Rapport de laboratoire

# Sixième laboratoire : représentation des signaux – analyse de Fourier

Roumache Grégoire
Sénéchal Julien
Robert Alexandre
Wallemme Maxime
Kenmeugne Lionel
Didion Charles

Laboratoire de sciences appliquées à l'informatique
Sécurité des systèmes, technologie de l'informatique
Hénallux
Première année, groupe H
Année académique 2019-2020

2 Avril 2020

# 1 Introduction

Pour ce laboratoire de Sciences Appliquées à l'informatique, nous voyons la représentation des signaux et l'analyse de Fourier. Nous commençons ce rapport avec un rappel théorique sur les représentations spectrale et temporelle qui aident à la compréhension de la manipulation pratique où nous verrons quatres types de signaux. Ces différents types de signaux sont les signaux carré, en dent de scie, un *autre signal* et un signal personnel que nous avons pu choisir nous même. Pour ce signal personnel, nous avons choisi un signal triangulaire.

# 2 Rappels théoriques

## 2.1 Représentation spectrale et représentation temporelle

La représentation temporelle d'un signal sonore monte l'évolution de l'intensité du son en fonction du temps. La représentation spectrale d'un son montre la variation de l'intensité du son en fonction de la fréquence sonore. Ces deux types de représentations sont très utilisées dans la partie pratique de ce rapport.

## 2.2 Séries de Fourier

Les séries de Fourier sont utiles pour étudier des fonction périodiques en mathématique. La physique ondulaire se sert donc volontier de cet outil. Une série de Fourier est une la somme pondérée d'une suite de sinusoïdes dont les fréquences sont liées. Cette somme approxime une fonction périodique donnée.

# 3 Manipulation pratique

## 3.1 Signal carré

La série de Fourier d'un signal carré est donné par la série suivante, qui vient de l'énoncé de la manipulation :

$$x(t) = \frac{4E}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + ...\right)$$

Les quatres premiers signaux que nous devons générer sont donc :

1. signal = $\frac{4E}{\pi}\sin\omega t$, amplitude = 0,637, fréquence = 300 Hz
2. signal = $\frac{4E}{\pi}\frac{\sin 3\omega t}{3}$, amplitude = 0,212, fréquence = 900 Hz
3. signal = $\frac{4E}{\pi}\frac{\sin 5\omega t}{5}$, amplitude = 0,127, fréquence = 1500 Hz
4. signal = $\frac{4E}{\pi}\frac{\sin 7\omega t}{7}$, amplitude = 0,091, fréquence = 2100 Hz

**Remarque :** E = 0,5 et la fréquence du signal carré est de 300 Hz.

Comme il était demandé dans la manipulation, nous avons généré les deux premières sinusoïdes. Elles sont représentées sur les figures 1 et 3. Leurs représentation spectrales sont illustrées par les figures 2 et 4.

