הסתברות מ - 094412 - HW6

גור תלם - 206631848

19.12.2020

שאלה 1

סיכוי לחזות גשם $P(R) = 0.3$. סיכוי לחזות שמש $P(S) = 0.6$. סיכוי למעונן חלקית $P(C) = 0.1$.
התחזית בימים שונים ב"ת.

סעיף 1 - מה הסיכוי לחזות גשם בדיוק ב3 ימים מתוך 7?

הוכחה: מדובר בהתפלגות בינומית. עבור X כמות הימים עם תחזית לגשם:

$$P(X=3) = \binom{7}{3} P(R)^3 \cdot (1-P(R))^4 = 0.2268945$$

■

סעיף 2 - מה ההסתברות לחזות גשם ב3 מהימים, שמש ב2 ימים ומעונן חלקית ב2 הנותרים?

הוכחה: בדומה לנוסחה של התפלגות בינומית, נבחר 3 ימי גשם, 2 ימי שמש ו2 ימים מעונן חלקית. לאחר מכן נכפיל בהסתברויות

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot P(R)^3 \cdot P(S)^2 \cdot P(C)^2 = 0.020412$$

בדרך פחות קומבינטורית ויותר הסתברותית. נסמן Y מספר הימים עם תחזית שמש. Z מספר הימים עם תחזית מעונן חלקית. ועכשיו לפי התפלגות מולטינומית

$$P(X=3, Y=2, Z=2) = \frac{7!}{3!2!2!} \cdot 0.3^3 \cdot 0.6^2 \cdot 0.1^2$$

■

סעיף 3 - מה ההסתברות שהוא יחזה גשם ב3 ימים בהינתן שהוא חזה מעונן חלקית יותר מפעמיים?

הוכחה: כלומר, יש לחשב

$$P(X=3 \mid Z=2) = \frac{P(X=3, Z=2)}{P(Z=2)} = \frac{P(X=3, Z=2, Y=2)}{P(Z=2)} =$$

$$= \frac{0.020412}{\binom{7}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^5} \approx 0.16460905$$

■

סעיף 4 - מה ההסתברות שהוא יחזה גשם ב3 ימים בהינתן שלא חזה מעונן חלקית יותר מפעמיים (כלומר, לכל היותר פעמיים מעונן חלקית)?

הוכחה: כלומר, יש לחשב

$$P(X=3 \mid Z \le 2) = \frac{P(X=3, Z\le 2)}{\binom{7}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^5 + \binom{7}{1} \cdot 0.1 \cdot 0.9^6 + 0.9^7} = \frac{P(X=3, Z=0) + P(X=3, Z=1) + P(X=3, Z=2)}{0.9743085} =$$

$$= \frac{\frac{7!}{3!4!0!} \cdot 0.3^3 \cdot 0.6^4 \cdot 0.1^0 + \frac{7!}{3!3!1!} \cdot 0.3^3 \cdot 0.6^3 \cdot 0.1^1 + \frac{7!}{3!2!2!} \cdot 0.3^3 \cdot 0.6^2 \cdot 0.1^2}{0.9743085} = \frac{0.224532}{0.9743085} =$$

$$= 0.\overline{2304526748971193415637860008} \; (Repeating\, decimal)$$

■

שאלה 2

צפרדע קופצת למעלה או נשארת במקום בכל דקה. למעלה בהסתברות של $\frac{1}{4}$. החלטות הקפיצה אינן תלויות.

סעיף א - מה תוחלת זמן השהיה של הצפרדע בשלב 0?

הוכחה: נגדיר X הזמן שהצפרדע נשראת ב0. אנחנו בשלב הזה של הקורס שאנחנו זורקים דברים באוויר בלי הוכחה כי אנחנו ילדים גדולים כבר שיודעים לזהות התפלגות גאומטרית

$$P\left(X=x\right)=\left(1-\frac{1}{4}\right)^{x-1}\cdot\frac{1}{4}$$

ולכן התוחלת של X הינה

$$E\left(X\right)=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$$

■

סעיף ב - מהי תוחלת מספר השלב בו תמצא הצפרדע לאחר 10 דק?

הוכחה: נסמן בY את השלב בו נמצאת הצפרדע אחרי 10 דק. מדובר בעצם בהתפלגות בינומית (זוכרים את הנימוק של ילדים גדולים וזה?)

$$P\left(Y=y\right)=\binom{10}{y}\left(\frac{1}{4}\right)^{y}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-y}$$

למרות שהנוסחה של p_Yלא באמת מעניינת אותנו, כבר שכחתי מה שאלו ואין לי כוח למחוק אז אני פשוט אכתוב גם את התשובה: לפי ההרצאה, התוחלת של התפלגות בינומית היא np. כלומר, עבור $n=10,p=\frac{1}{4}$ אנחנו נקבל

$$E\left(Y\right)=10\cdot\frac{1}{4}=2.5$$

■

סעיף ג - מהי תוחלת הזמן השהיה הכוללת של הצפרדע בשני השלבים התחתונים של הסולם 0) ו1)?

