博弈论第一次作业

March 27, 2023

TeddyHuang-00
teddyhuangnan@gmail.com
xxx-xxxx-xxxx

解答

以下为教材 6.11 中的部分题目解答，段落标题为对应题号。

1

断言：在二人博弈中，假设 A 有一个占优策略 S_A，则存在一个纯策略的纳什均衡，其中参与人 A 采取策略 S_A，参与人 B 采取对 S_A 的一个最佳应对策略 S_B

此断言正确，一个直观证明如下：

$S_A = \arg\max_{S_A^* \in \mathcal{S}_A} V_A(S_A^* \mid S_B^*)$ 对于 $\forall S_B^* \in \mathcal{S}_B$ 均成立，因此 A 一定选择 S_A 作为自己的策略。

易证必存在 $S_B = \arg\max_{S_B^* \in \mathcal{S}_B} V_B(S_B^* \mid S_A)$，则构成一个纳什均衡，即有：

$$\forall S_B^* \in \mathcal{S}_B, V_A(S_A \mid S_B) \geq V_A(S_A^* \mid S_B) \tag{1}$$

$$\forall S_A^* \in \mathcal{S}_A, V_B(S_B \mid S_A) \geq V_B(S_B^* \mid S_A) \tag{2}$$

2

陈述：在二人博弈的纳什均衡中，每个参与人都选择了一个最优策略，所以两个参与人的策略是社会最优。

此陈述不正确，一个简单的反例如下：

以下为一个 A 和 B 二人博弈的矩阵，每个 (x, y) 表示若 A 采取该行策略 S_A 以及 B 采取该列策略 S_B 的情况下 A 和 B 各自的收益。

	$S_B^{(1)}$	$S_B^{(2)}$
$S_A^{(1)}$	$(2,2)$	$(0,3)$
$S_A^{(2)}$	$(3,0)$	$(1,1)$

在上述这个例子中，$\left(S_A^{(2)}, S_B^{(2)}\right)$ 构成一个纳什均衡，此时任意一方单独的改变策略均会使得自己的收益减小。这与社会最优的策略 $\left(S_A^{(1)}, S_B^{(1)}\right)$ 是不一致的。

5

对于给定的二人博弈：

	L	M	R
U	$1, 1$	$2, 3$	$1, 6$
M	$3, 4$	$5, 5$	$2, 2$
D	$1, 10$	$4, 7$	$0, 4$

只需求出对 A 的局部最优策略组

$$\pi_A^* = \left\{ \left(\arg\max_{S_A} \{V_A(S_A|S_B)\}, S_B \right) \mid \forall S_B \in \mathcal{S}_B \right\} \tag{3}$$

和对 B 的局部最优策略组

$$\pi_B^* = \left\{ \left(S_A, \arg\max_{S_B} \{V_B(S_B|S_A)\} \right) \mid \forall S_A \in \mathcal{S}_A \right\} \tag{4}$$

则易证纳什均衡的策略组为

$$\pi^* = \pi_A^* \cup \pi_B^* \tag{5}$$

遵循此思路，求得：

$$\pi_A^* = \{(M, L), (M, M), (M, R)\} \tag{6}$$

$$\pi_B^* = \{(U, R), (M, M), (D, L)\} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \pi^* = \pi_A^* \cup \pi_B^* = \{(M, M)\} \tag{8}$$

