Jeux à deux joueurs

Un peu de théorie des jeux

Matteo Wei

> Lorsqu'elle est pratiquée assidûment, la Voie de la stratégie peut s'appliquer en toutes circonstances et lorqu'elle est enseignée avec intelligence, elle prouve son utilité en toutes choses.
>
> Miyamoto Musashi, *Go rin no sho*

Table des matières

1 Introduction

1.1 Qu'est-ce que la théorie des jeux ?

On peut proposer différentes définitions de la théorie des jeux. La plus simple consiste sans doute à la présenter comme une formalisation mathématique de la prise de décision. On a plusieurs agents rationnels qui essaient chacun de maximiser leur intérêt d'une certaine manière, en obéissant à certaines règles, ce qui justifie le rapprochement avec le cadre des jeux.
On peut par exemple penser à des agents économiques qui essaient de maximiser leurs gains dans le cadre d'un marché concurrenciel.
Cet exemple n'est pas anodin : la théorie des jeux joue une très grande importance en économie (et en fait, a été introduite par des économistes). Elle sert de modèle explicatif en microéconomie, la branche de l'économie qui cherche à modéliser le comportement des agents (par opposition à la macroéconomie, qui s'intéresse à l'économie du point de vue d'indicateurs agrégés). Onze prix Nobel ont été accordés à des théoricien des jeux.

1.2 Différents types de jeux

Du fait de la grande diversité de situations qu'on peut être amené à modéliser, de nombreuses notions de ce qu'est un jeu peuvent être proposée. Ainsi, plutôt que d'essayer de donner une formalisation précise de ce qu'est un jeu, on va commencer par essayer de voir comment on peut classifier les jeux, afin d'essayer d'isoler une catégorie intéressante de jeux à modéliser.

Définition. On dit qu'un jeu est *séquentiel* si les joueurs jouent à tour de rôle, *simultané* sinon.

Définition. On dit qu'un jeu est *à information parfaite* si les joueurs connaissent à tout moment parfaitement l'état du jeu, ainsi que les coups que chaque joueur peut jouer. Si ce n'est pas le cas, on dit qu'il est *à information imparfaite*.

Les jeux à information parfaite ne sont pas si intéressant que ça pour un économiste : une grosse partie de ce qui est intéressant est comment les acteurs réagissent à partir de la quantité limitée d'information dont ils disposent. En revanche, ils sont (forcément) plus facile à modéliser et résoudre, c'est pourquoi on s'y intéresse dans ce cours.

Définition. On dit qu'un jeu est *à somme nulle* si tout gain d'un joueur engendre des pertes cumulées équivalentes pour les autres joueurs. En d'autre termes, la somme des variations des gains pour les joueurs à chaque coup est nulle, d'où le nom.

Remarque. *On peut modéliser des jeux comportant de l'aléas en rajoutant un joueur supplémentaire, l'univers, qui modélise la source d'aléas, et qui dans l'idée joue de manière totalement imprévisible. Bien sûr, on peut probabiliser les choix de coups de l'univers, et alors essayer de plutôt se demander quelles sont les stratégies qui optimisent l'espérance du gain...*

Exercice 1. Classifier les jeux suivants, éventuellement avec plusieurs variantes de règles.

1. Les échecs.
2. Une manche de Poker (les joueurs disposent de fonds limités).
3. La bataille.
4. Le Pierre-Feuille-Ciseau.
5. Le Morpion.

Dans la suite, on va surtout s'intéresser à des jeux à deux joueurs séquentiels, à information parfaite et à somme nulle. Dans certains cas, on s'intéressera plus particulièrement à des jeux vérifiant une certaine propriété de finitude.

Définition. On dit qu'un jeu est *fini* (ce nom n'est pas canonique) s'il n'a qu'un nombre fini d'états possibles, et la longueur des parties est bornée.

2 Stratégies

2.1 Formalisation de ce qu'est un jeu

On essaie de produire un modèle pour une sous-classe des jeux à deux joueurs séquentiels, à information parfaite, et à somme nulle.
Pour la suite, on note $\neg 1 = 2$ et $\neg 2 = 1$ (on s'en sert pour désigner l'autre joueur).

