

Previous Questions

2025 年 6 月 29 日

1 环境配置

见 1.py

2 向量与矩阵

2.1 旋转矩阵

代码实现部分见 2-1.py

相当于将向量 v 顺时针旋转 θ

2.2 矩阵指数

代码实现部分见 2-2.py

考虑泰勒展开 $e^{i\theta\hat{P}}$ ，易计算验证泡利矩阵的平方都为 I ，即 $\hat{P}^2 = I$ 。故

$$\begin{aligned} e^{i\theta\hat{P}} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^k \theta^k \hat{P}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} I + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k i \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \hat{P} \\ &= \cos \theta I + i \sin \theta \hat{P} \end{aligned} \tag{1}$$

只需 $\hat{P}^2 = I$ 即可。

2.3 矩阵关于向量的期望

代码实现部分见 2-3.py

事实上泡利矩阵还满足厄米性质，即 $\hat{P}^\dagger = \hat{P}$ ，故

$$\begin{aligned} v^\dagger \hat{Q} v &= (1, 0)(\cos \theta/2 I + i \sin \theta/2 \hat{P})^\dagger \hat{Q} (\cos \theta/2 I + i \sin \theta/2 \hat{P})(1, 0)^T \\ &= (1, 0)(\cos \theta/2 \hat{Q} - i \sin \theta/2 \hat{P} \hat{Q})(\cos \theta/2 I + i \sin \theta/2 \hat{P})(1, 0)^T \\ &= (1, 0)(\cos^2 \theta/2 \hat{Q} + \sin^2 \theta/2 \hat{P} \hat{Q} \hat{P} + i \sin \theta/2 \cos \theta/2 (\hat{Q} \hat{P} - \hat{P} \hat{Q}))(1, 0)^T \end{aligned} \quad (2)$$

有两种情况：

1. $\hat{P} = \hat{Q}$ ，则 $\hat{P} \hat{Q} \hat{P} = \hat{Q}$, $\hat{P} \hat{Q} = \hat{Q} \hat{P}$ 。
2. $\hat{P} \hat{Q} = \pm i \hat{R}$ ，则 $\hat{P} \hat{Q} \hat{P} = \pm i \hat{R} \hat{P} = -\hat{Q}$, $\hat{P} \hat{Q} - \hat{Q} \hat{P} = \pm 2i \hat{R}$ (\hat{R} 也为泡利矩阵)

故

$$v^\dagger \hat{Q} v = \begin{cases} \hat{Q}_{1,1} & (\hat{P} = \hat{Q}) \\ \cos \theta \hat{Q}_{1,1} \pm \sin \theta \hat{R}_{1,1} & (\hat{P} \neq \hat{Q}) \end{cases} \quad (3)$$

总结一下可得

$$v^\dagger \hat{Q} v = \begin{cases} 1 & (\hat{P} = \hat{Q} = \sigma_z) \\ \cos \theta & (\hat{P} = \sigma_{x,y}, \hat{Q} = \sigma_z) \\ \sin \theta & (\hat{P} = \sigma_x, \hat{Q} = \sigma_y) \\ -\sin \theta & (\hat{P} = \sigma_y, \hat{Q} = \sigma_x) \\ 0 & (otherwise.) \end{cases} \quad (4)$$

2.4 张量积

代码实现部分见 2-4.py

2.5 狄拉克符号

2.5.1 旋转矩阵

$$|v\rangle = |0\rangle, |v'\rangle = R(\theta)|v\rangle$$

2.5.2 矩阵指数

2.5.3 矩阵关于向量的期望

$$|v_0\rangle = |0\rangle, |v\rangle = e^{i\frac{\theta}{2}\hat{P}}|v_0\rangle$$

$$E = \langle v|\hat{Q}|v\rangle$$

2.5.4 张量积

$$E = \langle 0^n|H|0^n\rangle$$

2.6 使用Tensorsircuit后端

代码实现部分见 2-*-tc.py

3 导数与梯度下降

3.1 数值微分

代码实现部分见 3-1.py （假设 $f(x) = \sum x_i^3, x = (11, 45, 14)$ ）

3.2 三角函数数值微分

$f(x) = A \sin(x + B) + C$ ，则 $f'(x) = A \cos(x + B)$, $f(x + \delta) - f(x - \delta) = A(\sin(x + B + \delta) - \sin(x + B - \delta)) = 2A \cos(x + B) \sin \delta$ 。取 $\tau = 2 \sin \delta$ 即有 $f'(x) = \frac{f(x+\delta)-f(x-\delta)}{\tau}$

3.3 单比特参数平移

$f(\theta) = \langle 0|(\cos \theta/2I - i \sin \theta/2\hat{P}_1)\hat{P}_2(\cos \theta/2I + i \sin \theta/2\hat{P}_1)|0\rangle$ ，与 2.4 表达式基本相同，故可类似化简为：

$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & (\hat{P}_1 = \hat{P}_2 = \sigma_z) & (A, B, C) = (0, 0, 1) \\ \cos \theta & (\hat{P}_1 = \sigma_{x,y}, \hat{P}_2 = \sigma_z) & (A, B, C) = (1, \pi/2, 0) \\ \sin \theta & (\hat{P}_1 = \sigma_x, \hat{P}_2 = \sigma_y) & (A, B, C) = (1, 0, 0) \\ -\sin \theta & (\hat{P}_1 = \sigma_y, \hat{P}_2 = \sigma_x) & (A, B, C) = (-1, 0, 0) \\ 0 & (otherwise.) & (A, B, C) = (0, 0, 0) \end{cases} \quad (5)$$

有显著的周期性，且符合 3.2 中的形式（后面为对应的 A, B, C ），故参数平移法给出的导数是正确的。

3.4 梯度下降

代码实现部分见 3-4.py

4 测量

4.1 线路期望计算

代码实现部分见 4-1.py

4.2 基于测量结果近似期望

代码实现部分见 4-2.py

4.3 测量不确定度

执行完 4-1 中电路后状态变为 $\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$ ，而 $|00\rangle, |11\rangle$ 都为 $Z_1 Z_2$ 特征值为 1 对应的特征向量，故测量结果必为 1，最后算得的期望也为 1，与 4-1 计算的不会有差异。