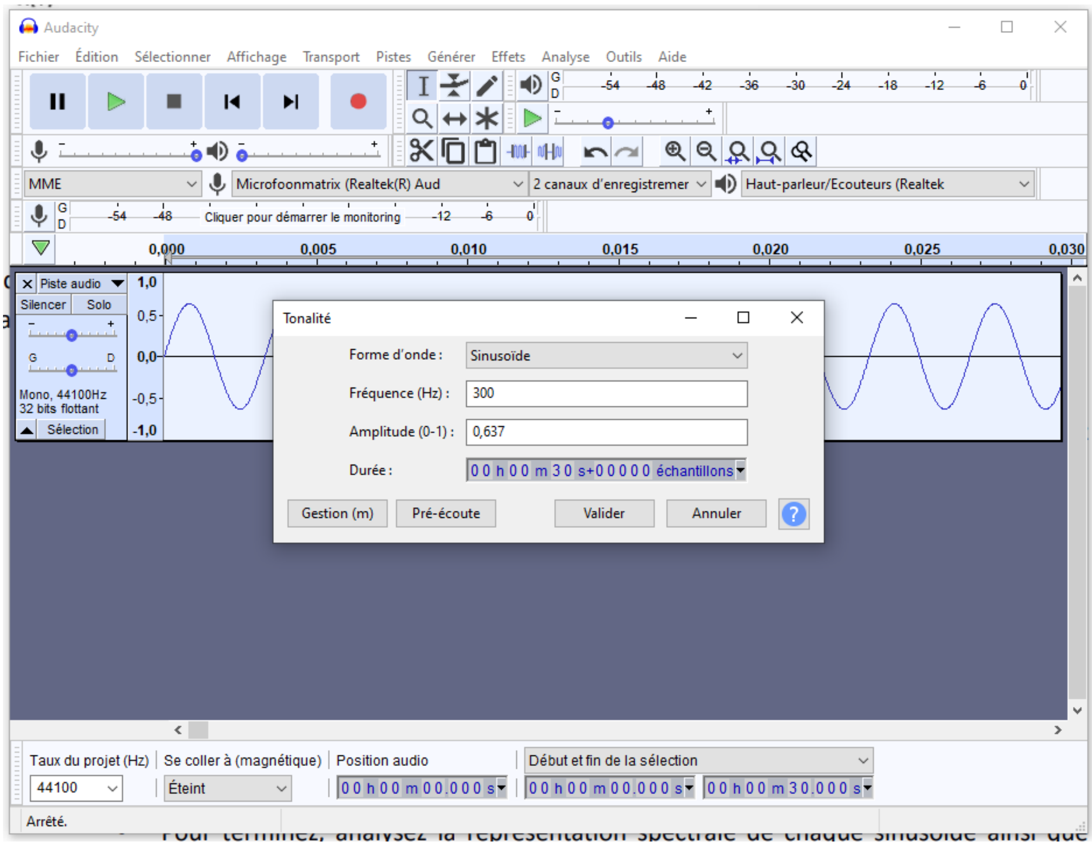


FIGURE 1 – Première sinusoïde du signal carré

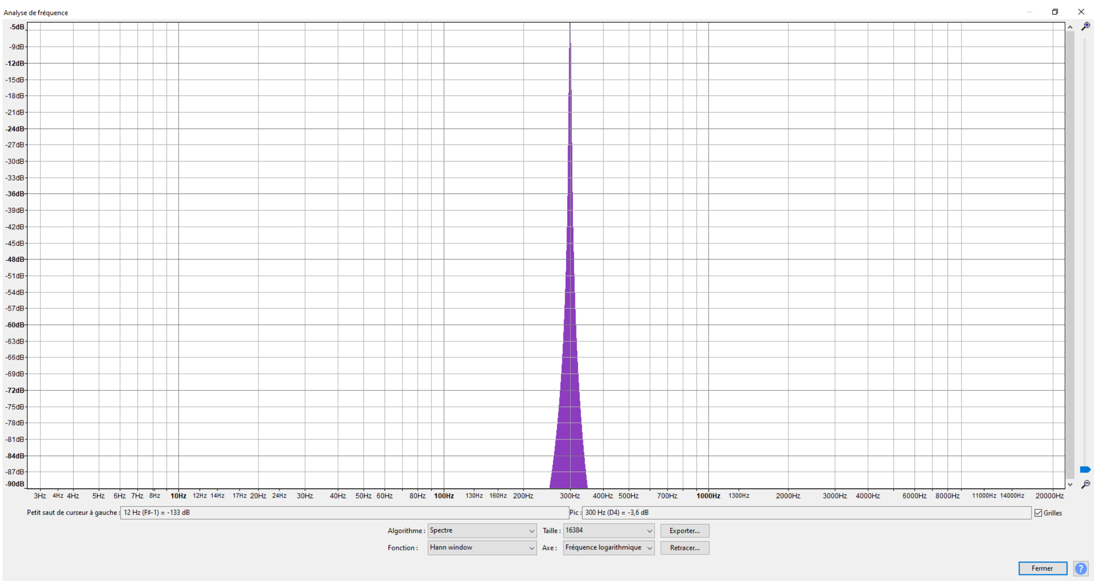


FIGURE 2 – Représentation spectrale de la première sinusoïde du signal carré

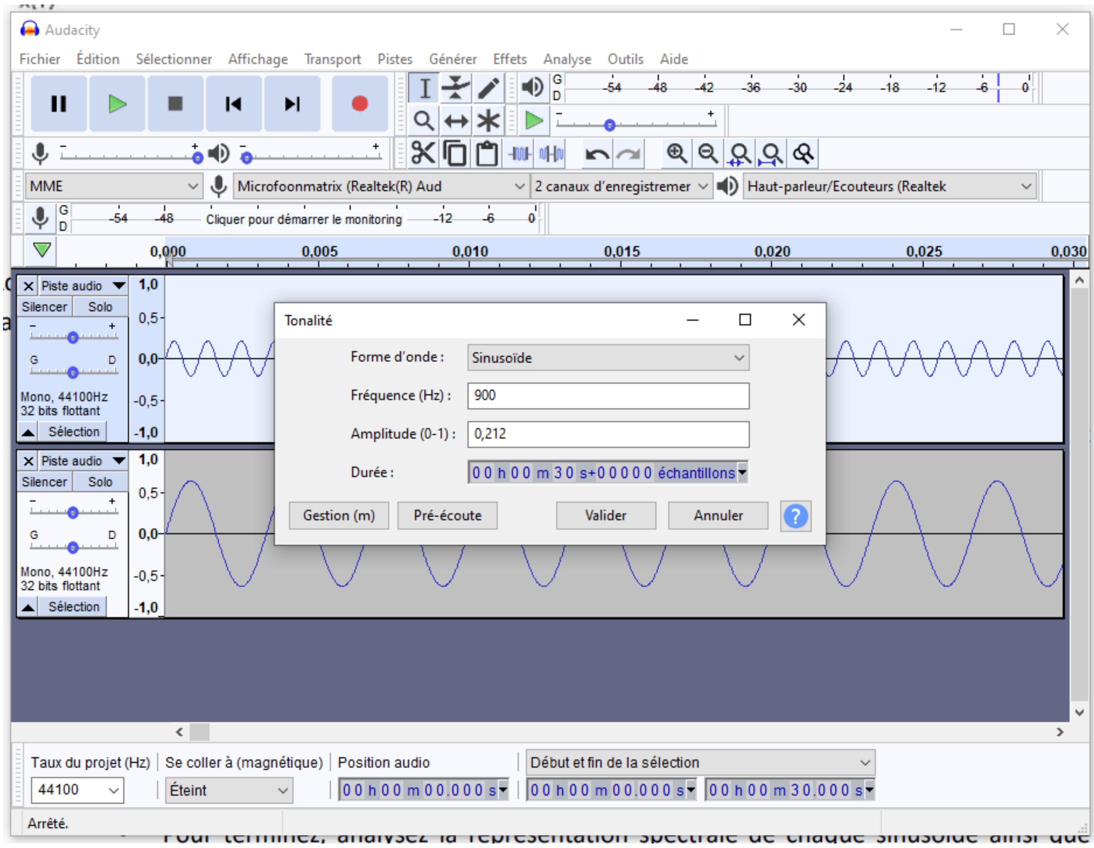


FIGURE 3 – Ajout de la deuxième sinusoïde du signal carré

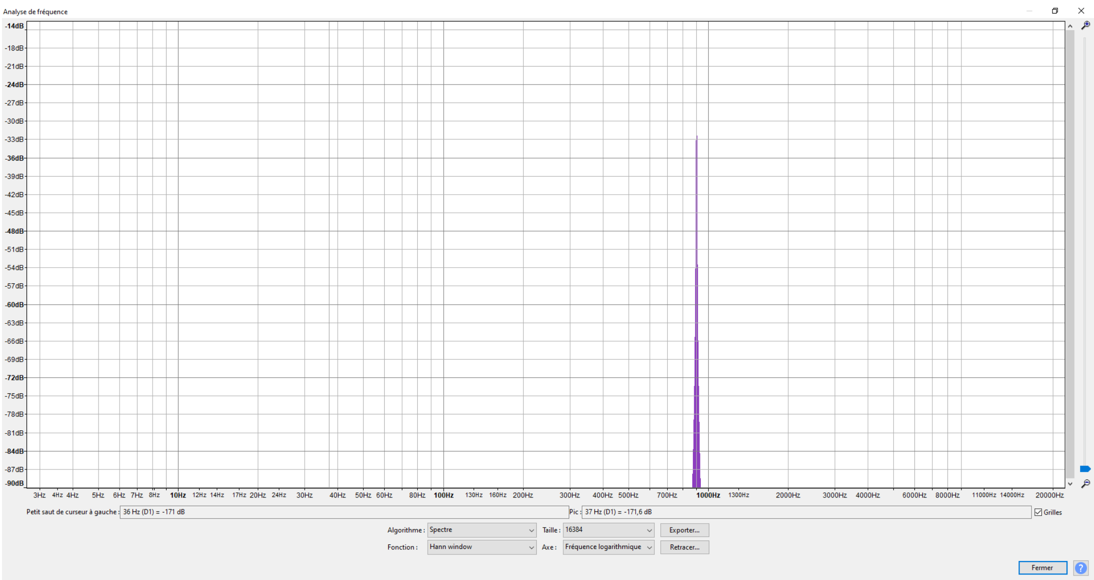


FIGURE 4 – Représentation spectrale de la deuxième sinusoïde du signal carré

Une fois que les deux premières sinusoïdes ont été générées, nous avons utiliser la fonction de mixage pour en générer une nouvelle comme il était demandé dans l'énoncé et l'onde qui en résulte est illustrée par la figure 5 et sa représentation spectrale par la figure 6.

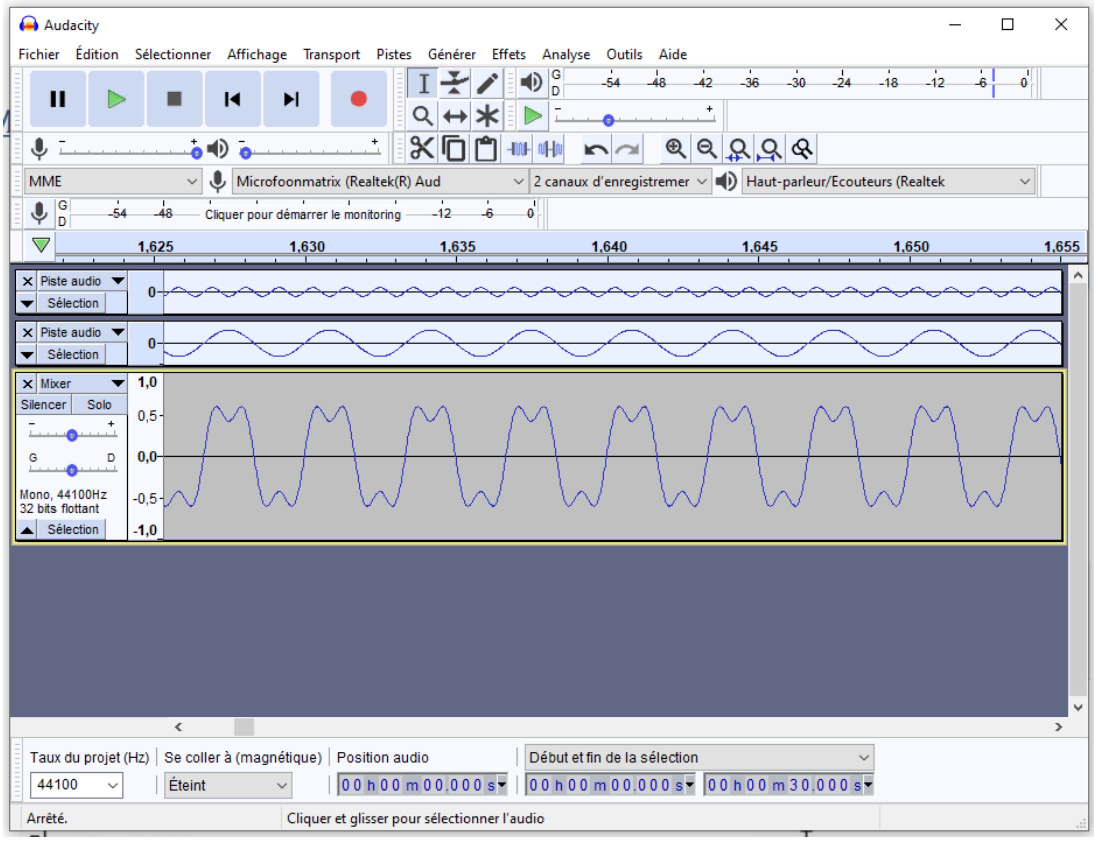


Figure 5 – Génération et visualisation du signal approximant le signal carré (2 sinusoïdes)

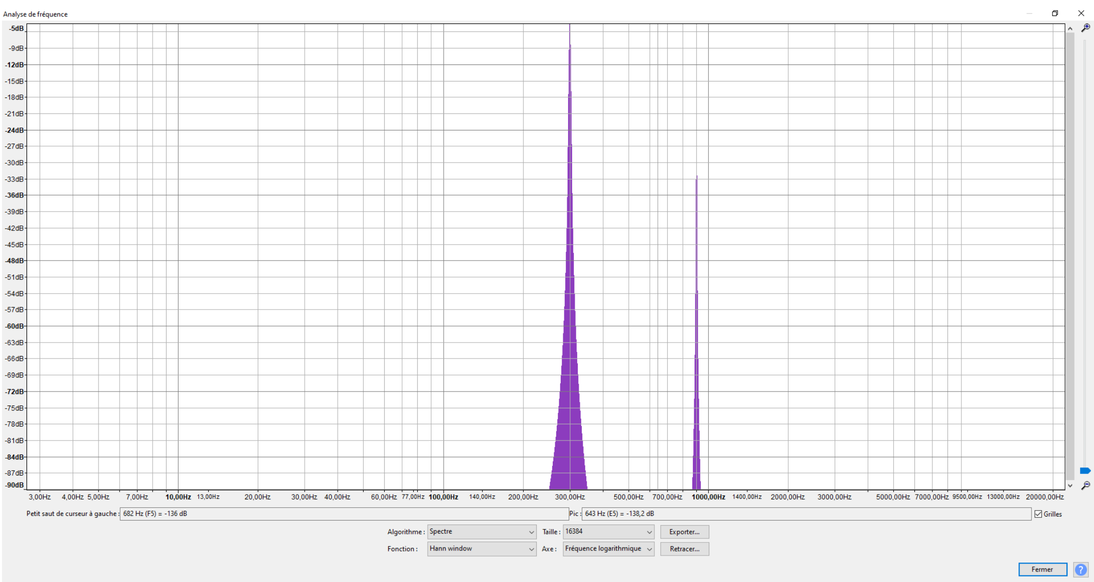

Figure 6 – Représentation spectrale du signal approximant le signal carré (2 sinusoïdes)

Puisque nous avions généré l'approximation du signal carré avec deux sinusoïdes, il ne nous restait qu'à ajouter les deux suivantes et générer une nouvelle approximation du signal carré avec quatre sinusoïdes. Cette nouvelle approximation est représentée par la figure 13 et sa représentation spectrale est donnée par la figure 14.

