HW5 - 094412 - הסתברות מ

גור תלם - 206631848

9.12.2020

שאלה 1

מטילים שתי קוביות הוגנות (ניתן להניח שאנחנו לא משחקים DND ולקוביות יש בדיוק 6 פאות).

X - תוצאת הקוביה הראשונה.

Y - התוצאה המקסימלית.

עלינו למצוא את ההתפלגות המשותפת של X, Y. כלומר, עלינו למצוא $P\left(X=x, Y=y\right)$.

או במילים, ההסתברות שהתוצאה המקסימלית תהיה y והתוצאה של הקוביה הראשונה תהיה x.

נפתור בעזרת חלוקה למקרים.

ניתן להבחין כי התוצאה המקסימלית בהכרח גדולה או שווה לתוצאה של הקוביה הראשונה ולכן עבור $x>y$ (או עבור ערכים מחוץ לתוצאות אפשריות של הקוביות) נקבל

$$P\left(X=x, Y=y\right)=0$$

כמו כן, עבור $x=y$, המשמעות היא שבקוביה השניה יכולים להתקבל המספרים 1 עד x אבל לא מעבר. לכן יש x הטלות כאלה מתוך 36 הטלות אפשריות.

במקרה ש$1\leq x<y\leq 6$ הקוביה השניה יכולה לקבל רק את הערך y שכן אם הערך המקסימלי גדול ממש מהקוביה הראשונה, אז הוא בהכרח הערך של הקוביה השניה. כלומר, יש הטלה אחת ויחידה כזו לכל $1\leq x<y\leq 6$ שנבחר (מתוך 36 הטלות אפשריות).

נסכם

$$P\left(X=x, Y=y\right)=P_{X,Y}\left(x,y\right)=\begin{cases} x/36 & 1\leq x,y\leq 6\\ 1/36 & 1\leq x<y\leq 6\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

ניתן גם יחסית בקלות להכליל את התשובה עבור קוביות עם K פאות

$$P\left(X=x, Y=y\right)=P_{X,Y}\left(x,y\right)=\begin{cases} \frac{x}{K^2} & 1\leq x,y\leq K\\ \frac{1}{K^2} & 1\leq x<y\leq K\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$\blacksquare$

שאלה 2

מספר הסועדים הוא משתנה מקרי N בעל התפלגות פואסון עם פרמטר $\lambda = 36$.

הסתברות של $\frac{1}{3}$ של סועד להינות ללא תלות במס' הסועדים ובהנחה של הסועדים האחרים.

סעיף א - מהי ההתפלגות של מספר האנשים שנהנו בארוחה?

נגדיר משתנה מקרי X - מספר האנשים שנהנו בארוחה. כאמור, X אינו תלוי בN. נגדיר שסועד נהנה בתור הצלחה בניסוי מתוך סדרה של ניסויי ברנולי (וN מספר הניסויים). לכן ניתן להשתמש בפיצול פואסון ולקבל

$$X \sim Pois\left(\frac{1}{3} \cdot 36\right) \Longrightarrow P_X(x) = e^{-12} \cdot \frac{12^x}{x!}$$

$\blacksquare$

סעיף ב - מהי ההתפלגות של מספר האנשים שלא נהנו בארוחה?

בדרך מקבילה לסעיף הקודם, רק עכשיו ההסתברות שאדם לא יהנה בארוחה (ללא תלות כמובן) הינה $p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. ולכן נקבל התפלגות פואסונית עם

$$\lambda = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24$$

נסמן בY את מספר האנשים שלא נהנו בארוחה.

ומכאן נקבל ש

$$Y \sim Pois(24) \Longrightarrow P_Y(y) = e^{-24} \cdot \frac{24^y}{y!}$$

$\blacksquare$

סעיף ג - A הינו המאורע שk אנשים בדיוק נהנו בארוחה. וB מאורע שj אנשים בדיוק לא נהנו בארוחה. האם המאורעות A וB תלויים?

הסתברות המאורע A הינה $P_X(k)$ ובדומה $P(B) = P_Y(j)$.

התרגול הוכח כי X וY ב"ת ולכן גם המאורעות A וB ב"ת.