Définition. On appelle *jeu* la donnée :

1. D'un ensemble E, *l'ensemble des états du jeu.*
2. D'une partition (E_1, E_2) de E (c'est à dire que tout état e est soit dans E_1, soit dans E_2). Pour un état e donné, on dit que *c'est au joueur* $i \in \{1, 2\}$ *de jouer* si $e \in E_i$.
3. D'une partie F de E des états finaux du jeu.
4. D'une partition (F_1, F_2, F_N) de F. Pour un état final f donné, on dit que *le joueur* $i \in \{1, 2\}$ *gagne* si $f \in F_i$, ou que *c'est un match nul* si $f \in F_N$.
5. D'un *état initial* I.
6. Pour chaque état e non final, d'un ensemble non vide S_e d'*états successeurs*, tel que, si $e \in E_i$, alors $S_e \subseteq E_{\neg i}$.

Définition. Un *coup* depuis l'état e est le choix d'un successeur $e' \in S_e$ de e. Autrement dit, c'est un couple d'états (e, e') avec $e' \in S_e$. On le notera $e \to e'$.

Exemple. Le jeu de Nim à n bâtons est un jeu à deux joueurs, dont les règles sont les suivantes : à tour de rôle, chaque joueur prend 1, 2 ou 3 bâtons, et celui qui ramasse le dernier bâton perd. On peut le formaliser de la manière suivante :

— Les états sont des couples (k, i), où $k \leqslant n$ est le nombre de bâtons restants, et i est le joueur qui a la main. On a donc $E_1 = \{\, (k, 1) \mid 1 \leqslant k \leqslant n \,\}$, $E_2 = \{\, (k, 2) \mid 1 \leqslant k \leqslant n \,\}$, et $E = E_1 \cup E_2$.

— Les états finaux sont les couples $(1, i)$, et i perd dans ce cas (donc $F_1 = \{(1, 2)\}$, $F_2 = \{(1, 1)\}$ et $F_N = \varnothing$).
— L'état initial est $I = (n, 1)$.
— On a un coup $(k, i) \to (l, j)$ si $l \geqslant 0$, $l \in \{k-3, k-2, k-1\}$ et $i \neq j$.

Remarque. *Un état $e \in E$ n'est pas forcément* accessible*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas forcément une séquence de coups qui mène de l'état initial jusqu'à lui. Mais comme on s'intéresse seulement aux parties qui partent de I, les états non accessibles sont inintéressant, et leur présence ou absence ne change vraiment rien. Notamment, ça peut être intéressant d'en laisser, pour pouvoir décrire plus simplement l'ensemble des états. Par exemple, dans la formalisation du jeu de Nim, l'état $(n, 2)$ n'est pas accessible : à n'importe quel tour du joueur 2, au moins un bâton a été pris, donc cet état n'apparaît jamais dans une partie. Mais le laisser permet d'éviter d'avoir à se demander quels sont précisément les états pouvant vraiment apparaître pour le jeu de Nim.*

Définition. Une *partie* est une suite $(e_k)_{k=0}^n$, où $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ telle que :
— $e_0 = I$.
— Si $n < \infty$, alors e_n est final.
— Pour tout $0 \leqslant k < n$, $e_k \to e_{k+1}$ est un coup.

Remarque. *Le cas $n = \infty$ correspond simplement au cas où la partie ne s'arrête jamais,* i.e. *on a une suite infinie de coups qui n'attend jamais un état final.*

Définition. Soit $(e_k)_{k=0}^n$ une partie.
— Si $n < \infty$ et $e_n \in F_i$, alors on dit que la partie est *gagnante pour le joueur i*.
— Sinon, on dit que la partie est un match nul.