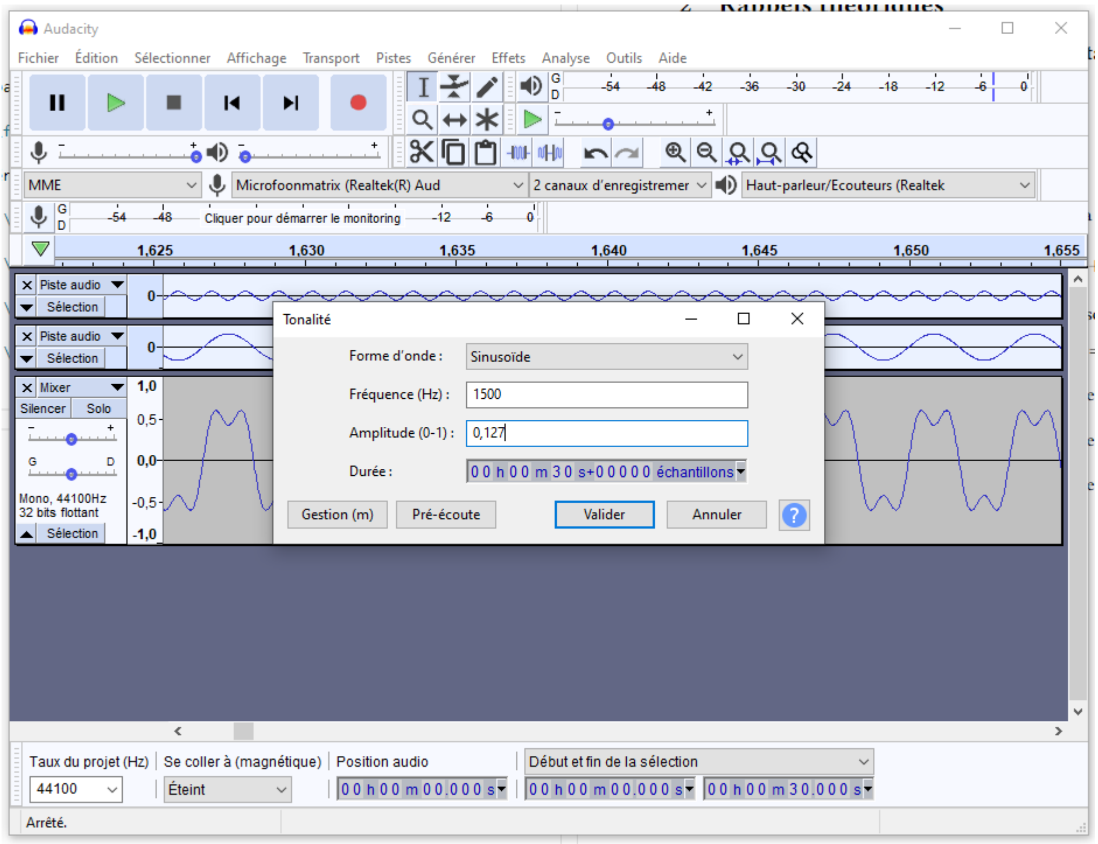


Figure 7 – Ajout de la troisième sinusoïde du signal carré

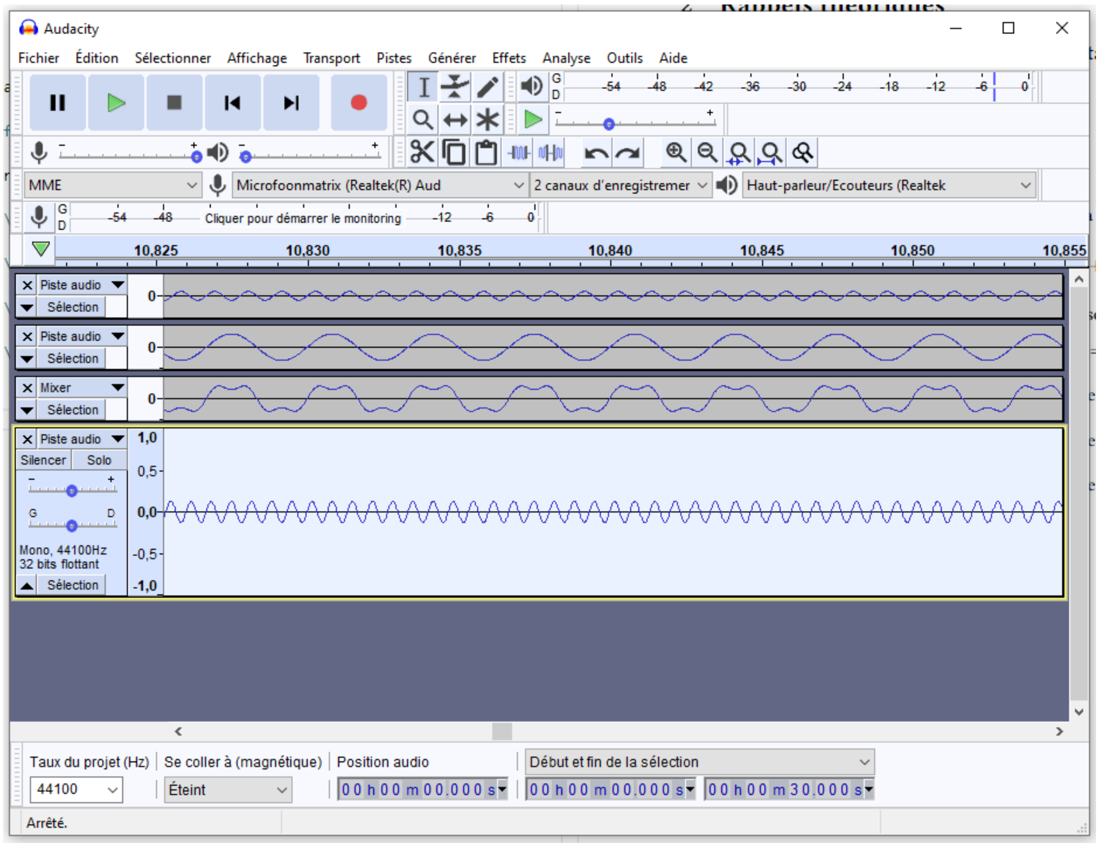


FIGURE 8 – Visualisation de la troisième sinusoïde du signal carré

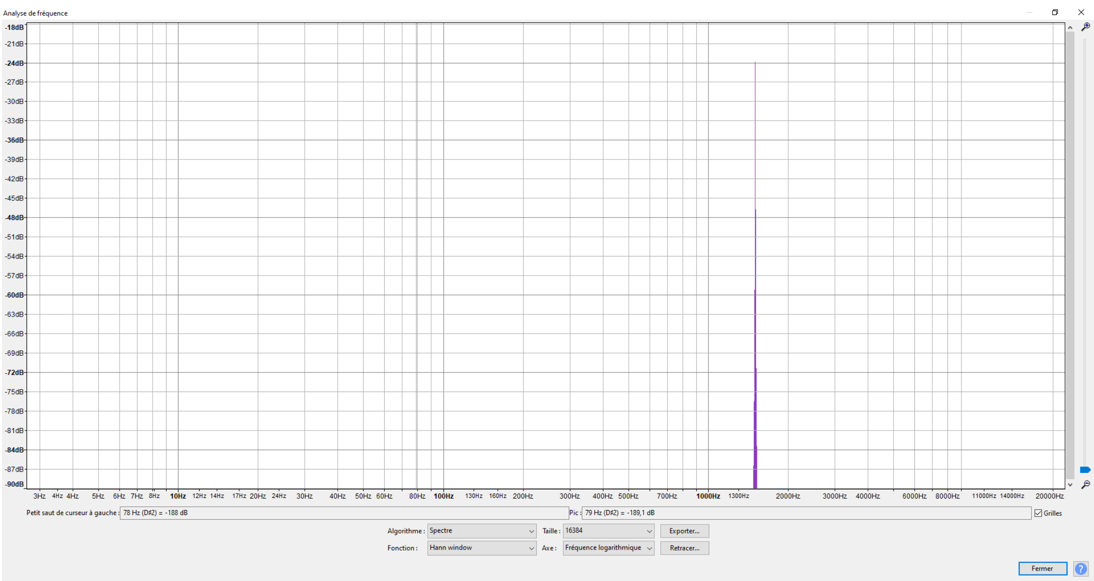

FIGURE 9 – Représentation spectrale de la troisième sinusoïde du signal carré

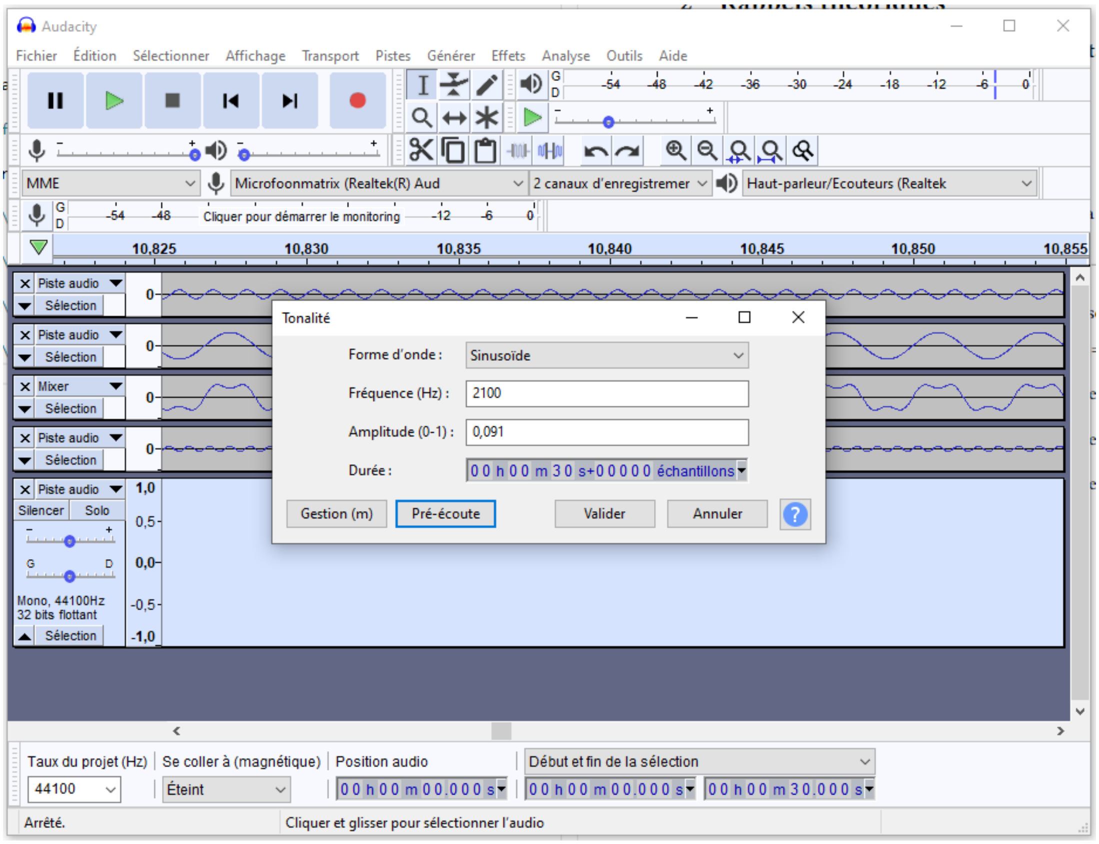


Figure 10 – Ajout de la quatrième sinusoïde du signal carré

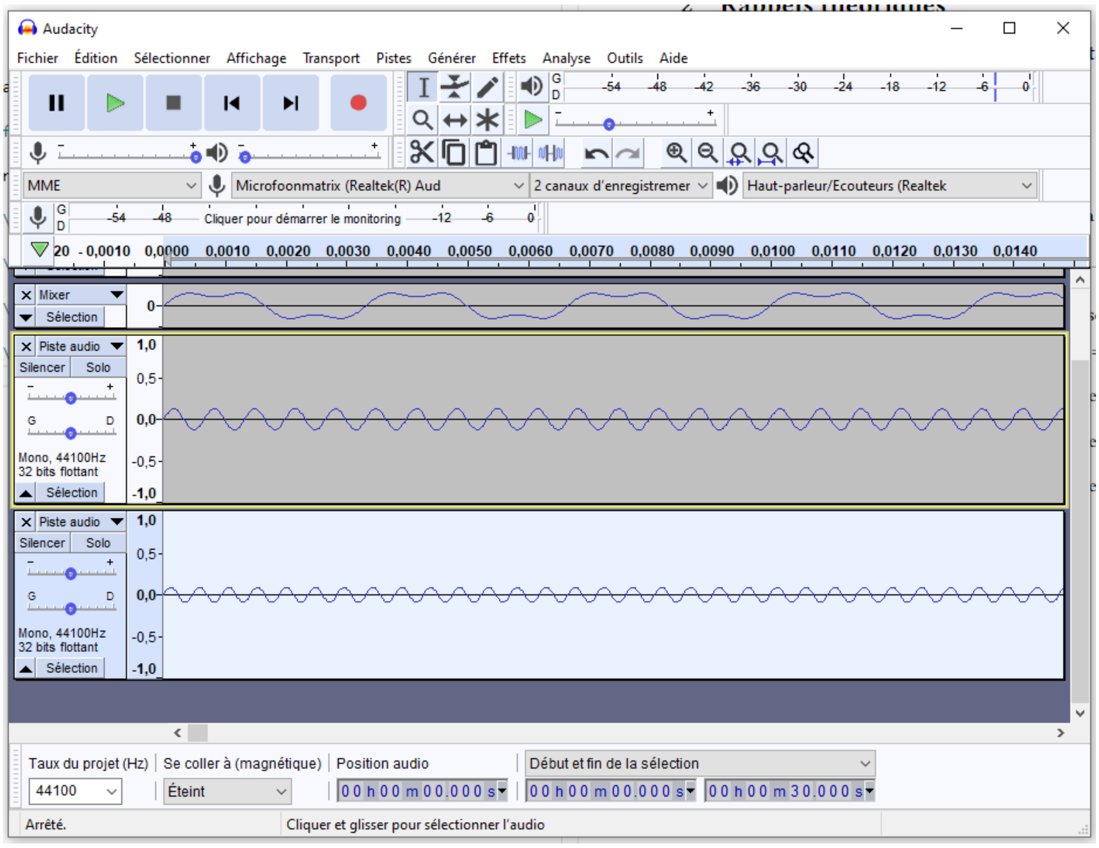

FIGURE 11 – Visualisation de la quatrième sinusoïde du signal carré

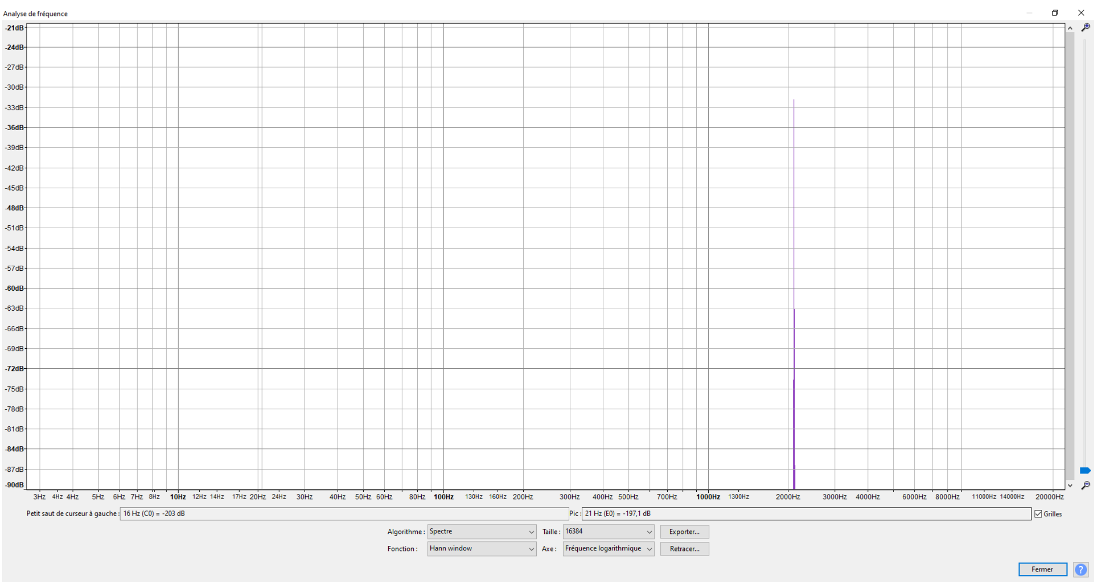

FIGURE 12 – Représentation spectrale de la quatrième sinusoïde du signal carré

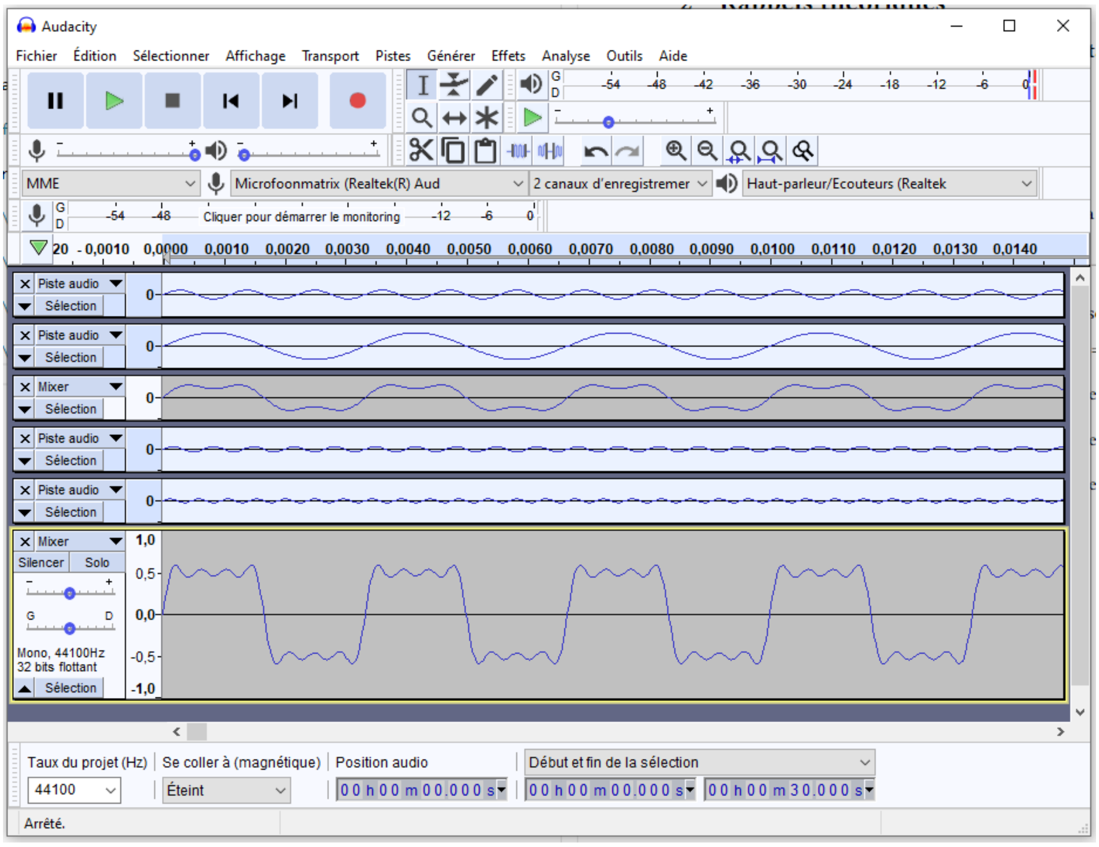