$\blacksquare$

סעיף ד - לאדם שנהנה, הסתברות של $3/4$ להמליץ ללא תלות באחרים. אדם שלא נהנה ממליץ בהסתברות $1/8$ גם ללא תלות. מה ההתפלגות של כמות הממליצים?

נסמן בZ את מספר האנשים שנהנו והמליצו. ובW לא נהנו והמליצו.

אם נסתכל על האנשים שנהנו בתור סדרת ניסויי ברנולי (פרמטר $\lambda = 12$ עבור התפלגות פואסון) אז כמות הממליצים מאלה שנהנו מקבילה לשאלה בסעיף א. כלומר התפלגות פואסון עם פרמטר $12 \cdot \frac{3}{4} = 9$.

בדומה עבור W שהינו התפלגות פואסון עם פרמטר $24 \cdot \frac{1}{8} = 3$.

ולפי שרשרת הלוגיקה, כיוון שZ תלוי רק בכמות האנשים שנהנו (שאינה תלויה בכמות האנשים שלא נהנו) וכן שW אינה תלויה בכמות האנשים שנהנו, מקבלים שZ וW ב"ת ומתפלגים פואסונית עם הפרמטרים 9 ו3 בהתאמה.

נסמן את כמות הממליצים בV מ"מ. כלומר $V = Z + W$. לכן מהנתונים, אנחנו יכולים להשתמש באיחוד פואסון ולקבל

$$V \sim Pois(3+9)$$

$\blacksquare$

סעיף ה - צ"ל פונקציית ההסתברות של כמות הנהנים בהינתן כמות הסועדים.

כלומר, עלינו למצוא $P(X=k\mid N=n)=?$. כלומר, יש לנו סדרה של n ניסויי ברנולי עם הסתברות הצלחה (כפי שכבר הגדרנו בסעיף א, הצלחה=נהנה) של $\frac{1}{3}$. כלומר, מדובר בהתפלגות בינומית

$$X\sim Bin\left(n,\frac{1}{3}\right)$$

$$P(X=k\mid N=n)=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

■

שאלה 3

מטילים מטבע הוגן 3 פעמים.

X - מספר הפעמים שH מופיע ב2 ההטלות הראשונות.

Y - מספר הפעמים שT מופיע ב2 ההטלות האחרונות.

סעיף א - מהן פונקציות ההתסברות השוליות של X וY?

יש 8 סדרות הטלות שונות. נוכל בקלות לספור עבור $X=0,1,2$. כיוון שההטלה האחרונה אינה משנה, נספר כל קומבינציה של ההתחלה פעמיים (פעם אחת עבור הטלה אחרונה H ופעם אחת עבור T).

עבור $X=0$, יש את הסדרות המתחילות בTT. כלומר $P\left(X=0\right)=\frac{2}{8}$.

עבור $X=1$, יש את הסדרות המתחילות בHT או TH. כלומר $P\left(X=1\right)=\frac{4}{8}$.

עבור $X=2$, יש את הסדרות המתחילות בHH. כלומר $P\left(X=2\right)=\frac{2}{8}$.

בצורה אנלוגית ניתן לקבוע עבור Y. נקבל

$$P_{Y}\left(k\right)=P_{X}\left(k\right)=\begin{cases}\binom{2}{k}\cdot\frac{1}{4} & 0\leq k\leq2\\0 & else\end{cases}$$

■

סעיף ב - מהי פונקציית ההסתברות המשותפת של X וY?

פה אנחנו כבר צריכים טבלה כדי לספור (יש לנו 9 מקרים שונים, ווווף).

$x\backslash y$	0	1	2	$P_{X}\left(x\right)$
0	0	TTH	TTT	$\frac{2}{8}$
1	THH	HTH,THT	HTT	$\frac{4}{8}$
2	HHH	HHT	0	$\frac{2}{8}$
$P_{Y}\left(y\right)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{8}{8}=1$

אז ניתן לסכם במקרים

$$P\left(X=x,Y=y\right)=\begin{cases}1/4 & x=y=1\\1/8 & x\neq y\,and\,0\leq x,y\leq2\\0 & else\end{cases}$$

■

סעיף ג - נמק האם X וY ב"ת?

