Der "WALL-E"-Bot

Gemeinsam Dokumente in LaTeX erstellen
und korrigieren

Florian Wiethof
October 19, 2020, Munich

Inhaltsverzeichnis

1 Übung 1

1.1 Aufgabe 1.2

a) $\frac{x-b}{a-b} + \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-b}{a-b} - \frac{x-a}{a-b} = \frac{a-b}{a-b} = 1$, für $a, b, x \in \mathbb{R}$

b) $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$, für $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $\frac{b^3+a^2b}{a^2b-2ab^2+b^3} = \frac{b}{b} \cdot \frac{b^2-a^2}{a^2-2ab+b^2} = \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)(a-b)} = \frac{a+b}{a-b}$

d) $\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{(a-b)(a^2+2ab+b^2)} = \frac{(a^2-b^2)(a^2-b^2)}{(a-b)(a+b)(a+b)} = \frac{(a+b)(a-b)(a+b)(a-b)}{(a-b)(a+b)(a+b)} = a - b$

e) $(\frac{x-b}{a-b} + \frac{x-a}{b-a}) + (\frac{x-d}{c-d} + \frac{x-c}{d-c}) + (\frac{x-f}{e-f} + \frac{x-e}{e-f}) =$
$(\frac{x-b}{a-b} - \frac{x-a}{a-b}) + (\frac{x-d}{c-d} - \frac{x-c}{d-c}) + (\frac{2x-e-f}{e-f}) =$
$1 + 1 + \frac{2x-e-f}{e-f} = 2 + \frac{2x-e-f}{e-f}$, für $e - f \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1.2 Aufgabe 1.3

a) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}} = ((5^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{24}} = \sqrt[24]{5}$

b) $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt{4^5} = \sqrt{2^3} \cdot \sqrt{2^{10}} = 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{10}{2}} = 2^{\frac{13}{2}}$

c) $\frac{\sqrt{(a+b)^6}}{\sqrt[3]{(a+b)^2}} = (a+b)^{\frac{6}{2}} \cdot (a+b)^{-\frac{2}{3}} = (a+b)^{\frac{7}{3}}$

d) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = ((a^{\frac{1}{2}} \cdot a)^{\frac{1}{2}} \cdot a)^{\frac{1}{2}} = ((a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} \cdot a)^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{8}}$

e) $\sqrt{\frac{(-4)^6 9}{2^4 4^4}} = \frac{(-4)^3 3}{2^2 4^2} = \frac{-4 \cdot 3}{2^2} = -3$

f) $\sqrt[5]{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{\sqrt{6-2}}{\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{2}}} =$
$(\sqrt{6} - \sqrt{2})^{-\frac{3}{10}} \cdot 2$

1.3 Aufgabe 1.4

a) $\log_4 64 = 3$ mit $4^3 = 64$

b) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ mit $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

c) $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$ mit $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$

d) $\ln 2 + \ln 5 = \ln(2 \cdot 5) = \ln 10$

e) $\frac{1}{5} \ln x - \frac{1}{10} \ln x^2 + 3 \ln x - \frac{1}{2} \ln x^2 = \ln(x^{\frac{1}{5}} \cdot x^{-\frac{2}{10}} \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{2}}}) = \ln x^2 = 2 \ln x$

1.4 Aufgabe 1.5

a)

$$\log_3(x-1) = 2 \tag{1}$$
$$x - 1 = 3^2 \tag{2}$$
$$x = 10 \tag{3}$$

b)

$$\log_2 x = \log_3 x \tag{4}$$
$$2^{\log_3 x} = x \tag{5}$$
$$(3^{\log_3 2})^{\log_3 x} = x \tag{6}$$
$$(3^{\log_3 x})^{\log_3 2} = x \tag{7}$$
$$x^{\log_3 2} = x \tag{8}$$
$$x^{\log_3 2 - 1} = 1 \tag{9}$$
$$x = 1 \tag{10}$$

- Die Lösung ist aus der Aufgabe schon ersichtlich, aber hier die Herleitung

c)

$$\lg(5x) + \lg 2 = 3 - \lg(4x) \tag{11}$$
$$\lg(5x \cdot 2 \cdot 4x) = 3 \tag{12}$$
$$\lg(40x^2) = 3 \tag{13}$$
$$40x^2 = 10^3 \tag{14}$$
$$4x^2 = 10^2 \tag{15}$$
$$2x = 10 \tag{16}$$
$$x = 5 \tag{17}$$

d)

$$(7^{x+1})^{x+2} = (7^{x+2})^{x+5}s \tag{18}$$
$$7^{x^2+3x+2} = 7^{x^2+7x+10} \tag{19}$$
$$x^2 + 3x + 2 = x^2 + 7x + 10 \tag{20}$$
$$-4x = 8 \tag{21}$$
$$x = -4 \tag{22}$$

e)

$$\sqrt[3]{3^{x+6}} = \sqrt[4]{3^{2x-2}} \tag{23}$$
$$3^{\frac{x+6}{3}} = 3^{\frac{2x-2}{4}} \tag{24}$$
$$\frac{x}{3} + 2 = \frac{x-1}{2} \tag{25}$$
$$-\frac{1}{6}x = -\frac{5}{2} \tag{26}$$
$$x = 15 \tag{27}$$

1.5 Aufgabe 1.6

a)

$$\prod_{n=1}^{j}(\sum_{k=1}^{j} n \cdot k) = (1 \cdot 1 + 1 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 1 + 2 \cdot 2)$$

für $j = 2$

b)

$$\sum_{n=1}^{5}(\prod_{i=1}^{n} \frac{\sum_{k=1}^{3} k^3}{5^i}) = \sum_{n=1}^{5}(\prod_{i=1}^{n} \frac{1+8+27}{5^i}) = \frac{36}{5} + \frac{36}{5}\frac{36}{25} + \frac{36}{5}\frac{36}{25}\frac{36}{125} + ...$$

1.6 Aufgabe 1.7

a) $\frac{3}{1} + \frac{5}{4} + \frac{9}{9} + \frac{17}{16} + ... + \frac{1073741825}{900} = \sum_{k=1}^{30} \frac{2^k+1}{k^2}$

b) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + ... + \frac{18}{19683} = \sum_{k=1}^{9} \frac{2k}{3^k}$

c) $\frac{6}{1} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{12}{3} \cdot ... \cdot \frac{300}{99} = \prod_{k=1}^{99} \frac{3(k+1)}{k}$

d) $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + ... + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 13}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 25} = \sum_{k=1}^{13} \frac{\prod_{n=1}^{k} k}{\prod_{m=0}^{k-1} 2k+1}$

1.7 Aufgabe 1.8

Erklärung des Ansatzes:
Die letzte Aktion eines Kunden, bevor der Laden leer ist, ist die Mitnahme einer halben Kiste Bier. Da derselbe Kunde zuvor den halben Laden leergeräumt hat, war vor dem Kauf des letzten Kunden $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ Kiste im Laden.

