אנליזה וקטורית 104033

תרגיל בית מס' 1

שם פרטי: אלירן

שם משפחה: תורג'מן

מספר סטודנט: 206895427

מס' קבוצת התרגול: ________

שם פרטי: גור

שם משפחה: תלם

מספר סטודנט: 206631848

מס' קבוצת התרגול: ________

אנליזה וקטורית תרגיל בית 1

מגישים: אלירן תורג'מן 206895427, גור תלם 206631848

① $\bar d=(\bar a+2\bar b+\bar c)\times(2\bar a+3\bar b+2\bar c)=$

$$=\underbrace{\bar a\times 2\bar a}_{0}+\bar a\times 3\bar b+\bar a\times 2\bar c+2\bar b\times 2\bar a+\underbrace{2\bar b\times 3\bar b}_{0}+2\bar b\times 2\bar c+\bar c\times 2\bar a+\bar c\times 3\bar b+$$

$$+\underbrace{\bar c\times 2\bar c}_{0}=$$

$$=\bar a\times\bar b+\bar b\times\bar c=\bar b\times(\bar a+\bar c)$$

$$\bar d\cdot\bar c=4\Rightarrow|d|\cdot|c|\cdot\cos\alpha=4$$

$$4=\bar d\cdot\bar c=\left(\bar b\times(\bar a+\bar c)\right)\cdot\bar c\underset{b\times c\perp c}{=}(\bar b\times\bar a)\cdot\bar c$$

נשים לב כי $(\bar b\times\bar a)\cdot c$ הינו נפח המקבילון המוגדר על ידי $\bar a,\bar b,\bar c$, וערכו 4.

② $L_1:\ \frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{2}=-z$

$L_2:\ \frac{x+1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{a}$

וקטורי הכיוון של הישרים הינם $d_1=(5,2,-1)$ ו- $d_2=(3,2,a)$ בהתאמה.

נבחין כי $d_1\neq n\cdot d_2$ לכל $n\in\mathbb{R}$ ולכן הישרים בהכרח אינם מקבילים לכל a.

נעבור להצגה פרמטרית של הישרים על מנת לבדוק האם הם נחתכים:

$L_1:\{(5t+1,\ 2t+2,\ -t)\mid t\in\mathbb{R}\}$, $L_2:\{(3s-1,\ 2s,\ as-3)\mid s\in\mathbb{R}\}$

נבנה את מערכת המשוואות המתאימה:

$$\begin{cases}(i)\ \ 5t+1=3s-1\\(ii)\ \ 2t+2=2s\ \Rightarrow\ t+1=s\\(iii)\ \ -t=as-3\end{cases}$$

נציב את (ii) ב-(i) ונקבל: $5t+1=3(t+1)-1\Rightarrow t=\frac12,\ s=\frac32$

נציב את הערכים שקיבלנו עבור s,t ב-(iii) ונקבל $-\frac12=\frac32a-3\Rightarrow a=\frac53$

כלומר, נסיק כי עבור $a=\frac53$ הישרים L_1,L_2 נחתכים.

לכל $a\neq\frac53, 0$ הישרים מצטלבים מכיוון שוקטורי הכיוון אינם פרופורציונים ואין בין הישרים נקודת חיתוך.

(3) **טענה:** 3 נקודות A,B,C נמצאות על ישר אחד $\Leftrightarrow$ קיים קבוע λ
כך, ש- $(1-\lambda)\bar{A}+\lambda\bar{B}=\bar{C}$.

הוכחה:

$\Leftarrow$: נניח כי A,B,C נמצאות על ישר אחד ולכן $\overline{CA}\parallel\overline{BA}$, כלומר, לפי ההגדרה קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך, ש- $C-A=(B-A)\cdot\lambda \Rightarrow C=\lambda B+A-\lambda A=(1-\lambda)A+\lambda B$.
(*) מתקיים עבור $A\neq B$).

