HW4 - 094412 - הסתברות מ

גור תלם - 206631848

2.12.2020

שאלה 1

מתחרה א מהטכניון. מתחרה ב מבן גוריון.
X מספר הניסיונות של מתחרה א עד שיצליח בקפיצה.
Y מספר הניסיונות של מתחרה ב.
A מתחרה א מצליח. $P(A) = 0.8$.
B מתחרה ב מצליח. $P(B) = 0.6$.
נתון אי תלות. $Z = min\{X, Y\}$.

0.1 מה ההתפלגות של X?

כלומר, ההסתברות שמתחרה א יצליח בקפיצה הX. ולכן ההתפלגות היא גאומטרית $X \sim Geom(0.8)$. וידוע מההרצאה כי זה

$$P(X = x) = P(A) \cdot (1 - P(A))^{x-1}$$

■

0.2 מה ההתפלגות של Y?

בדומה $Y \sim Geom(0.6)$

$$P(Y = y) = 0.6 \cdot 0.4^{y-1}$$

■

0.3 מה ההתפלגות של Z?

$$P(Z) = P(min\{X, Y\}) = P(C)$$

כאשר C הוא המאורע שמישהו הצליח בקפיצה (או א או ב). ולפי הכלה והפרדה

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.6 \cdot 0.8 = 0.92$$

ולפי התפלגות גאומטרית בדומה למקודם

$$P(Z = z) = P(C) \cdot (1 - P(C))^{z-1} = 0.92 \cdot 0.08^{z-1}$$

■

0.4 לחשב $P(Z \leq 2)$?

נחשב

$$P(Z \leq 2) = P(Z = 1) + P(Z = 2) = 0.92 \cdot 0.08^{1-1} + 0.92 \cdot 0.08^{2-1} = 0.9936$$

■

שאלה 2

מטילים n מטבעות לא הוגנים.

$P\left(H\right)=p,\ P\left(T\right)=1-p$. אין תלות בין המטבעות.

מטילים שוב את המטבעות שיצאו H.

צ"ל פונקציית הסתברות לH אחרי ההתלה השניה.

כיוון שאחרי ההטלה הראשונה, מטילים מחדש את כל הH, נובע שמטבע יראה H אחרי ההטלה השניה אמ"מ התוצאה שלו יצאה H בהטלה השניה.

כדי שהוא בכלל יוטל בשנים, עליו לקבל תוצאה של H גם בהטלה הראשונה. לכן, אנחנו יכולים להמיר את השאלה לשאלה הבאה:

מטילים n מטבעות פעמיים (כל אחד פעמיים). צ"ל פונקציית ההסתברות של מספר המטבעות שהוטלו פעמיים על H (כאשר מטבעות שקיבלו T בהטלה הראשונה לא מעניינים אותנו ולכן לא משנה לנו אם יוטלו שוב, כל עוד אנחנו לא סופרים אותם כמובן).

הסיכוי של מטבע ליפול פעמיים על H הינו p^{2} שכן אין תלות בין ההטלות (בשאלה החדשה). כל אפשרות אחרת, מוגדרת להיות אפשרות "רעה". הסיכוי לאפשרות רעה היא כמובן המשלים ל1: $1-p^{2}$.

נסמן X - מספר המטבעות שיצאו פעמיים.

לכן, כיוון שגם אין תלות בין המטבעות, ניתן להסיק התפלגות בינומית

$$p_{X}\left(x\right)=P\left(X=x\right)=P\left(\left\{ \omega\mid X\left(\omega\right)=x\right\} \right)=\binom{n}{x}\left(p^{2}\right)^{x}\left(1-p^{2}\right)^{x}=\binom{n}{x}p^{2x}\left(1-p^{2}\right)^{n-x}$$

וזו פונקציית ההסתברות המבוקשת.

$\blacksquare$

שאלה 3

סעיף א - E פס תוקף $P(E)=0.01$. מה ההסתברות שמתוך 500 קרטונים, יהיה לכל היותר בקבוק אחד שייזרק?