因此只有 (M, M) 构成纯策略纳什均衡。

6

a

对如下描述的收益矩阵，找出该博弈中所有纯策略纳什均衡：

	L	R
U	$2, 15$	$4, 20$
D	$6, 6$	$10, 8$

根据 Equation 5 的推论可得：

$$\begin{aligned} \pi^* &= \pi_A^* \cup \pi_B^* \\ &= \{(D, L), (D, R)\} \cup \{(U, R), (D, R)\} \\ &= \{(D, R)\} \end{aligned} \tag{9}$$

b

对如下描述的收益矩阵，找出该博弈中所有纯策略纳什均衡：

	L	R
U	3, 5	4, 3
D	2, 1	1, 6

根据 Equation 5 的推论可得：

$$\begin{aligned} \pi^* &= \pi_A^* \cup \pi_B^* \\ &= \{(U, L), (U, R)\} \cup \{(U, L), (D, R)\} \\ &= \{(U, L)\} \end{aligned} \tag{10}$$

c

对如下描述的收益矩阵，找出该博弈中所有纳什均衡：

	L	R
U	1, 1	4, 2
D	3, 3	2, 2

根据 Equation 5 的推论可得纯策略均衡：

$$\begin{aligned} \pi^* &= \pi_A^* \cup \pi_B^* \\ &= \{(D, L), (U, R)\} \cup \{(U, R), (D, L)\} \\ &= \{(D, L), (U, R)\} \end{aligned} \tag{11}$$

对于混合策略均衡，假设 $p \coloneqq P(S_A = U), q \coloneqq P(S_B = L)$，则应满足：

$$\begin{gathered} V_A(U) = V_A(D) \\ \Rightarrow 1 \times q + 4 \times (1 - q) = 3 \times q + 2 \times (1 - q) \\ \Rightarrow q = \frac{1}{2} \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} V_B(L) = V_B(R) \\ \Rightarrow 1 \times p + 3 \times (1 - p) = 2 \times p + 2 \times (1 - p) \\ \Rightarrow p = \frac{1}{2} \end{gathered} \tag{13}$$

则 $(0.5, 0.5)$ 为混合策略纳什均衡

9

试找出如下二人博弈的所有纳什均衡

a

	L	R
U	8, 4	5, 5
D	3, 3	4, 8

纯策略解

根据 Equation 5 的推论可得纯策略均衡:

$$\begin{aligned}\pi^* &= \pi_A^* \cup \pi_B^* \\ &= \{(U,L),(U,R)\} \cup \{(U,R),(D,R)\} \\ &= \{(U,R)\}\end{aligned} \tag{14}$$

混合策略

由于 A 存在最优策略 U，因此不存在混合策略均衡

b

	L	R
U	0, 0	-1, 1
D	-1, 1	2, -2

纯策略解

根据 Equation 5 的推论可得纯策略均衡:

$$\begin{aligned}\pi^* &= \pi_A^* \cup \pi_B^* \\ &= \{(U,L),(D,R)\} \cup \{(U,R),(D,L)\} \\ &= \emptyset\end{aligned} \tag{15}$$

因此不存在纯策略均衡

混合策略

对于混合策略均衡，假设 $p := P(S_A = U), q := P(S_B = L)$，则应满足:

$$\begin{gathered}V_A(U) = V_A(D) \\ \Rightarrow 0 \times q - 1 \times (1-q) = -1 \times q + 2 \times (1-q) \\ \Rightarrow q = \frac{3}{4}\end{gathered} \tag{16}$$

$$
\begin{aligned}
V_B(L) &= V_B(R) \\
\Rightarrow 0 \times p + 1 \times (1-p) &= 1 \times p - 2 \times (1-p) \\
\Rightarrow p &= \frac{3}{4}
\end{aligned} \tag{17}
$$

则 $(0.75, 0.75)$ 为混合策略纳什均衡

13

考虑一个三人 (A, B, C) 博弈，决策空间分别为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_A &= \{U, D\} \\
\mathcal{S}_B &= \{L, R\} \\
\mathcal{S}_C &= \{l, r\}
\end{aligned} \tag{18}
$$