Wir rechnen also rückwärts: der vorletzte Kunde baut auf dieser einen Kiste auf. Bevor er den Laden betreten hat, waren $(1 + \frac{1}{2}) \cdot 2 = 3$ Kisten im Laden. Diese Kette setzt sich immer so weiter. Der vorherige Wert x wird immer durch $(x + \frac{1}{2}) \cdot 2$ neu berechnet.

Kunden werden hier von hinten gezählt:

- 1. Kunde: $(0 + \frac{1}{2}) \cdot 2 = 1$
- 2. Kunde: $(1 + \frac{1}{2}) \cdot 2 = 3$

- 3. Kunde: $(3 + \frac{1}{2}) \cdot 2 = 7$
- 4. Kunde: $(7 + \frac{1}{2}) \cdot 2 = 15$
- 5. Kunde: $(15 + \frac{1}{2}) \cdot 2 = 31$
- ...

Die Anzahl der Verkäufe entspricht (Herleitung hier ausgelassen) $2^n - 1$, wobei n die Anzahl der Einkäufe ist. Bsp. 5. Kunde, also $n = 5$: Anzahl Verkäufe $= 2^5 - 1 = 31$

1.8 Aufgabe 1.9

Erklärung des Ansatzes:
Für den durschnittlichen Vebrauch einer Wohnung pro Tag brauchen wir den Gesamtverbrauch und die Gesamt-"Wohnungsverbrauchstage" in einem gegebenen Zeitraum (hier 12 Jahre, aber eigentlich egal).

Zwei Wohnungen mit jeweils einem Tag Stromverbrauch ergeben zwei Wohnungsverbrauchstage insgesamt. In der Aufgabe kommt jeden Tag eine neue Wohnung zu den Verbrauchern hinzu. Die Gesamtzahl der Wohnungsverbrauchstage erhöht sich jeden Tag um die aktuelle Gesamtzahl fertiger Wohnungen.

Die gesamten Wohnungsverbrauchstage ergeben sich also einfach aus der Summe natürlicher Zahlen bis 4380. $GWVT = \sum_{k=1}^{4380} k$ Beispielhafte Erläuterung (GWVT = Gesamtwohnungsverbrauchstage):

- 1. Tag: 1 Wohnung (1 GWVT)
- 2. Tag: 2 Wohnungen (1 + 2 GWVT)
- 3. Tag: 3 Wohnungen (1 + 2 + 3 GWVT)
- ...

Die Summe lässt sich durch die Gaußsche Summenformel schreiben als $GWVT = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2}$, mit n = 4380

Der durchschnittliche Verbrauch einer Wohnung ergibt sich damit zu

$$\frac{E_{gesamt}}{GWVT}$$

1.9 Aufgabe 1.10

Erklärung des Ansatzes:
Angenommen, beide Streichen eine Wand der Fläche A in der angegebenen Zeit. Wir beschreiben dann die Geschwindigkeiten der beiden mit $v_{paul} = \frac{A}{t_{paul}}$ und $v_{paula} = \frac{A}{t_{paula}}$ Es gilt die Zeit zu finden, die beide zusammen für die Fläche A benötigen. Also berechnen wir die Gesamtfläche von beiden in einer bestimmten Zeit.

$$A = t_{zeit} \cdot \frac{A}{t_{paul}} + t_{zeit} \cdot \frac{A}{t_{paula}}$$

und setzen die errechnete Fläche mit der ausgedachten Gesamtfläche gleich (die beiden sind ja immer noch im selben Raum). Das A taucht überall als Faktor auf und kann gekürzt werden. Nach Umstellung zur gesuchten t_{zeit} ergibt sich:

$$t_{zeit} = \frac{1}{\frac{1}{t_{paul}} + \frac{1}{t_{paula}}}$$

1.10 Aufgabe 1.11

Erklärung des Ansatzes:

$$1.5\,Huehner \cdot 1.5\,Tage = 1.5 Eier \tag{28}$$

$$1.5\,Huehner = 1\frac{Eier}{Tage} \tag{29}$$

$$1\,Huhn = \frac{2}{3}\frac{Eier}{Tage} \tag{30}$$

1.11 Aufgabe 1.12

Erklärung des Ansatzes:
Durchschnittsgeschwindigkeit ist einfach $\frac{Strecke_{gesamt}}{Zeit_{gesamt}}$

a)

$$Strecke_{gesamt} = 1h \cdot 50\frac{km}{h} + 1h \cdot 100\frac{km}{h} = 150 \tag{31}$$

$$Zeit_{gesamt} = 1h + 1h = 2h \tag{32}$$

b)

$$Strecke_{gesamt} = 100km + 100km = 200km \tag{33}$$

$$Zeit_{gesamt} = \frac{100km}{50\frac{km}{h}} + \frac{100km}{100\frac{km}{h}} = 2h + 1h = 3h \tag{34}$$

1.12 Aufgabe 1.13

Erklärung des Ansatzes:
Sehr ähnlich zu dem Einkaufsladen-Problem. Zuvor gesagt: man kann einfach die Formeln nehmen und reinhauen, aber ich nehme einen anderen Ansatz. Die Annuitäten-Formel geht von Zinskosten VOR der Tilgung aus, ich in diesem Fall nicht. Wenn es doch so ist, kann man das Ergebnis einfach korrigieren (zeige ich gleich).

Wieder rückwärts betrachtet: der Kontostand im letzten Jahr der Tilgung muss genauso hoch sein wie der jährliche Tilgungsbetrag, damit am Ende diesen Jahres die Schulden vollständig (unzwar genau) beglichen sind.

