HW2 - 094412 - הסתברות מ

גור תלם - 206631848

15.11.2020

שאלה 1

לגברת לבין נולדה שלישיה. לכל קומבינציית מגדרים קיימת הסתברות שווה. הגברת בוחרת ילד אחד להיות המועדף (גם פה הבחירה אקראית).

סעיף א

בהנתן שידוע כי הייתה ברית מילה, מה ההסתברות שהגברת בחרה בן זכר בתואר הבן המועדף (טיול=הבן המועדף).

כדי להביא ילד לעולם צריך זכר כחלק אינטרגלי בתהליך (הנה, אפילו יש אינפי בפתרון). לכן בהכרח יהיה ילד שהוא בן של זכר. מש"ל.

טוב בסדר:

ההסתברות שתהיה ברית:

$$P\left(body\,part\,cutting\right)=1-P\left(just\,girls\right)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

נחשב את ההסתברות שמבתרים איברים וגם נבחר בן זכר (בעצם צריך רק לחשב את ההסתברות שנבחר בן זכר כי מסתבר שלכל בן ביקום בהכרח הייתה ברית):

$$P\left(a\,male\,was\,chosen\right)=\frac{12}{24}=0.5$$

(נובע מספירה ישירה, זה גם הגיוני, אין סיבה שיהיה סיכוי גבוהה יותר לבחור בת מאשר בן).

נותר לחשב

$$P\left(a\,male\,was\,chosen\mid body\,part\,cutting\right)=\frac{0.5}{\frac{7}{8}}=\frac{4}{7}$$

$\blacksquare$

סעיף ב

בהינתן שהתינוק המועדף הוא זכר, מה ההסתברות שנולדה בת?

למען האמת גם זה אפשר לקבל מספירה ישירה: כמו שציינו למעלה, יש 12 אפשרויות מתוך ה24 שנבחר זכר. רק 3 מבין הבחירות האלה מתבצעות כאשר יש 3 בנים זכרים, לכן יש $\frac{12-3}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ (כמובן רק באפשרות של 3 בנים אין בנות).

בואו נחשב כמו שצריך:

בדומה לסעיף הקודם. ולכן שוב מספירה ישירה:

קומבינציה	אפשרויות לבחור בן
BBB	3
BBG	2
BGB	2
BGG	1
GBB	2
GBG	1
GGB	1
GGG	0

גם נולדה בת וגם נבחר בן

$$P\left(at\,least\,one\,girl\cap a\,boy\,was\,chosen\right)=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$$

ובנוסחה

$$P\left(at\,least\,one\,girl\mid a\,boy\,was\,chosen\right)=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

דה ז'ה וו.

$\blacksquare$

שאלה 2

יהיו שני מאורעות A,B עבורם מתקיים $P\left(A\mid B\right)>P\left(A\right)$[1]. צריך להוכיח:

.1 $P\left(B\mid A\right)>P\left(B\right)$

נשתמש בבייס

$$P\left(B\mid A\right)\underset{bayes}{=}\frac{P\left(A\mid B\right)P\left(B\right)}{P\left(A\right)}\underset{(1)}{>}\frac{\cancel{P\left(A\right)}P\left(B\right)}{\cancel{P\left(A\right)}}=P\left(B\right)$$

$\blacksquare$

.2 $P\left(B^{c}\mid A\right)<P\left(B^{c}\right)$

$$P\left(B^{c}\mid A\right)=1-P\left(B\mid A\right)<1-P\left(B\right)=P\left(B^{c}\right)$$

$\blacksquare$

.3 $P\left(B^{c}\mid A^{c}\right)>P\left(B^{c}\right)$

$$P\left(B^{c}\mid A^{c}\right)=1-P\left(B\mid A^{c}\right)=1-\frac{P\left(A^{c}\mid B\right)P\left(B\right)}{P\left(A^{c}\right)}=1-\frac{\left(1-P\left(A\mid B\right)\right)P\left(B\right)}{1-P\left(A\right)}>1-\frac{\cancel{\left(1-P\left(A\right)\right)}P\left(B\right)}{\cancel{1-P\left(A\right)}}=1-P\left(B\right)=P\left(B^{c}\right)$$

$\blacksquare$

שאלה 3

סטטיסטיקה:

הסתברות שלמד 0.9

ההסתברות שהצליח 0.85

הסתברות שלמד והצליח 0.8

חישוביות:

ההסתברות שהצליח גדולה מ0.

