Séance 1

Bases de théorie des ensembles

Matteo Wei

Du paradis créé pour nous par
Cantor, nul ne nous chassera.

David Hilbert, 1926

Introduction

La notion d'ensemble, dans son sens moderne, est assez tardive. Depuis l'Antiquité, la distinction est surtout faite entre les ensembles finis, qui sont bien compris, et les ensembles infinis, dont l'existence soulève des questions philosophiques, et qui par conséquent sont évités.
Par exemple, Galilée observe qu'il est capable de mettre en correspondance l'ensemble des entiers avec l'ensemble de leurs carrés (au sens moderne, il construit une bijection entre ces deux ensembles), ce qui peut paraître étonnant du point de vue de l'ordre usuel. Cela remet surtout en question le principe que la partie (stricte) est nécessairement strictement plus petite que le tout : Galilée en déduit qu'il ne peut être appliqué à des ensembles infinis, et par conséquent qu'ils ne peuvent former des fondations solides sur lesquelles se reposer.
Le développement de l'analyse aux XVIIIe et XIXe siècle pousse cependant les mathématiciens et philosophes à s'interroger de plus en plus sur la place de l'infini. C'est dans ce contexte que Georg Cantor, un mathématicien allemand, développe dans les années 1870-1880 sa théorie des ensemble. Il prend une approche radicalement nouvelle, en considérant les ensembles infinis comme des objets comme les autres, à manipuler. Sa grande intuition est qu'il est possible de définir une notion non triviale de cardinal (de « nombre d'éléments ») qui s'étend sur les ensembles infinis, à travers la mise en correspondance des ensembles par des bijections.
Son approche est cependant grandement critiquée par certains mathématiciens comme Kronecker, qui nient l'existence des ensembles infinis. S'ajoute à cela un certain nombre de contradictions dans la théorie naïve, que Cantor arrive à régler avec des preuves informelles. Cependant ses explications ne convainquent pas tous, et le besoin d'une

formalisation de la théorie se fait ressentir. Zermelo propose une première axiomatisation en 1908, complétée dans les années 1920 par Fraenkel et Skolem. Ce système, appelé ZF ou ZFC (pour Zermelo-Fraenkel, ou Zermelo-Fraenkel-choix selon qu'on lui rajoute ou non un axiome appelé axiome du choix), est toujours celui qui est largement utilisé par les mathématiciens aujourd'hui.
La théorie des ensembles s'est avérée déterminante pour la suite de l'évolution des mathématiques, notamment parce qu'elle permet de formaliser dans son langage la totalité des mathématiques, et ainsi de présenter réellement une théorie unifiée des mathématiques. Ainsi, la géométrie peut être reformulée en l'étude de l'action de certaines fonctions « préservant la structure de l'espace » sur certaines de ses parties particulières. Au delà de ça, les notions développées par la théorie des ensembles, et en particulier celle de dénombrabilité, sont essentielles dans les mathématiques développées aux XXe siècle, notamment en topologie, en théorie des probabilités ou encore dans l'analyse moderne.
Le but de ce cours est de présenter une version naïve de la théorie des ensembles ; on ne s'intéressera donc pas aux axiomes. Il s'agit de toutes façons du cadre que manipulent la plupart des mathématiciens qui ne sont ni théoriciens des ensembles, ni logiciens.

1 Ensembles

1.1 Définitions

1.1.1 Ensembles, appartenance, inclusion

Définition. Un *ensemble* est une collection d'objets mathématiques.

On verra plus tard qu'un ensemble ne peut pas être non plus n'importe quelle collection d'objets mathématiques.

Définition. Soit x un objet et E un ensemble. On note $x \in E$ si x appartient à E, et $x \notin E$ sinon. Les y tels que $y \in E$ sont appelés les *éléments* de E.

Remarque. *Il est important de noter qu'il n'y a pas de notion d'ordre dans un ensemble : la seule question auquel peut répondre un ensemble, étant donné un élément, est si cet élément lui appartient ou non.*

Remarque. *Les éléments d'un ensemble peuvent très bien être des ensembles ; en fait, dans ZFC, tous les objets sont des ensembles. Il est notamment possible de construire tous les ensembles habituels à partir des axiomes (qui supposent quand même l'existence des entiers naturels).*

Définition. Soit E et F deux ensembles. On dit que E *est inclus* dans F, et on note $E \subseteq F$, si tout élément de E est élément de F.

Méthode (Comment prouver qu'un ensemble est inclus dans un autre ?)**.** Pour montrer que l'ensemble E est inclus dans l'ensemble F, on invoque un élément quelconque de E, puis on montre qu'il est un élément de F. Ainsi, la preuve aura la forme suivante :
Soit $x \in E$.

[Arguments], donc $x \in F$.
On en déduit que $E \subseteq F$.

Proposition 1 (axiome d'extensionnalité)**.** *Soit E et F deux ensembles. Si $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$, alors $E = F$.*

Ainsi, deux ensembles sont égaux si, et seulement si, ils ont exactement les mêmes éléments.

Méthode (Comment prouver que deux ensembles sont égaux ?)**.** On procède par *double inclusion* : pour montrer que les ensembles E et F sont égaux, on montre $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$. Ainsi, une preuve aura cette forme :

Soit $x \in E$.
[Arguments], donc $x \in F$.
Donc $E \subseteq F$.
Soit $x \in F$.
[Arguments], donc $x \in E$.
Donc $F \subseteq E$.
Il s'ensuit que $E = F$.

1.1.2 Méthodes de définition d'un ensemble

On distingue plusieurs manières de construire des ensembles.