Remarque. *Une partie peut résulter en un match nul de deux manières différentes : soit on atteint un état final nul, soit $n = \infty$ et la partie ne s'arrête jamais.*

2.2 Stratégies

Définition. Une *stratégie* Str pour le joueur i est la donnée, pour chaque état $e \in E_i$ non final où c'est au joueur i de jouer, d'un coup à jouer $e \to \mathrm{Str}(e) \in S_e$.
En d'autre termes, c'est une fonction $\mathrm{Str} : E_i \setminus F \to E_{\neg i}$ telle que pour tout état $e \in E_i \setminus F$, $\mathrm{Str}(e) \in S_e$.

Remarque. *Si on a une stratégie* Str_1 *pour le joueur* 1*, et une autre* Str_2 *pour le joueur* 2*, on peut naturellement définir une partie, en posant $e_0 = I$, puis, en notant i le joueur qui commence à jouer, $e_1 = \mathrm{Str}_i(e_0)$, $e_2 = \mathrm{Str}_{\neg i}(e_1)$, $e_3 = \mathrm{Str}_i(e_2)$,* etc.*, jusqu'à éventuellement atteindre un état final.*
Essentiellement, le fait qu'un joueur ait une stratégie signifie qu'il sait comment il a envie de jouer depuis chaque état. On est simplement en train de dire que si les deux joueurs savent comment ils veulent jouer, on peut construire une partie en les laissant à chaque fois jouer le coup qu'ils veulent, et en regardant les états où ça nous emmène.
Si la partie est gagnante pour le joueur i, on dit que la stratégie Str_i *bat la stratégie* $\mathrm{Str}_{\neg i}$.

Définition. On dit qu'une stratégie Str pour un joueur est *gagnante* si elle bat *toutes* les stratégies possibles pour l'autre joueur.
On dit qu'elle *assure un match nul* si elle n'est battue par *aucune* stratégie de l'autre joueur.

Remarque. *Une stratégie qui assure le match nul peut résulter en une victoire du joueur qui l'a : on ne demande pas explicitement qu'elle résulte en un match nul, seulement qu'elle évite la défaite. Il faut comprendre le comprendre comme une stratégie qui assure (au moins) un match nul.*
En particulier, une stratégie gagnante assure la match nul.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif. Trouver une stratégie gagnante, pour un joueur qui peut dépendre de n, pour le jeu de Nim avec initialement n bâtons.

Remarque. *Cette formalisation ne modélise que des jeux à deux joueurs séquentiels à information parfaite.*
En effet, la partition demandée dans le point 2 se comprend comme le fait de séparer les états du jeu en ceux où le joueur 1 a le contrôle, et ceux où c'est le joueur 2. La condition dans le point 6 assure la séquentialité : elle demande que quand on joue un coup, le contrôle passe à l'autre joueur.
Le fait qu'on modélise des jeux à information parfaite découle de la manière dont on définit les stratégies : on permet aux joueurs de choisir un coup comme ils veulent, et les choix de coups peuvent donc dépendre de l'état précis dans lequel on est. Moralement, ça revient à dire que le joueur sait exactement dans quel état il est.
On peut essayer de modéliser le fait que l'information ne soit pas parfaite : la manière habituelle dont cela est fait consiste à donner pour chaque joueur une partition les états ; les états dans la même classe de la partition sont indiscernables pour le joueur, et les choix de coups qu'il peut faire doivent maintenant uniquement dépendre de ces classes d'états assimilés.
Par exemple, pour la bataille navale, deux états du jeu sont indiscernables pour le joueur 1 s'ils correspondent au même placement de ses bateaux et à la même séquence de tirs, car la seule information dont il dispose sur le placement des bateaux du joueur 2 provient des tirs qu'il a placé. Il ne sait notamment pas dans quel état du jeu il se trouve précisément.

2.3 Représentation d'un jeu

La manière dont on a défini un jeu nous permet essentiellement de le voir comme un graphe orienté, dont les sommets sont les états, et où les arcs (arêtes orientées) correspondent à l'existence d'un coup. Autrement dit, on a un coup $e \to e'$ si, et seulement si, on a un arc $e \to e'$ dans le graphe (et on utilise habilement la même notation pour les deux).
Le fait que le jeu soit séquentiel se traduit en le fait que le graphe est *biparti* : l'ensemble des sommets est partitionné en deux parties telles qu'aucun arcs n'a ses deux extrémités dans la même partie. On le représentera généralement en coloriant les sommets.
Quand l'ensemble des états est fini, le graphe a un nombre fini de sommets et on peut le dessiner.