תחילה נציין כי אין סיבה לזרוק את הבקבוקים אם הקרטונים הם אלה שמתקלקלים. אז התשובה לשאלה היא "אין מספיק מידע לגבי בקבוקים".
עכשיו ברצינות:

נחשב את ההסתברות (בתפלגות בינומית) שיהיה חלב אחד מקולקל בדיוק מתוך כל ה500

$$P(exactly\,1\,expired)=\binom{500}{1}0.01^1\cdot(1-0.01)^{500-1}=5\cdot(0.99)^{499}=0.033184\ldots$$

כמו כן, קל לראות כי ההסתברות שכל החלבים יהיו טריים הינה פשוט

$$P(none\,expired)=(1-0.01)^{500}=0.00657048\ldots$$

ולכן הסכום שיהיה לכל היותר חלב אחד מקולקל

$$P(at\,most\,1\,expired)=P(exactly\,1\,expired)+P(none\,expired)\approx 0.033184+0.00657048=0.03475448$$

בניסוח התפלגויות (עבור X מספר הקרטונים המקולקלים בבחירה)

$$P(X\leq 1)=P(X=1)+P(X=0)=0.039754...$$

ומהנוסחאות למעלה נקבל ש$X\sim Bin(500,0.01)$.

אם אנחנו רוצים רק קירוב, נבחין כי מדובר בסדרת של המון ($0<<500$) ניסויי ברנולי (בחירה של חלב) עם הסתברות הצלחה (שהחלק מקולקל) קטנטן, אז ניתן להשתמש בפילוג פואסון

$$np=500p=5=\lambda>0$$

לכן, עבור X מספר הקרטונים המקולקלים (מוזר לקרוא לזה הצלחות),

$$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=e^{-\lambda}\cdot\left(\frac{\lambda^0}{0!}+\frac{\lambda^1}{1!}\right)=6e^{-5}\approx 0.040427682$$

■

סעיף ב - מתוך $100K$ אנשים המגיעים לקנות קפה, כ500 לא משלמים. צופים בחשאי בהתנהגות של 10 קונים. מה הסתברות שלפחות אחד מהם לא משלם?

סביר לניח שמי שלוקח קפה ולא משלם עבורו, לא נחשב קונה. לא בעל החנות ולא הוא מחשיבים את אותו אדם בתור קונה. לכן, אם מסתכלים על 10 קונים, אין סיכוי שיהיה אחד שלא ישלם.

וברצינות:

ניתן לחשב את המבוקש בקלות בכך שנחשדב את הסיכוי שכולם ישלמו ונחסר הסתברות זו מ1 כדי לקבל את המשלים (שהוא כמובן, מישהו אחד אינו משלם).

נסמן X מספר האנשים שלא משלמים מבין 10 אנשים אקראיים שנבחרו.

מדובר בהתפלגות היפר גאומטריל (הוצאה בלי החזרות עם מרחב מדגם קטן מתוך כמות גדולה). לכן ניתן לקרב בעזרת התפלגות בינומית רגילה במקום היפר גאומטרית כאשר מניחים שיש החזרות.

לכן ההסתברות שאדם הלוקח קפה, אינו ישלם היא $\frac{500}{100000}=0.005$

לכן, הסיכוי שכל ה10 ישלמו הינו $(1-0.005)^{10}=0.995^{10}\approx 0.95111$. ולכן הסיכוי המשלים, הסיכוי שיהיה לפחות אדם אחד אשר לא ישלם על הקפה שלו

$$P(at\,least\,one\,unpaid)=0.0488898695\ldots$$

ניתן גם לחשב זאת בעזרת משתנה מקרי

$$P\left(\overbrace{X\geq 1}^{at\,least\,one\,unpaid}\right)=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}\cdot 0.005^0\cdot 0.995^{10-0}=0.0488898695\ldots$$

ניתן להבחיר כי $X\sim Bin(10,0.005)$.

■

סעיף ג - נותנים ל100 סטודנטים לבחור סוג חלב. כל סטודנט בוחר באקראי סוג חלב (סיכוי 0.5). מה הסיכוי ש60 סטודנטים לפחות יעדיפו חלב של תנובה?

אם נסמן X מספר הסטודנטים במדגם אשר מעדיפים תנובה. ניתן להסיק כי אין תלות בין בחירות הסטודנטים ולכן מדובר ב100 ניסויי ברנולי כאשר הצלחה בניסוי הינה בחירה של תנובה וכישלון הינו בחירה של טרה.

כלומר, עליינו למצוא בעצם $P(X \geq 60)$. הסיכוי עבור כל $P(X = x)$ הינו התפלגות בינומית $X \sim Bin(100, 0.5)$. לכן פונקציית ההסתברות

$$P(X \geq 60) = \sum_{x=60}^{100} \binom{100}{x} 0.5^x \cdot (1-0.5)^{100-x} = \sum_{x=60}^{100} \binom{100}{x} \cdot 0.5^{100} = \frac{45071264516083115122923453 25}{1584563250285286751870879006 72} \approx 0.02844$$

■

שאלה 4

בוחר באקראי קופסת גפרורים, ימנית או שמאלית, ומוציאים ממנה גפרור. $P(R) = P(L) = 0.5$. באופן ב"ת. בכל קופסה n גפרורים. בוחרים באקראי קופסאות עד שמוציאים קופסה שהתרוקנה.