Proposition 2 (Définition *in extenso*)**.** *On peut définir un ensemble* in extenso*, en écrivant ses éléments entre accolades.*

Proposition 3 (Ensemble vide)**.** *Il existe un unique ensemble qui n'a aucun élément. On l'appelle* ensemble vide *et on le note $\varnothing$.*

Preuve (proposition 3). L'ensemble $\{\}$ n'a aucun élément. Notons le $\varnothing$.
Reste à prouver que c'est le seul à vérifier cette propriété. Soit donc E un ensemble qui n'a aucun élément. Tout élément de E est dans $\varnothing$ (comme E n'a pas d'éléments, c'est immédiat). Donc $E \subseteq \varnothing$. En échangeant $\varnothing$ et E, qui jouent des rôles symétriques, on obtient l'inclusion réciproque, puis $E = \varnothing$.

Proposition 4 (Schéma d'axiomes de compréhension)**.** *Soit E un ensemble et P une propriété. On peut définir, par* compréhension*, l'ensemble $\{\, x \in E \mid P(x) \,\}$ des éléments de E qui vérifient P.*

Remarque. *Il est important de noter qu'on définit un ensemble par compréhension par rapport à un ensemble déjà défini. Les premières versions de la théorie de Cantor utilisaient un principe plus fort, dit de* compréhension non restreinte *: si P est une propriété, alors on peut considérer l'ensemble $\{\, x \mid P(x) \,\}$ des objets qui la vérifient.*
Malheureusement, ce principe rend la théorie contradictoire, car il permet de construire un ensemble de tous les ensembles $\Omega = \{\, x \mid x = x \,\}$. On prouvera plus tard que l'existence d'un tel ensemble soulève une contradiction.

Proposition 5 (Définition par paramétrage)**.** *Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction. On peut définir, par* paramétrage*, l'ensemble $\{\, f(x) \mid x \in E \,\}$ des images des éléments de E par f.*

Exemples.

- Soit x un objet. On peut considérer le *singleton* $\{x\}$, dont x est le seul élément.
- Soit x et y deux objets distincts. On peut considérer la *paire* $\{x, y\}$, dont x et y sont les deux seuls éléments.
- $\mathbb{N}^* = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 1 \,\} = \{\, n + 1 \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.
  En effet, un entier naturel n est non nul si, et seulement si, il est plus grand que 1, ce qui est le cas si, et seulement si, $n - 1 \in \mathbb{N}$.
- $\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \,\}$ est le disque de rayon 1, de centre $(0, 0)$.
  En effet, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par théorème de Pythagore, le carré de sa distance à $(0, 0)$ est égal à $x^2 + y^2$. Ainsi, il est dans le disque de rayon 1 et de centre $(0, 0)$, si, et seulement si, $x^2 + y^2 \leqslant 1$.
- $\left\{ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax \end{array} \right. \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$ est l'ensemble des fonctions linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1 (Définition d'ensembles)**.** Définir, par compréhension ou paramétrage, les ensembles suivants :

(i) L'ensemble des entiers pairs.

(ii) L'ensemble des entiers dont le reste dans la division euclidienne par 3 est 2.

(iii) Plus généralement, soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{0, \ldots, d - 1\}$, l'ensemble $[r]_d$ des entiers dont le reste dans la division euclidienne par d est r.

(iv) Le segment $[0, 1]$.

(v) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, le cercle de centre (x, y) et de rayon α.

1.1.3 Paradoxe de Russel

Proposition 6. *Il n'existe pas d'ensembles de tous les ensembles.*

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe un tel ensemble Ω. On peut alors définir par compréhension l'ensemble $X = \{x \in \Omega \mid x \notin x\}$. On distingue maintenant deux possibilités.

- Si $X \in X$, alors par définition de X, $X \notin X$, ce qui est absurde car $X \in X$.
- Si $X \notin X$, comme $X \in \Omega$, on a, par définition de X, $X \in X$, ce qui est également absurde, car $X \notin X$.

Dans tous les cas, on a atteint une contradiction, ce qui conclut.

Remarque. *On peut illustrer cette preuve à travers le* paradoxe du barbier *(dû à Russel) : on remplace Ω par l'ensemble des habitants d'une ville, l'appartenance par le fait d'être rasé par, et X par un barbier qui rase les habitants de Ω qui ne se rasent pas eux-même. La preuve se ramène à la question suivante, paradoxale : « le barbier se rase-t-il lui-même ? »*

Remarque. *De toutes façons, dans ZFC, un axiome supplémentaire interdit de toutes façons (entre autres) l'existence d'un ensemble qui appartient à lui-même, ce qui donne une preuve plus expéditive : un tel ensemble Ω vérifierait $\Omega \in \Omega$, ce qui contredit cet axiome. Mais la preuve par le paradoxe de Russel est quand même plus marrante.*

1.2 Opérations ensemblistes

1.2.1 Familles, produit cartésien

Définition. Soit I un ensemble. Une famille $(a_i)_{i \in I}$ indexée par I est la donnée, pour chaque $i \in I$, d'un objet a_i.
En particulier, dans le cas où $I = \{1, \dots, n\}$, pour un certain naturel n, on dit que $(a_i)_{i \in I}$ est un n-uplet (petits cas à partir de $n = 2$: couple, triplet, quadruplet, quintuplet, *etc.*), et on le note $(a_1, \dots, a_n)$.

Remarque (À ignorer si vous n'êtes pas fous et que la définition précédente ne vous pose pas de problèmes). *Pour ceux qui ne serait pas satisfaits par cette définition sans ensembles, on peut commencer par définir les couples, en posant, pour x et y deux objets, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ (il y a bien une première coordonnée x et une deuxième y).*
Après quoi, on peut définir une famille indexée par I comme un ensemble F de couples dont la première coordonnée est dans I, et tel que pour chaque élément i de I, il existe un unique couple de la forme (i, a_i) dans F.