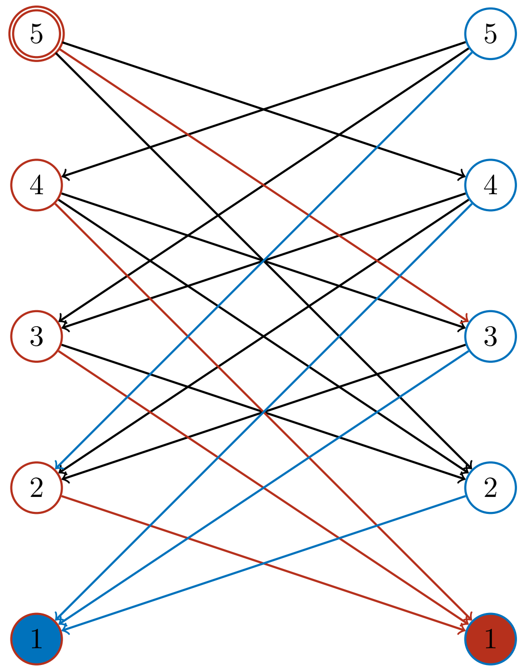

FIGURE 1 – Graphe représentant le jeu de Nim à 5 bâtons. Les couleurs des contours correspondent aux propriétaires des états (rouge pour le joueur 1, bleu pour le joueur 2). Les états finaux sont remplis de la couleur du joueur gagnant. L'état initial a un double contour. Pour chaque joueur, une stratégie est donnée par les arc coloriés. la stratégie du joueur 2 est gagnante.

Proposition 1.

1. *Une partie correspond à un chemin depuis l'état initial, qui s'il s'arrête le fait sur un état final.*
2. *Une stratégie pour un joueur est le choix, pour chaque sommet non terminal de sa couleur, d'un arc partant de ce sommet.*
3. *Un état est final si et seulement s'il est de degré sortant* 0 *(si aucun arc ne part de lui).*

Preuve. Les deux premiers points sont des reformulations des définitions. Le troisième découle du fait qu'on demande que les ensembles d'états successeurs soient non vides, et qu'on les ait définis seulement pour les états non finaux.

3 Le théorème de Zermelo et le minimax

3.1 Théorème de Zermelo

Théorème 1 (Zermelo, 1912)**.** *Dans un jeu formalisé de la manière précédente, soit un des deux joueurs a une stratégie gagnante, soit les deux ont une stratégie qui assure le*

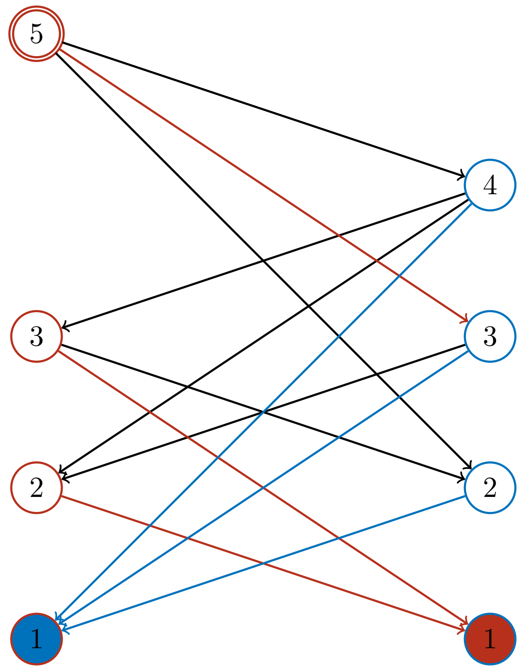

FIGURE 2 – Version émondée du graphe précédent (on a retiré les états inaccessibles depuis l'état initial).

match nul.

