HW3 - 094412 - הסתברות מ

גור תלם - 206631848

25.11.2020

שאלה 1

נסמן $A = Approved$. $B = Valid$.
אחוז הפגומים 5%. $P(B) = 0.95$.
כל מוצר נבדל על ידי n בודקים ב"ת.
הסתברות שבודק יאשר תקין p_1. $P(A \mid B) = p_1$.
הסתברות שבודק יאשר לא תקין p_2. $P(A \mid B') = p_2$.

א. נתון כי פריט אושר על ידי הבודק הראשון. מה ההסתברות שהפריט תקין?

כלומר, יש לחשב $P(B \mid A)$.
לפי הנוסחה להסתברות מותנית

$$P(A \mid B) \cdot P(B) = 0.95 p_1 = P(A \cap B)$$

כמו כן, ניתן לחשב

$$P(A \mid B') \cdot P(B') = 0.05 p_2 = P(A \cap B')$$

ולכן

$$P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap B')) = P(A \cap B) + P(A \cap B') = 0.95 p_1 + 0.05 p_2$$

לפי נוסחה להסתברות מותנית

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.95 p_1}{0.95 p_1 + 0.05 p_2}$$

■

ב. נתון כי פריט עבר בדיקה אצל כל n הבודקים. k מהבודקים אישרו את תקינות הפריט והשאר דחו אותו. מה ההסתברות כי הפריט תקין?

נחשב תחילה את ההסתברות שהפריט יקבל את התוצאות האלה מהבודקים

$$P(A\,by\,k) = \binom{n}{k} P(A \mid B)^k P(A' \mid B)^{n-k} \cdot P(B) + \binom{n}{k} P(A \mid B')^k P(A' \mid B')^{n-k} \cdot P(B') =$$

$$= \binom{n}{k} \left(p_1^k (1-p_1)^{n-k} \cdot 0.95 + p_2^k (1-p_2)^{n-k} \cdot 0.05 \right)$$

לכן לפי נוסחת בייס

$$P(B \mid A\,by\,k) = \frac{P(A\,by\,k \mid B) \cdot P(B)}{P(A\,by\,k)} = \frac{0.95 \cdot \cancel{\binom{n}{k}} p_1^k (1-p_1)^{n-k}}{\cancel{\binom{n}{k}} \left(p_1^k (1-p_1)^{n-k} \cdot 0.95 + p_2^k (1-p_2)^{n-k} \cdot 0.05 \right)} =$$

$$= \boldsymbol{\frac{0.95 \cdot p_1^k (1-p_1)^{n-k}}{p_1^k (1-p_1)^{n-k} \cdot 0.95 + p_2^k (1-p_2)^{n-k} \cdot 0.05}}$$

■

ג. איזה אחוז מהמוצרים יגיעו לשוק אם נדרוש שכל הבודקים יאשרו?

אז כבר הגדרנו שההסתברות שמוצר יאושר על ידי בדיוק k בודקים הינה

$$P\left(A\,by\,k\right)=\binom{n}{k}\left(p_1^k\left(1-p_1\right)^{n-k}\cdot0.95+p_2^k\left(1-p_2\right)^{n-k}\cdot0.05\right)$$

אז צריך רק להציב $k=n$ ולקבל שההסתברות שמוצר יאושר על ידי כל הבודקים

$$P\left(A\,by\,all\right)=\binom{n}{n}\left(p_1^n\left(1-p_1\right)^{n-n}\cdot0.95+p_2^n\left(1-p_2\right)^{n-n}\cdot0.05\right)=0.95p_1^n+0.05p_2^n$$

אבל כדי להמין לאחוזים צריך להכפיל ב100. ולכן האחוז של המוצרים שישוחררו לשוק הינו

$$\mathbf{95p_1^n+5p_2^n\,\%}$$

■

שאלה 2

10 סיבובי שח ב"ת.

אריק מנצח בסיבוב $P(A)=0.4$.

בנץ מנצח בסיבוב $P(B)=0.3$.

תיקו $P(D)=0.3$.

