电磁场部分复习

赵舞穹

2023 年 4 月 25 日

1 麦克斯韦方程

1.1 基本量及其关系

- $\vec{E}(\vec{r},t)$ — 电场强度 — V/m
- $\vec{D}(\vec{r},t)$ — 电通量密度（电位移）— $\mathrm{C/m^2}$
- $\vec{H}(\vec{r},t)$ — 磁场强度 — $\mathrm{Wb/m^2}$
- $\vec{B}(\vec{r},t)$ — 磁感应强度（磁通量密度）— A/m

提示

此处所有的矢量符号我没有按照书本的印刷体，而是和手写一样使用箭头表示（$\vec{\cdot}$）；大家在作业、考试中可以注意书写的规范性，区分矢量和标量.

1.1.1 库仑定理

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi\varepsilon r^2}\vec{r}_0, \tag{1.1}$$

式中 ε 为介质常数，定义为

$$\varepsilon \triangleq \varepsilon_r\varepsilon_0, \tag{1.2}$$

式中 ε_r 为相对介电系数.

1.2 洛伦兹力

运动的点电荷在磁场中受到的力：

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}). \tag{1.3}$$

1.2.1 介质特性

物质的本构关系：

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \tag{1.4a}$$
$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \tag{1.4b}$$
$$\vec{J}_c = \sigma\vec{E}, \tag{1.4c}$$

式中传导电流密度 $\vec{J}_c = \vec{J} - \vec{J}_V = \vec{J} - \rho_V\vec{v}$.

1.3 Maxwell 方程组

1.3.1 法拉第定理

微分形式、积分形式和时谐场的复矢量形式：

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{1.5a}$$
$$\oint_l \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \tag{1.5b}$$
$$\nabla\times\vec{E} = -j\omega\vec{B}. \tag{1.5c}$$

1.3.2 安培定理

微分形式、积分形式和时谐场的复矢量形式：

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \tag{1.6a}$$
$$\oint_l \vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \tag{1.6b}$$
$$\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D}. \tag{1.6c}$$

1.3.3 高斯定理

微分形式和积分形式：

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_V, \tag{1.7a}$$
$$\oint_S \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_V\,\mathrm{d}V. \tag{1.7b}$$

1.3.4 磁通连续性原理

微分形式和积分形式：

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \tag{1.8a}$$
$$\oint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0. \tag{1.8b}$$

1.3.5 坡印廷定理

坡印廷矢量定义

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t). \tag{1.9}$$

特殊地，对于**时谐场**，有

$$\vec{S}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^*(\vec{r}), \tag{1.10}$$
$$\langle\vec{S}(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^*(\vec{r})\right]. \tag{1.11}$$

2 平面波

2.1 波方程

在无源空间中，我们有：

$$(\nabla^2 + k^2)\begin{cases}\vec{E}\\ \vec{H}\end{cases} = 0, \tag{2.1}$$

式中

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon, \tag{2.2}$$

其中 $|k| = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 为传播常数. 在方向上，$\vec{E}, \vec{H}$ 和波矢 $\vec{k}$ 两两垂直.

波阻抗（本征阻抗）

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{\omega\mu}{k} = \frac{k}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \tag{2.3}$$

波长

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \tag{2.4}$$

相速

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}. \tag{2.5}$$

2.2 极化

对于沿 $\vec{z}$ 方向的电场

$$\vec{E} \triangleq \vec{E}_x + \vec{E}_y, \tag{2.6}$$

判断

$$\dot{A} = \frac{\dot{E}_x}{\dot{E}_y} = Ae^{j\varphi}, \tag{2.7}$$

的幅度 A 和相位 φ.

2.3 有耗介质

定义复介电常数

$$\tilde{\varepsilon} \triangleq \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}, \tag{2.8}$$

其中虚部表示介质电导率的影响. 穿透深度

$$d_p = \frac{1}{k_i}, \tag{2.9}$$

此处场振幅减为 $z = 0$ 处的 $\frac{1}{e}$.

2.3.1 电导率很小

若满足 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1$，有

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 - j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right), \tag{2.10}$$

$$d_p = \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \tag{2.11}$$

2.3.2 电导率很大

若满足 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$，有

$$k = \sqrt{\omega\mu\frac{\sigma}{2}}(1 - j), \tag{2.12}$$

$$d_p = \frac{2}{\omega\mu\sigma} = \delta, \tag{2.13}$$

其中 δ 很小，被称为趋肤深度.

3 波的反射与折射及多层介质中波的传播

To be added ...

A 作业讨论

A.1 习题 3.4

问题 如果在某一表面 $\vec{E} = \vec{0}$，是否就可得出在该表面 $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$？为什么？

不能. 由 (1.5a)，

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\nabla\times\vec{E} \neq 0. \tag{A.1}$$

注意

零向量的旋度（curl）不一定为零！我们可以具体将其写为

$$\nabla\times\vec{E} = \begin{vmatrix}\vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix} \neq 0. \tag{A.2}$$

B Open Access License