FIGURE 13 – Génération et visualisation du signal approximant le signal carré

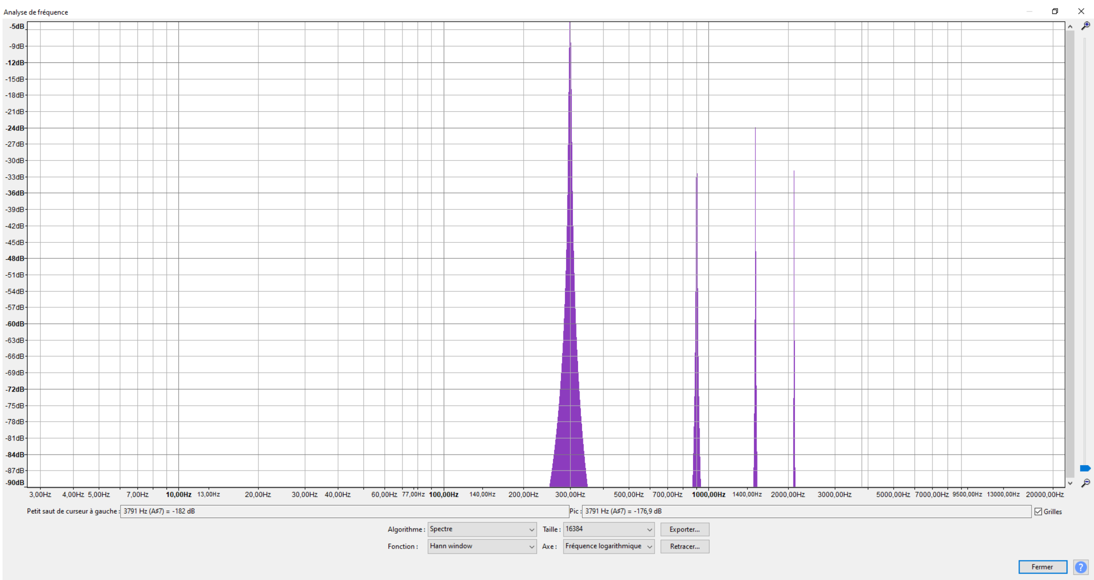

FIGURE 14 – Représentation spectrale du signal approximant le signal carré

Désormais, il ne nous restait plus qu'à comparer avec un "vrai" signal carré généré par le logiciel Audacity directement. C'est ce que nous avons fait sur la figure 15. Le résultat, c'est à dire la représentation temporelle de l'onde est sur la figure 16 et la représentation spectrale de ce signal carré est sur la figure 17. Enfin, nous avons mis en évidence le fréquences des sinusoïdes que nous avons utilisé dans l'approximation du signal carré sur la représentation spectrale du vrai signal carré généré par Audacity sur la figure 18.

