הסתברות מ - 094412 - HW8

גור תלם - 206631848

06.01.2021

שאלה 1

הוכחה: מטילים מטבע n פעמים עם סיכוי של 0.6 לקבל עץ. אם מקבלים עץ, זוכים ב2 שקלים, אם מקבלים פלי, מפסידים 3 שקלים. R מ"מ הרווח בתום ההטלות. מה התוחלת והשונות של R?

נעזר במ"מ X מספר הפעמים שקיבלנו עץ.

קל לראות כי X מתפלג בינומית $X \sim Bin\left(n, 0.6\right)$ וכמו כן ש$R = 2X - 3\left(n - X\right)$. כלומר, מצאנו קשר בין R לX ולכן אם נחשב את התוחלת של X נוכל בקלות יחסית לחשב את התוחלת של R.

נתחיל בתוחלת של X

$$E\left(X\right) = np = 0.6n$$

ולכן התוחלת של R היא (משתמשים בלינאריות של תוחלת)

$$E\left(R\right) = E\left(2X - 3n + 3X\right) = E\left(5X - 3n\right) = E\left(X\right) \cdot 5 - 3n = 3n - 3n = 0$$

וזה תכלס מאוד הגיוני, שכן בממוצע נרוויח $0.6 \cdot 2 = 1.2$ שקלים אבל נפסיד $0.4 \cdot 3 = 1.2$ שקלים. כלומר הרווח וההפסד זהים בממוצע.

עכשיו לשונות (נשתמש בתכונות של שונות ושונות של התפלגות בינומית)

$$Var\left(R\right) = Var\left(5X - 3n\right) = 5^2 \cdot Var\left(X\right) = 25 \cdot np\left(1 - p\right) = 15n - 9n = 6n$$

■

שאלה 2

סעיף א - צ"ל את c.

הוכחה: מאילוצים של פונקציית הצפיפות ושטח משלולש

$$P\left(-\infty<X<\infty\right)=1=\int_{-\infty}^{\infty}f_X\left(x\right)dx=\frac{2c\cdot2c}{2}+\frac{4c\cdot4c}{2}=2c^2+8c^2=10c^2\Longrightarrow c=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

■

סעיף ב - צ"ל את $F_X\left(t\right)$עבור ערכי t הבאים: $0,c,2c,4c,6c$.

הוכחה: נחשב

$$F_X\left(t\right)=\int_{-\infty}^{t}f_X\left(x\right)dx$$

ולכן

$$F_X\left(0\right)=0,\ F_X\left(c\right)=c^2,\ F_X\left(2c\right)=2c^2,\ F_X\left(4c\right)=2c^2+4c^2,\ F_X\left(6c\right)=10c^2$$

ואחרי הצבה של c

$$F_X\left(0\right)=0$$

$$F_X\left(c\right)=0.1$$

$$F_X\left(2c\right)=0.2$$

$$F_X\left(4c\right)=0.6$$

$$F_X\left(6c\right)=1$$

■

סעיף ג - צייר את ההתפלגות המצטברת $F_X\left(x\right)$.

הוכחה: ניתן לראות בסרטוט שהפונקציה מורכבת מקטעים לינאריים והשיפוע קל מאוד לחישוב

$$f_X\left(x\right)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x & 0<x\le c\\ 4c-2x & c<x\le2c\\ 2x-4c & 2c<x\le4c\\ 12c-2x & 4c<x\le6c\\ 0 & 6c<x\end{cases}$$

ועל ידי אינטגרציה בחלקים

$$F_X\left(t\right)=\int_{-\infty}^{t}\begin{cases}0 & x<0\\ 2x & 0<x\le c\\ 4c-2x & c<x\le2c\\ 2x-4c & 2c<x\le4c\\ 12c-2x & 4c<x\le6c\\ 0 & 6c<x\end{cases}=\int_{0}^{t}\begin{cases}0 & x<0\\ 2x & 0<x\le c\\ 4c-2x & c<x\le2c\\ 2x-4c & 2c<x\le4c\\ 12c-2x & 4c<x\le6c\\ 0 & 6c<x\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0<x\le c\\ 4cx-x^2-\frac{c\cdot4c}{2} & c<x\le2c\\ x^2-4cx+\frac{4c\cdot2c}{2}+0.2 & 2c<x\le4c\\ 12cx-x^2-\frac{4c\cdot4c}{2}-\frac{c\cdot4c}{2}-\frac{8c\cdot4c}{2} & 4c<x\le6c\\ 1 & 6c<x\end{cases}=$$