Remarque. *À ne pas confondre avec le théorème de Zermelo de 1904 de théorie des ensembles (et pour lequel il est surtout connu).*

Remarque. *La version énoncée par Zermelo comprend un résultat supplémentaire : dans le cas où le nombre d'états possibles est fini, alors si un des joueurs a une stratégie gagnante, il en a une qui force les parties à se terminer en un nombre de coups plus petit que le nombre d'états du jeu. En revanche, sa preuve était fausse, et la première preuve correcte, dûe à König, date de 1927.*

On aura besoin d'une nouvelle définition pour la preuve :

Définition. Soit e un état. On dit que le joueur i a une stratégie gagnante (resp. qui assure le match nul) *à partir de* e si le joueur i a une stratégie gagnante (resp. qui assure le match nul) pour le jeu défini pareil, à part pour le fait que l'état initial est maintenant e et non pas I.

Lemme 1. *Soit e un état non final, et $i \in \{1,2\}$.*

1. *Si i a le contrôle sur e, et s'il existe un coup $e \to e'$, où i a une stratégie gagnante depuis e', alors e a une stratégie gagnante depuis e.*
2. *Si i n'a pas le contrôle sur e, et si i a une stratégie gagnante depuis tous les états e' tels que $e \to e'$ est un coup légal, alors i a une stratégie gagnante depuis e.*

On ne prouvera pas ce lemme car c'est trop technique. Essentiellement, l'idée est celle qui a été expliquée en séance, en revanche des complications peuvent se poser. Dans le premier cas, il faut justifier qu'on peut décider que la stratégie prise envoie bien e sur e'. Dans le deuxième, il faut justifier qu'on peut trouver une stratégie gagnante depuis tous les e' tels que $e \to e'$ est un coup légal (plus fort que de demander qu'on en ait une, potentiellement différente pour chaque e'). On peut s'en sortir parce que être gagnant depuis un état est local et ça fait qu'on peut modifier facilement des stratégies pour qu'elles restent gagnantes depuis les états qu'on veut. Par contre il faut des outils ensemblistes un peu compliqués pour obtenir le point 2.
Un corollaire simple peut être obtenu en prenant la contraposée :

Corollaire 1. *Soit e un état non final, et $i \in \{1, 2\}$.*

1. *Si i a le contrôle sur e et n'a pas de stratégie gagnante depuis e, alors pour tout e' tel que $e \to e'$ est un coup légal, i n'a pas de stratégie gagnante depuis e'.*
2. *Si i n'a pas le contrôle sur e et n'a pas de stratégie gagnante depuis e, alors il existe e' tel que $e \to e'$ soit un coup légal, et i n'a pas de stratégie gagnante depuis e'.*

Avec ce lemme, il est facile de prouver Zermelo.

Preuve. (théorème 1) On commence par montrer que si le joueur 1 n'a pas de stratégie gagnante, alors le joueur 2 a une stratégie qui assure le match nul.
D'après le corollaire 1, tout état e non final appartenant à 2 depuis lequel 1 n'a pas de stratégie gagnante a un successeur depuis lequel 1 n'a pas non plus de stratégie gagnante. On en fixe un arbitrairement et on le note $\mathrm{Str}_2(e)$. Pour tout autre état e non final sous le contrôle de 2, on choisit arbitrairement un successeur et on le note $\mathrm{Str}_i(e)$.
On définit ainsi une stratégie pour 2, et il reste à montrer qu'elle assure le match nul. Considérons une stratégie pour le joueur 1, et notons $(e_k)_{k=0}^n$ la partie engendrée. le corollaire 1 nous assure que l'invariant « 1 n'a pas de stratégie gagnante depuis e_k » est maintenu (il est par hypothèse vérifié pour $e_0 = I$). En particulier, si la partie termine, il doit être vérifié pour le dernier état qui ne peut donc être gagnant pour 1. Ainsi cette stratégie pour 1 ne bat pas Str_2. On en déduit alors que Str_2 assure le match nul.
On peut désormais conclure : si ni 1 ni 2 n'a de stratégie gagnante, alors ce qu'on vient de dire assure que les deux peuvent assurer un match nul, ce qui nous donne ce qu'on veut.