Définition. Soit E et F deux ensembles. L'ensemble des couples dont la première coordonnée est dans E et la deuxième dans F est appelé *produit cartésien* de E et F, et noté $E \times F$. Autrement dit, $E \times F = \{ (x, y) \mid x \in E, y \in F \}$.
Plus généralement, soit $n \in \mathbb{N}$ et n ensembles $E_1, \dots, E_n$. On note $E_1 \times \ldots \times E_n$ l'ensemble des n-uplets dont, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la i-ème coordonnée est dans E_i. Autrement dit, $E_1 \times \ldots \times E_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n \}$.
Quand les E_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ sont tous égaux à un même ensemble E, on note E^n l'ensemble $E_1 \times \ldots \times E_n$.

Remarque. *Avec les notations de la définition, les ensembles $(E_1 \times E_2) \times E_3 \times \ldots \times E_n$ et $E_1 \times \ldots \times E_n$ (ou tout autre choix de parenthèses) sont formellement différents. En pratique, oublier les parenthèses dans les uplets fournit une bijection naturelle entre les deux ensembles, qui préserve toutes les propriétés possibles et imaginables des produits ; il s'agit de la fonction* $\left\{ \begin{array}{ccc} (E_1 \times E_2) \times E_3 \times \ldots \times E_n & \to & E_1 \times \ldots \times E_n \\ ((x_1, x_2), x_3 \ldots, x_n) & \mapsto & (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{array} \right.$
Ainsi on identifiera ces deux ensembles (ou tout autre choix de parenthèses).

Exemples (Plutôt géométriques)**.**
- $\mathbb{R}^2$ est un plan, ou l'ensemble des vecteurs d'un plan.
- De même, si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ est un ($\mathbb{R}$-)espace de dimension n, ou l'ensemble des vecteurs d'un tel espace (selon ce qu'on fait, on peut avoir envie d'identifier les deux).

— $\mathbb{Z}^2$ (vu comme une partie de $\mathbb{R}^2$) est l'ensemble des points de coordonnées entières du plan (ou des vecteurs de coordonnées entières, vous avez compris comment ça marche).
— $[0,1]^3$ (vu comme une partie de $\mathbb{R}^3$) est un cube.
— On peut paramétrer $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, en remarquant que $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}$.

1.2.2 Unions, intersections, complémentaire

Définition (Axiome de l'union)**.** Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. On appelle *union* des E_i, et on note $\bigcup_{i\in I} E_i$, l'ensemble des objets qui appartiennent à au moins un E_i, pour un certain $i \in I$.
En particulier, si E et F sont deux ensembles, on appelle *union* de E et F, et on note $E \cup F$, l'ensemble des objets appartenant à E ou à F.

Définition. Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. On appelle *intersection* des E_i, et on note $\bigcap_{i\in I} E_i$, l'ensemble des objets qui appartiennent à tous les E_i, $i \in I$.
En particulier, si E et F sont deux ensembles, on appelle *intersection* de E et F, et on note $E \cap F$, l'ensemble des objets appartenant à E et à F.

Définition. Soit E et F deux ensembles, on appelle *complémentaire de E dans F*, ou encore *F privé de E*, et on note $F \setminus E$, l'ensemble $\{ x \in F \mid x \notin E \}$.

Proposition 7 (Distributivité)**.** *Soit E, F et G trois ensembles.*
On a $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$ et $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$.

Preuve (proposition 7). Cela découle de relations similaires entre les connecteurs logiques et et ou.

Proposition 8 (lois de de Morgan)**.** *Soit E un ensemble, et $(F_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. On a $E \setminus \left(\bigcup_{i\in I} F_i\right) = \bigcap_{i\in I} E \setminus F_i$, et $E \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} E \setminus F_i$.*

Preuve (proposition 8). Cela découle de relations similaires entre le connecteur logique non, et les quantificateurs $\forall$ (pour tout) et $\exists$ (il existe) : un élément de E n'est pas dans l'union des F_i si, et seulement si, il n'est dans aucun d'entre eux (et inversement pour l'intersection).

1.2.3 Ensemble des parties

Définition (Axiome de l'ensemble des parties)**.** Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$, et on appelle *ensemble des parties* de E, l'ensemble des ensembles F tels que $F \subseteq E$.

Remarque. *Ainsi, si E et F sont des ensembles, on a $F \subseteq E \Leftrightarrow F \in \mathcal{P}(E)$.*

Remarque. *Soit E et F deux ensembles tels que $E \subseteq F$. Alors $\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}(F)$. En effet, soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Alors on a $X \subseteq E \subseteq F$, donc $X \in \mathcal{P}(F)$; il s'ensuit que $\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}(F)$.*

2 Fonctions

2.1 Définitions

2.1.1 Fonctions, composition

Définition. Une *fonction* (ou *application*) f, est la donnée :

— D'un ensemble E appelé *domaine*.

— D'un ensemble F appelé *codomaine*.

— D'une famille $(f(x))_{x\in E}$ d'éléments de F indexée par E, appelée graphe de f.

On dit alors que f est une fonction de E dans F, et on note $f : E \to F$, ou (pour spécifier ses valeurs), $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$.

Remarque. *Les ensembles impliqués sont quelconques, ils n'ont pas de raisons d'être des ensembles de nombres. Par ailleurs, une fonction générique est un objet vraiment quelconque, il n'a absolument aucune raison d'être descriptible, et en particulier, une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut n'être ni décrite par une formule, ni avoir un graphe dessinable. On peut par exemple considérer la fonction 13 de Conway, dont le graphe est (en particulier) dense dans le plan : tout point du plan est approché arbitrairement près par des points du graphe.*

Définition. Soit E, F et G trois ensembles, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions. On appelle *composée de f par g*, et on note $g \circ f$ (ce qu'on pourra lire « g rond f »), la fonction $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$.

