שאלה 1

נתון כי יש מאגר של 100 שאלות.
כמו כן, נתון כי תלמיד התכונן ל60 מתוך ה100 הללו.
מבחן מורכב מ10 שאלות הנבחרות באקראי כאשר לכל בחירה יש הסתברות זהה. נסמן את מרחב המדגם בΩ כמובן.
לכן, קיימות $\binom{100}{10}$ בחינות אפשריות שונות (ומניחים שזה מרחב מדגם שווה הסתברויות). כלומר $|\Omega| = \binom{100}{10}$
כדי לעבור, צריך לענות על 6 שאלות לפחות. כדי להצטיין, יש לענות לפחות על 9 שאלות נכון.

סעיף א - ההסתברות שהתלמיד יעבור

נבדוק כמה בחינות ניתן לבנות אותן התלמיד שלנו יעבור

$$\sum_{n=6}^{10} \binom{60}{n} \binom{40}{10-n}$$

כאשר $6 \leq n \leq 10$ הוא מספר השאלות בבחינה עליהן התלמיד העצלן שלנו יודע לענות (no judgement).
כיוון שמדובר במרחב מדגם שווה הסתברויות, הסיכוי שהתלמיד יעבור הינו

$$\frac{\sum_{n=6}^{10} \binom{60}{n} \binom{40}{10-n}}{\binom{100}{10}} \approx 0.63855\ldots$$

■

סעיף ב - ההסתברות שתלמיד יצטיין

בצורה דומה, רק עבור n שמתחיל מ9, נקבל

$$\frac{\sum_{n=9}^{10} \binom{60}{n} \binom{40}{10-n}}{\binom{100}{10}} = \frac{40 \cdot \binom{60}{9} + \binom{60}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{\left(40 \cdot \frac{10}{51} + 1\right) \cdot \frac{60!}{10! \cdot 50!}}{\frac{100!}{10! \cdot 90!}} =$$

$$= \frac{\left(40 \cdot \frac{10}{51} + 1\right) \cdot \prod_{n=51}^{60} n}{\prod_{n=91}^{100} n} = 0.03852\ldots$$

לפי הפייתון הגדול.

■

אם שותים מיץ חדי קרן (או בשמו העממי "רד בול")[1] מקבלים קוחות על וההסתברות לענות על x שאלות נכון במבחן היא cx.

סעיף ג - מרחב מדגם

הניסוי שלנו במקרה זה הינו היבחנות תחת השפעה של מיץ חדי קרן. תוצאות הניסוי מובדלות לפי כמות השאלות עליהן השיבו נכונה.
על כן, מרחב המדגם שלנו יהיה $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ כמספר השאלות עליהן ניתן להשיב נכונה.

■

[1] אין כותב פתרון זה אחראי על תופעות הלוואי אשר נגרמות משתיית יתר של מיץ חדי קרן.
תופעות לוואי כוללות אך אינן מוגבלות להילה בצעי הקשת, נפיחות באיזור המצח, הפרשת ריח של חלומות ותקווה. כמו כן, סיכוי בלתי מבוטל כי כוחות הרשע יירצו לשתות את הדם שלכם (מסוכן במיוחד אם הדם כבר הפך לצבע כסף).

סעיף ד - הקבוע c ומידת ההסתברות

כדי למצוא את הקבוע c עלינו להשוות את סכום ההסתברויות ל1

$$0 + c + 2c + \cdots + 10c = 1$$

נשים לב שc אינה יכול להיות שווה ל0. על כן, ניתן לחלק בc

$$\frac{1}{c} = \sum_{i=1}^{10} i = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55 \Longrightarrow c = \frac{1}{55} \approx 0.018\overline{18}$$

את מידת ההסתברות נגדיר כך. תהא $E \in \Omega$

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in E} c \cdot \omega = c \sum_{\omega \in E} \omega$$

וכמובן קל לראות שהגדרה זו מתלכדת עם החישוב למעלה.

■

סעיף ה - האם עדיף מיץ חדי קרן או ללמוד כדי לעבור

אז קודם כל, באופן כללי התשובה היא שעדיף מיץ חדי קרן. מתמטיקאים לא יהיו מתמטיקאים אם לא היינו מוצאים דרך לקצר ומאותו רגע נשכח את הדרך המקורית.