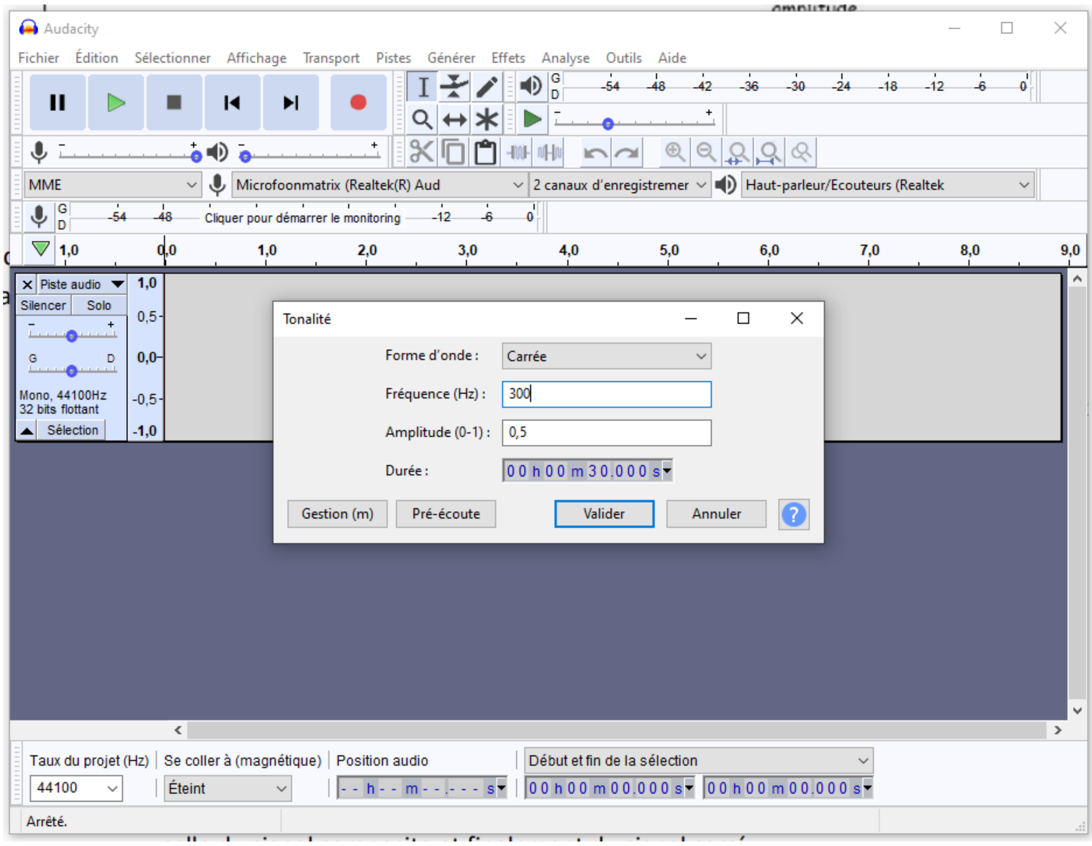


FIGURE 15 – Génération du signal carré

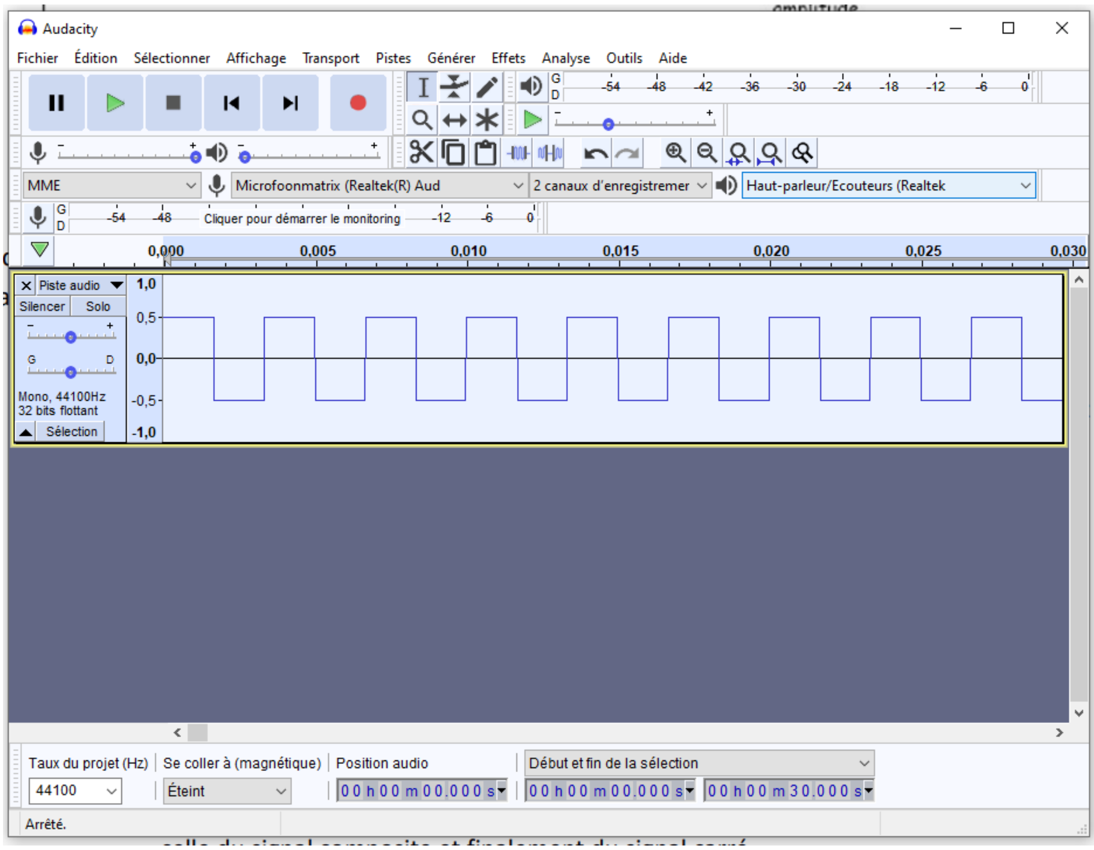


Figure 16 – Visualisation du signal carré

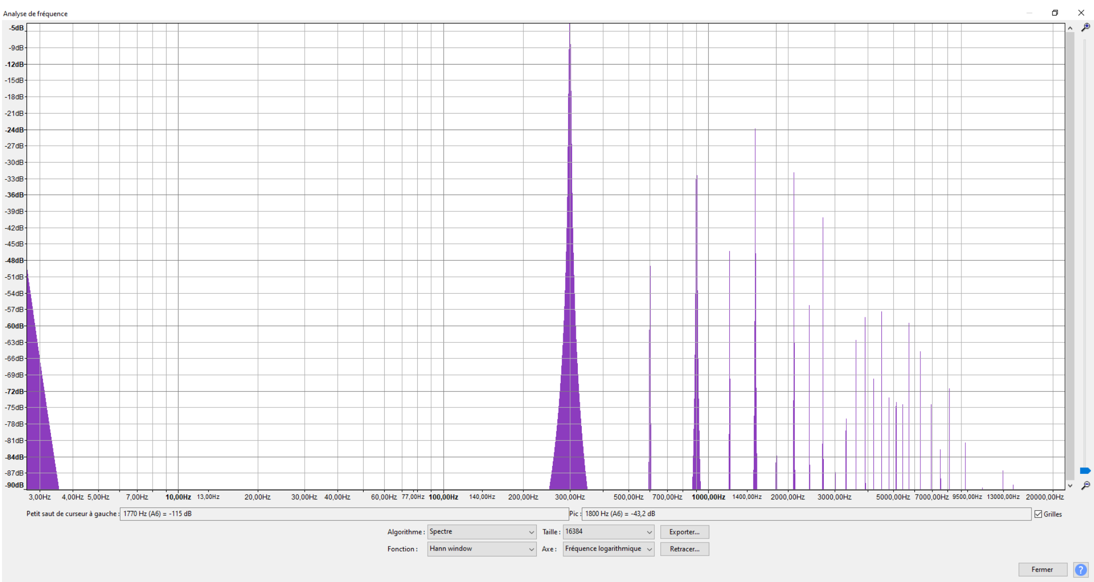


Figure 17 – Représentation spectrale du signal carré

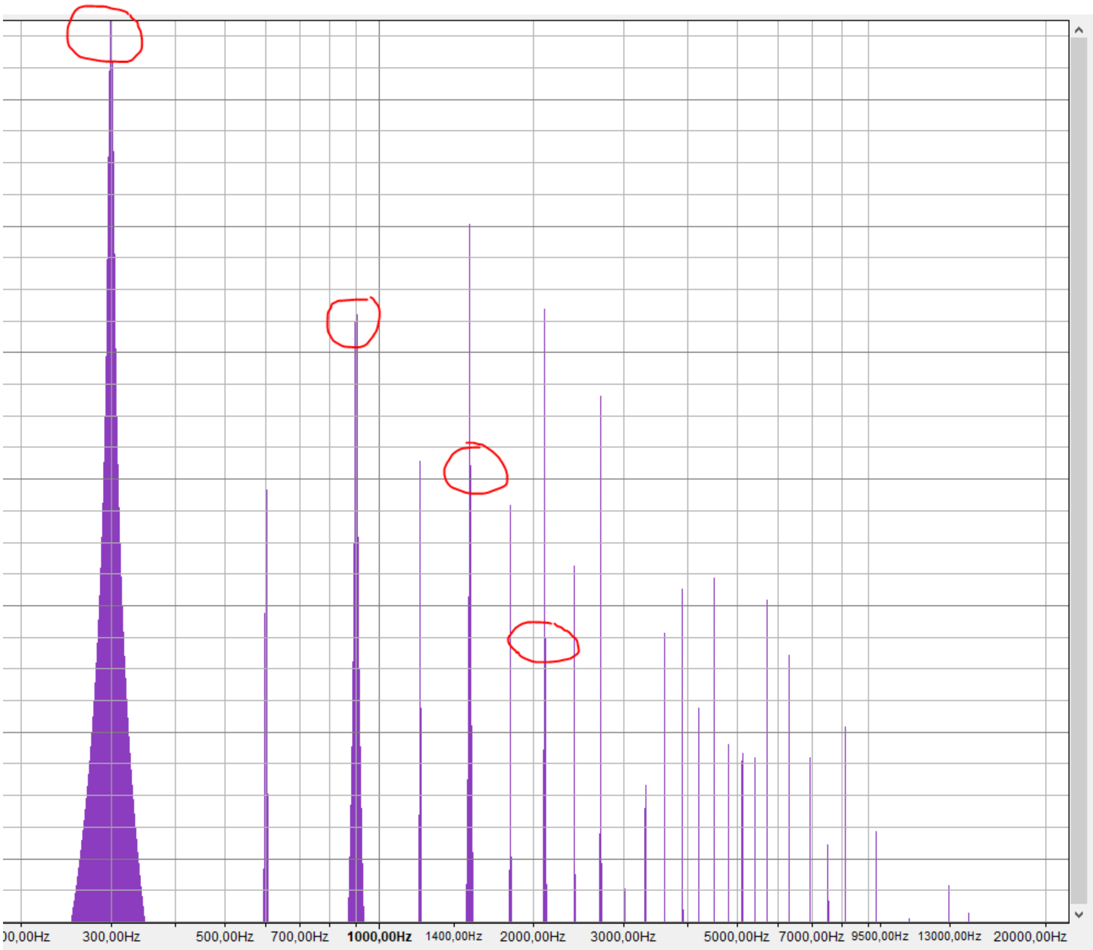


FIGURE 18 – Mise en évidence des fréquences des sinusoïdes sur la représentation spectrale du signal carré

## 3.2 Signal en dent de scie

La série de Fourier d'un signal en dent de scie est donné par la série suivante, qui vient de l'énoncé de la manipulation :

$$x(t) = \frac{2E}{\pi}\left(\sin \omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} - ...\right)$$

Les quatres premiers signaux que nous devons générer sont donc :

1. signal = $+\frac{2E}{\pi}\sin \omega t$, amplitude = 0,509, fréquence = 500 Hz
2. signal = $-\frac{2E}{\pi}\frac{\sin 2\omega t}{2}$, amplitude = 0,255, fréquence = 1000 Hz
3. signal = $+\frac{2E}{\pi}\frac{\sin 3\omega t}{3}$, amplitude = 0,170, fréquence = 1500 Hz
4. signal = $-\frac{2E}{\pi}\frac{\sin 4\omega t}{4}$, amplitude = 0,127, fréquence = 2000 Hz

**Remarque :** E = 0,8 et la fréquence du signal en dent de scie est de 500 Hz.

Cette fois-ci, l'énoncé de la manipulation ne nous demandait pas de regarder le signal en dent de scie *après* avoir généré son approximation. Commençons donc par regarder ce signal que nous avons créé sur la figure 19 et dont la représentation temporelle est illustrée par la figure 20 tandis que sa représentation spectrale est sur la figure 21.