Proposition 9 (Associativité de la composition)**.** *Soit E, F, G et H quatre ensembles, et $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois fonctions. Alors $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.*

Preuve (proposition 9)*.* Dans les deux cas, il s'agit de la fonction $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & H \\ x & \mapsto & h(g(f(x))) \end{array} \right.$.

Remarque. *Ainsi, l'ordre des compositions n'importe pas, et on notera les composées sans parenthèses.*

Exemples.

— On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \right.$. Alors on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = (x+1)^2$ et $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$.

— Soit $v \in \mathbb{R}^2$ un vecteur. On note $T_v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & x+v \end{array} \right.$ la *translation par v* (où l'addition est l'addition coordonnée par coordonnée des vecteurs). Alors, soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a $T_u \circ T_v = T_v \circ T_u = T_{u+v}$.
En effet, soit $x \in \mathbb{R}^2$, on a $T_u(T_v(x)) = T_u(x+v) = x+v+u = T_{u+v}(x)$, et pareil dans l'autre sens car l'addition est commutative.

2.1.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition. Soit E et F deux ensemble, et $f : E \to F$ une fonction. On dit que :
- f est *injective* (« *one to one* ») si pour tous $x, y \in E$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
- f est *surjective* (« *onto* ») si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
- f est *bijective* si elle est injective et surjective.

On dira aussi que f est (respectivement) une *injection de E dans F*, une *surjection de E sur F*, une *bijection de E sur F*.

Remarque. *Ce que signifie l'injectivité est peut-être plus clair en considérant la contraposée de la définition : une fonction $f : E \to F$ est injective si, et seulement si, pour tous $x, y \in E$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$; des éléments distincts de E ont toujours des images par f distinctes. On peut vérifier que c'est bien équivalent à la définition de départ. Une autre formulation, serait encore de dire que tout élément de F admet au plus un f-antécédent.*

Méthode (Comment montrer qu'une fonction $f : E \to F$ est, ou n'est pas, injective ou surjective ?)**.** Pour l'injectivité, il faut montrer que si on prend $x, y \in E$ quelconques tels que $f(x) = f(y)$, on a $x = y$. Ainsi, une preuve aura cette forme :

> Soit $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$.
> [Arguments], donc $x = y$.
> Il s'ensuit que f est injective.

Pour la non injectivité, il faut au contraire trouver un contre-exemple à l'implication, c'est-à-dire construire $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$ mais $x \neq y$. Notamment, on peut choisir le x et le y qu'on veut (tant qu'ils marchent). Ainsi, une preuve aura cette forme :

> On pose $x =$ [Choix judicieux] $\in E$ et $y =$ [Choix judicieux] $\in E$.
> [Arguments], donc $f(x) = f(y)$.
> Par contre, [Arguments], d'où $x \neq y$.
> Ainsi, f n'est pas injective.

Pour la surjectivité, il faut, pour un élément quelconque y de F, trouver un élément x (dépendant donc de y), tel qu'on a $f(x) = y$. Notamment, on est libre quant à comment on le choisit (du moment qu'il marche à la fin). Une preuve ressemblera donc à ça :

> Soit $y \in F$.
> On pose $x =$ [Choix judicieux] $\in E$.
> [Arguments], donc $f(x) = y$.
> Il s'ensuit que f est surjective.

Enfin, pour la non-surjectivité, il faut construire un élément y de F, tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \neq y$. On est libre de choisir le y qui marche qu'on veut. Une preuve aura donc cette allure :

> On pose $y =$ [Choix judicieux] $\in F$.
> Soit $x \in E$.

[Arguments], donc $f(x) \neq y$.
On en déduit que f n'est pas surjective.

Dans les quatres exemples, la rédaction peut bien sûr être allégée (*c.f* exemples).

Exemples.

— $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2 \end{array} \right.$ est injective, mais pas surjective.
En effet, soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m^2 = n^2$. Alors, en passant à la racine carrée, on obtient que $m = n$. Donc la fonction est injective. Par contre, 2 n'est pas un carré parfait, donc pour $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \neq 2$. La fonction n'est donc pas surjective.

— $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est bijective.
En effet, soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 = y^2$. Alors, en passant à la racine carrée, on obtient que $x = y$. Donc la fonction est injective. Par ailleurs, soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x = (\sqrt{x})^2$, donc la fonction est surjective. On déduit de tout cela qu'elle est bijective.

— $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est injective, mais pas surjective.
Pour l'injectivité, même argument que juste avant. Par contre, -1 n'est pas le carré d'un nombre réel, car un carré est positif, donc la fonction n'est pas surjective.

— $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est ni injective, ni surjective.
Pour la non surjectivité, même argument que juste avant. On remarque par ailleurs que $1^2 = (-1)^2$, alors que $-1 \neq 1$, ce qui prouve que la fonction n'est pas injective.

— $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}(\mathbb{R}_+) \\ X & \mapsto & X \cap \mathbb{R}_+ \end{array} \right.$ est surjective, mais pas injective (cette fonction mange une partie $X \subseteq \mathbb{R}$, et renvoie l'ensemble des éléments positifs de X, qui est bien une partie de $\mathbb{R}_+$).
Pour la non injectivité, on peut remarquer que cette fonction envoie $\varnothing$ et $\{-1\}$ sur $\varnothing$, alors que ces ensembles sont différents. Il s'ensuit que la fonction n'est pas injective. Pour la surjectivité, soit $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$. Alors $Y \subseteq \mathbb{R}_+$, donc $Y \cap \mathbb{R}_+ = Y$. Il s'ensuit que la fonction est surjective.