מבני נתונים:

ההסתברות שלמד והצליח 0.67

ההסתברות שלא למד והצליח 0.2

סטודנט לא יכול לקחת גם חישוביות וגם מבני נתונים (כלומר, לא יכול להצליח בשניהם).

א. מה ההסתברות שסטודנט למד למבחן בסטטיסטיקה בהינתן שהוא הצליח בו?

נסמן למד בL והצליח בS (בסטטיסטיקה). כלומר, יש לחשב

$$P\left(L \mid S\right)=\frac{P\left(L\cap S\right)}{P\left(S\right)}=\frac{0.8}{0.85}\approx 0.94118$$

■

ב. מה ההסתברות שסטודנט הצליח במבחן במבני נתונים?

נסמן למד בL והצליח בS (במבני נתונים). כלומר, יש לחשב

$$P\left(S\right)=P\left(S\cap L\right)+P\left(S\cap L'\right)=0.67+0.2=0.87$$

■

ג. האם המאורע שהסטודנט הצליח במבחן בחישוביות והמאורע שהצליח במבחן במבני נתונים באותו הסמסטר ב"ת?

נתון כי לא אפשרי להצליח בשני הקורסים באותו סמסטר (שכן לא ניתן לקחת את שניהם). לכן המאורעות זרים. כמו כן, חישבנו + נתון כי הסתברות כל מאורע הינה חיובית (ממש). לכן, מאורעות זרים עם הסתברות חיובית ממש, בהכרח תלויים.

במקום הנתון לעיל, נניח כי אין תלות בין ההצלחות של סטודנט בכל אחד מהמבחנים.

ד. בהינתן שהסטודנט הצליח במבחן בסטטיסטיקה, האם המאורע שהצליח במבחן במבני נתונים והמאורע שהצליח במבחן בחישוביות, תלויים?

כמובן שהמאורעות הינם ב"ת (אני גם די בטוח שאמרו את זה בהרצאה, שמאורעות בלתי תלויים מוכל בתוך אי תלות בזוגות). נבדוק לפי הנוסחה ישירות (הצלחות בקורסים מסומנות בS_D, S_S, S_C)

$$P\left(S_D\cap S_C \mid S_S\right)=\frac{P\left(\left(S_D\cap S_C\right)\cap S_S\right)}{P\left(S_S\right)}=\frac{P\left(S_D\cap S_C\cap S_S\right)}{P\left(S_S\right)}=\frac{P\left(S_D\right)\cdot P\left(S_C\right)\cdot P\left(S_S\right)}{P\left(S_S\right)}=$$

$$=\frac{P\left(S_D\right)\cdot P\left(S_S\right)}{P\left(S_S\right)}\cdot\frac{P\left(S_C\right)\cdot P\left(S_S\right)}{P\left(S_S\right)}=P\left(S_D \mid S_S\right)\cdot P\left(S_C \mid S_S\right)$$

כלומר, אלה ב"ת לפי הגדרה.

■

ה. נגדיר מאורע: סטודנט הצליח בסטטיסטיקה והצליח במבני. האם מאורע זה והמאורע שהסטודנט הצליח בחישוביות בלתי תלויים?

התשובה היא כמובן[1].

לפי משפט מההרצאה. אם המאורעות S_D, S_S, S_C בלתי תלויים, אז קבוצה של מאורעות המתקבלים על ידי איחודים/חיתוכים של מאורעות אלה (כך שכל מאורע בקבוצה החדשה מופיע בביטוי חיתוך/איחוד אחד בלבד לכל היותר) אז הקבוצה החדשה של המאורעות גם היא קבוצה של מאורעות בלתי תלויים.