Im vorletzten Jahr müssen dann Zinsen mit berücksichtigt werden. Nach der Tilgung und dem Zinsaufschlag müssen die Restschulden den Schulden im letzten Jahr entsprechen. Auch diese Rechnung kann immer so weitergeführt werden.

Beispiel für die Schulden im vorletzten Jahr:

$$(K_2 - A) \cdot (1 + q) = K_1 \tag{35}$$

$$K_2 = \frac{K_1}{1 + q} + A \tag{36}$$

Mit $K_1 = A$ ergibt sich also $K_2 = \frac{A}{1+q} + A$
Hier die Bezeichnung der Variablen:

$$q = Zinssatz\, pro\, Jahr \tag{37}$$

$$A = Tilgungsbeitrag\, pro\, Jahr \tag{38}$$

$$n = Anzahl\, Jahre \tag{39}$$

$$K_i = Schulden\, im\, Jahr\, i,\; von\, hinten\, gezaehlt \tag{40}$$

Jedes Jahr wird der nächste Betrag durch $(1+q)$ dividiert und ein Tilgungsbeitrag addiert. Das Ganze lässt sich in einer Summe zusammenfassen.

$$A \cdot \sum_{k=0}^{n} (1 + q)^k$$

Diese Summe ist eine geometrische Reihe, deren Wert folgendermaßen berechnet werden kann (Google):

$$\sum_{k=0}^{n} i^k = \frac{i^{n+1} - 1}{i - 1}$$

Für unsere Summe ergibt sich also

$$A \cdot \sum_{k=0}^{n} (1 + q)^k = A \cdot \frac{(1 + q)^{n+1} - 1}{q}$$

Um den Tilgungsbeitrag zu berechen, setzen wir das Ergebnis der Summe einfach mit dem anfänglichen Invest gleich (also die 100.000 Euro, hier Variable I) und erhalten

$$A = I \cdot \frac{q}{q^{n+1} - 1}$$

Wenn nun die Zinskosten vor der Tilgung auftreten, muss von diesem Faktor einfach 1 abgezogen werden.

2 Übung 2

2.1 DISCLAIMER - BITTE LESEN

Aussagenlogik und Mengenlehre können manchmal extrem eklig sein, wenn man ein Zeichen oder ein Wort nur falsch abgelesen hat. Hinterfragt (wie ihr es immer tun solltet) meine Lösungen auf alle Fälle und versucht sie nachzuvollziehen. Ich kann Fehler nicht ausschließen. Meldet euch gerne, wenn euch etwas aufgefallen ist, bevor einige Helden doch wieder nur die Lösungen auswendig lernen! (wobei Durchfallen dann verdient wäre. . .)

2.2 Aufgabe 2.2

"Among Us" in a nutshell...

Ansatz: Widersprüchliche Aussagen finden. Sobald zwei Personen sich widersprechen, ist bekannt, dass einer von ihnen Lügen muss. Die dritte verbleibende Person muss entsprechend die Wahrheit sagen, und ihre Aussage kann zur Entdeckung des Lügners beitragen.

- A-B: Die beiden Aussagen hängen nicht zusammen, daher sind sie kongruent
- A-C: Die Aussagen widersprechen sich darin, ob A der Dieb ist oder nicht. A oder C müssen lügen.
- B-C: Die Aussagen widersprechen sich darin, ob B am Tatort war ("außer mir" heißt hier, dass B am Tatort war). B oder C müssen lügen.

Die jeweiligen Aussagen, ob jemand lügt oder nicht, müssen koexistieren können. Das bedeutet, dass wir die Schnittmenge beider Aussagen ermitteln.
A ODER C UND B ODER C, bzw $A \vee C \wedge B \vee C$ ist nur dann erfüllt, wenn der Lügner C ist.
Damit ist der Lügner C.

2.3 Aufgabe 2.3

Oben steht das Original (für Prüfung des Sinns weniger interessant), unten die nach Aufgabenstellung umgewandelte Version.

a)

$$\forall n \notin \mathbb{P} \cup \{1\} \, \exists \, k \notin \{1, n\} : k \mid n \tag{41}$$
$$\exists n \notin \mathbb{P} \cup \{1\} \, \forall \, k \notin \{1, n\} : k \mid n \tag{42}$$

Es existiert eine Zahl n, die keine Primzahl (oder 1) ist. Bei dieser gilt für alle k, die weder 1 noch die Zahl n sind, dass n durch k teilbar ist.
Anders gesagt: es existiert eine Nicht-Primzahl (auch nicht 1), durch die alle Zahlen teilbar sind.
Für $n = 0$ funktioniert das, die Aussage ist wahr.

b)

$$\forall x \in \mathbb{R} \, \forall \, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{x}{y} \in \mathbb{R} \tag{43}$$
$$\exists x \in \mathbb{R} \, \exists \, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{x}{y} \in \mathbb{R} \tag{44}$$

Es existiert eine reelle Zahl x, für die eine reelle Zahl y existiert (außer 0), sodass ihr Quotient in den reellen Zahlen liegt.
Der Bruch zweier reeller Zahlen ist immer eine reelle Zahl (solange der Nenner $\neq 0$ ist).
Die Aussage ist wahr.

c)

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \frac{1}{n} \leq 0,001 \tag{45}$$

$$\forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : \frac{1}{n} \leq 0,001 \tag{46}$$

Für alle natürlichen Zahlen existiert eine Zahl n größer als sie selber, die invertiert $\leq 0,001$ ist.
Die Zahl n ist nach oben unbeschränkt, und es muss nur ein n gewählt werden.
Die Aussage ist wahr.

d)

$$\exists n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : m + n > n^2 \tag{47}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : m + n > n^2 \tag{48}$$

Für alle natürlichen Zahlen n gilt, dass für alle natürlichen Zahlen m die Summe aus m und n $> n^2$ ist.
Wähle m klein genug und n groß genug, dann geht die Aussage nicht mehr auf.
Die Aussage ist falsch.

2.4 Aufgabe 2.4

Strange community, aber in Ordnung. . .