הוכחה: נסמן Z הזמן (בדקות) שהצפרדע שלנו נשאר בשלבים 0 ו1.

אנו יודעים מהסעיף הראשון שהצפרדע שוהה בשלב 0 בממוצע 4 דק. כלומר התוחלת של X היא 4.

כיוון שאין תלות בין החלטות הצפרדע, גם התוחלת של זמן השהיה בשלב 1 היא 4.

אפשר לסכום ולקבל ש$E\left(Z\right)=8$.

אפשר גם בעזרת התפלגות בינומית שלילית, נגדיר שהצפרדע קפצה למעלה בתור כישלון. כלומר, אנחנו עוצרים אחרי 2 כשלונות. לכן מדובר בהתפלגות בינומית שלילית עם $r=2,p=0.25$. כלומר, התוחלת היא (לפי שנלמד בשיער)

$$E\left(Z\right)=\frac{2}{0.25}=8$$

וכמה מפתיע זה להגיע לאותה תוצאה? ■

שאלה 3

בסדרת ביטים אקראית באורך n, כל ביט הוא 1 בהסתברות p בלי תלות באחרים.

סעיף א - מה התוחלת של מספר של זוגות של אחדים העוקבים?

הוכחה: יש $n-1$ זוגות אחדים אפשריים. החל מהזוג $(1,2),\ldots,(n-1,n)$.
ההסתברות שזוג האחדים במקומות $(k,k+1)$ קיים בסדרה (עבור $1\leq k\leq n-1$) הינו p^2 שכן נאמר לנו שההסתברות בין מקומות ב"ת.
נסמן A_i את המאורע שהזוג במקום $(i,i+1)$ הוא זוג אחדים. אינדיקטור I_{A_i} שA_i מתקיים. ולכן

$$E\left(I_{A_i}\right)=P\left(A_i\right)=p^2$$

נסמן X מספר הזוגות של אחדים עוקבים.
ולפי לינאריות (באינדוקציה)

$$E\left(X\right)=E\left(\sum_{i=1}^{n-1}I_{A_i}\right)=\sum_{i=1}^{n-1}E\left(I_{A_i}\right)=\left(n-1\right)\cdot p^2$$

■

סעיף ב - מה התוחלת של מספר הרצפים (כלומר, מספר הקטעים) בעלי אותו ערך?

הוכחה: נסמן B_iאת המאורע שהסיבית הi שונה מהסיבית ה$i+1$ (כלומר, i היא הסיבית האחרונה ברצף). האינדיקטור I_{B_i} מ"מ אשר מסמן האם המאורע B_i מתקיים. אבל

$$E\left(I_{B_i}\right)=P\left(B_i\right)=p\left(1-p\right)+\left(1-p\right)p=2p\left(1-p\right)=2p-2p^2$$

נסמן Y מ"מ מספר הרצפים.
ולכן לפי לינראיות שוב ניתן לסכום ולקבל

$$E\left(Y\right)=E\left(\sum_{i=1}^{n-1}I_{B_i}+1\right)=\sum_{i=1}^{n-1}E\left(I_{B_i}\right)+1=\left(n-1\right)\cdot\left(2p-2p^2\right)+1$$

■

שאלה 4

נתון בניין בן 11 קומות.

הקומה התחתונה 0 (קרקע).

שאר הקומות מ1 עד 10.

12 איש נכנסים למעלית (לא תקני מבחינת התו הסגול) בקומת קרקע ובוחרים באחקראי באופן ב"ת קומות לרדת בהן. הסתברות שווה לכל קומה (כלומר $\frac{1}{10}$).

סעיף א - מה התוחלת של מספר הקומה הגבוהה ביותר אליה תגיע המעלית?

הוכחה: נסמן בX את הקומה הגבוהה ביותר שהמעלית הגיע אליה. ברור שX נתמך בקבוצה $\{0,1,2,3,4,5,...\}$. לכן

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-P(X<k))=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\overbrace{\left(\frac{k-1}{10}\right)^{12}}^{all\,of\,the\,12\,chose<k}\right)=\sum_{k=1}^{10}\left(1-\left(\frac{k-1}{10}\right)^{12}\right)=$$

$$=9.632571463867$$

■

סעיף ב - מה תוחלת כמות הקומות השונות בהן לא תפתח הדלת?