במקרה שלנו, $\{S_D \cap S_S, S_C\}$ הינה קבוצה של מאורעות בלתי תלויים.

■

[1] אפילו שבפועל כמובן שיש תלות. הרי סטודנט מוצלח, סביר שיצליח כיותר מקורס אחד, וסטודנט שלא מוצלח, כנראה שלא מוצלח בכמה קורסים. בנוסף, עניין של מוטיבציה. אם סטודנט יקבל נכשל אחרי שלמד, כנראה שהמוטיבציה שלו ללמוד למבחן הבא תהיה נמוכה יותר אז כנראה שלא יצליח גם בו.

שאלה 4

נתונים $N+1$ כדים הממוספרים $0,1,2,\ldots,N$. בכד הi ישנם i כדורים שחורים ו$N-i$ כדורים לבנים (בלומר בכל כד יש N כדורים בדיוק).
מוציאים כדור מכד באקראי, רושמים את צבעו ומחזירים אותו לכד. לאחר מכן, מוציעים כדור מאותו הכד, רושמים את צבעו, מחזירים אותו לכד וכן הלאה.

א. עבור $i=0,1,\ldots,N$, בהינתן שבn ההוצאות הראשונות הוצאו רק כדורים שחורים, מה ההסתברות שבחרנו בכד i?

//הסיכוי לבחור את הכד הi הינו $P\left(i\right)=\frac{1}{N+1}$. אם מוציאים כדור, n פעמים ומחזירים מכד i, הסיכוי לקבל רק שחורים הינו $P\left(blacks\,only\right)=\left(\frac{i}{N}\right)^{n}$.
לפי בייס

$$P\left(i\mid blacks\,only\right)=\frac{P\left(blacks\,only\mid i\right)\cdot P\left(i\right)}{P\left(blacks\,only\right)}=\frac{\left(\frac{i}{N}\right)^{n}\cdot\frac{1}{N+1}}{\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{N+1}\left(\frac{j}{N}\right)^{n}}=\frac{\left(\frac{i}{N}\right)^{n}\cdot\cancel{\frac{1}{N+1}}}{\cancel{\frac{1}{N+1}}\cdot\sum_{j=0}^{N}\frac{j^{n}}{N^{n}}}=\frac{\frac{i^{n}}{\cancel{N^{n}}}}{\cancel{\frac{1}{N^{n}}}\cdot\sum_{j=0}^{N}j^{n}}=\frac{i^{n}}{\sum_{j=0}^{N}j^{n}}$$

■

ב. בהינתן שבn ההוצאות הראשונות הוצאו רק כדורים שחורים, מה ההסתברות שהכדור הבא יהיה שחור?

נשתמש בסכימה כדי לקבל את ההסתברות המבוקשת (נסמן B - יצאו עד עכשיו רק שחורים ובA הבא יהיה גם שחור).

$$P\left(A\mid B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{\cancel{\frac{1}{N+1}}\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{j}{N}\right)^{n+1}}{\cancel{\frac{1}{N+1}}\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{j}{N}\right)^{n}}=\frac{\frac{1}{N^{\cancel{n+1}}}\sum_{j=0}^{N}j^{n+1}}{\cancel{\frac{1}{N^{n}}}\sum_{j=0}^{N}j^{n}}=\frac{\sum_{j=0}^{N}j^{n+1}}{N\sum_{j=0}^{N}j^{n}}$$

■

שאלה 5

במיכל x כדורים שחורים

y כדורים לבנים

בכל בחירה בוחרים כדור ומחזירים אותו ביחד עם **עוד** z כדולים באותו הצבע.

1. בהינתן שהכדור השני שחור, מה ההסתברות שהראשון היה לבן?