Wir haben nur folgende zwei Gruppen im Dorf:

$$Gruppe\,A,\ selber\,rasieren \tag{49}$$

$$Gruppe\,B,\ nur\,von\,Roberto\,rasieren\,lassen \tag{50}$$

Strikte Trennung, laut der Aufgabenstellung bedeutet, dass die Schnittmenge beider Gruppen leer ist, bzw.

$$A \cap B = \emptyset$$

Roberto hat zwei Möglichkeiten, um seine Rasur zu bekommen:

- Er geht zu einem anderen Barbier
- Er rasiert sich selbst

Wenn hergeleitet werden soll, dass Roberto nicht im Dorf wohnen kann, müssen wir beweisen, dass keine seiner Möglichkeiten ihn eindeutig einer der getrennten Gruppen im Dorf zuordnet.

Möglichkeit 1: Er geht zu einem anderen Barbier (Teilentscheidung c)

- $c \notin A$, da er sich nicht selber rasiert
- $c \notin B$, da nicht Roberto (also er selbst), ihn rasiert

Keine Gruppe ist hier vertreten. Damit fällt Möglichkeit 1 aus.

Möglichkeit 2: Er rasiert sich selber (Teilentscheidung c)

- $c \in A$, da er sich selber rasiert
- $c \in B$, da er sich nur von Roberto (keinem anderen) rasieren lässt

Beide Gruppen sind vertreten. Somit ist keine eindeutige Zuordnung (wie erforderlich) vorhanden, Möglichkeit 2 fällt aus.

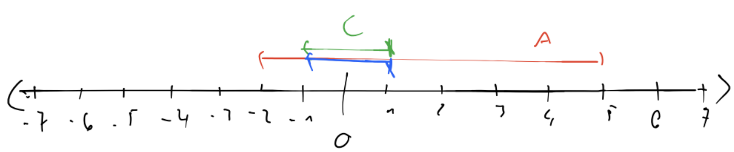
2.5 Aufgabe 2.5

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid 5 > x > -2\} \tag{51}$$
$$B := \{x \in \mathbb{R} \mid 1 > x\} \tag{52}$$
$$C := \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 1\} \tag{53}$$

a)

$$A \cap C = C$$

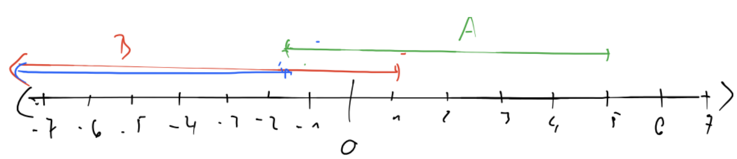
- Bestimmung der gemeinsamen Elemente von A und C
- C ist vollständig in A enthalten, die Schnittmenge entspricht also C.



b)

$$B \setminus A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x\}$$

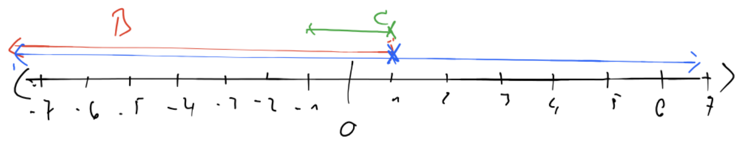
- Bestimmung der Menge B ohne die Elemente von A
- B enthält alle Elemente echt kleiner 1, A nimmt aus B alle Elemente zwischen 1 und -2 (nicht einschließlich)



c)

$$(\mathbb{R} \setminus C) \cup B = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

- Zunächst die Elemente von C aus allen reellen Zahlen entfernen, dann die Elemente von B einfügen
- Da B alle Elemente aus C enthält, bis auf die eins ($\leq$ bei C und $<$ bei B), fehlt aus dem Ergebnis nur die 1



2.6 Aufgabe 2.6

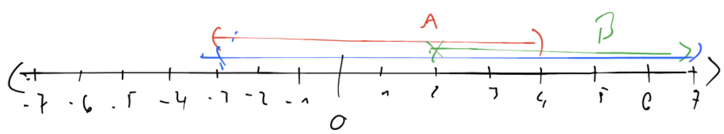
Derselbe Spaß nochmal...

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\} \tag{54}$$
$$B := \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x\} \tag{55}$$
$$C := \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1\} \tag{56}$$

a)

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x\}$$

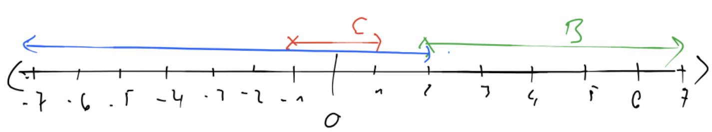
- Bestimmung der gesamten Elemente aus A und B zusammen
- A geht bis -3 runter und überschneidet sich mit B, B geht ins Unendliche hoch



b)

$$C \cup (\mathbb{R} \setminus B) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x\}$$

- Bestimmung der gesamten Elemente aus C und aller reellen Zahlen, abzüglich der Menge B
- $\mathbb{R} \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x\} =: D$
- Alle Zahlen echt kleiner zwei werden C hinzugefügt. Da $C \subset D$ ist, ist die Ergebnismenge D.

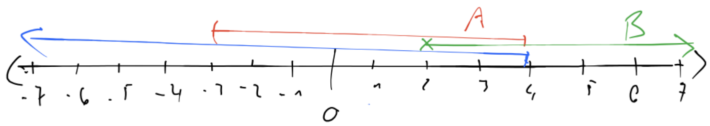


c)

$$(\mathbb{R} \cap B) \cup A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x\}$$

- Bestimmung der gesamten Elemente aus A und den gemeinsamen Elementen aller reellen Zahlen und B

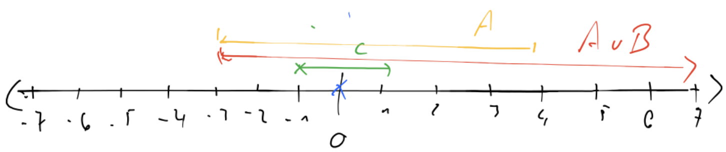
- Da $B \subset \mathbb{R}$ ist, ist $\mathbb{R} \cap B = B$
- Da $B \cup A = A \cup B$ ist, kann das Ergebnis einfach aus Teilaufgabe a) übernommen werden.



d)

$$((A \cup B) \cap C) \setminus A = \emptyset$$

- $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x\}$ wird aus a) übernommen
- $C \subset (A \cup B)$, damit ist $(A \cup B) \cap C = C$
- Da $C \subset A$ ist, ist $C \setminus A = \emptyset$



2.7 Aufgabe 2.7

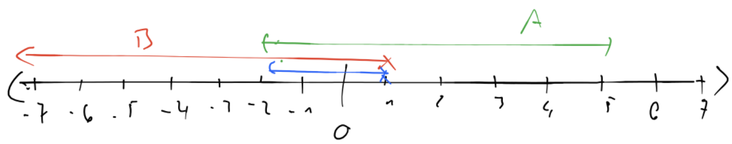
Und ein drittes Mal, aber diesmal Quadrate...