收益矩阵为

$S_C = l$	L	R
U	4, 4, 4	0, 0, 1
D	0, 2, 1	2, 1, 0

$S_C = r$	L	R
U	2, 0, 0	1, 1, 1
D	1, 1, 1	2, 2, 2

a

假设各参与人同时行动，则纯策略纳什均衡应满足 Equation 5 的推广，即:

$$
\begin{aligned}
\pi^* &= \pi_A^* \cup \pi_B^* \cup \pi_C^* \\
&= \{(U, L, l), (U, L, r), (D, R, l), (D, R, r)\} \\
&\quad \cup \{(U, L, l), (U, R, r), (D, L, l), (D, R, r)\} \\
&\quad \cup \{(U, L, l), (U, R, l), (U, R, r), (D, L, l), (D, L, r), (D, R, r)\} \\
&= \{(U, L, l), (D, R, r)\}
\end{aligned} \tag{19}
$$

b

若 C 先选择策略，则即对应情况下 A 和 B 的二人博弈纯策略均衡分别为 π_l^*, π_r^*，则有

$$
\begin{aligned}
\pi_l^* &= \pi_{A;l}^* \cup \pi_{B;l}^* \\
&= \{(U, L), (D, R)\} \cup \{(U, L), (D, L)\} \\
&= \{(U, L)\}
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi_r^* &= \pi_{A;r}^* \cup \pi_{B;r}^* \\
&= \{(U,L),(D,R)\} \cup \{(U,R),(D,R)\} \\
&= \{(D,R)\}
\end{aligned} \tag{21}
$$

进一步将上述情况的均衡策略组拓展为三人博弈的策略组，则为

$$
\begin{aligned}
\pi'_l &= \{(U,L,l)\} \\
\pi'_r &= \{(D,R,r)\}
\end{aligned} \tag{22}
$$

则对于 C 而言，应当采取的策略组为

$$
\begin{aligned}
S &= \arg\max_{S^* \in \pi'_l \cup \pi'_r} \{V_C(S^*)\} \\
&= (U,L,l)
\end{aligned} \tag{23}
$$

因此最终得到的策略组为 (U,L,l)，它是同时行为博弈的纳什均衡解之一。

思考

如果考虑二人博弈混合策略中， 双方都能够根据对方的决策实时调整自己的决策， 使自己的收益朝增大方向变化， 则可以得到一个常微分方程系统。 该系统的不动点可以认为是该条件下的一种解。 以下为作业题目中所涉及到的一些二人博弈的结果对比。具体实现与视频演示见此 GitHub 仓库。流线图颜色表示二人收益总和（黄高紫低），即代表社会收益。