Remarque. *On peut remarquer dans les exemples que le domaine et le codomaine importent en théorie des ensembles : une fonction surjective ne l'est plus si l'on étend son codomaine en rajoutant ne serait-ce qu'un point supplémentaire. Alors qu'en analyse on peut se permettre d'être flou sur les ensembles de départ et d'arrivée, pour autant que les valeurs sont les mêmes, ce n'est pas du tout le cas dans le cadre général de la théorie des ensembles.*

Exercice 2. Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives. Des dessins pourront être utiles dans certains cas. $v \in \mathbb{R}^2$, et E est un ensemble.

(i) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}\right.$.

(ii) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}\right.$.

(iii) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+(-1)^n \end{array}\right.$.

(iv) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}\right.$.

(v) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array}\right.$.

(vi) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (m,n) & \mapsto & 2^m(2n+1) \end{array}\right.$.

(vii) $T_v : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & x+v \end{array}\right.$.

(viii) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & E \setminus X \end{array}\right.$.

2.1.3 Fonctions réciproques

Définition. Soit E un ensemble. On appelle *identité de E*, et on note id_E, la fonction $\mathrm{id}_E : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}\right.$.

Remarque. *Soit E un ensemble. Alors* id_E *est une bijection. Cela provient simplement des faits que pour $x, y \in E$, $x = y$ implique $x = y$, et que pour $x \in E$, $x = x$. E est naturellement mis en correspondance avec lui même en envoyant chacun de ses éléments sur lui-même.*

Définition. Soit E et F deux ensembles, et $f : E \to F$. On dit qu'une fonction g est une réciproque de f si $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Exemples.

— $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n-1 \end{array}\right.$ sont des bijections réciproques.

— $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}\right.$ sont des bijections réciproques.

— Soit $k, n \in \mathbb{N}$.
$\left\{\begin{array}{ccc} \{1, \ldots, n\} & \to & \{k+1, \ldots, k+n\} \\ i & \mapsto & i+k \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \{k+1, \ldots, k+n\} & \to & \{1, \ldots, n\} \\ i & \mapsto & i-k \end{array}\right.$
sont des bijections réciproques.

— Soit E un ensemble. On note $\mathfrak{S}(E)$ (c'est un S dans une police allemande) l'ensemble des bijections $E \to E$. Alors $\left\{\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}(E) & \to & \mathfrak{S}(E) \\ \sigma & \mapsto & \sigma^{-1} \end{array}\right.$ est une bijection, qui est sa propre réciproque. En effet, si σ est une bijection $E \to E$, on a $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$, par symétrie de σ et σ^{-1} dans la définition de la réciproque.

Proposition 10. *Soit E et F deux ensembles, et $f : E \to F$. Alors f admet une réciproque si, et seulement si, elle est bijective. Si c'est le cas, sa réciproque est unique, bijective, et notée f^{-1}.*

Preuve (proposition 10). On suppose f bijective. Soit $y \in F$. y admet par surjectivité de f un f-antécédent, unique par injectivité, que l'on note $f^{-1}(y)$. On définit ainsi une fonction $f^{-1} : F \to E$.
Par ailleurs, soit $x \in E$. x est l'unique f-antécédent de $f(x)$, donc on a $f^{-1}(f(x)) = x$.
Pour l'autre égalité, soit $y \in F$. On a donc $f(f^{-1}(y))$ par définition de f^{-1}.
Pour l'autre sens, on suppose qu'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
Soit $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$. Il s'ensuit que f est injective.
Soit $y \in F$. Alors $y = f(g(y))$. Il s'ensuit que f est surjective.
Donc f est bijective.
Supposons maintenant que les deux sont vrais, et notons g une réciproque de f. Remarquons que f est une réciproque de g, donc g est bijective.
Pour l'unicité, on peut constater en relisant la preuve qu'il n'y a qu'une manière de construire une réciproque : elle doit renvoyer un élément donné de F sur son unique f-antécédent. Un autre argument, plus expéditif et général, consiste à remarquer que, si g et h sont des réciproques de f, on a $g = g \circ \mathrm{id}_F = g \circ f \circ h = \mathrm{id}_E \circ h = h$.

Proposition 11 (Règle chaussettes-chaussures)**.** *Soit E, F et G trois ensembles, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions. Si f et g sont injectives (resp. surjectives, bijectives) alors $g \circ f$ aussi. En outre, si $g \circ f$ est bijective, alors f et g aussi et on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Preuve (proposition 11). On suppose f et g injectives. Soit $x, y \in E$ tels que $g(f(x)) = g(f(y))$. Alors $f(x) = f(y)$ par injectivité de g, donc $x = y$ par injectivité de f. Donc $g \circ f$ est injective.
On suppose f et g surjectives. Soit $z \in G$. Alors on peut trouver, par surjectivité de g, $y \in F$ tel que $g(y) = z$. Par surjectivité de f, on peut trouver $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a donc $z = g(f(x))$. Il s'ensuit que $g \circ f$ est surjective.
Par ailleurs, supposons f et g bijectives. On a alors $g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_F$, et $f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$. Donc $f \circ g$ est bijective, de réciproque $g^{-1} \circ f^{-1}$.

Remarque. *Pour s'en rappeller, penser qu'on met ses chaussettes avant ses chaussures, mais qu'on enlève ses chaussures avant ses chaussettes.*

Exercice 3. Soit E, F et G trois ensembles, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions.

(i) On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est injective.