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 5\} \tag{57}$$
$$B := \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \geq x\} \tag{58}$$
$$C := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\} \tag{59}$$
$$D := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 1\} \tag{60}$$

a)

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 1\}$$

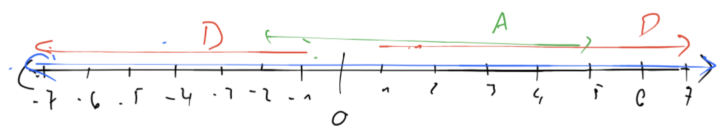
- Bestimmung der gemeinsamen Elemente von A und B
- A und B überschneiden sich, B liefert die Obergrenze der Elemente, da sie bis $-\infty$ weitergehen



b)

$$A \cup D = \mathbb{R}$$

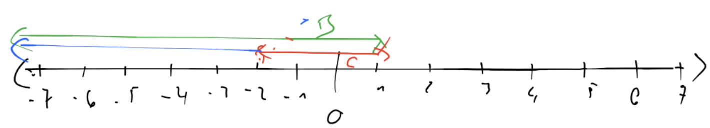
- Bestimmung aller Elemente aus A und D zusammen
- D lässt sich umformen zu (siehe nächste Aufgabe) $D := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
- A füllt diese "Lücke" in den reellen Zahlen vollständig



c)

$$B \setminus C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$$

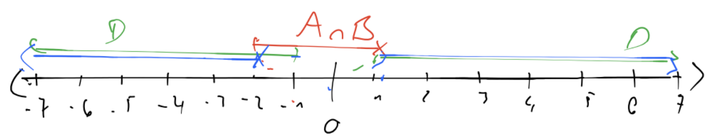
- C lässt sich durch Fallunterscheidung (bei geradem Exponenten fällt Vorzeichen weg) umschreiben zu $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$
- B und C überschneiden sich, größtes Element von C ist größer als größtes Element von B, aber B läuft bis $-\infty$ weiter
- Außerdem $\leq$ (kleiner gleich) beachten, die -2 fällt aus der neuen Menge raus!



d)

$$D \setminus (A \cap B) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \vee x > 1\}$$

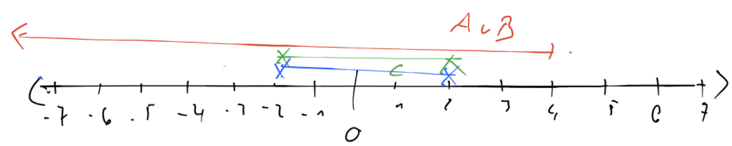
- $A \cap B$ kann aus a) übernommen werden
- Wird erhalten zwei Bereiche: einen bis $+\infty$ über der Obergrenze von $A \cap B$ und umgekehrt
- Auf größer-kleiner-(gleich)-Zeichen achten!



e)

$$C \cap (A \cup B) = C$$

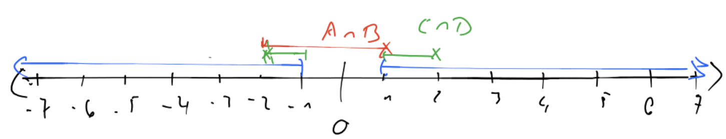
- $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$, da A und B sich überschneiden und B bis $-\infty$ weiterläuft
- C ist vollständig in dieser Menge enthalten, also $C \subset (A \cup B)$



f)

$$(\mathbb{R} \setminus (A \cap B)) \cup (C \cap D) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x1\}$$

- Eine Operation nach der anderen auflösen, dann bricht sich das schnell herunter
- $A \cap B$ kennen wir schon aus a)
- $\mathbb{R} \setminus (A \cap B)$ teilt sich wieder in zwei Mengen auf (quasi eine Lücke in den reellen Zahlen), mit $\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq\ -2 \vee x > 1\}$
- Für $C \cap D$ bildet C die Obergrenze und D die Untergrenze, es ergibt sich $C \cap D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 1 \wedge x^2 \leq 4\}$, die Bedingungen sind mit dem UND-Operator verknüpft!
- Aus beiden Blöcken (links, rechts) wird zuletzt die Gesamtmenge gebildet
- Die einzigen Elemente aus $\mathbb{R}$, die in keiner beider Mengen vorliegen, sind $\{x \in \mathbb{R} \mid\ -1 < x < 1\}$



2.8 Aufgabe 2.8

$$M_1 := \{1, 2\} \tag{61}$$
$$M_2 := \{2, 3\} \tag{62}$$
$$M_3 := \{X, y, 3\} \tag{63}$$
$$M_4 := \{x, y, z\} \tag{64}$$
$$M_5 := \{2, 4, 6\} \tag{65}$$

a) $M_1 \cap M_2 = \{2\}$

b) $M_2 \cap M_3 = \{3\}$

c) $M_3 \cap M_4 = \{3, X, x, y, z\}$

d) $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5 = \{1, 2, 3, 4, 6, X, x, y, z\}$

e) $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap M_5 = \emptyset$

f) $M_1 \times M_2 \times M_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\} \times M_3 =$
$\{((1, 2), X), ((1, 2), y), ((1, 2), 3), ((1, 3), X), ((1, 3), y, ((1, 3), 3),$
$((2, 2), X), ((2, 2)), y), ((2, 2), 3), ((2, 3), X), ((2, 3), y), ((2, 3)), 3)\}$

g) Alle Paare disjunkter Mengen $= \{(M_1, M_3), (M_1, M_4), (M_2, M_4), (M_3, M_5), (M_4, M_5)\}$

h) $M_1 \setminus M_2 = \{1\}$

i) $M_3 \setminus M_4 = \{X, 3\}$

3 Übung 3

3.1 DISCLAIMER - BITTE LESEN

Hinterfragt (wie ihr es immer tun solltet) unsere Lösungen auf alle Fälle und versucht sie nachzuvollziehen. Wir können Fehler nicht ausschließen. Meldet euch gerne, wenn euch etwas aufgefallen ist, bevor einige Helden doch wieder nur die Lösungen auswendig lernen! (wobei Durchfallen dann verdient wäre. . .) Korrekturen werden wir nachträglich noch einpflegen und (bald) auch immer den aktuellen Stand des Dokuments zur Verfügung stellen. . . aber eins nach dem anderen.