הוכחה: המאורע A_i משמעותו שהמעלית לא עוצרת בקומה i (לכל $1\leq i\leq 10$).

$$E(I_{A_i})=P(A_i)=\left(\frac{9}{10}\right)^{12}=0.2824295365$$

נסמן Y מ"מ מספר הקומות שהמעלית לא נפתחה בהן.

ומלינאריות התוחלת אנחנו נקבל

$$E(Y)=E\left(\sum_{i=1}^{10}I_{A_i}\right)=\sum_{i=1}^{10}E(I_{A_i})=10\cdot 0.2824295365=2.824295365$$

■

סעיף ג - מה תוחלת כמות הקומות השונות שירדו בהן 2 אנשים בדיוק?

הוכחה: בדומה לסעיף הקודם, B_i המאורע שבקומה i ירדו בדיוק שני אנשים.

מ"מ I_{B_i} אינדיקטור אם B_i מתקיים.

$$E(I_{B_i})=P(B_i)=\binom{12}{2}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^8$$

נסמן Z מ"מ את מספר הקומות בהן ירדו בדיוק 2 אנשים.

ובגלל לינראריות

$$E(Z)=E\left(\sum_{i=1}^{10}I_{B_i}\right)=\sum_{i=1}^{10}E(I_{B_i})=10\cdot\binom{12}{2}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^8=2.841083586$$

■

שאלה 5

בונים גרף מקרי על ארבעה קודקודים v_1, v_2, v_3, v_4. כל שני קודקודים מחוברים ביניהם ע"י צלע בהסתברות ב"ת של 0.5.
משולש הוא קבוצה של 3 קודקודים שונים כך שכל 2 מהם מחוברים ע"י צלע.

סעיף א - מה ההסתברות שבגרף המקרי שלנו לא יהיו כלל משולשים?

הוכחה: נחשב זאת בעזרת הכלה והפרדה.
ב4 קודקודים יש $4 = \binom{4}{3}$ משולשים שונים אפשריים. לפי קומבי, A_i היא התכונה שהמשולש הi נמצא בגרף. **ועכשיו לWים**

$$W\left(0\right)=2^{6}$$

$$W\left(1\right)=\binom{4}{1}\cdot2^{3}$$

$$W\left(2\right)=\binom{4}{2}\cdot2$$

$$W\left(3\right)=\binom{4}{3}$$

$$W\left(4\right)=1$$

ולכן על ידי הכלה והפרדה, יהיו לנו

$$W\left(0\right)-W\left(1\right)+W\left(2\right)+W\left(3\right)-W\left(4\right)=41$$

גרפים ללא משולשים כלל. כלומר, שמתוך 2^6 גרפים פשוטים אפשריים, ההסתברות לגרף ללא משולשים היא

$$P\left(A_{1}^{c},A_{2}^{c},A_{3}^{c},A_{4}^{c}\right)=\frac{41}{2^{6}}=0.640625$$

■

סעיף ב - מה תוחלת מספר המשולשים בגרף?

הוכחה: נחשב את תוחלת מספר המשולשים בגרף. נסמן בI_{A_i} את האינדיקטור שהתרחש A_i.
נסמן X את מספר המשולשים בגרף, כלומר, את מספר המאורעות A_i שהתרחשו. **ולכן**

$$E\left(X\right)=\sum_{i=1}^{4}P\left(A_{i}\right)$$

אבל ידוע לנו כי ההסתברות שמשולש i קיים בגרף הינה $P\left(A_i\right)=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$ לכל i. **ולכן**

$$E\left(X\right)=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{8}=0.5$$

■

שאלה 6

ברוך ומשה מטילים שוב ושוב קובייה הוגנת. הטלות ב"ת.

כל אחד יכול לעזוב את המשחק בכל שלב שירצה, ללא תלות בעזיבה של השחקן השני.

סעיף א - ברוך אומר שהוא יפסיק לשחק כאשר תתקבל הספרה 6. מה התוחלת של כמות ההטלות עד שברוך יפסיק לשחק?

הוכחה: X מספר ההטלות עד שמתקבל 6. כלומר. 6 זה הצלחה ומשהו ששונה מ6 הוא כישלון. כלומר מדובר בהתפלגות גיאומטרית עם פרמטר $\frac{1}{6}$.

ולכן $E\left(X\right)=\frac{1}{\frac{1}{6}}=6$. ■

סעיף ב - משה אומר שהוא יפסיק לשחק כאשר תתקבל בפעם השלישית ספרה זוגית. מה התוחלת של כמות ההטלות עד שמשה יפסיק לשחק?

