

# Previous Questions

2025 年 6 月 27 日

## 1 环境配置

见 1.py

## 2 向量与矩阵

### 2.1 旋转矩阵

代码实现部分见 2-1.py

相当于将向量  $v$  顺时针旋转  $\theta$

### 2.2 矩阵指数

代码实现部分见 2-2.py

考虑泰勒展开  $e^{i\theta\hat{P}}$ ，易计算验证泡利矩阵的平方都为  $I$ ，即  $\hat{P}^2 = I$ 。故

$$\begin{aligned} e^{i\theta\hat{P}} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^k \theta^k \hat{P}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} I + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k i \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \hat{P} \\ &= \cos \theta I + i \sin \theta \hat{P} \end{aligned} \tag{1}$$

只需  $\hat{P}^2 = I$  即可。

## 2.3 矩阵关于向量的期望

代码实现部分见 2-3.py

事实上泡利矩阵还满足厄米性质，即  $\hat{P}^\dagger = \hat{P}$ ，故

$$\begin{aligned} v^\dagger \hat{Q} v &= (1, 0)(\cos \theta/2 I + i \sin \theta/2 \hat{P})^\dagger \hat{Q} (\cos \theta/2 I + i \sin \theta/2 \hat{P})(1, 0)^T \\ &= (1, 0)(\cos \theta/2 \hat{Q} - i \sin \theta/2 \hat{P} \hat{Q})(\cos \theta/2 I + i \sin \theta/2 \hat{P})(1, 0)^T \\ &= (1, 0)(\cos^2 \theta/2 \hat{Q} + \sin^2 \theta/2 \hat{P} \hat{Q} \hat{P} + i \sin \theta/2 \cos \theta/2 (\hat{Q} \hat{P} - \hat{P} \hat{Q}))(1, 0)^T \end{aligned} \quad (2)$$

有两种情况：

1.  $\hat{P} = \hat{Q}$ ，则  $\hat{P} \hat{Q} \hat{P} = \hat{Q}$ ,  $\hat{P} \hat{Q} = \hat{Q} \hat{P}$ 。
2.  $\hat{P} \hat{Q} = \pm i \hat{R}$ ，则  $\hat{P} \hat{Q} \hat{P} = \pm i \hat{R} \hat{P} = -\hat{Q}$ ,  $\hat{P} \hat{Q} - \hat{Q} \hat{P} = \pm 2i \hat{R}$  ( $\hat{R}$  也为泡利矩阵)

故

$$v^\dagger \hat{Q} v = \begin{cases} \hat{Q}_{1,1} & (\hat{P} = \hat{Q}) \\ \cos \theta \hat{Q}_{1,1} \pm \sin \theta \hat{R}_{1,1} & (\hat{P} \neq \hat{Q}) \end{cases} \quad (3)$$

总结一下可得

$$v^\dagger \hat{Q} v = \begin{cases} 1 & (\hat{P} = \hat{Q} = \sigma_z) \\ \cos \theta & (\hat{P} = \sigma_{x,y}, \hat{Q} = \sigma_z) \\ \sin \theta & (\hat{P} = \sigma_x, \hat{Q} = \sigma_y) \\ -\sin \theta & (\hat{P} = \sigma_y, \hat{Q} = \sigma_x) \\ 0 & (otherwise.) \end{cases} \quad (4)$$

## 2.4 张量积

代码实现部分见 2-4.py

## 2.5 狄拉克符号

### 2.5.1 旋转矩阵

$$|v\rangle = |0\rangle, |v'\rangle = R(\theta)|v\rangle$$

### 2.5.2 矩阵指数

### 2.5.3 矩阵关于向量的期望

$$|v_0\rangle = |0\rangle, |v\rangle = e^{i\frac{\theta}{2}\hat{P}}|v_0\rangle$$
$$E = \langle v|\hat{Q}|v\rangle$$

### 2.5.4 张量积

$$E = \langle 0^n|H|0^n\rangle$$

## 2.6 使用Tensorsircuit后端

代码实现见 2-\*-tc.py