$\Rightarrow$: נניח כי קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך, ש- $(1-\lambda)A+\lambda B=C$.
הישר העובר בנקודה A עם וקטור הכיוון $\overline{BA}$ הוא הישר $L:\{A+t(B-A)|t\in\mathbb{R}\}$
עבור $t=\lambda$ מההנחה נקבל כי C נמצא על הישר L מכיוון שמקיים את שתי משוואותיו.
עבור $t=1$ נקבל כי B על הישר כי הוא מקיים את שתי משוואותיו.
עבור $t=0$ נקבל כי A על ישר זה מאותו נימוק.
קיבלנו כי הנקודות A,B,C כולן על הישר L כנדרש.

4. Question

Given 3 planes (A, B, C) in the space. Prove/Disprove:

4.1. **Section.**

4.1.1. *True: All the planes intersect at a single point $\implies$ For each two planes, the planes aren't parallel.*

Proof. Assume they all intersect at a single point p.

BWoC assume there are planes that are parallel. Without loss of generality A, B. i.e. $A \parallel B$.

Since there's a point common to both planes (p) and the planes are parallel, the planes are identical ($A = B$) (from the definition of a plane).

Since C also intersects with A, B, and since two planes that intersect, intersect at a line, let's mark l as the line intersection between A, C. Since $A = B$ all the point on l are common to A, B, C in contradiction to the planes only intersecting at a single point. Thus each two of the planes aren't parallel. □

4.1.2. *False: Each two planes aren't parallel $\implies$ the planes all intersect at a single point.*

Proof. There are many example, one can be a prism with 3 sides (no intersection of all the 3 planes). Another is 3 planes all intersection the x-axis from different angles.

Let's look at $A : 0 = x, B : 0 = y, C : 0 = x + y$. It's obvious that the planes aren't parallel because the normals are $(1,0,0), (0,1,0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ all different.

These planes all intersect at $(0,0,0)$ as well as $(0,0,1)$ and thus we disproved the claim. □

4.2. **Section.**

4.2.1. *True: The 3 planes intersect at a single point $\implies$ the normals of the planes are not coplanar.*

Proof. Assume the 3 planes intersect at a single point.

BWoC the normals $\vec{n_A}, \vec{n_B}, \vec{n_C}$ are coplanar (meaning they are on the same plane with $(0,0,0)$).

If either of the two normals are parallel, the planes are parallel. Since they intersect (at a single point) they're equal. In such case (like we proved above), the third plane will intersect at a line. So the normals aren't parallel.

Since the normals are coplanar **בפרט** $\vec{n_A} \times \vec{n_B} \parallel \vec{n_B} \times \vec{n_C}$ and thus, the intersection lines between A, B and B, C are parallel. Meaning they either consolidate or with 0 intersection. Either way, not a single intersection in contradiction to the first assumption. So the normals of the planes are not coplanar.

Q.E.D □

4.2.2. *True: For $\vec{n_A}, \vec{n_B}, \vec{n_C}$ not coplanar $\implies$ the planes intersect at a single point.*

Proof. Assume $\vec{n_A}, \vec{n_B}, \vec{n_C}$ are non coplanar.

Since the normals aren't coplanar, neither of them is a linear combination of the other two, and in particular, neither can't be parallel to any of the other two (because if say $\vec{n_A}, n_B$ are parallel, it means that $\vec{n_A} = b\vec{n_B}$). So non of the planes are parallel either.

BWoC: the planes don't all intersect at a single point.

Since the direction of the line which is the intersection between A and B is in the direction $\vec{n_A} \times \vec{n_B}$ then the direction of the line intersection between B and C is $\vec{n_B} \times \vec{n_C}$. Since they don't intersect at a single point, $\vec{n_A} \times \vec{n_B} \parallel \vec{n_B} \times \vec{n_C}$. And thus, $\vec{n_A}, \vec{n_B}, \vec{n_C}$ are coplanar in contradiction to the first assumption.

So the planes intersect at a single point. □