עכשיו, הסיכוי לעבור בתור חד קרן את המבחן (כן, המיץ ממש משנה אותנו לחדי קרן) הוא

$$c(6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 0.018\overline{18} \cdot 40 = 0.72\overline{72}$$

ניתן לראות שהסיכוי לעבור תחת השפעת מיץ חדי הקרן הינו גבוהה מהסיכוי לעבור אם לומדים 60% מהשאלות מהמאגר $0.63855 \cdots < 0.72\overline{72}$.

רואים שעדיף להיות חד קרן?

■

סעיף ו - האם עדיף מיץ חדי קרן או ללמוד כדי להצטיין

לאחר חישוב מסתבר שעדיף לשתות (נו טוב, סטודנטים בטכניון מתורגלים הרי בלשתות)[2]

הסיכוי להצטיין תחת השפעת מיץ חדי קרן הינו

$$c(9 + 10) = 0.3454\overline{54} > 0.03852\ldots$$

ולצערינו, לשתות מיץ חדי קרן יותר יעיל מלמידה (אני רואה פה מוטיב חוזר, אתם מנסים לרמוז שצריך ללמוד פחות?).

טוב, אז חדי הקרן יותר טובים מסטודנטים.

■

[2] עם זאת, כדי להצטיין צריך ללמוד. אם חדי קרן (שהם סה"כ העתקה לינארית של חזירי בר כמובן) היו חכמים יותר מסטודנטים מצטיינים, אז לא היה אפשר להתגאות.

שאלה 2

תהא סדרה יורדת של מאורעות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, כלומר $A_{n+1} \supseteq A_n$ לכל $n \geq 1$.
נוכיח כי

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right)$$

לשם כך, נגדיר $B_n = A_n \backslash A_{n+1}$. כלומר, B_n היא קבוצת האיברים אשר מורידים במעבר בין A_n לA_{n+1}.
בוודאי ש$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה של קבוצות זרות (אם היו $B_k \cap B_n = (A_k \backslash A_{k+1}) \cap (A_n \backslash A_{n+1}) = A_k \cap A_n \backslash (A_{k+1} \cup A_{n+1}) \neq \emptyset$ אז בהכרח אם $n > k$ נקבל $A_{k+1} \supseteq A_{n+1},\ A_k \supseteq A_n$ ולכן $A_k \cap A_n \backslash (A_{k+1} \cup A_{n+1}) = A_n \backslash A_{k+1}$ אבל גם $A_{k+1} \underset{k+1 \leq n}{\supseteq} A_n$ ולכן $A_n \backslash A_{k+1} = \emptyset$ וזו כמובן סתירה).
לכן

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(A_1 \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(A_1\right) - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \overset{disjoint\, sets}{=} P\left(A_1\right) - \sum_{n=1}^{\infty} P\left(B_n\right) =$$

$$= P\left(A_1\right) - \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n \backslash A_{n+1}\right) = P\left(A_1\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(P\left(A_n\right) - P\left(A_{n+1}\right)\right) = P\left(A_1\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(P\left(A_n\right) - P\left(A_{n+1}\right)\right) =$$

$$= P\left(A_1\right) - \left(P\left(A_1\right) - \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right)\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right)$$

ובזאת הוכחנו את המבוקש.

■

שאלה 3

נתון P מידת הסתברות מעל Ω כך ש$\Omega=\{0,1,2,3,\dots\}$ וP מקיימת:

$$P\left(k\right)=\frac{5}{k}P\left(k-1\right)$$

לכל $k\geq1$.

נמצא נוסחה מפורשת ל$P\left(k\right)$.

ננחש (על ידי הצבה של כמה ערכים עד שהמוח שלנו כבר רואה את התבנית) שהנוסחה הישירה היא

$$P\left(k\right)=\frac{5^{k}}{k!}p_{0}$$

כאשר $P\left(0\right)=p_{0}$ (ניתן לראות שגם זה מתלכד עם הנוסחה).

נוכיח באינדוקציה את נכונות הנוסחה.