סעיף א - ההסתברות שבפעם הראשונה שנבחרת קופסה ריקה, מספר הגפרורים בקופסה השניה k?

נסמן E הקופסה שנבחרה ריקה.

נסמן C_k בקופסה שלא נבחה יש k גפרורים.

כלומר, עד הבחירה הנוכחית(לא כולל) היו $2n-k$ בחירות כאשר מתוכן, n מהבחירות של הקופסה שנבחרה בבחירה האחרונה.

$$P(E \cap C_k) = \binom{2n-k}{n} \overbrace{0.5^n}^{empty\,box} \cdot \overbrace{0.5^{n-k}}^{k\,left\,box} = \binom{2n-k}{n} 0.5^{2n-k}$$

שכן כדי שהקופסה שנבחרה תהיה ריקה ובשניה k גפרורים, צריך לבחור $2n-k$ פעמים בדיוק לפני הבחירה הנוכחית, כאשר n מהבחירות הללו הן של הקופסה שנבחרה כעת (בבחירה הנוכחית, הקופסה כבר ריקה), ושאר הבחירות של הקופסה שנשארו בה k גפרורים.

כלומר, זו ההסתברות שסדרת בחירות עד לקופסה ריקה תתקבל עם k גפרורים נותרים בקופסה השניה.

■

סעיף ב - נכליל עבור הסתברות בחירה לא הוגנת עבור קופסאות (הסתברות p לבחור את הימנית).

הפעם נצטרך לפצל לשני מקרים, מקרה של הקופסה הריקה הראשונה היא הימנית, והמקרה בו הראשונה הריקה היא השמאלית.

E_L ריקה ימנית[1].

E_R ריקה שמאלית.

כאשר $P(E_L) = p$.

$$P(E \cap C_k) = P(E_L \cap C_k) + P(E_R \cap C_k) =$$

$$= \overbrace{p}^{last\,right} \cdot \overbrace{\binom{2n-k}{n}}^{which\,are\,right} \overbrace{(p^n)}^{n\,from\,right\,before\,now} \overbrace{(1-p)^{n-k}}^{rest\,from\,left} + \overbrace{(1-p)}^{last\,left} \cdot \overbrace{\binom{2n-k}{n}}^{which\,are\,left} \overbrace{(p^{n-k})}^{rest\,from\,right} \overbrace{(1-p)^n}^{n\,from\,left} =$$

$$= \binom{2n-k}{n} \left(p - p^2\right)^{n-k} \left(p^{k+1} + (1-p)^{k+1}\right)$$

■

[1] בדיקת ערנות

שאלה 5

נתון מרחב מדגם $\Omega = \mathbb{N}_0$ עליו מידת הסתברות פואסונית

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

סעיף א - איזה הסתברות גבוהה יותר תחת ההתפלות הנ"ל $P(X \geq 2 \mid X \geq 1)$, $P(X \geq 1)$?

נחשב את הביטויים

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda}$$

$$P(X \geq 2 \mid X \geq 1) = \frac{P(X \geq 2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \geq 2)}{1-e^{-\lambda}} = \frac{P(X \geq 1) - P(X=1)}{1-e^{-\lambda}} =$$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda} - e^{-\lambda}\lambda}{1-e^{-\lambda}} = 1 - \frac{e^{-\lambda}\lambda}{1-e^{-\lambda}}$$

ועכשיו מאינפי 1 וכאלה

$$e^{-\lambda} + \lambda > 1 \Longleftrightarrow \lambda > 1 - e^{-\lambda} \overset{1>e^{-\lambda}>0}{\Longleftrightarrow} \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}} > 1 \overset{\lambda>0 \Rightarrow e^{-\lambda}>0}{\Longleftrightarrow} \frac{e^{-\lambda}\lambda}{1-e^{-\lambda}} > e^{-\lambda} \Longleftrightarrow 1 - \frac{e^{-\lambda}\lambda}{1-e^{-\lambda}} < 1 - e^{-\lambda}$$

כלומר

$$P(X \geq 2 \mid X \geq 1) < P(X \geq 1)$$

■

בכדור הארץ $100M$ סטודנטים. ידוע כי $200K$ מסטודנטים אוהדי ברצלונה אשר משחקים $DOTA$ ומרכיבים משקפיים (לא נראה לי סביר אבל $o.k.$).