(ii) On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective.

(iii) Trouver des contre exemples montrant qu'on ne peut rien déduire de plus.

Exercice 4. On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$ et $g \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \max(0, n-1) \end{array} \right.$. Montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. f et g sont-elles des bijections réciproques ?

2.2 Équipotence

2.2.1 Ensembles équipotents

Définition. Soit E et F deux ensembles. On dit que E et F sont *équipotents* (ou *en bijection*), et on note $E \simeq F$, s'il existe une bijection $E \to F$.

Proposition 12. *L'équipotence vérifie les propriétés suivantes :*
- Réflexivité *: Soit E un ensemble. Alors $E \simeq E$.*
- Symétrie *: Soit E et F deux ensembles. Si $E \simeq F$, alors $F \simeq E$.*
- Transitivité *: Soit E, F et G trois ensembles. Si $E \simeq F$ et $F \simeq G$, alors $E \simeq G$.*

Preuve (proposition 12). Soit E un ensemble. Alors id_E est une bijection $E \to E$, donc $E \simeq E$. l'équipotence est donc réflexive.
Soit E et F deux ensembles tels que $E \simeq F$. On peut trouver une bijection $f : E \to F$. Il vient alors que f^{-1} est une bijection $F \to E$, donc $F \simeq E$. L'équipotence est donc symétrique.
Soit E, F et G trois ensembles tels que $E \simeq F$ et $F \simeq G$. On peut trouver deux bijections $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Alors $g \circ f$ est une bijection $E \to G$, donc $E \simeq G$. Il s'ensuit que l'équipotence est transitive.

Proposition 13. *Soit E, F, G et H quatre ensembles tels que $E \simeq G$ et $F \simeq H$. Alors $E \times F \simeq G \times H$.*

Preuve. On peut trouver deux bijections $f : E \to G$ et $g : F \to H$. On note alors
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times F & \to & G \times H \\ (x, y) & \mapsto & (f(x), g(y)) \end{array} \right. .$$
Elle est injective : si $(x, y), (x', y') \in E \times F$ vérifient $h((x, y)) = h((x', y'))$, alors $f(x) = f(x')$ et $g(y) = g(y')$, donc, par injectivité de f et g, $x = x'$ et $y = y'$. Donc h est surjective.
Soit $(z, t) \in G \times H$. Alors on a $h((f^{-1}(z), g^{-1}(t))) = (f(f^{-1}(z)), g(g^{-1}(t))) = (z, t)$, donc h est surjective.
Ainsi, h est bijective.

2.2.2 Ensembles finis

Proposition 14 (Principe des tiroirs)**.** *Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une injection $\{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ si, et seulement si, $m \leqslant n$. (Dans le cas ou $m = 0$ ou $n = 0$, l'ensemble correspondant est vide).*

Remarque. *Pour comprendre ce que cela signifie, considérer $\{1, \ldots, m\}$ comme un ensemble de m chaussettes, et $\{1, \ldots, n\}$ comme un ensemble de n tiroirs. Alors, avoir une injection de $\{1, \ldots, m\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ signifie qu'il est possible de ranger les chaussettes de telle sorte que chaque tiroir compte au plus une chaussette. Le principe dit alors que c'est possible si, et seulement si, il y a plus de tiroirs que de chaussettes.*
Il est souvent énoncé sous sa forme contraposée : si on répartit m objets dans n boîtes, avec $m > n$, alors une des boîtes contient au moins deux objets.

Si cela paraît évident, il est raisonnable d'ignorer la preuve, qui est technique et peu enrichissante.

Preuve (proposition 14). Le sens réciproque est facile : si $m \leqslant n$, alors

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \{1, \dots, m\} & \rightarrow & \{1, \dots, n\} \\ i & \mapsto & i \end{array} \right.$$

est une injection.
On suppose maintenant qu'il existe une injection $f_m : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Si $m = 0$, on a gagné, car $n \geqslant 0$. Sinon, considérons

$$f_{m-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \{1, \dots, m-1\} & \rightarrow & \{1, \dots, n-1\} \\ i & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f_m(i) & \text{si } f_m(i) < f_m(m) \\ f_m(i) - 1 & \text{si } f_m(i) > f_m(m) \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Son codomaine est bien défini : en effet comme $\{1, \dots, n\}$ est non vide car il contient $f(m)$, donc $n \geqslant 1$.
Elle est bien définie : $i \in \{1, m-1\}$, alors par injectivité de f_m on a $f_m(i) \neq f_m(m)$, donc soit $f_m(i) < f_m(m)$, soit $f_m(i) > f_m(m)$. Par ailleurs, $1 \leqslant f_m(i) \leqslant f_m(n)$.
Dans le premier cas d'égalité $f_m(i) = 1$, alors nécessairement $f_m(i) \leqslant f_m(m)$, donc $f_m(i) < f_m(m)$, donc $f_{m-1}(i) = 1$.
Dans le deuxième cas d'égalité $f_m(i) = n$, alors nécessairement $f_m(i) \geqslant f_m(m)$, donc $f_m(i) > f_m(m)$, donc $f_{m-1}(i) = n - 1$.
Ainsi, f_{m-1} est bien définie.
Par ailleurs, soit $1 \leqslant i, j \leqslant m - 1$ tels que $f_{m-1}(i) = f_{m-1}(j)$.
Si $f_{m-1}(i) \geqslant f_m(m)$, alors nécessairement $f_{m-1}(i) = f_m(i) - 1$ et $f_{m-1}(j) = f_m(j) - 1$, d'où, par injectivité de f_m, $i = j$.
Sinon, on doit avoir $f_{m-1}(i) = f_m(i)$ et $f_{m-1}(j) = f_m(j)$, et on obtient encore, par injectivité de f_m, $i = j$.
Ainsi, f_{m-1} est aussi injective, et on remarque que $m-1 < m$. On peut itérer ce processus au total m fois, afin de construire $f_0 : \varnothing \rightarrow \{1, \dots, n-m\}$. Comme f_0 est bien définie, on doit avoir $n - m \geqslant 0$, donc $n \geqslant m$, ce qui conclut.