נחשב את ההתברות שהשני שחור והראשון לבן

$$P\left(first\,is\,white\cap second\,is\,black\right)=\frac{y}{x+y}\cdot\frac{x}{x+y+z}=\frac{xy}{\left(x+y\right)\left(x+y+z\right)}$$

ההסתברות שהראשון והשני שחורים

$$P\left(first\,is\,black\cap second\,is\,black\right)=\frac{x}{x+y}\cdot\frac{x+z}{x+y+z}=\frac{x^{2}+xz}{\left(x+y\right)\left(x+y+z\right)}$$

לכן, ההסתברות שהשני שחור הינה

$$P\left(second\,is\,black\right)=\frac{x^{2}+xz+xy}{\left(x+y\right)\left(x+y+z\right)}$$

ולכן בהינתן שהשני שחור, ההסתברות שהראשון לבן

$$P\left(first\,is\,white\mid second\,is\,black\right)=\frac{P\left(first\,is\,white\cap second\,is\,black\right)}{P\left(second\,is\,black\right)}=\frac{\frac{xy}{(x+y)(x+y+z)}}{\frac{x^{2}+xz+xy}{(x+y)(x+y+z)}}=\frac{xy}{x^{2}+xz+xy}$$

■

2. הוכח באמצעות אינדוקציה, שההסתברות לבחור כדור לבן בשלב כלשהו היא $\frac{y}{x+y}$

נוכיח באינדוקציה עבור k אינדקס הבחירה (כאשר $k=0$ הינה הבחירה הראשונה).

הבסיס ברור, יש $x+y$ כדורים ולכן יש הסתברות של $\frac{y}{x+y}$ לבחור לבן).

נניח כי עבור הבחירה הk יש הסתברות של $\frac{y}{x+y}$ לבחור לבן ונוכיח עבור $k+1$:

אם בצעד הk יש הסתברות של $\frac{y}{x+y}$ להוציא לבן.

כיוון שיש בשלב הk בדיוק $x+y+kz$ כדורים, אז זה אומר שיש $\frac{y}{x+y}\cdot(x+y+kz)=y+\frac{ykz}{x+y}$ לבנים ו$x+\frac{xkz}{x+y}$ שחורים.

$$P\left(white\,in\;\left(k+1\right)-th\,step\right)=$$

$$=P\left(white\,in\;\left(k+1\right)-th\,step\cap white\,in\,first\,step\right)+P\left(white\,in\;\left(k+1\right)-th\,step\cap black\,in\,first\,step\right)=$$

$$=P\left(white\,in\;\left(k+1\right)-th\,step\mid white\,in\,first\,step\right)P\left(white\,in\,first\,step\right)+$$

$$+P\left(white\,in\;\left(k+1\right)-th\,step\mid black\,in\,first\,step\right)P\left(black\,in\,first\,step\right)=$$

$$=\underbrace{\frac{y+z}{x+\left(y+z\right)}}_{1}\cdot\frac{y}{x+y}+\underbrace{\frac{y}{y+\left(x+z\right)}}_{2}\frac{x}{x+y}=\frac{y\cancel{(y+z+x)}}{\cancel{(x+y+z)}\left(x+y\right)}=\frac{y}{x+y}$$

[1,2] לגבי המעברים 1 ו2. הם נובעים משילוב של הנחת האינדוקציה והתאמה של הכמות ההתחלתית של כדורים מהצבעים לבן ושחור בהתאמה.

כלומר, אם אנחנו בוחרים בשלב הראשון שחור אז בשלב השני יש לנו y כדורים לבנים ו$m=x+z$ כדורים שחורים ואז לפי הנחת האינדוקציה, אחרי k בחירות (כלומר, בבחירה ה$k+1$ מההתחלה) יהיו לנו סיכוי של $\frac{y}{y+m}$ לקבל לבן. בדומה, עבור בחירה של לבן בהתחלה ועבור $n=y+z$ מספר לבנים התחלתי.

דילגתי פשוט על ההצבה של n וm בתהליך.

בזאת סיימתי את צעד האינדוקציה.

■

3. מה ההסתברות שאחרי n בחירות נבחרו n_B כדורים שחורים וn_W כדורים לבנים?