אלו ללא ספק תלויים. נתבונן למשל ב

$$P\left(X=0,Y=0\right)=0\neq\frac{1}{16}=\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{8}=P\left(X=0\right)\cdot P\left(Y=0\right)$$

■

סעיף ד - מה ההסתברות המותנית $P\left(Y=1\mid X\geq1\right)$?

תחילה נחשב

$$P\left(X\geq1\right)=P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)=\frac{6}{8}$$

עכשיו נחשב

$$P\left(Y=1,X\geq1\right)=P\left(Y=1,X=0\right)+P\left(Y=1,X=1\right)=\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$$

ועכשיו ניתן להשתמש בהגדרה של הסתברות מותנית

$$P\left(Y=1 \mid X \geq 1\right)=\frac{P\left(Y=1, X \geq 1\right)}{P\left(X \geq 1\right)}=\frac{3/8}{6/8}=\frac{1}{2}$$

$\blacksquare$

שאלה 4

יהיו X וY מ"מ המתארים את מספר השירים העיבריים והלועזיים בהתאמה. נתון (עבור $m,n\in\mathbb{N}$)

$$P\left(X=n,Y=m\right)=\frac{e^{-14}\cdot\left(7.14\right)^{m}\cdot\left(6.86\right)^{n-m}}{m!\left(n-m\right)!},\,0\leq m\leq n$$

סעיף א - צ"ל את פונקציית ההסתברות השולית של X וY.

נסכום על כל הערכים של Y כדי לקבל את ההסתברות השולית של X

$$P\left(X=n\right)=\sum_{m=0}^{n}\frac{e^{-14}\cdot\left(7.14\right)^{m}\cdot\left(6.86\right)^{n-m}}{m!\left(n-m\right)!}=\frac{1}{e^{14}}\cdot\sum_{m=0}^{n}\frac{\left(7.14\right)^{m}\cdot\left(6.86\right)^{n-m}}{m!\left(n-m\right)!}=$$

נבחין כי הביטוי שבתוך הסכום מאוד מזכיר את הביטוי של התפלגות בינומית. חסרים לנו 2 דברים, $n!$ במונה, ושסכום מספרי הקסם שם יהיו ביחד 1.

כלומר, נשים לב שסכום מספרי הקסם הינו 14 ולכן ניתן לחלק ב$14^{m}\cdot14^{n-m}$ על מנת "לנרמל" את המספרים הללו לגדלים מתאימים. אז

$$=\frac{1}{n!e^{14}}\cdot\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!\left(n-m\right)!}\cdot\frac{\left(7.14\right)^{m}\cdot\left(6.86\right)^{n-m}}{14^{m}\cdot14^{n-m}}=\frac{14^{n}}{n!e^{14}}\cdot\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\cdot\left(0.51\right)^{m}\cdot\left(0.49\right)^{n-m}=$$

$$=\frac{14^{n}}{n!e^{14}}\cdot\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\cdot\left(0.51\right)^{m}\cdot\left(0.49\right)^{n-m}$$

קיבלנו סכום רץ של כל תוצאות $Bin\left(n,0.51\right)$, וכיוון שמדובר בכל התוצאות האפשריות, ידוע שסכום זה הינו 1. לכן נקבל

$$P\left(X=n\right)=\frac{14^{n}}{n!\cdot e^{14}}$$

נעבור תהליך דומה עבור $P\left(Y=y\right)$

$$P\left(Y=m\right)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{e^{-14}\cdot\left(7.14\right)^{m}\cdot\left(6.86\right)^{n-m}}{m!\left(n-m\right)!}=\frac{\left(7.14\right)^{m}}{e^{14}m!}\cdot\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\left(6.86\right)^{n-m}}{\left(n-m\right)!}\overbrace{=}^{\substack{\lambda=6.86\\k=n-m}}$$

כמו כן, נשלים את מה שצריך קבל לקבל את הנוסחה של התפלגות פואסון

$$=\frac{\left(7.14\right)^{m}e^{\lambda}}{e^{14}m!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{\left(k\right)!}=\frac{\left(7.14\right)^{m}e^{\lambda}}{e^{14}m!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{\left(k\right)!}$$