Beste Grüße
Euer Autoren-Team

3.2 Aufgabe 3.1

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) $\langle v_1, v_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2$

b) $\langle v_2, v_3 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 13$

c) $\langle v_3, v_4 \rangle = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$

d) $\langle v_1, v_4 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 0$

3.3 Aufgabe 3.2

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Skalarprodukte und Kreuzprodukte

(a) $\langle v_1, v_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 5$

$v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\langle v_2, v_3 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 7$

$v_2 \times v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\langle v_3, v_4 \rangle = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 6 = 0$

$v_3 \times v_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 6 - (-2) \cdot 4 \\ (-2) \cdot 0 - 5 \cdot 6 \\ 5 \cdot 4 - 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -30 \\ 20 \end{pmatrix}$

b) Senkrecht

(a) $\langle v_1, v_2 \rangle = 5$, nicht senkrecht
(b) $\langle v_1, v_3 \rangle = 3$, nicht senkrecht
(c) $\langle v_1, v_4 \rangle = 6$, nicht senkrecht
(d) $\langle v_2, v_3 \rangle = 7$, nicht senkrecht
(e) $\langle v_2, v_4 \rangle = 22$, nicht senkrecht
(f) $\langle v_3, v_4 \rangle = 0$, senkrecht

c) Normen

(a) $\|v_1\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$

$v_{1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\|v_2\| = \sqrt{2^2+1^2+3^2} = \sqrt{14}$

$v_{2,n} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $\|v_3\| = \sqrt{5^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{38}$

$v_{3,n} = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(d) $\|v_4\| = \sqrt{0^2+4^2+6^2} = \sqrt{52}$

$v_{4,n} = \frac{1}{\sqrt{52}} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) Winkel - die Werte der Skalarprodukte und Normen können aus a) und c) übernommen werden

(a) $\cos\angle(v_1,v_2) = \frac{\langle v_1,v_2\rangle}{\|v_1\|\|v_2\|} = \frac{5}{\sqrt{2}\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{28}}$

(b) $\cos\angle(v_2,v_3) = \frac{\langle v_2,v_3\rangle}{\|v_2\|\|v_3\|} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{38}} = \frac{5}{\sqrt{546}}$

(c) $\cos\angle(v_3,v_4) = \frac{\langle v_3,v_4\rangle}{\|v_3\|\|v_4\|} = \frac{0}{\sqrt{38}\sqrt{52}} = 0$

e) Berechnen

(a) $\langle v_1, 6v_2+7v_4\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 28 \\ 42 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ 60 \end{pmatrix} = 1\cdot 12 + 1 \cdot 60 = 72$

(b) $6\langle v_1,v_2\rangle + 7\langle v_1,v_4\rangle = 6\cdot 5 + 7\cdot(1\cdot 0 + 0\cdot 4 + 1\cdot 6) = 30+42 = 72$

3.4 Aufgabe 3.4

Abstand der Punkte entspricht der Norm des Vektors zwischen den zwei Punkten

a) $a = (2,1)^T, b = (-3,1)^T$

$d = \left\|\overrightarrow{ab}\right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 5$

b) $a = (1,0,0)^T, b = (0,1,0)^T$

$d = \left\|\overrightarrow{ab}\right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$

c) $a = (5,4,3)^T, b = (-5,-4,-3)^T$

$d = \left\|\overrightarrow{ab}\right\| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{200}$

3.5 Aufgabe 3.5

Koordinatenachsen (2-D-Vektor, also x- und y-Achse):

$$v_1 = (1,0)^T,\ \|v_1\| = 1\ ; v_2 = (0,1)^T,\ \|v_2\| = 1$$

$$a = (2,5)^T,\ \|a\| = \sqrt{29}$$

Die Zwischenrechnung für Skalarprodukte und Normen überspringe ich an dieser Stelle, da genügend Beispiele in den vorherigen Aufgaben liegen.

a) x-Achse: $\angle(a, v_1) = \arccos \frac{\langle a,v_1\rangle}{\|a\|\|v_1\|} = \arccos \frac{2}{\sqrt{29}}$

b) x-Achse: $\angle(a, v_2) = \arccos \frac{\langle a,v_2\rangle}{\|a\|\|v_2\|} = \arccos \frac{5}{\sqrt{29}}$

3.6 Aufgabe 3.6

a)

$$a = (a_1, a_2)^T\ ; w = (w_1, w_2)^T$$

Senkrecht bedeutet, dass das Skalarprodukt der Vektoren = 0 sein muss. Es gilt also folgende Gleichung zu lösen:

$$a_1 \cdot w_1 + a_2 \cdot w_2 = 0$$

Dabei sind a_1 und a_2 bekannt. Da die Gleichung zwei Unbekannte hat, gibt es (im allgemeinen Fall) unendlich viele Lösungen, außer einer der Summanden ist = 0. Dasselbe gilt für $\mathbb{R}^3$, außer dass die Lösung dann eindeutig ist, wenn zwei der Summanden = 0 sind. Man kann also, bis auf einen, beliebige Werte für w_i annehmen und den letzen auflösen.