$$= \begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2 & 0<x\le c \\ 4cx-x^2-0.2 & c<x\le 2c \\ x^2-4cx+0.4+0.2 & 2c<x\le 4c \\ 12cx-x^2-0.8-0.2-1.6 & 4c<x\le 6c \\ 1 & 6c<x \end{cases} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2 & 0<x\le c \\ 4cx-x^2-0.2 & c<x\le 2c \\ x^2-4cx+0.6 & 2c<x\le 4c \\ 12cx-x^2-2.6 & 4c<x\le 6c \\ 1 & 6c<x \end{cases}$$

הקפיצות בחישובים נובעות על ידי חלוקה של השטחים למשולשים וחישוב של השטח שלהם. כל פעם מחסרים את השטח העודף (שנוצר אם הפונקציה הייתה ממשיכה עד ה$x=0$) או מוסיפים את השטח החסר (במידה והפונקציה יורדת מתחת לציר הx אילו הייתה ממשיכה עד ה$x=0$).
ולכן הפונקציה נראית כך

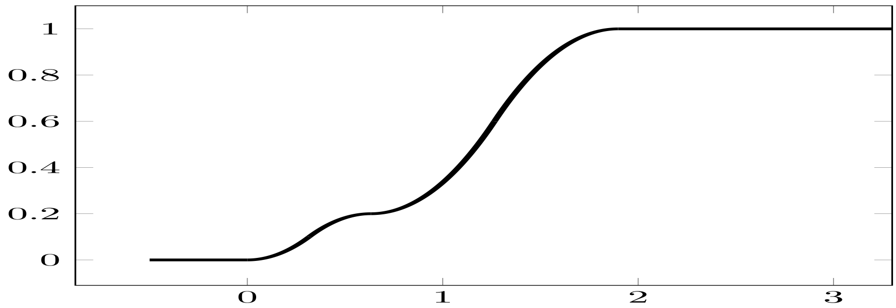

Figure :1 התפלגות מצטברת

■

סעיף ד - דור דוגם ערך מההתפלגות הנ"ל. אם $x<2c$ אז הוא מקבל 10 ש"ח. אם $2c\le x<6c$ אז הוא משלם 5 ש"ח ומקבל את הערך שהוגרל כפול 10. מה תוחלת הסכום אותו קיבל דור ב100 דגימות?

הוכחה: כלומר, פונקציית הרווח הינה

$$g(x)=\begin{cases} 10 & 0\le x<2c \\ 10x-5 & 2c\le x<6c \end{cases}$$

כזכור

$$f_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 2x & 0<x\le c \\ 4c-2x & c<x\le 2c \\ 2x-4c & 2c<x\le 4c \\ 12c-2x & 4c<x\le 6c \\ 0 & 6c<x \end{cases}$$

לכן, לפי תוחלת של פונקציה של מ"מ רציף

$$E(g(x))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f_X(x)\,dx=\int_0^{6c}\begin{cases} 20x & 0\le x\le c \\ 40c-20x & c<x<2c \\ (10x-5)(2x-4c) & 2c\le x\le 4c \\ (10x-5)(12c-2x) & 4c<x\le 6c \end{cases} dx=$$

$$=\left.\begin{cases} 10x^2 & 0\le x\le c \\ 40cx-10x^2 & c<x<2c \\ \left((20-20x)c+\frac{20x^2}{3}-5x\right)x & 2c\le x\le 4c \\ \left((60x-60)c+\left(5-\frac{20}{3}x\right)x\right)x & 4c<x\le 6c \end{cases}\right|_0^{6c} = 10c^2+10c^2+\frac{20}{3}c^2(-3+20c)+\frac{20}{3}c^2(-3+28c)=16\cdot\sqrt{0.4}-2$$

אבל מדובר ב100 הטלות מטבע, וביחד עם לינאריות של תוחלת נקבל

$$E(100g(x))=100E(g(x))\approx 811.92885125$$

■

שאלה 3

מטילים מטבע הוגן 8 פעמים. X מ"מ מספר הפעמים שנצפה הרצף $HTTH$.

Y מ"מ מספר הפעמים $HTTT$ (אמממ מה? למה הנתון הזה קיים בכלל?)