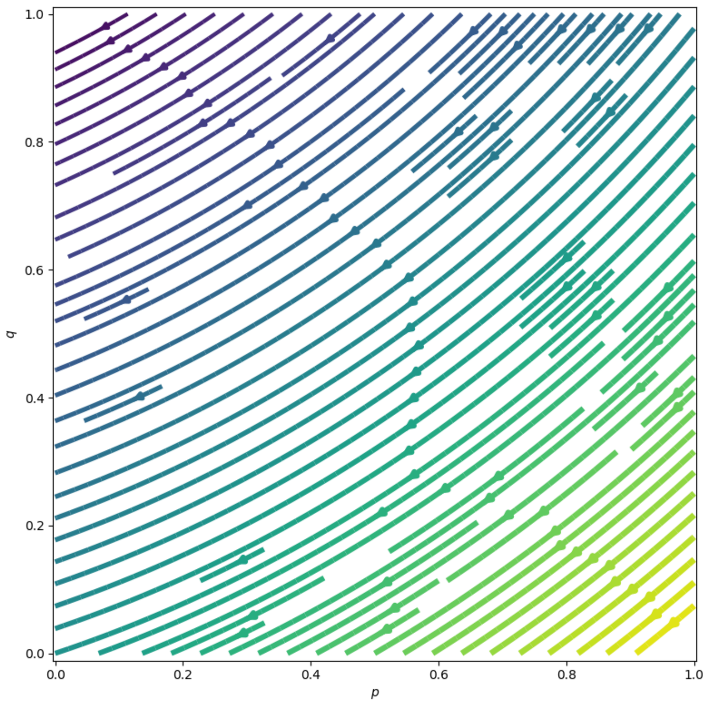

Figure 1: 图 6-31，题 6(a) 对应的博弈
系统最终收敛至 $(0,0)$，退化为纯策略均衡，与求得的 (D,R) 解对应

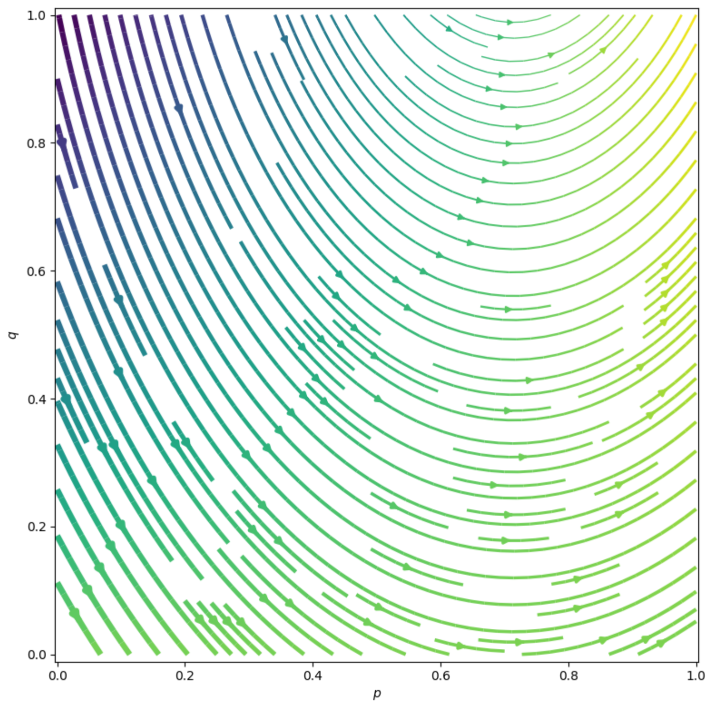

Figure 2: 图 6-32，题 6(b) 对应的博弈
系统最终收敛至 $(0,1)$，退化为纯策略均衡，与求得的 (D,L) 解对应

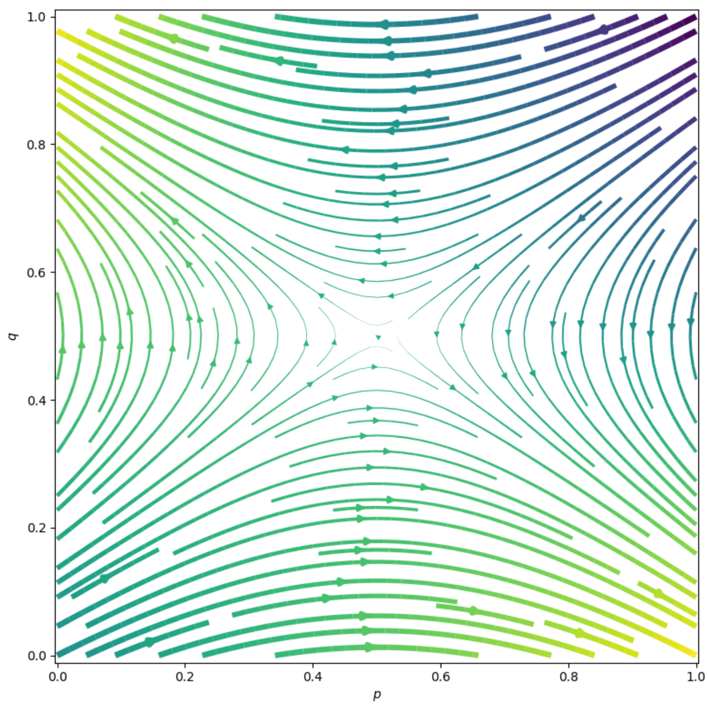

Figure 3: 图 6-33，题 6(c) 对应的博弈
系统会收敛至 $(0,1)$ 和 $(1,0)$，退化为纯策略均衡，与求得的 $(D,L),(U,R)$ 解对应
此外还存在一个不稳定的鞍点不动点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，为混合策略均衡解