הזוכה הוא הראשון שמנצח בסיבוב כלשהו.

א. מה ההסתברות שאריק ינצח במשחק?

כלומר, סכום ההסתברויות לתיקו עד הסיבוב הi וניצחון בסיבוב ה$i+1$ של אריק

$$\sum_{i=0}^{9}P(D)^{i}P(A)=P(A)\sum_{i=0}^{9}P(D)^{i}=0.4\sum_{i=0}^{9}0.3^{i}=\mathbf{0.571425}$$

■

ב. מה ההסתברות שהמשחק יסתיים בסיבוב הk?

במידה ו$k<10$ אז המשמעות שאחד מהשחקנים ינצח בסיבוב הk. נחשב בדומה לסעיף הקודם שבנץ ינצח בסיבוב הk

$$P(D)^{k-1}P(B)=0.3\cdot 0.3^{k-1}$$

אריק ינצח בסיבוב הk

$$P(D)^{k-1}P(A)=0.4\cdot 0.3^{k-1}$$

לכן הסיכוי שמשחק יסתיים בסיבוב ה$k<10$ הינו

$$0.7\cdot 0.3^{k-1}$$

הסיכוי שכל סיבוב יסתיים בתיקו הינו 0.3^{10}.

לכן הסיכוי שהמשחק יסתיים בסיבוב ה10 הינו

$$0.3^{10}+0.3\cdot 0.3^{9}+0.4\cdot 0.3^{9}=\underbrace{(0.3+0.4+0.3)}_{=1}\cdot 0.3^{9}$$

לכן, הסיכוי שהמשחק יסתיים בסיבוב הk

$$P(end\,at\,k)=\begin{cases}0.3^{9} & k=10\\ 0.7\cdot 0.3^{k-1} & 1\le k<10\end{cases}$$

■

שאלה 3

א. נתונים A,B,C ב"ת וההסתברות של C אינה 0. צריך להוכיח כי בהינתן C, A וB ב"ת.

נוכיח לפי נוסחה של אי תלות בעזרת הנוסחה להסתברות מותנית והעובדה כי המאורעות ב"ת

$$P(A\mid C)\cdot P(B\mid C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}\cdot\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{P(A\cap C)\cdot P(B\cap C)}{P(C)^2}=\frac{P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)\cdot \cancel{P(C)}}{P(C)^{\cancel{2}}}=$$

$$=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)}=\frac{P((A\cap B)\cap C)}{P(C)}=P(A\cap B\mid C)$$

■

ב.

2 מטבעות. מטבע א עם הסתברות 0.5 לקבל H.
מטבע ב עם הסתברות $\frac{2}{5}$ לקבל H.
בוחרים באקראי מטבע אחד ומטילים אותו פעמיים.
C - נבחר מטבע א
A - H בהטלה הראשונה
B - H בהטלה השניה

1. האם A,B ב"ת?

התשובה היא לא. אינטואיציה: אם התקבל בהטלה הראשונה H אז סביר יותר כי מדובר במטבע א וכך סיכוי גבוהה יותר לקבל H גם בהטלה השניה על פני אם היה מדובר במטבע ב. עתה נוכיח:

$$P(A)=P(A\mid C)\cdot P(C)+P(A\mid C')\cdot P(C')=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{20}$$

$$P(B)=P(B\mid C)\cdot P(C)+P(B\mid C')\cdot P(C')=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{20}$$

$$P(A\cap B)=P(A\cap B\mid C)\cdot P(C)+P(A\cap B\mid C')\cdot P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{8}+\frac{4}{50}=0.205$$

לעומת זאת

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{9}{20}\cdot\frac{9}{20}=\frac{81}{400}=0.2025\neq 0.205$$

ולכן המאורעות אינם ב"ת.

■

2. האם A,B ב"ת בהינתן C?