ההסתברות לקבל סט בחירות כללי $C_j = [c_1 c_2 c_3 \ldots c_n]$ אשר מתוכו בדיוק n_B מהc_kים הם שחורים והשאר לבנים הינה

$$P\left(C_j\right) = \frac{\overbrace{\left(\prod_{i=0}^{n_W-1}\left(y+i\cdot z\right)\right)\cdot\left(\prod_{i=0}^{n_B-1}\left(x+i\cdot z\right)\right)}^{2}}{\underbrace{\prod_{i=0}^{n}\left(x+y+n\cdot z\right)}_{1}}$$

[1]נובע מכך שכמות הכדורים בכל שלב אינה תלונה בסדר הבחירות עד כה. והיא נתונה על ידי הנוסחה אשר ניתנה כדוגמה בתיאור השאלה.

[2]נובע מכך שלא משנה באיזה סדר מבצעים את הבחירה, אם אכן נבחנו n_W לבנים אז בוודאי תהיה מתישהו הבחירה עם האינדקס $0 \leq i \leq n_W - 1$ של לבנים, כבר הוספנו $i \cdot z$ לבנים. ולכן בהכרח כל הגומים (ורק הגורמים האלה): $(y + i \cdot z)$ יופיעו "איפשהו" בסדרה של הבחירות (עבור $0 \leq i \leq n_W - 1$). בדומה, עבור כל סדרה של n בחירות שמתוכן n_B שחורות, יהיו הגורמים $(x + i \cdot z)$ לכל $0 \leq i \leq n_B - 1$ במונה.

לכן, נותר לספור את כמות הסידורים של n_W לבנים וn_B שחורים (סה"כ n), כידוע לנו מקומבי, יש $\binom{n}{n_W} = \binom{n}{n_B}$ סידורים כאלה. לכן לבחירה של n_B שחורים וn_W לבנים היא ההסתברות לסידור מסויים כזה, כפול מספר הסידורים האפשריים

$$P\left(C\right) = \binom{n}{n_B} P\left(C_j\right)$$

■

שאלה 6

הסתברות של 0.1 להדליק את הממטרות ביום גשום.
הסתברות של 0.25 להדליק ביום ללא גשם.

א. ההסתברויות ליום גדול באביב, סתיו, חורף וקיץ הינן 0.2, 0.4, 0.55 ו0.05 בהתאמה. ואורך עונה הינו רבע מהשנה. מה הסיכוי שביום כלשהו ירד גשם?

כיוון שהעונות באורכים שווים, הסיכוי שירד גשם הוא כמובן ממוצע ההסתברויות

$$P\left(rainy\right)=\frac{0.55+0.2+0.4+0.05}{4}=0.3$$

וביתר פירוט

$$P\left(rainy\right)=P\left(rainy\mid winter\right)P\left(winter\right)+P\left(rainy\mid spring\right)P\left(spring\right)+$$

$$+P\left(rainy\mid autumn\right)P\left(autumn\right)+P\left(rainy\mid summer\right)P\left(summer\right)=$$

$$=\frac{1}{4}0.55+\frac{1}{4}0.2+\frac{1}{4}0.4+\frac{1}{4}0.05=\frac{0.55+0.2+0.4+0.05}{4}=0.3$$

■

ב. ביום מסויים, האחראי מחליט להפעיל את הממטרות. חשבו מה הסיכוי שביום זה ירד גשם[2].

נתרגם את השאלה לנתונים טהורים יותר.
ביום מסויים, מה ההסתברות לשירד גשם אם נתון שהאחראי החליט להפעיל את הממטרות?

$$P\left(rainy\mid sprinklers\right)\underset{Bayes}{=}\frac{P\left(sprinklers\mid rainy\right)P\left(rainy\right)}{P\left(sprinklers\right)}=$$

$$=\frac{0.1\cdot0.3}{P\left(sprinklers\mid rainy\right)P\left(rainy\right)+P\left(sprinklers\mid sunny\right)P\left(sunny\right)}=\frac{0.03}{0.1\cdot0.3+0.25\cdot0.7}=\frac{0.03}{0.205}\approx0.14634$$

■

[2] שימו לב להיעדר סימן השאלה. או "חשבו" או סימן שאלה בסוף המשפט. אין משמעות תחבירית שכוללת את שניהם.