Exercice 3. Montrer que Zermelo est faux, si on enlève une seule des trois hypothèses deux joueurs, séquentiel et information parfaite (même sans intervention du hasard).

3.2 L'algorithme du minimax

Dans le cas où le jeu est fini, on peut dériver un algorithme de l'idée de la preuve.
On associe le joueur 1 au rouge et le joeur 2 au bleu.

Algorithme 1 (minimax)**.**
Entrée : Un jeu fini.
Sortie : Qui a une stratégie gagnante.

1. Colorier les états finaux de la couleur du joueur qui gagne, ou en blanc s'ils sont nuls.
2. Pour chaque état dont tous les successeurs sont coloriés :
   — S'il est contrôlé par le joueur 1, alors le colorier en rouge si un de ses successeurs est rouge, sinon en blanc si un de ses successeurs est blanc, sinon en bleu. .
   — Sinon faire l'inverse.
3. Quand I est colorié, répondre l'éventuel joueur correspondant à sa couleur.

Pour construire les stratégies correspondantes, il suffit de mémoriser les choix de coups dans l'étape 2.
Le coloriage des états s'interprète comme « le joueur de la couleur correspondante a une stratégie gagnante depuis cet état » ; la correction découle alors facilement du lemme 1.
Il faut par contre montrer que l'algorithme termine bien, dans le sens où la recherche d'états termine bien. Pour ça, on va montrer un résultat sur les graphes.

Proposition 2 (tri topologique)**.** *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté sans cycles (avec V fini, à n éléments). Alors on peut ordonner les sommets de V en notant $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de telle sorte que s'il y a une arête $v_i \to v_j$, alors $i < j$.*

Preuve (proposition 2)*.* On commence par montrer qu'il existe un sommet de G dont ne part aucun arc. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas et prenons un sommet u_0. Alors on peut trouver par hypothèse u_1 tel que $u_0 \to u_1$, puis u_2 tel que $u_1 \to u_2$, et ainsi de suite. On obtient donc une suite infinie de sommets, et ils doivent tous être différents car le graphe est acyclique. C'est absurde car le graphe n'a qu'un nombre fini de sommets.
On note alors v_n ce sommet, et on l'enlève du graphe avec tous arcs arrivant sur lui. On peut alors recommencer ce raisonnement sur le nouveau graphe pour trouver v_{n-1}, puis v_{n-2}, et ainsi de suite.
Il reste à vérifier que c'est bien un tri topologique. Supposons par l'absurde qu'on ait $i < j$ tels qu'on ait un arc $v_j \to v_i$. Mais alors v_i était dans le graphe quand on a enlevé v_j, et cet arc aurait donc dû aussi y être, ce qui contredit le fait qu'à chaque étape aucun arc ne part du sommet qu'on enlève.

On va maintenant montrer que le graphe d'un jeu fini est orienté acyclique. On pourra en dériver un tri topologique, et le prendre à l'envers nous donne un ordre de traitement des sommets pour le minimax.
L'idée est essentiellement que si on avait un cycle, alors le suivre donnerait une partie infinie, ce qui contredirait les hypothèses. Ce n'est pas tout à fait vrai, car le raisonnement ne tient que pour les sommets accessibles (ceux qu'on peut atteindre depuis l'état initial). Mais on peut sans perte de généralité enlever les autres, ce qui nous donne ce qu'on veut.