מה התוחלת והשונות של X? **הוכחה:** נסמן I_i מ"מ אינדקטור שבמקום הi הייתה התחלה של רצף. כמובן ש$I_i = 0$ אם ה$i > 5$ או $i < 0$ (שכן רק מהמקום ה0 עד ה4 כולל אפשר להתחיל רצף שייכנס ב8 ההטלות).

לכן

$$X = \sum_{i=0}^{4} I_i$$

ולכן לפי הקסם הזה של תוחלת שאפשר להכניס את התוחלת פנימה בלי לעשות החלה והפרדה

$$E\left(X\right) = E\left(\sum_{i=0}^{4} I_i\right) = \sum_{i=0}^{4} E\left(I_i\right) = \sum_{i=0}^{4} P\left(I_i\right) = \sum_{i=0}^{4} 0.5^4 = 0.3125$$

נחשב את השונות

$$Var\left(X\right) = E\left(\left(\sum_{i=0}^{4} I_i\right)^2\right) - \left(E\left(\sum_{i=0}^{4} I_i\right)\right)^2 = E\left(I_0 I_3 + I_0 I_4 + I_1 I_4 + \sum_{i=0}^{4} I_i\right) - 0.3125^2 =$$

$$= E\left(I_0 I_3\right) + E\left(I_3 I_0\right) + E\left(I_0 I_4\right) + E\left(I_4 I_0\right) + E\left(I_1 I_4\right) + E\left(I_4 I_1\right) + \sum_{i=0}^{4} E\left(I_i\right) - 0.3125^2 = \frac{4}{2^8} + \frac{2}{2^8} + \frac{4}{2^8} + 0.3125 - 0.3125^2$$

ולבסוף

$$Var\left(X\right) = 0.25390625$$

■

שאלה 4

מטרה ברדיוס R.

אליס זורקת את החצים כך שהמרחק מהמרכז מתפלג בסיכוי אחיד $X \sim Uni\left(0,R\right)$.

הקליעות של בוב מתפלגות אחקראיות בצורה אחידה על כל המטרה נסמן את המ"מ מרחק מהמרכז עבור בוב Y.

סעיף א - מה התוחלת והשונות של מרחק החץ ממרכז המטרה עבור אליס ובוב (בנפרד)?

הוכחה: עבור אליס השאלה קלה

$$E\left(X\right)=\frac{0+R}{2}=0.5R$$

כיוון שההתפלגות יוניפורמית

$$Var\left(X\right)=\frac{R^{2}}{12}$$

עכשיו נחשב עבור בוב. כאמור, פה יש התפלגות יוניפורמית על השטח ולא על הרדיוס. לכן, פונקציית ההסתברות (של סיכוי לפגוע בתוך רדיוס r מהמרכז) המצטברת כפונקציה של הרדיוס

$$F_{Y}\left(y\right)=\frac{\overbrace{\pi y^{2}}^{area\,within\,radius\,of\,r}}{\underbrace{\pi R}_{circle\,area}}=\frac{y^{2}}{R^{2}}$$

ועל ידי גזירה של זו, ניתן לקבל את פונק' הצפיפות

$$f_{Y}\left(y\right)=\frac{2y}{R^{2}}$$

והתוחלת היא

$$E\left(Y\right)=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot f_{Y}\left(y\right)dy=\int_{0}^{R}y\cdot f_{Y}\left(y\right)dy=\left.\frac{2y^{3}}{3R^{2}}\right|_{0}^{R}=\frac{2R^{3}}{3R^{2}}=\frac{2}{3}R$$

והשונות הינה (לפי הגדרה)

$$Var\left(Y\right)=E\left(Y^{2}\right)-E\left(Y\right)^{2}=\int_{0}^{R}y^{2}\cdot f_{Y}\left(y\right)dy-\frac{4}{9}R^{2}=\left.\frac{2y^{4}}{4R^{2}}\right|_{0}^{R}-\frac{4}{9}R^{2}=\frac{18}{36}R^{2}-\frac{16}{36}R^{2}=\frac{1}{18}R^{2}$$

■

סעיף ב - המטרה עכשיו מחולקת לדיסקיות שוות שטח. הדיסקיות שוות נקודה 1 עד 10 נקודות, תלוי ברדיוסן. מה התוחלת והשונות של הניקוד של בוב בכל זריקה?

הוכחה: נסמן S מ"מ הניקוד.