התשובה היא כן. אינטואיציה: אם ידוע כי מדובר במטבע א אז ידוע כי הסיכוי שווה ל0.5 בכל הטלה, ללא קשר מה יצא בהטל(ר)ה הקודמת[1].
נוכיח:

$$P(A\cap B\mid C)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)}=\frac{P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)}{P(C)}=\frac{P(A)\cdot P(C)}{P(C)}\cdot\frac{P(B)\cdot P(C)}{P(C)}=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}\cdot\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=P(A\mid C)\cdot P(B$$

■

[1] בונוס 10 נקודות בציון הסופי לבודק שמזהה מאיזה ספר הציטוט (זה בסדר גם אם לא, אבל אם יש לכם ילדים, שווה להכיר את הספר):
"ובארץ צ'ומבליה, בעיר הבירה נגדי-מה, בתוך ארמון שיש ורד, חי לו מלך צ'ומבליה (המלך מדהל ה-1) והוא זקן, זקן, זקן עד מאד."
אתם בטוח שואלים את עצמכם מה הקשר בין הציטוט למטלה. אז אם אתם מוצאים את הקשר, עדכנו אותי, כי גם אני לא יודע.

שאלה 4

זיו וגילי חוזרים מקורס זריקת אבנים על חיות בית. הם קיבלו מטלת בית לתרגל. למזלם, יש להם בבית סט אבנים מיוחד (אשר השאילה להם "יד לאלימות", המכללה בה הם לומדים).

משימת הבית של זיו וגילי היא לתרגל על חתולי רחוב שהם מוצאים על מרפסות של אנשים ברחבי העיר.

לכל זריקה של השניים יש את התפלגות הסיכויים הבאה:

סיכוי של 0.25 לפצוע את החתול.

סיכוי של 0.5 להרוג את החתול.

סיכוי של 0.25 לפגוע בבעל הבית **במקום** בחתול.

ידוע גם כי חתול אשר נפצע פעמיים, נהרג.

כמו כן, חתול אשר נפגע, יכול להתחמק באותה רמת יכולת (כלומר, הריסוסים ב"ת).

א. גילי זורק שתי אבנים מהר מבלי לחכות לראות אם הראשונה פגעה (למקרה שהראשונה תפגע בבעלים וכדי להספיק להרוג את החתול). מה הסיכוי לתמותה של החתול?

המאורעות בהם החתול המסכן ימות הינם: פציעה ולא לפגוע בבעלים, הריגה בזריקה הראשונה או פגיעה בבעלים ואז הריגה בזריקה השניה. כמובן שמדובר במאורעות זרים (מובדלים בהשלכות הזריקה הראשונה):

$$P\left(wound\right)\cdot P\left(hit\,owner'\right)+P\left(kill\right)+P\left(hit\,owner\right)\cdot P\left(kill\right)=0.25\cdot0.75+0.5+0.25\cdot0.5=0.8125$$

לצערו של החתול, זורקי האבנים שלנו כנראה יצליחו להרוג אותו.

הסיכוי של החתול למות

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{die}\right)=\mathbf{0.8125}$$

$$\blacksquare$$

ב. בהינתן שהחתול מת לאחר n אבנים. מה ההסתברות שהחתול מת רק באבן הnית?

כלומר, החתול צריך לא להפגע מ$n-2$ פגיעות לפחות מבין $n-1$ הפגיעות הראשונות, לזה יש סיכוי של

$$\binom{n-1}{1}\cdot0.25^{n-2}=\left(n-1\right)\cdot0.25^{n-2}$$

הזריקה הראשונה תפצע והשניה תפצע או תהרוג. בחישוב דומה לסעיף הקודם נקבל

$$P\left(wound\right)\cdot\left(P\left(wound\right)+P\left(kill\right)\right)=0.25\cdot0.75=0.1875$$

כמו כן, קיימת האפשרות שהחתול יישרוד $n-1$ אבנים אבל ימות באחרונה, הסיכוי למקרה זה הינו (כמובן שלא ספרנו את המקרה עדיין)

$$P\left(kill\right)\cdot0.25^{n-1}=0.5\cdot0.25^{n-1}$$

סה"כ הסיכוי שהחתול ימות רק מהאבן האחרונה הינו

$$P\left(died\,from\,n-th\right)=\left(n-1\right)\cdot0.25^{n-2}\cdot0.1875+0.5\cdot0.25^{n-1}$$