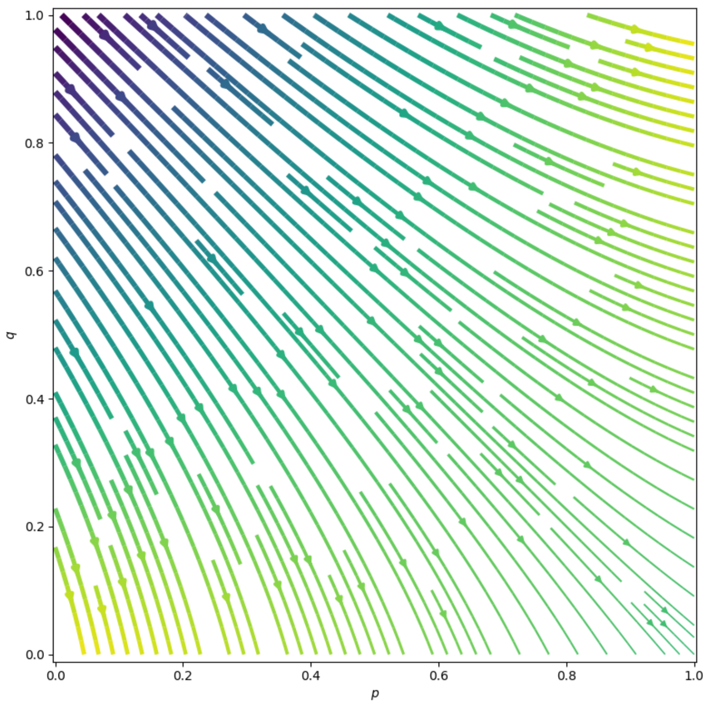

Figure 4: 图 6-37，题 9(a) 对应的博弈
系统最终收敛至 $(1,0)$，退化为纯策略均衡，与求得的 (U,R) 解对应

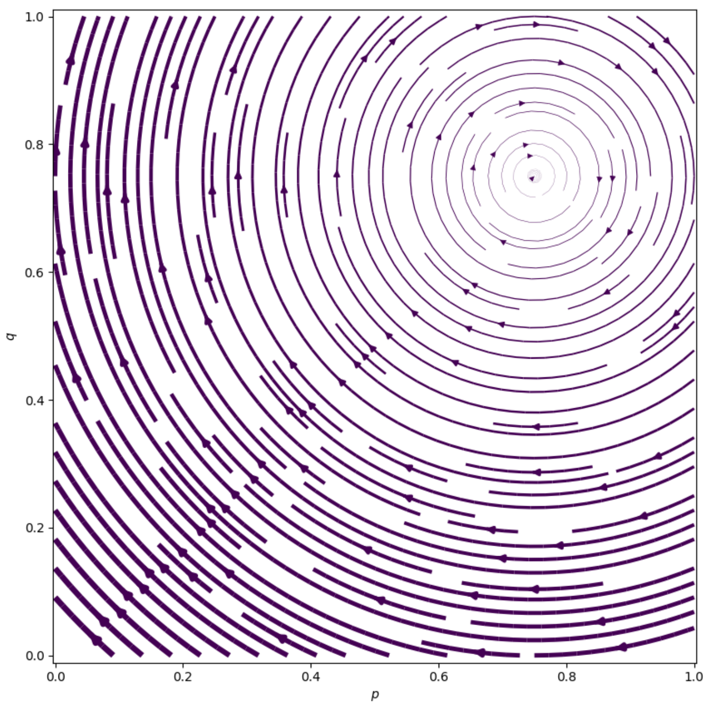

Figure 5: 图 6-38，题 9(b) 对应的博弈
系统之存在一个稳定的不动点 $(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$，为混合策略均衡解