כיוון שמדובר בהתפלגות יוניפורמית (כי הדיסקיות שוות שטח) אז מדובר ב

$$E\left(S\right)=\frac{1+10}{2}=5.5$$

לכן התוחלת עבור 5 זריקות (מלינאריות של תוחלת)

$$E\left(5S\right)=5\cdot5.5=27.5$$

והשונות

והשונות הינה (מלינאריות של תוחלת)

$$Var\left(S\right)=E\left(S^{2}\right)-E\left(S\right)^{2}=\sum_{1\leq s\leq10}s^{2}P\left(S=s\right)-30.25=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\sum_{1\leq s\leq10}s^{2}-30.25=38.5-30.25=8.25$$

אבל כל זריקה מתבצעת בנפרד, ובשונות, לעומת תוחלת, זה משנה אם מדובר בזריקה הראשונה או הזריקה השניה. לכן, נצטרך לאנדקס את S ככה שיהיה אחד לכל זריקה S_i לכל $1 \leq i \leq 5$ ונקבל

$$Var\left(\sum_{i=1}^{5} S_i\right) = \sum_{i=1}^{5} Var\left(S_i\right)$$

אבל אנחנו כבר יודעים מה השונות של כל S_i ולכן

$$\sum_{i=1}^{5} Var\left(S_i\right) = \sum_{i=1}^{5} 8.25 = 41.25$$

■

סעיף ג - בוב השתפר (מי ידע ש$practice\, makes\, perfecrt$). פונק' הצפיפות של מרחק החצים מהמרכז עבור בוב הינה

$$f_{R_3}\left(r\right) = \begin{cases} c - \frac{cr^2}{R^2} & r \in [0, R] \\ 0 & else \end{cases}$$

מה c? מה התוחלת והשונות של R_3?

הוכחה: אני לא בטוח מה הכוונה פה בR_3, אני מניח שמדובר על מ"מ? אבל למה 3 בעצם? בקיצור, אני פשוט אניח שה3 זה מספר קסם, להבא, צריך לעשות $define$ ב$header\ file$ או שזה הורדה של 3 נקודות במבוא למדמח (אני לא באמת יודע כמה מורידים פה, לא עשיתי את הקורס פה בטכניון).

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{R_3}\left(r\right) dr = \int_{0}^{R} f_{R_3}\left(r\right) dr = cr - \frac{cr^3}{3R^2}\Big|_0^R = cR - \frac{cR^3}{3R^2} - 0 = \frac{2}{3}cR$$

ולכן

$$c = \frac{3}{2R}$$

לכן התוחלת של R_3

$$E\left(R_3\right) = \int_0^R r f_{R_3}\left(r\right) dr = \int_0^R \frac{3}{2R}r - \frac{3r^3}{2R^3} dr = \frac{3}{4R}r^2 - \frac{3r^4}{8R^3}\Big|_0^R = \frac{3}{4R}R^2 - \frac{3R^4}{8R^3} = \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}\right) R = \frac{3}{8}R$$

והשונות של R_3 היא

$$Var\left(R_3\right) = E\left(R_3^2\right) - E\left(R_3\right)^2 = \int_0^R \frac{3}{2R}r^2 - \frac{3r^4}{2R^3} dr - \left(\frac{3}{8}R\right)^2 = \frac{1}{2R}r^3 - \frac{3r^5}{5 \cdot 2R^3}\Big|_0^R - \left(\frac{3}{8}R\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2\cancel{R}}R^3 - \frac{3R^5}{5 \cdot 2\cancel{R^3}} - \left(\frac{3}{8}R\right)^2 = 0.5R^2 - 0.3R^2 - \left(\frac{3}{8}R\right)^2 = 0.059375R$$

■

שאלה 5

הוכחה: a קבוע. Y מ"מ בעל פונקציית צפיפות

$$f_Y\left(y\right)\begin{cases} a+0.25y & -2<y<0\\ a-0.25y & 0\leq y<2\\ 0 & else \end{cases}$$

■

סעיף א - מה הערך של a?

הוכחה:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}f_Y\left(y\right)dy=\left(0-\left(-2a+0.5\right)\right)+\left(2a-0.5-0\right)=4a-1$$

ולכן

$$a=0.5$$

■

סעיף ב - צ"ל את ההסתברויות הבאות $P\left(Y\leq 0.5\right)$, $P\left(-1\leq Y\leq 1\right)$.