ועכשיו אפשר לראות כי הΣ היא פשוט סכום על כל האפשרויות של התפלגות פואסון וכידוע, סכום זה מתכנס ל1, נקבל

$$P\left(Y=m\right)=\frac{\left(7.14\right)^{m}e^{-7.14}}{m!}$$

כבונוס, אנחנו מזהים גם את הביטוי הזה בתור הנוסחה של התפלגות פואסון עבור $\lambda=7.14$ עבור m.

ואם כבר מדברים על אקסטרה זיהויים, גם הנוסחה עבור X היא בעצם ביטוי פואסוני עם $\lambda=14$ עבור n. אולי זה יהיה שימושי לנו להמשך :-)

$\blacksquare$

סעיף ב - חשב את הביטויים הבאים:

נשים לב שלא הוכחנו כי המשתנים ב"ת ולכן לא ניתן להשתמש בעובדה זו.

תת סעיף 1 - $P\left(X=n\mid Y=m\right)$

נחשב לפי ההגדרה של הסתברות מותנית וכן הנוסחות שמצאנו (נניח כי לא מציבים $n<m$)

$$P\left(X=n\mid Y=m\right)=\frac{P\left(X=n,Y=m\right)}{P\left(Y=m\right)}=\frac{\frac{e^{-14}\cdot\cancel{(7.14)^{m}}\cdot(6.86)^{n-m}}{\cancel{m}!(n-m)!}}{\frac{\cancel{(7.14)^{m}}e^{-7.14}}{\cancel{m}!}}=\frac{e^{-14}\cdot\left(6.86\right)^{n-m}}{\left(n-m\right)!\cdot e^{-7.14}}=$$

$$=\frac{e^{-6.86}\cdot\left(6.86\right)^{n-m}}{\left(n-m\right)!}$$

ונראה שאנחנו לא מפסיקים לחזור לנוסחאות פואסון. איזה יופי!

■

תת סעיף 2 - $P\left(Y=m\mid X=n\right)$

$$P\left(Y=m\mid X=n\right)=\frac{P\left(X=n,Y=m\right)}{P\left(X=n\right)}=\frac{\frac{\cancel{e^{-14}}\cdot(7.14)^{m}\cdot(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!}}{\frac{14^{n}\cdot\cancel{e^{-14}}}{n!}}\overbrace{=}^{*}\binom{n}{m}\cdot\left(0.51\right)^{m}\cdot\left(0.49\right)^{n-m}$$

* בעזרת אותו טריק מסעיף א

ופה אנחנו קיבלנו את הנוסחה של התפלגות בינומית $Bin\left(n,0.51\right)$ עבור m.

■

תת סעיף 3 - $P\left(X-Y=k\mid Y=m\right)$

$$P\left(X-Y=k\mid Y=m\right)\overbrace{=}^{Y=m\,given}=P\left(X=k+m\mid Y=m\right)\frac{P\left(X=k+m,Y=m\right)}{P\left(Y=m\right)}=$$

$$=\frac{\frac{e^{-14}\cdot\cancel{(7.14)^{m}}\cdot(6.86)^{k}}{\cancel{m}!k!}}{\frac{\cancel{(7.14)^{m}}e^{-7.14}}{\cancel{m}!}}=\frac{e^{-6.86}\cdot\left(6.86\right)^{k}}{k!}$$

$1,2,3$ פואסון!