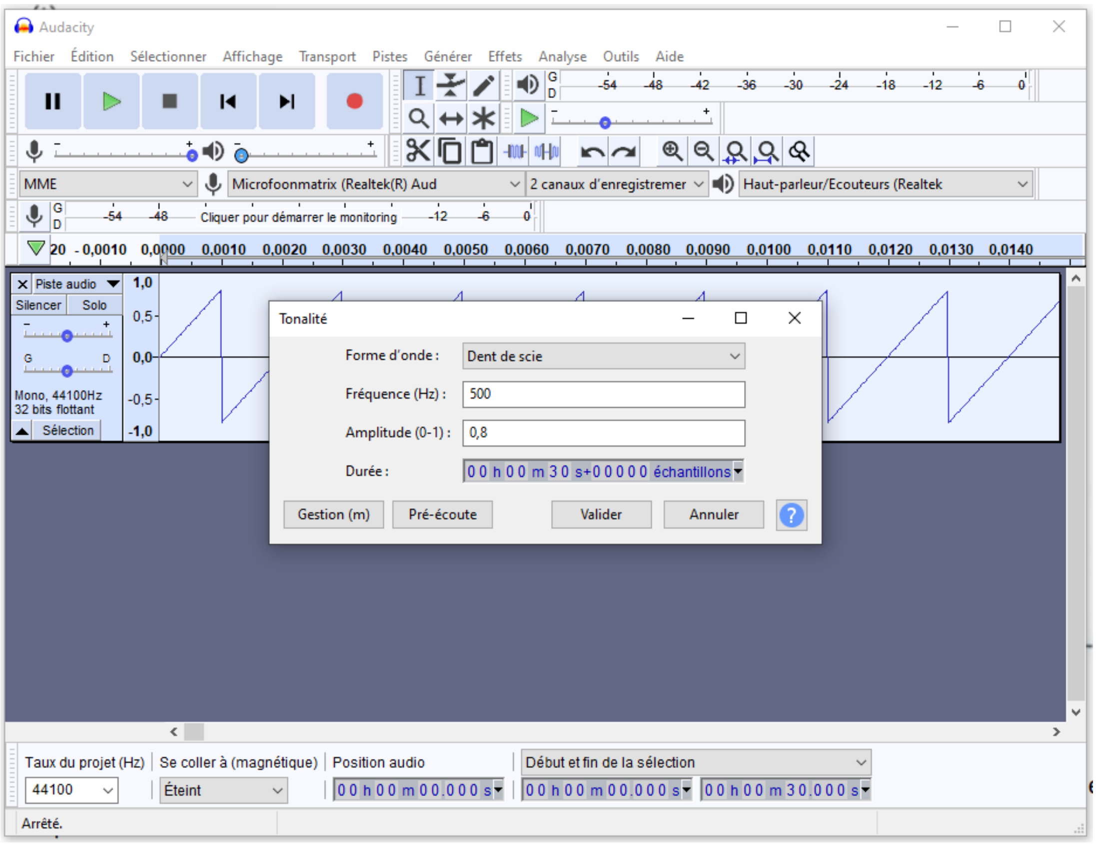


Figure 19 – Génération du signal en dent de scie

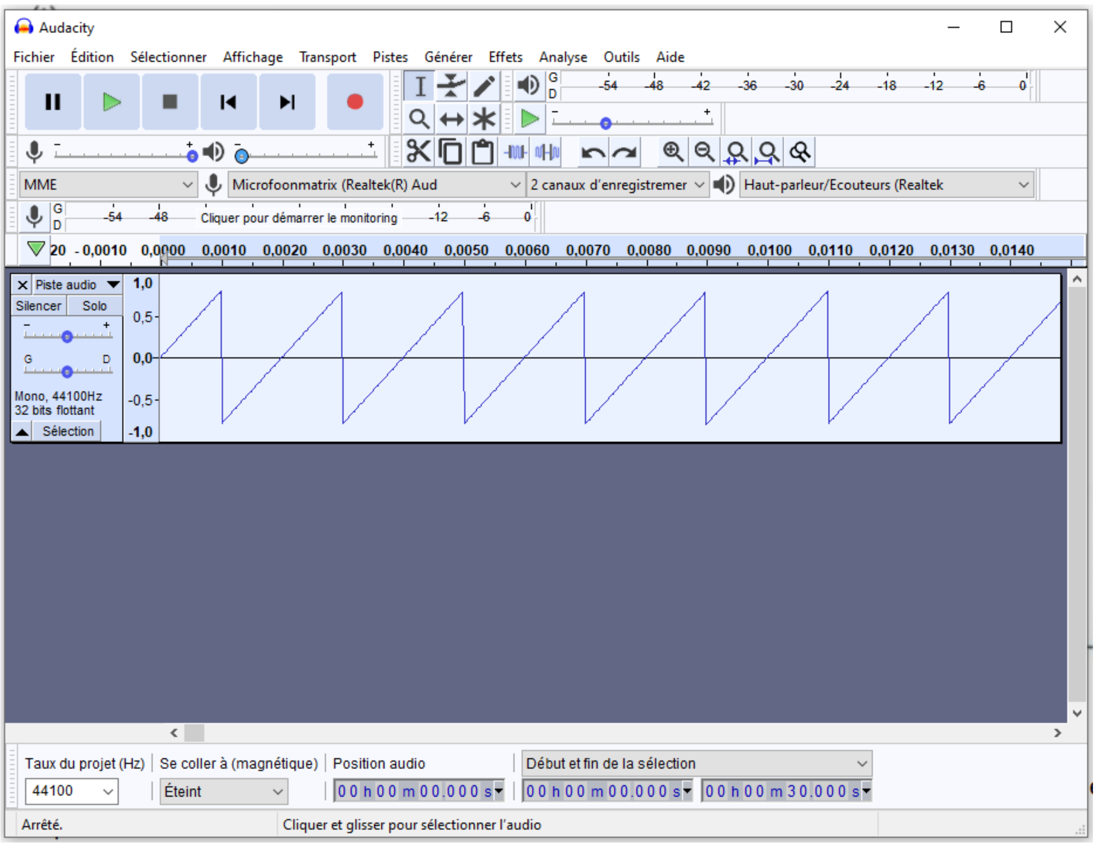


Figure 20 – Représentation temporelle du signal en dent de scie

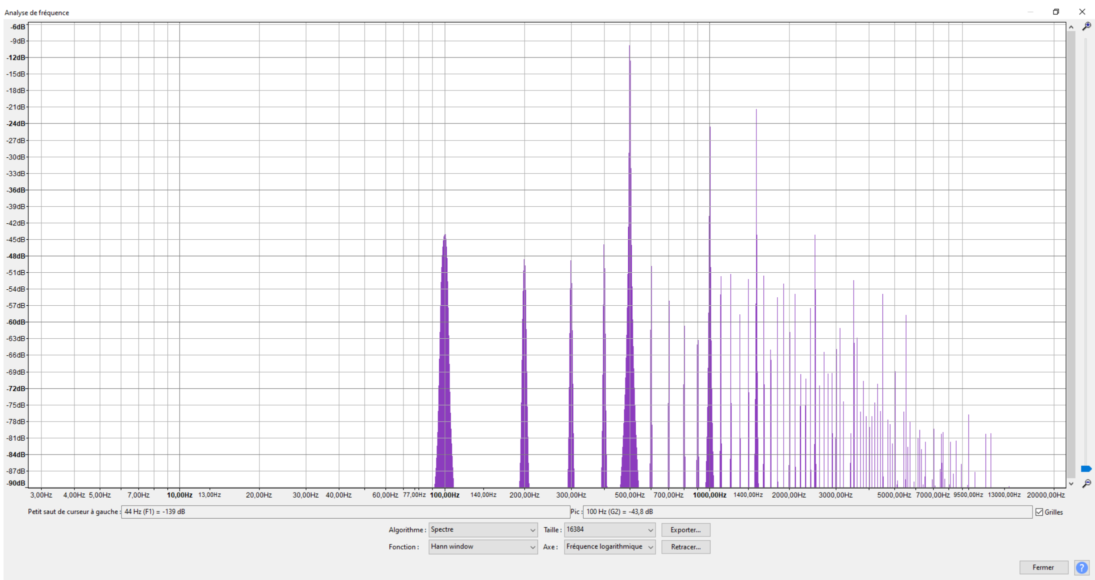

Figure 21 – Représentation spectrale du signal en dent de scie

Nous avons ensuite généré, comme pour l'étude du signal carré, les quatre premières sinusoïdes avant de les mixer avec Audacity et d'observer le résultat sur la figure 22. Le problème est que nous avions oublié d'inverser le signal de la seconde et la quatrième sinusoïdes et c'est pour cela que le signal approximé ne ressemble pas au signal en dent de scie.

Nous avons ensuite apporté la correction au sinusoïdes et le signal approximé (figure 23) ressemblait désormais au vrai signal en dent de scie créé par Audacity.

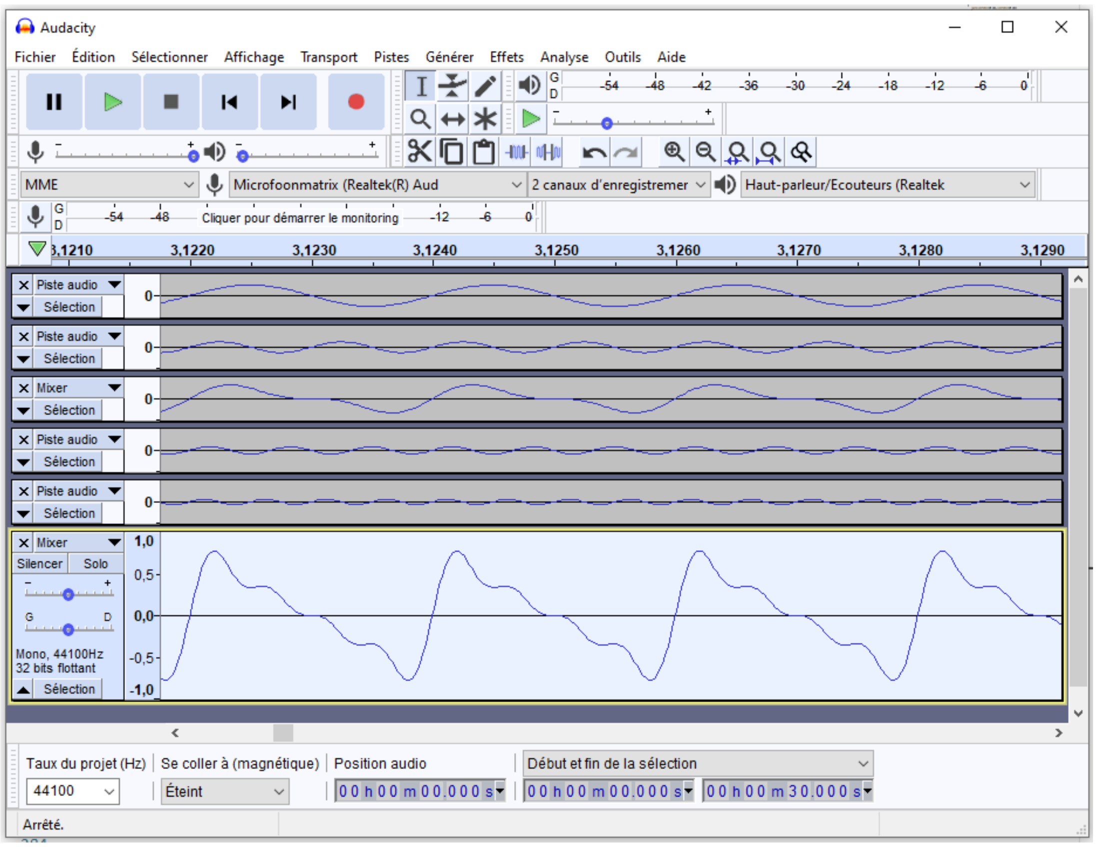


Figure 22 – Mauvaise approximation du signal en dent de scie

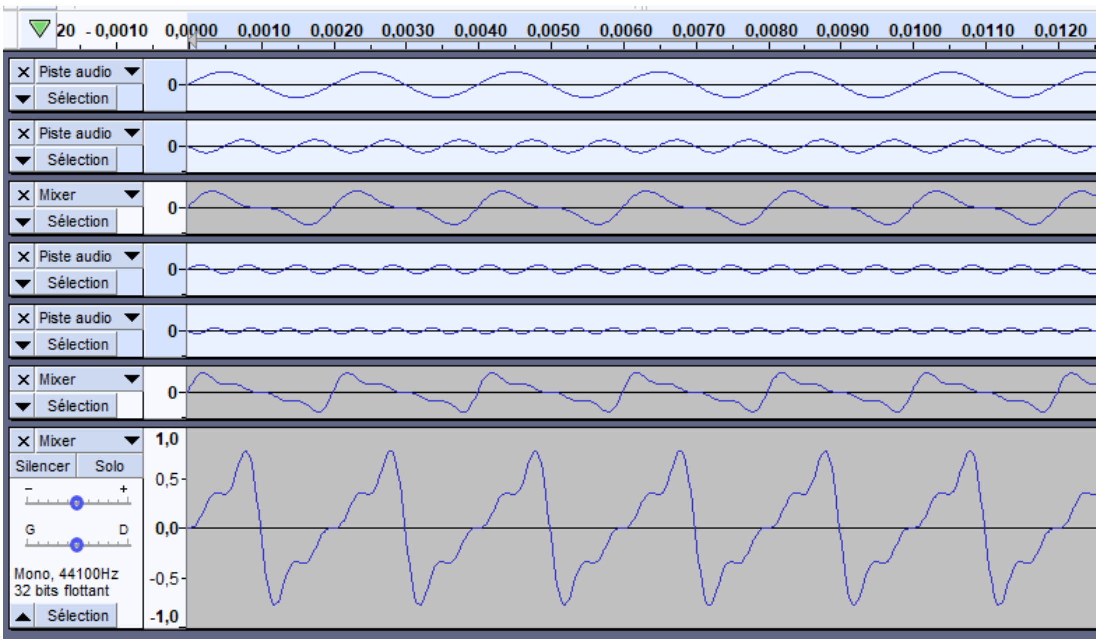


Figure 23 – Bonne approximation du signal en dent de scie

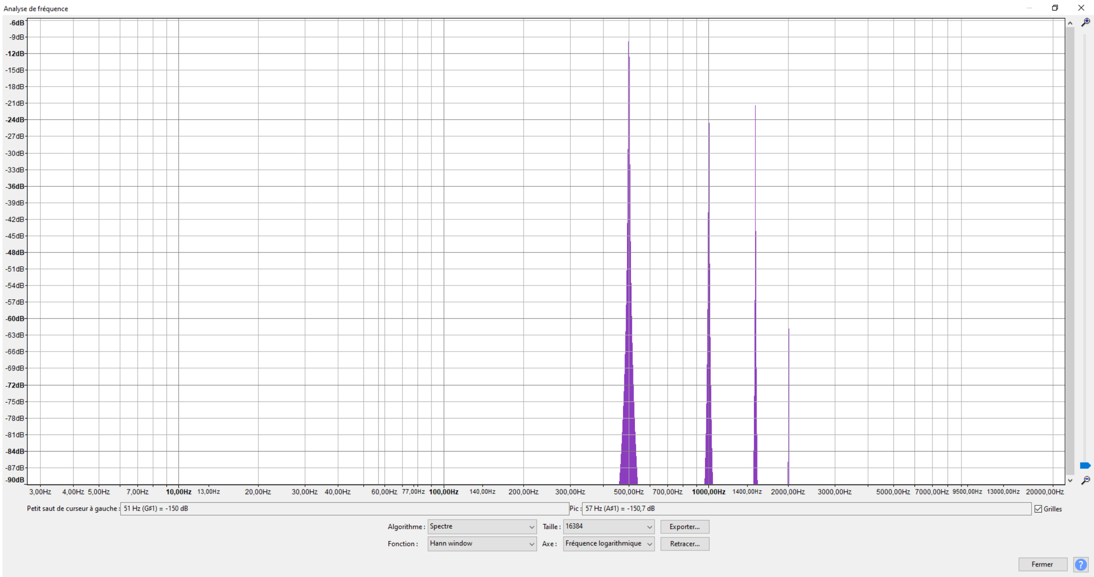


FIGURE 24 – Représentation spectrale de l'approximation du signal en dent de scie

