

תרגיל בית 4

להגשה עד כולל 29.12.2021 במודל

שאלה מס' 1

חשבו את $\int_C x^2 y dx - y^2 x dy$ כאשר C הינו חצי המעגל העליון $x^2 + y^2 = a^2$ נגד כיוון השעון ($a > 0$ קבוע ממשי).

שאלה 2

מבין כל העקומים החלקים והסגורים, המכוונים נגד כיוון השעון, שהם שפות של תחומים פשוטים במישור, מצאו את העקום C לאורכו העבודה הבאה היא המקסימלית

$$\oint_C (3x^2 y + x \cos(x)) dx + (6x - 2xy^2 + \sin(y)) dy$$

שאלה מס' 3

יהי γ עקום חלק וסגור ב- \mathbb{R}^2 . תהינה $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות רציפות בעלות נגזרות חלקיות רציפות בכל המישור. הראו ש-

$$\oint_{\gamma} f \vec{\nabla} g \cdot d\vec{\gamma} = - \oint_{\gamma} g \vec{\nabla} f \cdot d\vec{\gamma}$$

(רמז: הראו ש- $\vec{\nabla}(fg)$ הינו שדה משמר).

שאלה מס' 4

נתון השדה הוקטורי

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + 4y^2}, \frac{x}{x^2 + 4y^2} \right)$$

א. הראו כי $Q'_x = P'_y$ במישור ללא הראשית $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

ב. הוכיחו כי השדה הוקטורי \vec{F} איננו משמר ב- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

ג. האם השדה הוקטורי \vec{F} משמר בתחום הבא? אם כן, מצאו לו פונקציית פוטנציאל. אם לא, הסבירו מדוע לא.

$$D = \{(x, y) | 1 \leq (x - 10)^2 + (y - 5)^2 \leq 4\}$$

ד. נתונים המסלולים

$$\vec{\gamma}_1(t) = \left(\frac{\cos 2\pi t}{t+1}, \frac{\sin 2\pi t}{t+1} \right), 0 \leq t \leq 10$$

$$\vec{\gamma}_2(t) = (t, 0), \frac{1}{11} \leq t \leq 1$$

חשבו את העבודה $W = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ לאורך העקום γ שהוא איחוד שני המסלולים $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

(בתרגיל זה אתם יכולים להשתמש בזהות $\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$ עבור $t > 0$, אך לא חובה לפתור דווקא עם זהות זו).