ERGÄNZUNG: Durch die Vorgabe, dass der Vektor die Länge 1 haben soll, haben wir eine zusätzliche Gleichung/Nebenbedingung mit

$$\sum_{k=1}^{n} w_i^2 = 1$$

Dabei entspricht n der Anzahl der Dimensionen des Vektors. Diese Bedingung kann so erfüllt werden, dass zwar immer noch alle bis auf ein w_i frei gewählt werden, der Vektor am Ende nur zusätzlich normiert wird. Somit muss die Gleichung nicht im Gleichungssystem berücksichtigt werden.

$$-3w_1 + 0w_2 = 0 \tag{66}$$
$$-3w_1 = 0 \tag{67}$$
$$w_1 = 0 \tag{68}$$

w_2 ist hier beliebig wählbar. Da die Länge des Vektors = 1 sein soll, ist $w_2 = 1$. Somit ist $\|w\| = 1$.

b)

$$b = (0,0,0)^T \,; w = (w_1, w_2, w_3)^T$$

$$0w_1 + 0w_2 + 0w_3 = 0 \tag{69}$$
$$0 + 0 + 0 = 0 \tag{70}$$

w_1, w_2 und w_3 sind beliebig wählbar unter der Nebenbedigung

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1$$

, damit der Vektor die Länge 1 hat.

c)

$$c = (1,1,1)^T \,; w = (w_1, w_2, w_3)^T$$

Da wir eine Gleichung und drei Unbekannte haben, wählen wir einfach w_1 und $w_2 = 1$

$$1w_1 + 1w_2 + 1w_3 = 0 \tag{71}$$
$$1 + 1 + w_3 = 0 \tag{72}$$
$$w_3 = -2 \tag{73}$$

Damit ist $w = (1, 1, -2)^T$ und muss nun noch normiert werden. Mit $\|w\| = \sqrt{6}$ ergibt sich

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

d)

$$d = (-5, k, 0)^T,\, k \in \mathbb{R} \,; w = (w_1, w_2, w_3)^T$$

Da wir eine Gleichung und drei Unbekannte haben, wählen wir einfach w_2 und $w_3 = 1$. w_1 oder w_2 sollten dabei berechnet werden, da w_3 durch die Multiplikation mit 0 sowieso wegfällt und sonst ein Spezialfall herrscht.

$$-5w_1 + kw_2 + 0w_3 = 0 \tag{74}$$
$$-5w_1 + k = 0 \tag{75}$$
$$w_1 = \frac{1}{5}k \tag{76}$$

Damit ist $w = (\frac{1}{5}k, 1, 1)$ und muss noch normiert werden. Mit $\|w\| = \sqrt{\frac{1}{25}k + 2}$ ergibt sich

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{25}k + 2}}$$

3.7 Aufgabe 3.7

a)

$$a = (2,1)^T \ ; b = (3,2)^T$$

$$a_\parallel = \frac{\langle a,b\rangle}{\|b\|} b \tag{77}$$

$$a_\perp = a - a_\parallel \tag{78}$$

Damit

$$\|b\| = \sqrt{13} \tag{79}$$

$$a_\parallel = \frac{8}{\sqrt{13}}(3,2)^T \tag{80}$$

$$a_\perp = (2,1)^T - \frac{8}{\sqrt{13}}(3,2)^T \tag{81}$$

b)

$$a = (2,6)^T \ ; b = (-9,3)^T$$

$$\|b\| = \sqrt{90} \tag{82}$$

$$a_\parallel = \frac{0}{\sqrt{90}}(-9,3)^T = 0 \tag{83}$$

$$a_\perp = (2,6)^T - (0,0)^T = (2,6)^T \tag{84}$$

c)

$$c = (4,-1,7)^T \ ; d = (2,3,-6)^T$$

$$\|d\| = 7 \tag{85}$$

$$c_\parallel = -\frac{37}{7}(2,3,-6)^T \tag{86}$$

$$c_\perp = (4,-1,7)^T + \frac{37}{7}(2,3,-6)^T \tag{87}$$

d)

$$c = (1,0,0)^T \ ; d = (0,1,1)^T$$

$$\|d\| = \sqrt{2} \tag{88}$$

$$c_\parallel = \frac{0}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T = 0 \tag{89}$$

$$c_\perp = (1,0,0)^T - (0,0,0)^T = (1,0,0)^T \tag{90}$$

3.8 Aufgabe 3.8

Die Kantenlänge und Ausrichtung des Dreiecks im $\mathbb{R}^3$ ist nicht vorgegeben, zudem ist nur die Rede von einem einzigen Dreieck. Das heißt, dass wir einfach ein beliebiges definieren können. Das Dreieck wird anhand von drei Punkten definiert. Ein gleichseitiges Dreieck hat drei Seiten mit derselben Kantenlänge. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass die inneren Winkel des Dreiecks identisch, und damit jeweils 60, bzw $\frac{\pi}{3}$ betragen.

Der erste Ankerpunkt liegt in auf $a_1 = (0,0)^T$, weil es am einfachsten ist. Die Kantenlänge legen wir auf 1 fest. Die erste Kante können wir beliebig legen (Hauptsache Länge = 1). Dann wählen wir einfach $a_2 = (1,0)^T$.

Den dritten Punkt erhalten wir über einfach Trigonometrie. Wenn wir einen Einheitskreis um $(0,0)^T$ herum legen, brauchen wir den Punkt auf 60 im Kreis. Diesen erhalten wir durch

$$a_3 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Damit ist das Dreieck

$$a_1 = (0,0)^T \,; a_2 = (1,0)^T \,; a_3 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

Über einen Faktor k oder einer Transformationsmatrix mit

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & x \\ \sin\phi & \cos\phi & y \end{pmatrix}$$

kann dieses Dreieck beliebig um den Winkel ϕ verdreht, den Vektor $(x,y)^T$ verschoben, oder seine Kantenlänge um k skaliert werden.

3.9 Aufgabe 3.9

- Gleichseitig: alle Seiten sind gleich lang
- Gleichschenklig: zwei Seiten sind gleich lang (ergibt sich aus zwei gleich großen Winkeln)
- Rechtwinklig: ein rechter Winkel vorhanden

Ansatz: Für alle Dreiecke die Vektoren der Kanten, ihre Beträge und Skalarprodukte bestimmen.

