Jeux à deux joueurs

Un peu de théorie des jeux

Matteo Wei

Talens

Plan

Qu'est-ce que la théorie des jeux ?

La théorie des jeux est un domaine des mathématiques, dont le but est de modéliser des situations où plusieurs agents rationnels interagissent pour essayer de maximiser leurs intérêts.
Au delà de l'exemple évident des jeux, la théorie des jeux structure la pensée microéconomique moderne, et a des applications en informatique, en biologie...
On s'intéressera de plus plus particulièrement à des jeux finis (nom peu canonique), dans le sens où le nombre d'états possible du jeu est fini, et que la longueur des parties est bornée.

Qu'est-ce que la théorie des jeux ?

On peut distinguer différents types de jeux. Ici, on s'intéressera aux jeux à deux joueurs séquentiels à information parfaite, qui plus est à somme nulle.

Qu'est-ce que cela signifie ?

Jeu séquentiel : les joueurs jouent à tour de rôle.
Jeu à information parfaite : les joueurs connaissent totalement l'état du jeu.
Jeu à somme nulle : tout gain d'un joueur est une perte équivalente pour l'autre joueur.

Exemples

Échecs

Exemples

Échecs

- Jeu séquentiel.

Exemples

Échecs

- Jeu séquentiel.
- Jeu à information parfaite.

Exemples

Échecs

- Jeu séquentiel.
- Jeu à information parfaite.
- Jeu à somme nulle (un joueur gagne si et seulement si l'autre perd).

Exemples

Échecs

- Jeu séquentiel.
- Jeu à information parfaite.
- Jeu à somme nulle (un joueur gagne si et seulement si l'autre perd).
- Jeu infini.

Exemples

Poker

Exemples

Poker

- Jeu séquentiel.

Exemples

Poker

- Jeu séquentiel.
- Jeu à information imparfaite.

Exemples

Poker

- Jeu séquentiel.
- Jeu à information imparfaite.
- Jeu à somme nulle.

Exemples

Poker

- Jeu séquentiel.
- Jeu à information imparfaite.
- Jeu à somme nulle.
- Jeu fini (par manche).

Exemples

Poker

- Jeu séquentiel.
- Jeu à information imparfaite.
- Jeu à somme nulle.
- Jeu fini (par manche).
- Jeu à potentiellement plus de deux joueurs.

Exemples

Bataille

Exemples

Bataille

- Jeu non séquentiel.

Exemples

Bataille

- Jeu non séquentiel.
- Jeu à information imparfaite.

Exemples

Bataille

- Jeu non séquentiel.
- Jeu à information imparfaite.
- Jeu à somme nulle.

Exemples

Bataille

- Jeu non séquentiel.
- Jeu à information imparfaite.
- Jeu à somme nulle.
- Jeu fini.

Exemples

Morpion

Exemples

Morpion

- Jeu séquentiel.

Exemples

Morpion

- Jeu séquentiel.
- Jeu à information parfaite.

Exemples

Morpion

- Jeu séquentiel.
- Jeu à information parfaite.
- Jeu à somme nulle.

Exemples

Morpion

- Jeu séquentiel.
- Jeu à information parfaite.
- Jeu à somme nulle.
- Jeu fini.

Le jeu de Nim

Règles du jeu

Il y a deux joueurs et 13 batons. Les joueurs retirent à tour de rôle entre 1 et 3 bâtons. Le but est de forcer l'autre joueur à prendre le dernier bâton.

Le jeu de Nim

Remarque

Le deuxième joueur a une stratégie gagnante : s'il fait toujours le bon choix de coups (selon ce que joue le joueur 1), il gagne forcément. (Cela dépend du nombre initial de bâtons.)

Formalisation du jeu

Définition

Un jeu à deux joueurs est la donnée :

- D'un ensemble E, l'ensemble des états possibles.
- Cet ensemble est partitionné en deux ensembles E_1 et E_2, correspondant aux états où c'est au tour du joueur i de jouer.
- D'une partie F de E, correspondant aux états finaux du jeu.
- F est partitionné en trois ensembles F_1, F_2 et F_N, qui correspondent aux états finaux où (respectivement) 1 gagne, 2 gagne, et la partie est nulle.

Formalisation du jeu

Définition

- D'un état initial I.
- Pour chaque état $e \in E$, on a un ensemble S_e d'états successeurs, qui ne doivent pas être au même joueur, et qui est vide si et seulement si l'état est final.
- Un coup est le choix d'un successeur e' d'un état e.

Formalisation du jeu

Exemple

Le jeu de Nim peut être formalisé ainsi :

- Les états sont des couples (k, i), où $k \leqslant 13$ est le nombre de bâtons restants, et i est le joueur qui a la main.
- Les états finaux sont les couples $(0, i)$, et i gagne dans ce cas.
- L'état initial est $(13, 1)$.
- On a un coup $(k, i) \to (l, j)$ si $k - 3 \leqslant l < k$ et $i \neq j$.

Représentation

On représentera souvent un jeu par un graphe orienté, dont les sommets sont les états, et où on a une arête orientée $e \to e'$ si et seulement si $e \to e'$ est un coup.
On représentera typiquement qui a la main en coloriant les sommets.