עכשיו נותר לחשב את הסיכוי שהחתול ימות לנו "מתישהו" בn זריקות

$$P\left(died\right)=1-P\left(survived\right)=1-\left(\underbrace{0.25^{n}}_{all\,misses}+\underbrace{\binom{n}{1}}_{choose\,place\,for\,wound}\cdot\underbrace{0.25^{n-1}}_{misses}\cdot\underbrace{0.25}_{wound}\right)$$

ולכן בהינתן שהחתול מת, הסיכוי שהוא מת מהאבן האחרונה

$$P\left(died\,from\,n-th\mid died\right)=\frac{P\left(died\,from\,n-th\cap died\right)}{P\left(died\right)}=\frac{P\left(died\,from\,n-th\right)}{P\left(died\right)}=$$

$$= \frac{(n-1)\cdot 0.25^{n-2}\cdot 0.1875 + 0.5\cdot 0.25^{n-1}}{1-\left(0.25^{n}+\binom{n}{1}\cdot 0.25^{n-1}\cdot 0.25\right)}$$

וזה הסיכוי שהחתול ימות מהאבן הnית.

נחשב במפורש עבור $n=5$.

$$\frac{4\cdot 0.25^{3}\cdot 0.1875+0.5\cdot 0.25^{4}}{1-(0.25^{5}+5\cdot 0.25^{4}\cdot 0.25)} = \frac{0.013671875}{0.994140625} \approx 0.0137524558$$

■

ג. בהינתן שהחתול מת מהאבן הn. מה הסיכוי שהוא נפצע מהאבן הi?

נחשב

$$P\left(wounded\, from\, i-th \mid died\, from\, n-th\right) = \frac{\overbrace{0.25^{n-2}}^{first\, n-1\, missed\, except\, i}\cdot\overbrace{0.25}^{wounded\, in\, i-th}\cdot\left(\overbrace{0.25}^{wounded\, from\, last}+\overbrace{0.5}^{killed\, in\, last}\right)}{P\left(died\, from\, n-th\right)} =$$

$$= \frac{0.75\cdot 0.25^{n-1}}{(n-1)\cdot 0.25^{n-2}\cdot 0.1875+0.5\cdot 0.25^{n-1}} = \frac{0.75\cdot 0.25}{0.1875\cdot(n-1)+0.5}$$

עבור $n=5, i=3$ נקבל

$$P\left(wounded\, from\, i-th \mid died\, from\, n-th\right) = \frac{0.75\cdot 0.25^{5-1}}{0.013671875} = 0.2142857143$$

הבחנה מעניינת היא שהביטוי כלל לא תלוי בi. זה כמובן הגיוני שכן אין סיבה לסיכוי גבוהה יותר לפציעה של החתול בזריקה כזו על פני אחרת.

■

ובזאת הוכחנו כי הסיפור רקע מזעזע וצריך לחשוב על סיפור מוצלח יותר.

שאלה 5

מיוצר בהונגריה - $P(H)=0.6$
מיוצר בסין - $P(C)=0.4$
סיכוי להצלחה בחיוג
$P(S\mid H)=0.98$
$P(S\mid C)=0.97$

א. ב10 ניסויים, המשתמש טעה פעמיים. מה ההסתברות שהמכשיר יוצר בהונגריה?

תחילה נאמר שמדובר בטעות של המשתמש ולכן יש הסתברות של 0.6 שהטלפון יוצר בהונגריה (שכן אין באמת קשר בין מקום הייצור לטעות משתמש).
נניח עתה כי מדובר במכשיר שנכשל בחיוג ולא בטעות משתמש.
צריך לחשב

$$P(H\mid 2\,failures\,out\,of\,10)=\frac{P(H\cap 2\,failures\,out\,of\,10)}{P(2\,failures\,out\,of\,10)}$$

נחשב את ההסתברויות הנ"ל

$$P(H\cap 2\,failures\,out\,of\,10)=0.6\cdot\binom{10}{2}\cdot 0.02^2\cdot 0.98^8\approx 0.00918824064388328448$$