Remarque. *L'hypothèse de finitude nous permet de partir des cas simples (les états finaux) et de remonter à partir de là.*

Remarque. *Le minimax n'est, dans la plupart des cas, pas un algorithme efficace. Il consiste essentiellement à dire qu'il est possible de trouver les stratégies du théorème de*

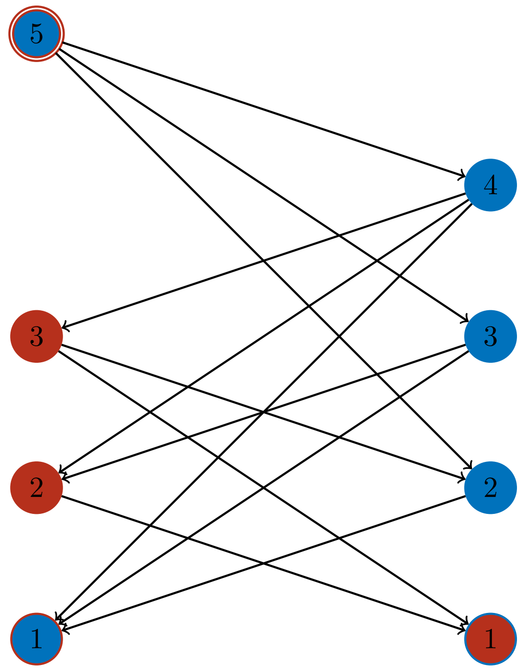

FIGURE 3 – Résultat de l'exécution de l'algorithme du minimax sur le graphe de la figure 2.3

Zermelo en testant toutes les possibilités. Pour la plupart des jeux suffisamment complexe, c'est une approche trop inefficace pour obtenir des résultats en un temps raisonnable.

4 Au delà du minimax : autres sujets intéressants

4.1 Vol de stratégie

Dans de nombreux cas, il est possible de dire des choses en plus, même si on est pas capable de calculer le cas dans lequel on est. Dans le cas de jeux très symétriques, par exemple, il est souvent possible de déterminer quel joueur peut gagner en considérant les potentiels avantages liés à jouer en premier ou en deuxième.
Un argument de ce type est le *vol de stratégie*. On en donne un exemple :

Proposition 3. *Le joueur* 2 *n'a pas de stratégie gagnante au morpion.*

Preuve. Supposons par l'absurde que ce soit le cas, et considérons la stratégie suivante pour le joueur 1 :

— Au premier coup, jouer au milieu (pas important, n'importe quelle case marcherait).
— Ensuite, toujours jouer le coup que le joueur 2 jouerait face au même plateau, en ignorant la case du milieu. Si la stratégie du joueur 2 lui dit de joueur au milieu,

jouer un autre coup arbitraire et ignorer cette nouvelle case à la place de celle du milieu.

Le joueur 1 est toujours dans une situation au moins aussi avantageuse quand il fait ses choix de coup que la situation copiée pour le joueur 2. Par conséquent, cette stratégie doit être gagnante pour 1, ce qui contredit ce qu'on a supposé.
Ainsi, le joueur 2 ne peut avoir de stratégie gagnante.

Un argument similaire marche pour le jeu de Hex. Comme il est impossible d'avoir un match nul pour Hex, Hex est gagnant pour le joueur 1.

Exercice 4. On rajoute souvent une règle supplémentaire à Hex : une fois que le joueur 1 a joué son premier coup, le joueur 2 peut choisir s'il veut ou non échanger sa position avec le joueur 1. Montrer qu'avec cette nouvelle règle Hex est gagnant pour le joueur 2.

En général, pour résoudre effectivement un jeu, il faut donc de trouver des arguments plus intelligents que la simple recherche exhaustive.

4.2 Le dilemne du prisonnier : un exemple de jeu à somme non nulle

Le dilemme du prisonnier est un jeu simple à deux joueurs : on considère deux personnes, arrêtées pour un délit. Ils ont chacun le choix d'avouer ou de nier les faits qui leurs sont reprochés. Si les deux nient, ils écopent d'un an de prison chacun. Si les deux avouent, ils prennent trois ans de prison chacun. Si en revanche seulement l'un des deux nie, alors celui là prend cinq ans et l'autre ressort libre.
Ce n'est pas un jeu à somme nulle, il y a une issue globalement meilleure pour les deux (celle où les deux nient). Cependant, elle implique que les deux soient prêts à faire confiance à l'autre, qui pourrait maximiser son intérêt propre (en supposant l'autre fidèle) et avouer.
Au final, l'option de sécurité pour les deux joueurs n'est pas celle qui donne le résultat optimal.