נ.ב. רק עכשיו ראיתי שמבקשים במפורש לומר את מתפלג הביטוי, אז $here\,goes$

$$X-Y\mid Y=m\sim Pois\left(6.86\right)$$

■

תת סעיף 4 - $P\left(X-Y=k\mid X=n\right)$

בדומה לסעיף הקודם

$$P\left(X-Y=k\mid X=n\right)=P\left(n-Y=k\mid X=n\right)=P\left(Y=n-k\mid X=n\right)=$$

נשתמש שוב בטריק של הפיצול של ה14 לשתי חזקות וחלוקה של מספרי הקסם

$$=\frac{\frac{\cancel{e^{-14}}\cdot(7.14)^{n-k}\cdot(6.86)^{k}}{(n-k)!(k)!}}{\frac{14^{n}}{n!\cdot\cancel{e^{14}}}}=\frac{n!\cdot\left(0.51\right)^{n-k}\cdot\left(0.49\right)^{k}}{\left(n-k\right)!\left(k\right)!}=\binom{n}{k}\cdot\left(0.49\right)^{k}\cdot\left(0.51\right)^{n-k}$$

וזו הנוסחה של התפלגות בינומית עבור k: $Bin\left(n,0.49\right)$. כלומר

$$X-Y\mid X=n\sim Bin\left(n,0.49\right)$$

■

שאלה 5

$X_i, 1 \leq i \leq n$ מ"מ ב"ת המתפלגים $X_i \sim Pois\left(\lambda_i\right)$, כאשר $\lambda_i > 0$.

סעיף א - נגדיר מ"מ $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. צ"ל שלכל $n \geq 1$ שלם מתקיים $S_n \sim Pois\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$

תיקון קל: אסור להשתמש בn כמו שאנחנו מתבקשים בשאלה כי האות הזו תפוסה כבר בשביל לציין את הn מ"מ הב"ת שלנו. אז נשתמש בk במקום.

נוכיח את הטענה באינדוקציה.

בסיס $k = 1$:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{1} X_i = X_i$$

וזה כמובן מתפלג כמוקש ($\sum_{i=1}^{1} \lambda_i = \lambda_i$).

נניח כי הטענה נכונה עבור k, נוכיח עבור $k+1$:

$$S_{k+1} = X_{k+1} + S_k = X_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} X_i$$

ולפי טענה מהשיעורים S_k וX_{k+1} ב"ת שכן S_k מורכב מביטוי שאינו כולל את X_{k+1}. לכן נוכל להשתמש באיחוד פואסון ולקבל ש$S_{k+1} = X_{k+1} + S_k$ מתפלג פואסונית עם פרמטר $\lambda_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i$

$$S_{k+1} \sim Pois\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i\right)$$

כמבוקש. כלומר, סיימנו את צעד הסגור של האינדוקציה.

■

סעיף ב - נפריך את הטענה $V = 2X_1 + X_2$ מ"מ, אז $V \sim Pois\left(2\lambda_1 + \lambda_2\right)$

נניח בשלילה $V \sim Pois\left(2\lambda_1 + \lambda_2\right)$.

נבדוק במקרה ש$X_1 = X_2 = 0$. לכן גם $V = 0$.

לכן

$$P\left(V = 0\right) = e^{-\left(2\lambda_1 + \lambda_2\right)} \cdot \frac{\left(2\lambda_1 + \lambda_2\right)^0}{0!} = e^{-\left(2\lambda_1 + \lambda_2\right)}$$

אבל

$$P\left(X_1 = 0, X_2 = 0\right) = P\left(X_1 = 0\right) \cdot P\left(X_2 = 0\right) = e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1^0}{0!} \cdot e^{-\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2^0}{0!} = e^{-\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_2} = e^{-\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)}$$

בגלל שמ"מ פואסוני לא יכול לקבל ערכים שליליים אנחנו גם יכולים לומר כי $V = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_2 = 0$. ולכן הנוסחאות צריכות להתלכד.

אבל $\lambda_1 \neq 0$ ולכן נקבל סתירה

$$e^{-\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)} \neq e^{-\left(2\lambda_1 + \lambda_2\right)}$$

כלומר, שהנחת השלילה אינה מתקיימת. ובזו הפרכנו את הטענה.

■

סעיף ג - כיצד מתפלג $X_1 \mid S_n = s$?