וכן

$$P(2\,failures\,out\,of\,10)=P(H\cap 2\,failures\,out\,of\,10)+P(H'\cap 2\,failures\,out\,of\,10)=$$

$$=0.6\cdot\binom{10}{2}\cdot 0.02^2\cdot 0.98^8+0.4\cdot\binom{10}{2}\cdot 0.03^2\cdot 0.97^8\approx 0.0218848830667739613$$

כלומר

$$\frac{P(H\cap 2\,failures\,out\,of\,10)}{P(2\,failures\,out\,of\,10)}=\frac{0.00918824064388328448}{0.0218848830667739613}\approx$$

$$\approx 0.4198441735260191194507695003319981253548771554264596277393623635$$

ולכן

$$P(H\mid 2\,failures\,out\,of\,10)\approx 0.419844173526$$

■

ב. ב10 החיובים הראשונים, *המכשיר* נכשל בחיוג פעם אחת בלבד. מה ההסתברות שהוא ייכשל בחיוג הבא?

כלומר, עלינו לחשב

$$P(fail\,in\,11-th\mid failed\,once\,in\,10\,tests)=\frac{P(fail\,in\,11-th\cap failed\,once\,in\,10\,tests)}{P(failed\,once\,in\,10\,tests)}$$

בדומה לקודם, נחשב

$$P(failed\,once\,in\,10\,tests)=0.6\cdot 10\cdot 0.02\cdot 0.98^9+0.4\cdot 10\cdot 0.03\cdot 0.97^9\approx 0.1912774584941658126$$

וגם

$$P(fail\,in\,11-th\cap failed\,once\,in\,10\,tests)=\left(0.6\cdot 10\cdot 0.02^2\cdot 0.98^9+0.4\cdot 10\cdot 0.03^2\cdot 0.97^9\right)$$

ולכן

$$\frac{P(fail\,in\,11-th\cap failed\,once\,in\,10\,tests)}{P(failed\,once\,in\,10\,tests)}\approx\frac{0.0047378264402687945124}{0.1912774584941658126}$$

ולכן נקבל

$$P(fail\,in\,11-th\mid failed\,once\,in\,10\,tests)\approx \mathbf{0.02476939247085042062004964579381523845824593}$$

■

שאלה 6

קונים עוד ועוד כרטיסים מהגרלה, עד שזוכים, אז מחליפים הגרלה וחוזרים על התהליך.

סיכוי כרטיס לזכור בהגרלה א - P_1.

סיכוי כרטיס לזכור בהגרלה ב - P_2.

נמצא נוסחה רקורסיבית עבור $p\left(n\right)$ ההסתברות שהכרטיס הn הוא מהגרלה א.

נבדוק

$$p\left(1\right)=1$$

שכן הכרטיס הראשון תמיד מהגרלה א.

למען הנוחות, נגדיר A_i מאורע שהכרטיס הi הוא מהגרלה א (A מסמל $Aleph$). בדומה Z_i שהכרטיס הi זכה ($Zacha$).

נמשיך וננסה לנחש נוסחה

$$p\left(2\right)=P\left(A_2\right)=P\left(A_1\cap Z_1'\right)+P\left(A_1'\cap Z_1\right)=1\cdot\left(1-P_1\right)+0=1-P_1$$

$$p\left(3\right)=P\left(A_3\right)=P\left(A_2\cap Z_2'\right)+P\left(A_2'\cap Z_2\right)=P\left(A_2\right)\cdot\left(1-P_1\right)+P\left(A_2'\right)\cdot P_2$$

וכבר ניתן לראות כי באופן כללי (נוסחת הסתברות שלמה

$$p\left(n\right)=P\left(A_n\right)=P\left(A_{n-1}\cap Z_{n-1}'\right)+P\left(A_{n-1}'\cap Z_{n-1}\right)=p\left(n-1\right)\cdot\left(1-P_1\right)+\left(1-p\left(n-1\right)\right)\cdot P_2$$

וזו הנוסחה הרקורסיבית המבוקשת.

■