הוכחה:

$$P\left(Y\leq 0.5\right)=\int_{-\infty}^{0.5}f_Y\left(y\right)dy=1-\int_{0.5}^{\infty}f_Y\left(y\right)dy=1-\int_{0.5}^{2}f_Y\left(y\right)dy=1-0.28125=0.71875$$

וגם

$$P\left(-1\leq Y\leq 1\right)=\int_{-1}^{0}0.5+0.25ydy+\int_{0}^{1}0.5-0.25ydy=0.375+0.375=0.75$$

■

סעיף ג - מה התוחלת והשונות של Y?

הוכחה: נחשב את התוחלת

$$E\left(Y\right)=\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y\left(y\right)dy=\int_{-1}^{0}0.5y-0.25y^2dy+\int_{0}^{1}0.5y+0.25y^2dy=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$$

ועכשיו לפי הגדרה, השונות היא

$$Var\left(Y\right)=E\left(Y^2\right)-E\left(Y\right)^2=E\left(Y^2\right)-0=\int_{-\infty}^{\infty}y^2f_Y\left(y\right)dy=\frac{2}{3}$$

■

שאלה 6

קו 19 מאחר יוניפורמית. $X\sim Uni\left(0,10\right)$.
גיא מגיע אל תחנת האוטובוס 3 דק לפני המועד שבו אמור להגיע קו 19 כדי לא לפספס את האוטובוס.

סעיף 0 - כמה זמן גיא מבזבז מהחיים שלו מכך שהוא מגיע בזמן?

הוכחה: ההסתברות שקו 19 יקדים שואפת ל0 מהכיוון השלילי. לכן, אם גיא מגיע לפני השעה בה האוטובוס מגיע, הוא מבזבז 3 דק בהן היה יכול ללמוד לאינפי 3 שזה הקורס האהוב עליו.

במקום זאת, גיא, כמו איזה סטודנט נחות של אוניברסיטת ת"א, מקדים לאוטובוס ומבזבז 3 דקות (לא פלא שהוא נחשל שהסתברות).

נניח בשלילה כי אין קורונה. נניח כי גיא מגיע כל יום לטכניון, לכן בשנה, 365.25 ימים (כן, הוא לומד כל יום, גם בשנה מעוברת) הוא מבזבז 1095.75 דקות, או בערך 18 שעות. שזה בערך חצי יום למידה של הטכניון.

אבל גיא כבר עושה אינפי 3, כלומר, הוא סיים בהצלחה אינפי 1 ואינפי 2. לכן, אינפי 2 קדם לאינפי 3 ומכלל השרשרת נקבל כי גיא היה לפחות 2 סמסטרים לפני הסמסטר הזה שלו. מכאן, שגיא בטכניון כבר 3 סמסטרים. בסתירה לכך שגיא מרשה לעצמו לבזבז חצי יום למידה בשנה.

לכן יש קורונה. ■

סעיף א - מה ההסתברות שגיא יאלץ להמתין לפחות 6 דקות?

הוכחה: כלומר, גיא מבזבז באופן גס 3 דקות ולכן המשמעות של הסעיף הוא "ההסתברות שהאוטובוס יאחר לפחות ב3 דקות".

$$P\left(X\geq3\right)=\frac{10-3}{10-0}=\frac{7}{10}$$

■

סעיף ב - גיא ממתין כבר 5 דק, מה ההסתברות שיאלץ להמתין 3 דק נוספות?

הוכחה: לפי הסתברות מותנית

$$P\left(X\geq5\mid X\geq2\right)=\frac{P\left(X\geq5\right)}{P\left(X\geq2\right)}=\frac{\frac{5}{10}}{\frac{8}{10}}=\frac{5}{8}=0.625$$

■

סעיף ג - גיא הגיע באיחור של 4 דקות (עכשיו גיא נשמע יותר כמו סטודנט טכניוני). מה ההסתברות שפספס את האוטובוס?

הוכחה: ההסתברות שגיא פספס את האוטובוס הינה שהאוטובוס הגיע בין דקה ה0 לדקה ה4. כלומר

$$P\left(0\leq X\leq4\right)=\frac{4-0}{10-0}=\frac{4}{10}=0.4$$

נראה לי פלוס מינוס בלתי אפשרי. הם היה לי סיכוי של 60% להצליח במבחן בלי להתכונן מראש (להצליח = לקבל 90 או יותר), לא הייתי לומד.
טוב, זה לא מדוייק. תלוי איזה קורס. יש קורסים מעניין, למשל "מבוא להסקה סיבתית". ■