נחשב את הביטוי (עבור ערכים בת"ה)

$$P\left(X_1 = x \mid S_n = s\right) = \frac{P\left(X_1 = x, S_n = s\right)}{P\left(S_n = s\right)} = \frac{P\left(X_1 = x, \sum_{i=2}^{n} X_i = s - x\right)}{P\left(S_n = s\right)} =$$

אבל קיבלנו הסכום מ2 עד n של X_iים הוא ב"ת בX_1 שכן זה אינו בא לידיי ביטוי בביטוי הסכום. ולכן ניתן לפתוח את ההסתברות המשותפת למכפלה

$$= \frac{P\left(X_1 = x\right) \cdot P\left(\sum_{i=2}^{n} X_i = s - x\right)}{P\left(S_n = s\right)} = e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1^x}{x!} \cdot \frac{e^{-\sum_{i=2}^{n} \lambda_i} \cdot \frac{\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i\right)^{s-x}}{(s-x)!}}{e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{s}}{s!}} =$$

$$= \cancel{e^{-\lambda_1}} \cdot \lambda_1^x \cdot \frac{s! \cdot \left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i\right)^{s-x}}{\cancel{e^{-\lambda_1}} \cdot x! \cdot (s-x)! \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{s}} =$$

$$= \frac{s!}{x!\,(s-x)!} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=2}^{n} \lambda_i}\right)^x \cdot \frac{\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i\right)^{s-x}}{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{s-x}} = \binom{s}{x} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\right)^x \cdot \left(\frac{\sum_{i=2}^{n} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\right)^{s-x} =$$

כלומר, קיבלנו את נוסחת הבינום

$$X_1 \mid S_n = n \sim Bin\left(s, \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\right)$$

■

שאלה 6

בוחרים 4 ספרות אקראית מתוך $0,...,9$. יהא X הספרה המקסימלית שהתקבלה. מצא את פונקציית ההסתברות של X.

סעיף א - עבור המקרה בו הבחירה עם חזרות

תחילה נמצא את מספר הבחירות ל4 ספרות שהגדולה היא לכל היותר x. כלומר, הספרות 0 עד x. מספר הבחירות הללו הינו $(x+1)^4$. **ולכן** ההסתברות לבחירה כזו היא

$$P\left(X\leq x\right)=\frac{\left(x+1\right)^{4}}{10^{4}}$$

אבל גם ידוע לנו כי

$$P\left(X=x\right)=P\left(X\leq x\right)-P\left(X\leq x-1\right)=\frac{\left(x+1\right)^{4}}{10^{4}}-\frac{x^{4}}{10^{4}}=\frac{\left(x+1\right)^{4}-x^{4}}{10^{4}}$$

■

סעיף ב - עבור בחירה ללא חזרות

בדומה לסעיף הקודם, נחשב את מספר הבחירות ללא חזרות שהספרה הגדולה ביותר היא לכל היותר x: $\binom{x+1}{4}4!$. **וכמובן שיש** $\binom{10}{4}4!$ בחירות סה"כ (ללא הגבלות של מספר גדול ביותר אבל עדיין כאשר עדיין יש חזרות). לכן ההסתברות לבחירה

$$P\left(X\leq x\right)=\frac{\binom{x+1}{4}4!}{\binom{10}{4}4!}=\frac{\binom{x+1}{4}}{\binom{10}{4}}$$

ועכשיו שוב עם אותו הטריק

$$P\left(X=x\right)=P\left(X\leq x\right)-P\left(X\leq x-1\right)=\frac{\binom{x+1}{4}-\binom{x}{4}}{\binom{10}{4}}$$

לחילופין, ניתן לחשב ישירות את ההסתברות $P\left(X=x\right)$. ניתן להפריד למקרים זרים כאשר x הוא הספרה המקסימלית, עבור כל מקרה, ניתן לבחור את ה3 ספרות האחרות מהספרות הקטנות **ממש** מx (אי אפשר לבחור שוב את x כי אין חזרות). כלומר עבור בחירה כזו יש $\binom{x}{3}$ בחירות לספרות האחרות.

עכשיו נותר לסדר את הספרות. לזה כמובן יש $4!$ אפשרויות. ניתן לסכם

$$P\left(X=x\right)=\frac{\binom{x}{3}4!}{\frac{10!}{6!}}=\frac{\binom{x}{3}4!}{5040}$$

ניתן לצמצם עוד קצת אם רוצים אבל בעיניי זה מיותר.

■