PS: Schon klar, dass man das meiste direkt aus den Punkten heraus erkennen kann, aber dennoch der Vollständigkeit halber die Rechnung dazu.

a)

$$a = (0,4)^T \,; b = (-4,0)^T \; c = (0,0)^T$$

$$\overrightarrow{ab} = (-4,-4)^T \tag{91}$$
$$\overrightarrow{bc} = (4,0)^T \tag{92}$$
$$\overrightarrow{ca} = (0,4) \tag{93}$$
$$\left\|\overrightarrow{ab}\right\| = \sqrt{32} \tag{94}$$
$$\left\|\overrightarrow{bc}\right\| = 4 \tag{95}$$
$$\|\overrightarrow{ca}\| = 4 \tag{96}$$
$$\langle\overrightarrow{ab},\overrightarrow{bc}\rangle = -16 \tag{97}$$
$$\langle\overrightarrow{bc},\overrightarrow{ca}\rangle = 0 \tag{98}$$
$$\langle\overrightarrow{ca},\overrightarrow{ab}\rangle = -16 \tag{99}$$
$$\tag{100}$$

Rechtwinklig und gleichschenklig.

b)

$$a = (2,3)^T \; ; b = (-3,2)^T \; c = (1,4)^T$$

$$\overrightarrow{ab} = (-5,-1)^T \tag{101}$$
$$\overrightarrow{bc} = (4,2)^T \tag{102}$$
$$\overrightarrow{ca} = (1,-1) \tag{103}$$
$$\left\|\overrightarrow{ab}\right\| = \sqrt{26} \tag{104}$$
$$\left\|\overrightarrow{bc}\right\| = \sqrt{20} \tag{105}$$
$$\|\overrightarrow{ca}\| = \sqrt{2} \tag{106}$$
$$\langle\overrightarrow{ab},\overrightarrow{bc}\rangle = -22 \tag{107}$$
$$\langle\overrightarrow{bc},\overrightarrow{ca}\rangle = 2 \tag{108}$$
$$\langle\overrightarrow{ca},\overrightarrow{ab}\rangle = -4 \tag{109}$$
$$\tag{110}$$

Nichts.

c)

$$a = (0,1)^T \; ; b = (-1,0)^T \; c = (0,-1)^T$$

$$\overrightarrow{ab} = (-1, -1)^T \tag{111}$$
$$\overrightarrow{bc} = (1, -1)^T \tag{112}$$
$$\overrightarrow{ca} = (0, 2) \tag{113}$$
$$\left\|\overrightarrow{ab}\right\| = \sqrt{2} \tag{114}$$
$$\left\|\overrightarrow{bc}\right\| = \sqrt{2} \tag{115}$$
$$\|\overrightarrow{ca}\| = 2 \tag{116}$$
$$\langle\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{bc}\rangle = 0 \tag{117}$$
$$\langle\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ca}\rangle = -2 \tag{118}$$
$$\langle\overrightarrow{ca}, \overrightarrow{ab}\rangle = -2 \tag{119}$$
$$\tag{120}$$

Gleichschenklig und rechtwinklig.

3.10 Aufgabe 3.10

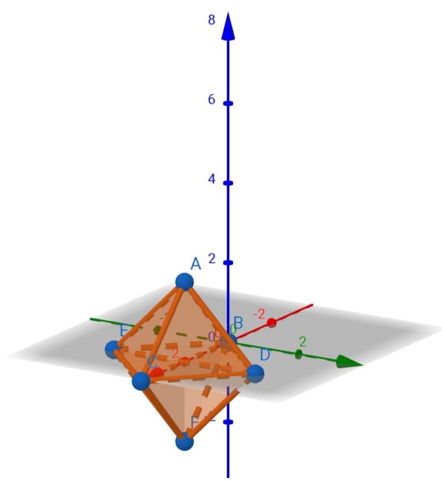


Figure 1: Dieses Objekt heisst Octahedron.

a) $\parallel \overline{ab} \parallel = 4$. Die sind einfach auf der gleichen Gerade.

b) Man kann diese Objekts Volume durch zwei Methoden berechnen. Eins, kann man ein Orthagon zu dem Ebene EBDC machen dann das Volume für ein Pyramid rechen und dann mit 2 multiplizieren. Zweite method ist einfacher. Da die Seitenlaenge (a=2.83) gleich sind, dies Objekt ist ein Regulaeres Octahedron, mit $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$ rechen. Also die Antwort lautet: $\simeq$10.68

3.11 Aufgabe 3.11

a) 90 $\circ$ gedrehtem $\vec{b}$ ist $\vec{b}^T(2,1)$. Durch das Cosinusverfahren $cos(\alpha) = \frac{\langle a,b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$ bestimmt man der Winkel. Also die Antwort lautet: $arccos(\frac{3}{\sqrt{10}}) \simeq 18\circ$

b) Gleichermassen von der obere Teilaufgabe, benutz man das Cosinusverfahren. Aber $\vec{b}^T$ lautet hier $\vec{b}^T(-1,2)$. Also die Antwort lautet: $arccos(\frac{1}{\sqrt{10}}) \simeq 71\circ$

3.12 Aufgabe 3.12

a) $\vec{a} = (X_1, Y_1)$ und $\vec{b} = (X_2, Y_2)$ dann ist $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ dem Seitenmitten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist $\frac{1}{2}(\vec{a})\frac{1}{2}(\vec{b})$. Die Seitenlaenge von $\vec{c}$ ist $\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}$. Die Seitenlaenge von die Seitenmittenvektor ist $\sqrt{(\frac{1}{2}X_1 - \frac{1}{2}X_2)^2 + (\frac{1}{2}Y_1 - \frac{1}{2}Y_2)^2}$. Durch ausklammern sieht man, dass es $\frac{1}{2}\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}$ gleich ist.

b) Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Seiten des Rechteckigesdreiecks. Wenn wir das Origin als eine ecke der Radius des Halbkreises einsetzen, dann ist $\vec{a} = (x_1 - (0), y_1 - (0))$ und $\vec{b} = (, y_1 - y_2)$ (y_2) ist der zweite ecke des Halbkreises. Wenn man das Cosinusgesetz hier zu dem Punkt (x_1, y_1) setzt, dann sieht man, dass jeder Paar von $\vec{a}, \vec{b}$ und (x_1, y_1) dasselbe Grad betrug, also cos(90)=0.

c) Irgendeinem Viereck kann man mit punkten $A(X_1, Y_1), B(X_2, Y_2), C(X_3, Y_3), D(X_4, Y_4)$ und verbindung dazwischen definieren. Wenn man die Seitenmittepunkten von jedem Seite (AB,BC,CD,DA) betrachtet, faellt auf, dass jeweiligen parallel paar von Seitenmittenvektoren durch das Cosinusgesetz von zwei Vektoren (Anfang ein punkt A,B,C oder D, und Ende das Seitenmittenpunkt) die gleiche Laenge und dieselbe Steigung betrug. Zwei Paaren von parellele Seitenmittenvektoren macht ein Parelelogramm.