשת. כמו כן, נתון כי $|f^*| > 0$. כמו כן נגדיר $f_0: E \to \mathbb{R}$ על ידי $f_0(e) = 0$ לכל $e \in E$ (כלומר, אין זרימה על אף קשת). אזי קיים מסלול שיפור ברשת השיורית N_{f_0} בו הקיבול השיורי הקטן ביותר של קשת על המסלול הינו לפחות $\frac{|f^*|}{|E|}$.

<u>שאלה 3 (35 נקודות)</u>

בבעיית תרמיל גב רב הברירה נתון תרמיל בעל קיבולת משקל n,W מוצרים $\{a_1, \dots, a_n\}$, כאשר לכל מוצר a_i יש משקל $w_i \in N$ ורווח $p_i \in \{1,2, \dots P\}$. כמו כן, נתונה חלוקה של המוצרים לקבוצות $G_1, \dots, G_k$, כלומר, $G_j \cap G_r = \emptyset$ לכל $1 \leq j < r \leq k$ וכן $\{a_1, \dots, a_n\} = G_1 \cup \dots \cup G_k$. תת קבוצה $I \subseteq [n]$ של מוצרים היא פתרון אופטימלי אם:

1. אין חריגה מקיבול תרמיל הגב, כלומר, $\sum_{i \in I} w_i \leq W$.
2. מכל קבוצה נבחר לכל היותר איבר יחיד, כלומר $\left|G_j \cap I\right| \leq 1$ לכל $1 \leq j \leq k$.
3. הרווח $(\sum_{i \in I} p_i)$ מקסימלי.

הציעו אלגוריתם אשר בהינתן הקלט לבעיה מוצא את הערך $\sum_{i \in I} p_i$ של פתרון אופטימלי I. על האלגוריתם לרוץ בסיבוכיות $O(nW)$.

נתחו סיבוכיות והוכיחו נכונות.

<u>שאלה 4 (35 נקודות)</u>

במדינת ארצות-הבריל ישנם N סוגי מטבעות $c_1, \dots, c_N$. ערכו של המטבע c_i הינו w_i דולצ'ים (w_i שלם). לקוחה ובידה שטר שערכו k דולצ'ים נכנסת לסניף בנק ומבקשת מפקיד הבנק לפרוט את השטר למספר מינימאלי של מטבעות. הציעו אלגוריתם המקבל את k והמחשב את המספר המינימאלי של מטבעות הדרש לשם פריטת k למטבעות.

על האלגוריתם לרוץ בזמן $O(k)$

<u>הערה:</u> הערכים N ו-$c_1, \dots, c_N$ הינם קבועים.

שאלות לתרגול נוסף (לא להגשה)

שאלה 5

מחרוזת נקראת פלינדרום אם הפיכת סדר האותיות לא משנה את המחרוזת, למשל ״אבא״, ״ילד כותב בתוך דלי״

פורמלית, מחרוזת $s_1, \ldots, s_n$ מעל א״ב Σ היא פולינדרום אם לכל $i \in [n]$ מתקיים ש $s_i = s_{n-i+1}$.

מחרוזת $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ היא תת מחרוזת של $s = s_1, \ldots, s_n$ אם אפשר לקבל אותה על ידי מחיקת תווים מ-s.

פורמלית, $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ היא תת מחרוזת של $s_1, \ldots, s_n$ אם קיימת פונקציה מונוטונית עולה ממש $f: [m] \to [n]$ כך ש $\sigma_i = s_{f(i)}$ לכל $i \in [m]$.

הציעו אלגוריתם שבהינתן מחרוזת s מאורך n מעל א״ב Σ מוצא את אורך תת המחרוזת הארוכה ביותר של s שהיא פולינדרום.

שאלה 6

יהא $G = (V, E)$ גרף לא מכוון. יהא s צומת מקור ו t צומת יעד. תהא $w: E \to N \cup \{0\}$ פונקצית משקל על הקשתות ו- $c: E \to N$ פונקצית מחיר על הקשתות. בנוסף, נתון לנו תקציב B.

בעיית המסלול הקצר ביותר תחת אילוצי תקציב, היא למצוא ב-G מסלול $s = v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_k = t$ בעל משקל כולל $\sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$ מנימלי , תוך עמידה באילוצי התקציב, דהיינו $\sum_{i=1}^{k-1} c(v_i, v_{i+1}) \leq B$.

הציעו אלגוריתם לבעיית המסלול הקל ביותר תחת אילוצי תקציב הרץ בסיבוכיות זמן של $O(V^2B)$. האם זמן הריצה פולינומיאלי באורך הקלט?

שאלה 7:

עליכם לבחור האם לגור בשכירות בחיפה או בתל אביב במשך n חודשים. בכל חודש עליכם לשכור דירה לפחות באחת הערים. נניח כי החודשים ממוספרים n,...,1,2, וכי עלות השכירות בחיפה בחודש i היא H_i ובתל אביב T_i. כמו כן, העלות למעבר דירה בין עיר אחת לשנייה היא M. הציעו אלגוריתם אשר $\sum_{i=1}^{t} \ell_{s_i}$בהינתן הסדרות $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ו- $T_1, T_2, \ldots, T_n$ והמספר M מוצא סדרה של ערים למגורים שעלותה מינימלית.

שימו לב שבכל מקרה יש לשלם את עלות המעבר אל הדירה הראשונה. דרישת סיבוכיות $O(n)$.

<u>שאלה 8:</u>

נתון מערך של n מספרים ממשיים (יכולים להיות שליליים) $[a_1, a_2, \dots, a_n]$. d-חלוקה של המערך היא חלוקה שלו ל-d מקטעים לא ריקים. המחיר של מקטע ב- d-חלוקה הוא סכום המספרים באותו מקטע.

המחיר של d-חלוקה הוא המקסימום של מחירי המקטעים שהיא מגדירה.

לדוגמא [5,6],[9],[4,2,7] היא 3 חלוקה עם מחיר 13.

הצע אלגוריתם אשר בהינתן מערך כנ״ל ומספר d, מוצא d-חלוקה מינימלית.