נניח כי אין תלות בין שלוש התכונות עבור סטודנט אקראי מהסטודנטים בכדור הארץ.

בוחרים $1K$ סטודנטים שונים. נשתמש בקירוב בינומי להיפר גאומטרי ופואסוני כקירוב לבינומי.

סעיף ב - מה ההסתברות שקיים במדגם סטודנט על שלוש התכונות הללו?

בדומה לשאלה 3, מדובר על התפלגות היפר גאומטרית עבור X מספר הסטודנטים מתוך ה$1K$ אשר להם יש את שלוש התכונות. אז

$$X \sim HG(100M, 200K, 1K)$$

(לא נביא את הנוסחה לפילוג ההיפרגאומטרי שכן ביקשו קירובים וגם זה להעתיק נוסחה, אני סטודנט, לא תוקי) וקל לראות כי $100M >> 200K >> 1K$ ולכן ניתן להשתמש בהתפלגות בינומית כקירוב טוב לפונקציית ההסתברות

$$X \sim Bin(1000, 0.001)$$

עכשיו אנחנו מתבקשים לחשב

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{1000}{0}\left(0.998^{1000}\right) = 1 - 0.998^{1000} \approx 0.8649$$

ניתן גם להשתמש בקירוב פואסוני שכן $1000 >> 1$ וכן $np = 1000 \cdot 0.002 = 2 = \lambda$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-2} = 1 - \frac{1}{e^2} \approx 0.8647$$

הייד ל$Wolfram$!!!!

ניתן לראות כי אכן מדובר בקירוב טוב (אפילו מאוד).

סעיף ג - ידוע כי קיים במדגם סטודנט אחד (לפחות), מה ההסתברות שקיים סטודנט נוסף?

$$P(X \geq 2 \mid X \geq 1) = \frac{P(X \geq 2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \geq 1) - P(X=1)}{P(X \geq 1)} = 1 - \frac{e^{-2} \cdot 2}{1-e^{-2}} \approx 0.68696$$

■

שאלה 6

מכונה מייצרת 600 פריטים בשעה מהם נלקחים 10 לQA.
בהינתן כי יש 200 פגומים מתוך 600.

סעיף א - מה ההסתברו למצוא לכל היותר פגום אחד בQA?

כלומר X מספר הפגומים בQA. נמצא $P\left(X\leq1\right)=P\left(X=1\right)+P\left(X=0\right)$. מדובר בהתפלגות היפרגאומטרית וניתן בקירוב (למרות שזה מאוד נתוך לוויכוח האם בכלל $600>>10$) לחשב לפי התפלגות בינומית

$$X\sim HG\left(600,200,10\right)\Longrightarrow P\left(X=1\right)+P\left(X=0\right)=\binom{200}{1}\frac{\binom{400}{9}}{\binom{600}{10}}+\binom{200}{0}\frac{\binom{400}{10}}{\binom{600}{10}}=200\frac{\frac{400!}{9!391!}}{\frac{600!}{10!590!}}=\frac{3048575085871}{29861448656559}\approx0.10209066$$

בקירוב בינומי $X\sim Bin\left(10,\frac{1}{3}\right)$

$$P\left(X=1\right)+P\left(X=0\right)=\binom{10}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{9}+\left(\frac{2}{3}\right)^{10}=\frac{2048}{19683}\approx0.1040492$$

בוא נגיד שאם היו מעגלים לי מס הכנסה בקירוב כזה, כנראה הייתי מתלונן (קצת אבל מתלונן).

■

סעיף ב - מה ההסתברות לקבל לכל היותר שני פגומים?

כמו בסעיף הקודם

$$P\left(X\leq2\right)=\overbrace{P\left(X=2\right)+P\left(X\leq1\right)}^{disjoint}=\binom{10}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{8}+P\left(X\leq1\right)=\frac{5888}{19683}\approx0.2991414$$

■

סעיף ג - מה ההסתברות לקבל לפחות 3 פגומים?

זו כמובן ההסתברות המשלימה ל1 של סעיף ב. שכן או שמקבלים לכל היותר 2 XOR לפחות 2

$$P\left(X\geq3\right)=1-\frac{5888}{19683}\approx0.7009$$

■