Corollaire 1 (proposition 14)**.** *Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Alors $\{1, \dots, m\}$ et $\{1, \dots, n\}$ sont en bijection si, et seulement si, $m = n$.*

Remarque. *Cela assure que la notion de cardinal qu'on va introduire a bien un sens : si $m \neq n$ sont deux entiers naturels, alors un ensemble à m éléments ne peut pas aussi être un ensemble à n éléments. Quand on compte n objets, et qu'en les recomptant on trouve qu'en fait il y en a m, c'est qu'il y a eu une erreur quelque part.*

Définition. Soit E un ensemble et $n \in \mathbb{N}$. On dit que E est de *cardinal* n, et on note $|E| = n$, si E est équipotent à $\{1, \dots, n\}$.

Remarque. *Cela formalise en vocabulaire ensembliste le fait d'avoir n éléments. On peut voir une bijection $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow E$ comme le fait de compter tous les éléments de E. Le premier est $f(1)$, le deuxième $f(2)$,* etc.

Exercice 5. Combien d'élèves faut-il au minimum, dans un lycée, pour que l'on soit sûr que deux des élèves aient la même date d'anniversaire ?

Définition. Soit E un ensemble. On dit que E est *fini* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|E| = n$, *infini* sinon.

Corollaire 2 (proposition 14, principe des tiroirs infini)**.** *Soit E un ensemble infini, et F un ensemble fini. Alors il n'existe pas d'injections de E dans F.*

Preuve (corollaire 2). Soit $f : E \to F$. Notons $n = |F|$. F est infini, donc non vide, donc il contient un élément x_1. Comme $\{x_1\}$ est fini, ce n'est pas F, donc on peut trouver $x_2 \in F$ tel que $x_1 \neq x_2$. En continuant ainsi, on trouve $n + 1$ éléments distincts $x_1, \dots, x_{n+1}$ de F. Alors f se restreint naturellement en une fonction

$$f_{|\{x_1,\dots,x_{n+1}\}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \{x_1, \dots, x_{n+1}\} & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

Elle n'est pas injective par principe des tiroirs. Ainsi, on peut trouver $1 \leqslant i < j \leqslant n + 1$ tels que $f(x_i) = f(x_j)$. Il s'ensuit que f non plus n'est pas injective, ce qui conclut.

2.2.3 Théorème de Cantor

Théorème 1 (Cantor, 1891)**.** *Soit E un ensemble. Alors il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.*

Preuve (théorème 1). Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$. Montrons que f n'est pas surjective.
On pose $X = \{\, x \in E \mid x \in f(x) \,\}$. On suppose par l'absurde qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = X$.
Si $x \in X$, alors par définition de X, $x \notin f(x) = X$, ce qui contredit l'hypothèse.
Si $x \notin X = f(x)$, alors par définition de X, $x \in f(x) = X$, ce qui contredit l'hypothèse.
Il s'ensuit que X n'a pas de f-antécédent, donc f n'est pas surjective, ce qui conclut.

Remarque. *En revanche,* $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{P}(E) \\ x & \mapsto & \{x\} \end{array} \right.$ *est une injection $E \to \mathcal{P}(E)$. Ainsi, $\mathcal{P}(E)$ est « strictement plus grand » que E.*

3 Dénombrabilité

3.1 Propriétés de base

3.1.1 Généralités

Définition. Soit E un ensemble. On dit que E est *dénombrable* s'il existe une injection $E \to \mathbb{N}$.

Remarque. *Il est équivalent de demander E vide, ou l'existence d'une surjection $\mathbb{N} \to E$. En effet, si E n'est pas vide, on peut fixer un de ses éléments x_0 si l'on suppose qu'on a une injection $f : E \to F$, on peut poser, pour $x \in E$, $g(f(x)) = x$, et pour $y \in F$ pas de la forme $f(x)$, $g(y) = x_0$. On vérifie ensuite qu'on définit une surjection $\mathbb{N} \to E$. Réciproquement, si E est vide il est dénombrable (c'est une partie de $\mathbb{N}$), et si on suppose qu'on a une surjection $g : \mathbb{N} \to E$, alors on peut fixer pour chaque $x \in E$ un de ses g-antécédents, qu'on note $f(x)$. Il est facile de voir qu'on définit ainsi une injection $E \to \mathbb{N}$.*

Remarque. *Avec ce point de vue, dire qu'un ensemble E est dénombrable, c'est dire qu'il est vide, ou qu'on peut énumérer ses éléments $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$, avec d'éventuelles répétitions dans l'énumération.*

Proposition 15. *Soit E un ensemble dénombrable. Alors il est fini, ou en bijection avec $\mathbb{N}$.*

Preuve (proposition 15). Soit E un ensemble dénombrable infini. On peut trouver une injection $f : E \to \mathbb{N}$. Remarquons alors, en notant $f[E] = \{\, f(x) \mid x \in E \,\}$, que $f^{|f[E]}$: $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & f[E] \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}\right.$ est bien définie, injective car f l'est, et surjective par définition de $f[E]$.
E est donc en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$, qui est infinie par principe des tiroirs infini.
Il reste donc à montrer qu'une partie infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$. Soit donc X une partie infinie de $\mathbb{N}$. On définit alors par récurrence une suite d'éléments de X, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \min X \setminus \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ (il faut comprendre $\min X$ si $n = 0$). Ainsi, x_n est le $n+1$-ième plus petit élément de X. Le processus marche bien car X est infini, donc on regarde toujours des minima d'ensembles non vides.
Par ailleurs, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante par définition. De plus, étant donné un élément $x \in X$, il n'existe qu'un nombre fini de naturels plus petits que lui. En particulier, l'ensemble des éléments de X plus petits que lui est fini, donc x est le n-ième plus petit élément de X, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et alors $x = x_{n-1}$.
Tout cela nous dit que $f \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & X \\ n & \mapsto & x_n \end{array}\right.$ est une bijection, ce qui conclut.