עבור $k=0$:

$$P\left(0\right)=\frac{5^{0}}{0!}p_{0}=\frac{1}{1}p_{0}=p_{0}$$

נניח כי $P\left(k-1\right)=\frac{5^{k-1}}{\left(k-1\right)!}p_{0}$ ונוכיח כי $P\left(k\right)=\frac{5^{k}}{k!}p_{0}$.

לפי הנתון

$$P\left(k\right)=\frac{5}{k}P\left(k-1\right)=\frac{5}{k}\cdot\frac{5^{k-1}}{\left(k-1\right)!}p_{0}=\frac{5^{k}}{k!}p_{0}$$

בכך סיימנו את צעד האינדוקציה.

נותר למצוא את p_{0}. הכלי הכי שימושי בקורס מסתבר להיות שההסתברות של מרחב המדגם הינה 1. אז אפשר לרשום

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5^{k}}{k!}p_{0}=p_{0}\overbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5^{k}}{k!}}^{Taylor\,Series\,for\,e^{5}}=p_{0}e^{5}=1\implies p_{0}=\frac{1}{e^{5}}$$

ולכן הנוסחה הסופית הינה

$$P\left(k\right)=\frac{5^{k}}{k!e^{5}}$$

לכל $k\in\Omega$.

■

שאלה 4

מטילים 3ק6 (למביני הD&D) הוגנות בצבעים שונים: לבנה, שחורה ואדומה.

סעיף א - מרחב המדגם

את מרחב המדגם ניתן לייצג בתור קבוצת השלשות הסדורות של מספרים בין 1 ל6. כלומר $\Omega = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ וכידוע לכל קומבינטוריקאי[3]

$$|\Omega| = 6^3$$

■

סעיף ב - הסתברות לאי זוגי בשחורה

לפי ההנחה, כל שלשת הטלות היא בעלת הסתברות שווה ולכן

$$P\left(black\, is\, odd\right) = \frac{3 \cdot 6^2}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 6^2}{6 \cdot 6^2} = \frac{1}{2}$$

כי לשחורה יש 3 אפשרויות שייתנו תוצאת ניסוי של הצלחה ועל שאר הקוביות אין הגבלה. את המספר הזה מחלקים במספר התוצאות האפשריות סה"כ.

■

סעיף ג - ההסתברות לסכום של 5 באדומה ובלבנה

כפי שראינו בהרצאה, הסיכוי לסכום של 5 בשתי קוביות הינו $\frac{1}{9} = \frac{4}{36}$.
בפירוט, אלה הסכומים האפשריים השונים שנותנים 5: $\{(x,1,4),(x,2,3),(x,3,2)\,(x,4,1)\}$. ומאותם שיקולים שהצגנו בסעיף הקודם, שהאפשרויות לקוביה השחורה יצטמצמו במונה ובמכנה ה6. נקבל לבסוף שהסיכוי המבוקש הינו

$$P\left(white\, and\, red\, sums\, to\, 5\right) = \frac{1}{9}$$

■

סעיף ד - ההסתברות לסכום הקוביות הלבנה והשחורה, כפול מתוצאת הקוביה האדומה

פעמיים תוצאת הקוביה האדומה הינן התוצאות הבאות $\{2,4,6,8,10,12\}$.
נראה כמה סכומים אפשריים יש לקוביות הלבנה והשחורה שנותנות אחד מהסכומים האלה.
שוב נשתמש ב1 הרצאה של האחרונה דקה חצי (סיכוי לסכום מסויים בשתי קוביות):

$$|2 \cdot red = white + black| = |sum\, of\, 2| + |sum\, of\, 4| + |sum\, of\, 6| + |sum\, of\, 8| + |sum\, of\, 10| + |sum\, of\, 12| =$$

$$= 1 + 3 + 5 + 5 + 3 + 1 = 18$$

כלומר, יש לנו בדיוק 18 הטלות אשר נחשבות לתוצאה מוצלחת. כיוון שמדובר במרחב מדגם שווה הסתברויות, ניתן לחלק את המספר הזה בכמות התוצאות האפשריות ונקבל

$$P\left(2 \cdot red = white + black\right) = \frac{valid\, throws}{total\, possible\, throws} = \frac{18}{6^3} = \frac{1}{12}$$