## 3.3 Autre signal

La série de Fourier de ce signal est donné par la série suivante, qui vient de l'énoncé de la manipulation :

$$x(t) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 2x\ t}{1 \times 3} - \frac{\sin 4x\ t}{3 \times 5} + \frac{\sin 6x\ t}{5 \times 7} - \ldots\right)$$

Les huit premiers signaux que nous devons générer sont donc :

1. signal = $+\frac{8}{\pi}\frac{\sin 2x\ t}{1 \times 3}$, amplitude = 0,849, fréquence = 1000 Hz
2. signal = $-\frac{8}{\pi}\frac{\sin 4x\ t}{3 \times 5}$, amplitude = 0,170, fréquence = 2000 Hz
3. signal = $+\frac{8}{\pi}\frac{\sin 6x\ t}{5 \times 7}$, amplitude = 0,073, fréquence = 3000 Hz
4. signal = $-\frac{8}{\pi}\frac{\sin 8x\ t}{7 \times 9}$, amplitude = 0,040, fréquence = 4000 Hz
5. signal = $+\frac{8}{\pi}\frac{\sin 10x\ t}{9 \times 11}$, amplitude = 0,016, fréquence = 5000 Hz
6. signal = $-\frac{8}{\pi}\frac{\sin 12x\ t}{11 \times 13}$, amplitude = 0,011, fréquence = 6000 Hz
7. signal = $+\frac{8}{\pi}\frac{\sin 14x\ t}{13 \times 15}$, amplitude = 0,008, fréquence = 7000 Hz
8. signal = $-\frac{8}{\pi}\frac{\sin 16x\ t}{15 \times 17}$, amplitude = 0,006, fréquence = 8000 Hz

**Remarque :** puisqu'elle n'était pas donnée, nous avons choisis la fréquence 500 Hz pour ce signal.

Pour ce qui est de l'*autre signal*, il était demandé de tester la série de Fourier avec une petite dizaine de signaux sinusoïdaux. Nous avons décidé d'utiliser les huit premiers. Nous avons mixé les sinusoïdes à deux reprises. Une fois avec les quatre premières sinusoïdes (figure 25) et une fois avec les huit premières (figure 26 et figure 27). La représentation spectrale du signal est représentée par la figure 28.

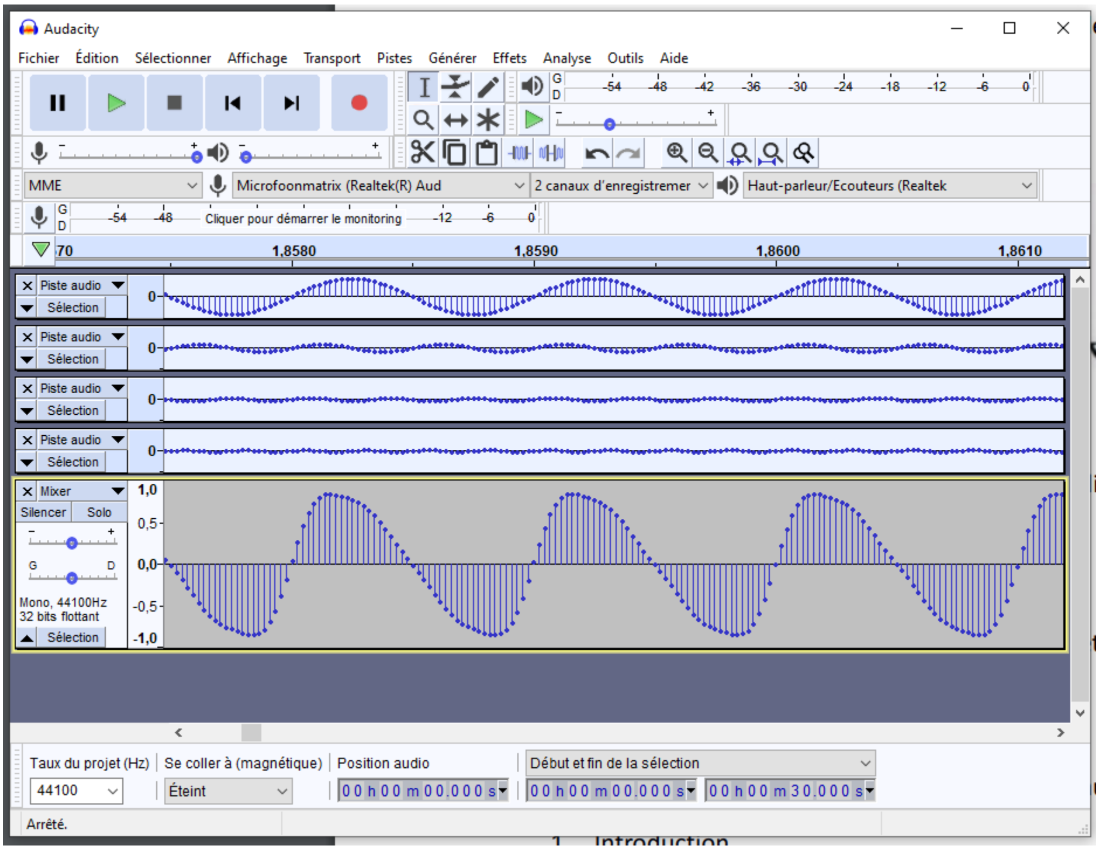


Figure 25 – Approximation de l'*autre signal* (4 sinusoïdes)

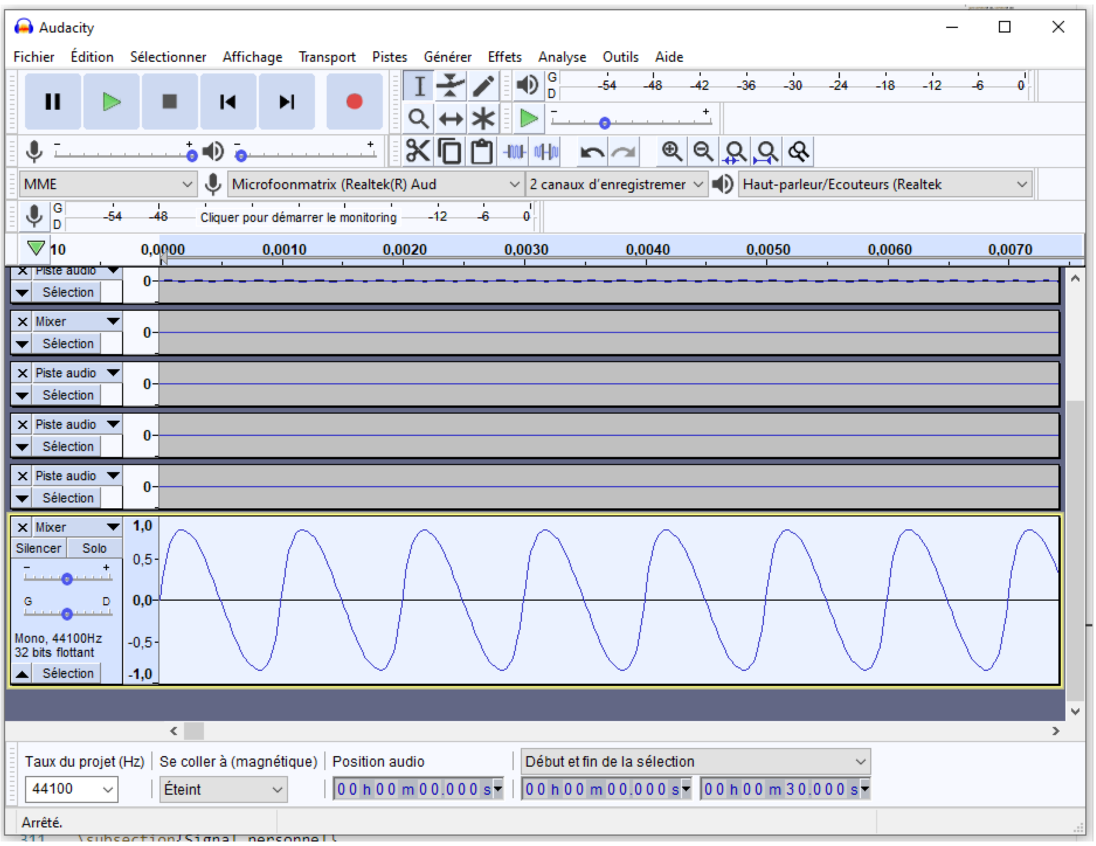


FIGURE 26 – Approximation de l'*autre signal* (8 sinusoïdes)

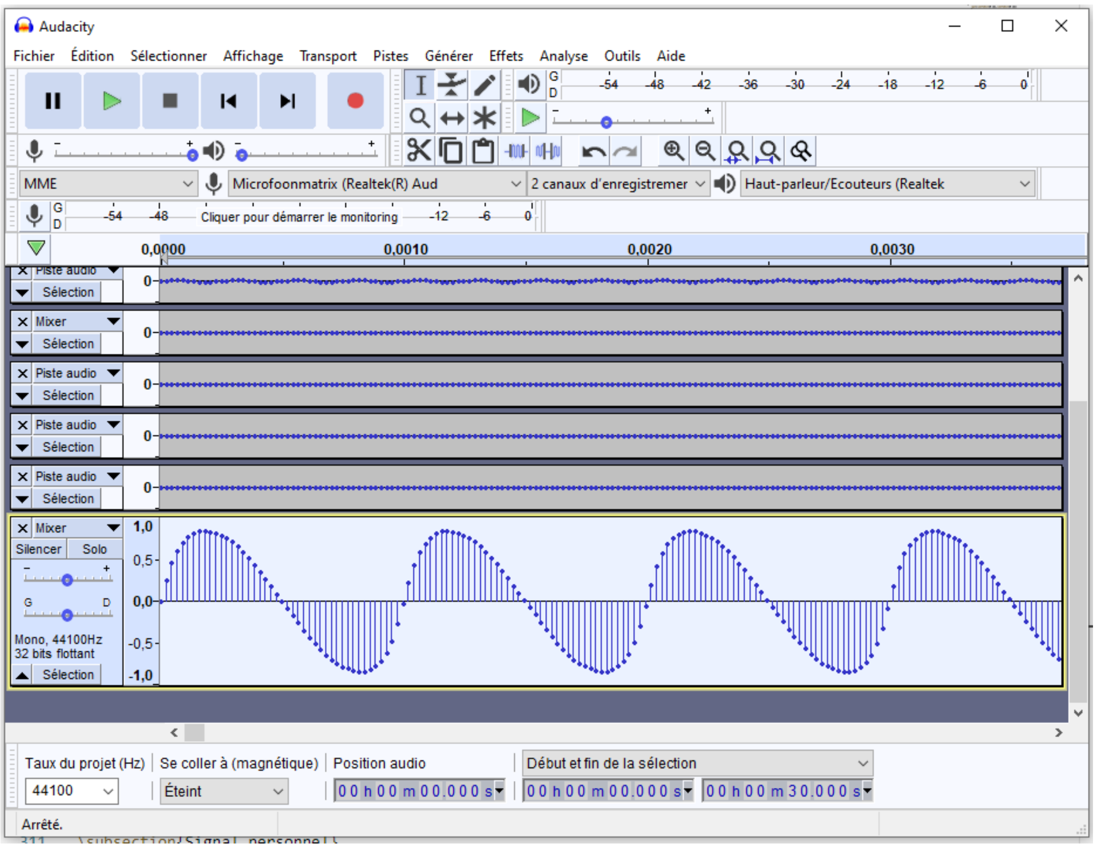


FIGURE 27 – Zoom sur l'approximation de l'*autre signal* (8 sinusoïdes)