Proposition 16. *Soit E un ensemble infini. Alors il existe une injection $\mathbb{N} \to E$.*

Preuve (proposition 16). On construit par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, en fixant, pour $n \in \mathbb{N}$, un élément x_n de $E \setminus \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. La construction se passe bien car E est infini.
Alors la fonction $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & E \\ n & \mapsto & x_n \end{array}\right.$ est injective : en effet, soit $m < n$ deux naturels, on a $x_n \in E \setminus \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, donc $x_n \neq x_m$.

3.1.2 Quelques ensembles dénombrables

Exemples.

— $\mathbb{N}^*$ est dénombrable. En effet, $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}\right.$ est une bijection.

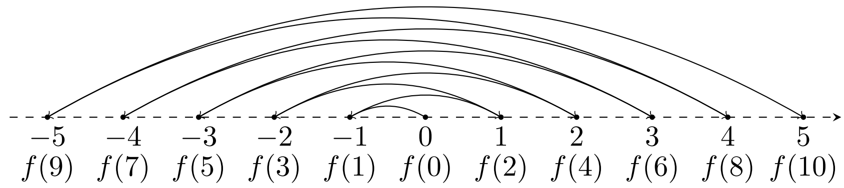

FIGURE 1 – Bijection f de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

— $\mathbb{Z}$ est dénombrable. On peut en effet considérer la fonction suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Ce qu'elle fait, et pourquoi c'est une bijection, se voit bien sur la figure 1.

— $\mathbb{N}^2$ est dénombrable (voir la figure 2), donc en bijection avec $\mathbb{N}$ car il est infini. Pour une preuve plus algébrique, on peut sinon aller voir le (vi) de l'exercice 2.

— Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathbb{N}^r \simeq \mathbb{N}$. On le montre par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$: c'est vrai pour $r = 1$, et si $r \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\mathbb{N}^r \simeq \mathbb{N}$, alors $\mathbb{N}^{r+1} \simeq \mathbb{N}^r \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$.

— $\mathbb{Q}$ est dénombrable : on a une $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, et $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{Q} \\ (p,q) & \mapsto & \dfrac{p}{q} \end{array} \right.$ est surjective essentiellement par définition de $\mathbb{Q}$.

— En revanche, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable par théorème de Cantor.

Exercice 6. Soit I un ensemble dénombrable, et $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles dénombrables. Montrer que $\bigcup_{i \in I} E_i$ est dénombrable.

On pourra essayer de surjecter $\mathbb{N}^2$ dessus.

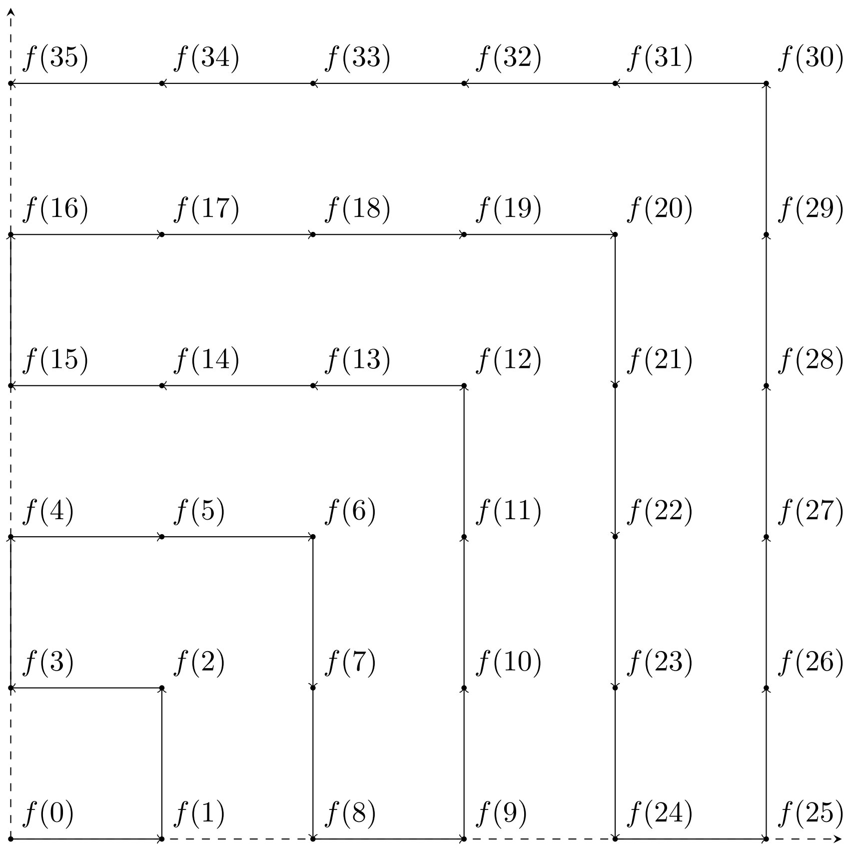

FIGURE 2 – Bijection g de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$.