■

---

[3] כן זו מילה. כן, אני המצאתי עכשיו

סעיף ה - ההסתברות שלפחות זוג אחד של קוביות עם סכום 6

הסיכוי שסכום של שתי קוביות יהיה 6 הינו $\frac{30}{6^3} = \frac{5}{36}$ לפי ההרצאה. כמובן שאין זה משנה אם מה הצבעים של כל אחת מהקוביות בזוג.
נשתמש בכלל ההכלה וההפרדה.
התכונות שלנו A, B, C הינו שהשחורה-אדומה עם סכום 6, שהשחורה-לבנה עם סכום 6 ושאדומה-לבנה עם סכום 6.
ההסתברות לחיתוך בין שתי תכונות מסויימות (למשל $A \cap B$) הינה

$$P(A \cap B) = \frac{5 \cdot 1 \cdot 1}{|\Omega|} = \frac{5}{6^3}$$

בדומה $P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{5}{6^3}$. ולבסוף

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{6^3}$$

שכן ההטלה היחידה האפשרית הינה $(3, 3, 3)$.
ועכשיו הו"ה:

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{30}{6^3} + \frac{30}{6^3} + \frac{30}{6^3} - \frac{5}{6^3} - \frac{5}{6^3} - \frac{5}{6^3} + \frac{1}{6^3} = \frac{3 \cdot 30 - 15 + 1}{6^3} = \frac{40}{6^3} \approx 0.35185$$

וזהו ההסתברות המבוקשת.

■

שאלה 5

הוזמנו n אורחים. לכולם מגפיים שהוסרו בכניסה למסיבה[4].

מרחב המדגם שלנו יהיה כל החלוקות האפשריות של שני מגפיים לכל אחד מn האורחים. מדובר כמובן במרחב מדגם שווה הסתברויות (נתון בשאלה).

בהנחה שאף אורח לא הגיע עם שתי רגליים שמאליות (או שתיים ימניות), נחשב את גודל מרחב המדגם:

$$|\Omega| = \frac{(2n)!}{2^n}$$

מדובר בבעיה קומבינטורית פשוטה. תחילה ממספרים את כל האורחים. לאחר מכן, מסדרים את כל $2n$ המגפיים בשורה. מניחים שהאורח ה1# מקבל את המגפיים הראשון והשני בסידור. נותר לבטל את הסדר הפנימי בזוגות של המגפיים, יש כמובן n זוגות ולכן מחלקים ב2^n[5].

עתה נפנה לחישוב האפשרויות שכל אורח ייקח זוג מגפיים, ימני ושמאלי (נסמן תוצאות הצלחה של הניסוי בA)

$$|A| = n!n!$$

גם זו בעיה פשוטה בקומבי, תחילה לכל אורח מחלקים מגף ימני, ואז לכל אורח מחלקים מגף שמאלי. לכל חלוקה כזו יש $n!$ אפשרויות ומעקרון הכפל מקבלים את הגודל המבוקש של A.

ולכן נקבל שההסתברות הינה[6]

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n!n!}{\frac{(2n)!}{2^n}} = \frac{n!n!2^n}{(2n)!}$$

רק על מנת להמחיש כמה לא סביר זה אפילו עבור מספרים יחסית קטנים, כאשר מדובר ב5 אורחים בלבד, מדובר בסיכוי של כ-13% אם אנחנו מזמינים 10 אורחים, הסיכוי כבר יורד לכ-0.5%. עם 25 אורחים, כבר עדיף להמר על זה שאסטרואיד ייפגע באחד האורחים, יהרוג אותו, ועם הירושה שלו ייקנו זוגות מגפיים חדשים לכולם ☺.

■

[4] איזה אורחים ממושמעים, ועוד במסיבה

[5] אנחנו אומנם מניחים פה שכל מגף ימני שונה מחברו אבל גם אם רואים את כל המגפיים הימניים בתור מגפיים זהים, אז יהיה לנו בהמשך הצטמצמות של מונה ומכנה ועל כן, אין זה משנה באמת

[6] נזכור שמדובר במרחב שווה הסתברויות