Partie

Définition

Une partie est une suite d'états $(e_k)_{k=0}^{n}$, où $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, telle que :

- Le premier état de la partie est $e_0 = I$.
- Si $n < \infty$, alors e_n est final.
- Pour tout $0 \leqslant k < n$, $e_k \to e_{k+1}$ est un coup valable.

Partie

Définition

Soit $(e_k)_{k=0}^n$ une partie.

- Si $n < \infty$, et $e_n \in F_i$, alors on dit que la partie est gagnante pour le joueur i.
- S'il n'existe pas de tel i, on dit que la partie est un match nul.

Stratégie

Intuitivement, avoir une stratégie revient à savoir quel coup jouer à tel moment pour atteindre un objectif. Il est donc naturel de le formaliser ainsi :

Définition

Une stratégie Str pour le joueur i est la donnée, pour chaque état $e \in E_i$ (où c'est à lui de joueur) non final, d'un coup à jouer $e \to \mathrm{Str}(e) \in S_e$.

Stratégie

Remarque

Si on a une stratégie Str_1 pour le joueur 1, et une autre Str_2 pour le joueur 2, on peut naturellement définir une partie, en posant $e_0 = I$, puis $e_1 = \mathrm{Str}_1(e_0)$, $e_2 = \mathrm{Str}_2(e_1)$, $e_3 = \mathrm{Str}_1(e_2)$, *etc.*, jusqu'à éventuellement atteindre un état final.
Si la partie est gagnante pour le joueur i, on dit que la stratégie Str_i bat la stratégie $\mathrm{Str}_{\neg i}$.

Stratégie gagnante

Définition

On dit qu'une stratégie Str pour un joueur est gagnante si elle bat toutes les stratégies possibles pour l'autre joueur.
On dit qu'elle assure un match nul si elle n'est battue par aucune stratégie de l'autre joueur.

Théorème de Zermelo

Il s'agit (historiquement) du premier théorème formel de théorie des jeux : prouvé en 1912.

Théorème de Zermelo

On considère un jeu à deux joueurs au sens de la formalisation précédente.
Alors soit l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante, soit les deux ont une stratégie qui assure le match nul.

Le cas fini

Dans le cas où le jeu est fini (nombre fini d'états, et longueur des parties bornées), on dispose d'un algorithme pour trouver dans quel cas on est, et calculer les stratégies.
Pour la suite, le joueur 1 est rouge et le joueur 2 vert.

Algorithme du minimax

Algorithme du minimax

Entrée : Un jeu. Sortie : Qui a une stratégie gagnante.

1. Colorier les états finaux de la couleur du joueur qui gagne, ou en blanc s'ils sont nuls.
2. Pour chaque état dont tous les successeurs sont coloriés :
   - S'il est contrôlé par le joueur 1, alors le colorier en rouge si un de ses successeurs est rouge, sinon en blanc si un de ses successeurs est blanc, sinon en vert .
   - Sinon faire l'inverse.
3. Quand I est colorié, répondre l'éventuel joueur correspondant à sa couleur.

Correction

Deux choses à montrer :

1. On finit bien par colorier l'état initial.
2. On colorie un état de la couleur d'un joueur si et seulement il a une stratégie gagnante à partir de cet état.

Le point 1 : tri topologique

Proposition (tri topologique)

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté sans cycles. Alors on peut ordonner les sommets de V en notant $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ de telle sorte que s'il y a une arête $v_i \to v_j$, alors $i < j$.

Remarque

Comme le jeu est fini, le graphe qui le représente est acyclique.

Le point 2

Lemme

Un joueur i a une stratégie gagnante depuis l'état e :

- Si et seulement s'il a une stratégie gagnante à partir d'un des successeurs, s'il contrôle e.
- Si et seulement s'il a une stratégie gagnante depuis tous les successeurs, s'il ne contrôle pas e.

On a fini ?

Question

On dispose d'un algorithme pour trouver une stratégie gagnante. Est-ce que ça veut dire que la théorie des jeux à deux joueurs finis séquentiels à information parfaite est épuisée ?

Pas vraiment...

Remarque

L'algorithme qu'on a produit est nul. Il consiste à tester toutes les possibilités. C'est faisable pour des petits jeux comme le morpion (362880 parties possibles), voire le puissance 4 (quelques trillions d'états), mais difficile pour des jeux plus complexes. Pour le jeu de Hex par exemple il y a quelque chose comme 10^{120} parties possibles.
Ne marche pas non plus pour les jeux infinis.

Exemple d'arguments : vol de stratégie

Remarque

Dans pas mal de cas, on peut dire des choses en plus. Dans le cas de jeux très symétriques par exemple, il est généralement vrai que le joueur 2 ne peut pas avoir de stratégie gagnante. C'est par exemple le cas pour les morpions généralisés, ou de Hex. Pour le dernier, on sait que le joueur 1 a une stratégie gagnante, mais on ne sait pas la calculer.

Le dilemme du prisonnier

Le dilemme du prisonnier est un jeu simple à deux joueurs : on considère deux personnes, arrêtées pour un délit. Ils ont chacun le choix d'avouer ou de nier les faits qui leurs sont reprochés. Si les deux nient, ils écopent d'un an de prison chacun. Si les deux avouent, ils prennent trois ans de prison chacun. Si en revanche seulement l'un des deux nie, alors celui là prend cinq ans et l'autre ressort libre.
Ce n'est pas un jeu à somme nulle, et les joueurs ont intérêt (modulo hypothèses raisonnables) à coopérer.