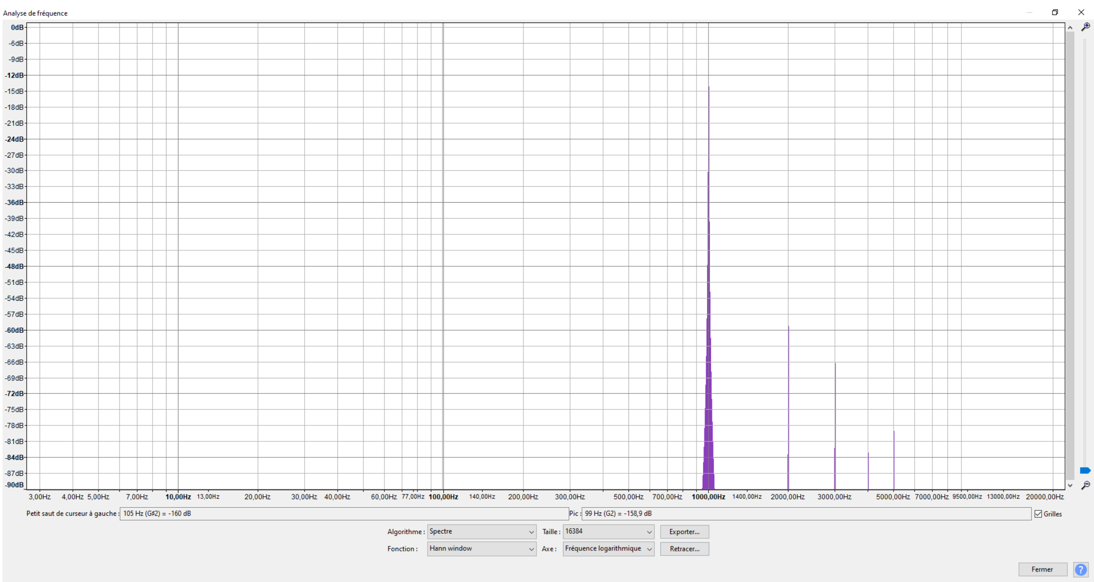

FIGURE 28 – Représentation spectrale de l'approximation de l'*autre signal*

### 3.4 Signal personnel

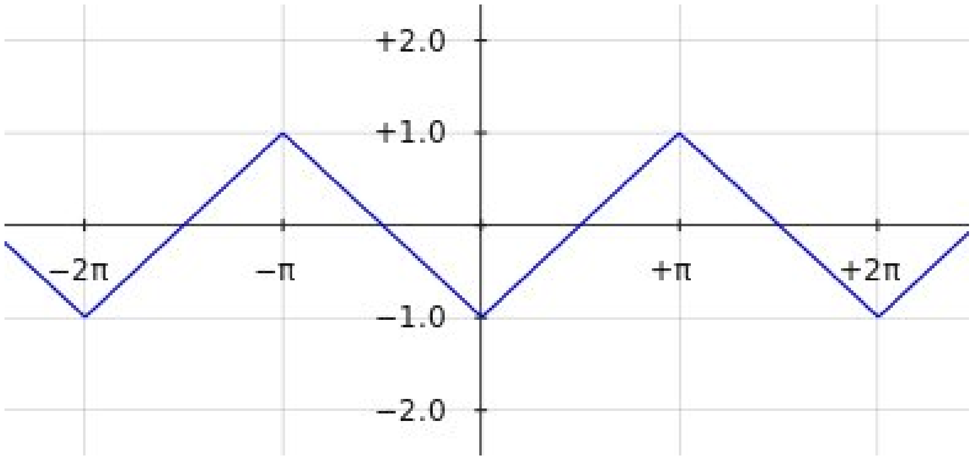


FIGURE 29 – Signal personnel choisis - signal triangulaire

Pour notre signal personnel, nous avons pris un signal triangulaire (figure 29) qui possède la transformée de Fourier suivante :

$$x(t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\sin\big((2k+1)\omega t\big)}{(2k+1)^2}$$
$$= \frac{8}{\pi^2}\left(\sin\omega t - \frac{\sin 3\omega t}{9} + \frac{\sin 5\omega t}{25} - ...\right)$$

Voici les 4 premiers signaux que nous devons générer :

1. signal = $+\frac{8}{\pi^2}\frac{\sin 1\omega t}{1}$, amplitude = 0,810, fréquence = 500 Hz
2. signal = $-\frac{8}{\pi^2}\frac{\sin 3\omega t}{9}$, amplitude = 0,090, fréquence = 1500 Hz
3. signal = $+\frac{8}{\pi^2}\frac{\sin 5\omega t}{25}$, amplitude = 0,032, fréquence = 2500 Hz
4. signal = $-\frac{8}{\pi^2}\frac{\sin 7\omega t}{49}$, amplitude = 0,016, fréquence = 3500 Hz

**Remarque :** nous avons choisis la fréquence 500 Hz pour ce signal.

Pour ce dernier signal, le signal personner, nous avons à nouveau créé quatre sinusoïdes pour les combiner et créer une approximation du signal triangulaire que nous avons choisis. Tout comme pour le signal en dent de scie, nous avions oublié d'inverser certaines sinusoïdes ce qui a donné le cinquième signal sur la figure 30 mais nous l'avons rapidement corrigé pour obtenir le sixième signal de la même figure. La représentation spectrale de ce signal est illustrée par la figure 31.

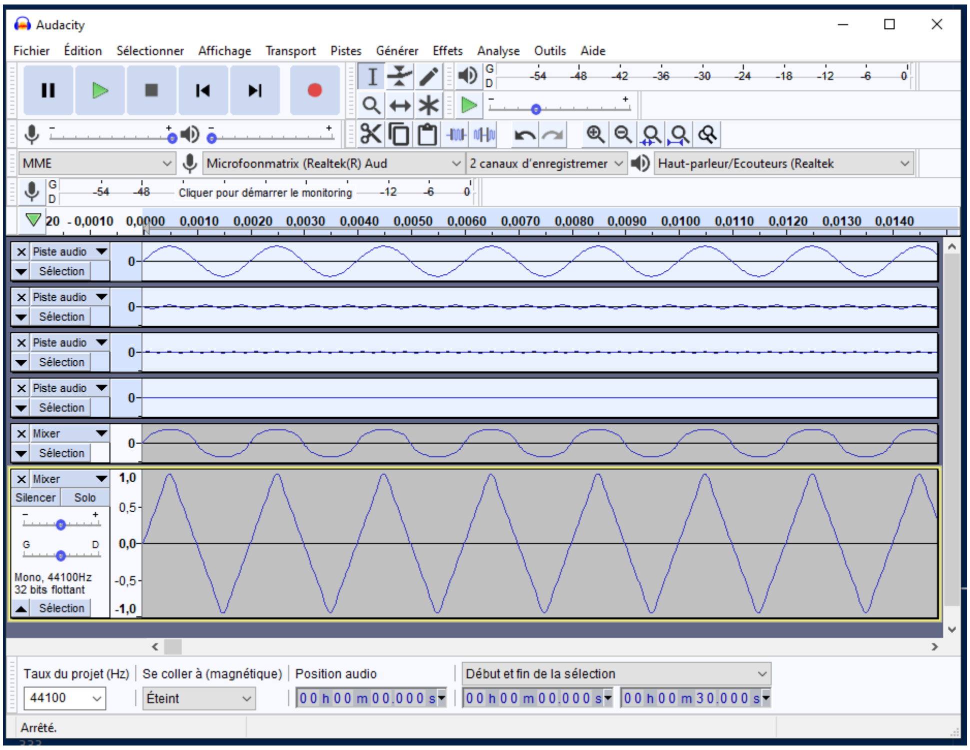


FIGURE 30 – Les quatres sinusoïdes, une mauvaise approximation et une bonne approximation du signal triangulaire

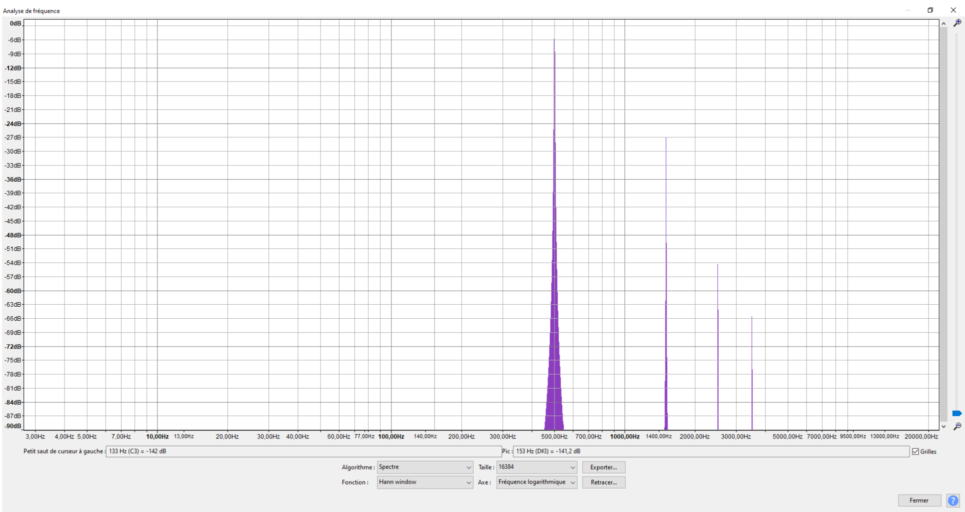

FIGURE 31 – Représentation spectrale de la bonne approximation du signal triangulaire

# 4 Conclusion

Pour conclure ce rapport sur la représentation des signaux et l'analyse de Fourier, nous pouvons dire que nous avons appris que la représentation spectrale est tout aussi utile que la représentation temporelle d'un signal périodique et que chaque signal périodique peut être représenté par les sinusoïdes qui le compose. La somme de ces sinusoïdes est une série de Fourier et elle peut servir à approximer des signaux complexes à l'aide de quelques sinusoïdes simples.

# Table des matières



# Table des figures

## Références

[1] http ://www.silicium628.fr/article_i.php ?id=120
[2] http ://www.cochlea.eu/son/representation-du-son
[3] https ://fr.wikipedia.org/wiki/Signal_triangulaire
[4] https ://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_de_Fourier
[5] https ://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series