הוכחה: Y מ"מ מספר ההטלות עד שמתקבל מספר זוגי בפעם השלישית. בדומה לקודם, הצלחה היא ב$\frac{1}{2}$ מהמקרים. וכיוון שמדובר על הצלחה שלישית. מדובר בהתפלגות בינומית שלילית עם סיכוי הצלחה $\frac{1}{2}$ ו3 הצלחות. ולכן לפי תוחלת של התפלגות בינומית שלילית

$$E\left(Y\right)=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$$

■

כעת החליטו השניים כי יטילו את הקובייה 10 פעמים בלבד.

סעיף ג - ברוך היה רוצה להתחתן עם הספרה 6. הוא רוצה לדעת כמה כלות יהיו לו (כן, אני ממגדר את הספרה 6, כן, החלטתי שהיא גם הטרוסקסואלית, וכן גם ברוך להחלטתי הטרוסקסואל). כלומר, מה התוחלת של הספרה 6?

הוכחה: Z מספר הפעמים שהתקבלה הספרה 6. ההטלות ב"ת ולכן מדובר בהתפלגות בינומית עם 10 ניסויים ופרמטר סיכוי הצלחה $\frac{1}{6}$. ולכן התוחלת היא בהכרח

$$E\left(Z\right)=10\cdot\frac{1}{6}=1.6\overline{6}$$

■

סעיף ד - הצלחה מבחינתו של ברוך מוגדרת כאשר הספרה 6 מתקבלת 5 פעמים בדיוק. הצלחה מבחינת משה היא כאשר התקבלו בדיוק 5 פעמים ספרות זוגיות. מה התוחלת מספר ההצלחות ב10 הטלות?

הוכחה: נחשב את התוחלת של הצלחה עבור ברוך ועבור משה בנפרד. נתחיל עם ברוך.

נניח כי הצלחה נבדקת רק לאחר 10 ההטלות. כלומר, אם התקבל ה6 ה5 בהטלה ה5 ואז לא התקבלו יותר 6ים, הכוונה שהייתה הצלחה אחת עבור ברוך ולא הצלחה בכל הטלה שלאחריה היו בדיוק 5 6ים.

אם נסמן מאורע B הצלחה של ברוך ואינדיקטור I_B. אז

$$P\left(B\right)=E\left(I_B\right)=\binom{10}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^5=0.01302381...$$

נסמן מאורע M הצלחה של משה ואינדיקטור I_M ולכן

$$E\left(I_M\right)=P\left(M\right)=\binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\binom{10}{5}0.5^{10}=0.24609375$$

ומלינאריות נקבל

$$E\left(1\cdot I_M+I_B\right)=1\cdot E\left(I_M\right)+E\left(I_B\right)=0.25911756\ldots$$

■

כיוונים אחרים לפתרונות:

שאלה 4ב

נסמן מ"מ I_{A_i} אינדיקטור שA_i התרחש.

נסמן בY את מספר הקומות בהן לא נפתחת הדלת. נרצה לחשב $P\left(Y=y\right)$, כלומר, הסיכוי שיהיו בדיוק y קומות בהן המעלית לא תעצור.

ניתן לפתור שאלה זו בצורה יחסית קלה אם נעבור לקומבינטוריקה (יוחאי אמר שמותר). נסמן A_i את כמות הבחירות של אנשים של קומות שונות כך שבדיוק i קומות לא ייבחרו (אפשר להתיחס לאנשים כזהים, כי באמת משמעות מי הולך לאן)

$$A_i = \overbrace{\binom{10}{i}}^{choose\,empty\,floors} \cdot \underbrace{\binom{12-(10-i)+(10-i)-1}{12-(10-i)}}_{unordered\,choices\,with\,repetitions\,12\,from\,10\,with\,at\,least\,1\,from\,each} =$$

$$= \binom{10}{i} \cdot \binom{11}{2+i}$$

נשים לב שהחסרנו בכמות הבחירה את כמות הקומות שבוודאות יורדים בהם אנשים, כלומר, מ12 הבחירות, לקחנו מראש את הכמות שצריך, אחת לכל קומה שבוודאות יורדים בה אנשים. את השאר יש לחלק בין אותן קומות (כלומר, מחלקים את השארית, את האנשים הנוספים שיורדים בכל קומה).

אנחנו יודעים איך לחשב מספר בחירות עם חזרות מקומבי.

סה"כ יש $\binom{12+10-1}{12}=\binom{21}{12}$ חלוקות שונות של אנשים לקומות השונות.

אז סה"כ התוחלת תהיה

$$\sum_{i=0}^{9} i \cdot \frac{A_i}{\binom{21}{12}} = \sum_{i=0}^{9} i \cdot \frac{\binom{10}{i}\cdot\binom{11}{2+i}}{\binom{21}{12}} = \frac{30}{7}$$

קיבלתי אבל תשובה שונה ואני לא בטוח למה. אני מרגיש שזה כן כיוון נכון, לראות כמה אפשרויות יש לכל