

# Развити въпроси за изпит по ЧМ

Информатика при Лозко Милев

Теодора Иванова

21 юни 2019 г.

## Съдържание

1	Формулирайте интерполационната задача на Лагранж. Докажете единствеността. Изведете интерполационната формула на Лагранж. . . . .	3
2	Формулирайте и докажете теоремата за оценка на грешката при интерполация на Лагранж. . . . .	5
3	Дайте определение за полином на Чебишов. Напишете и докажете рекурентната връзка. Намерете нулите на полинома на Чебишов от $n$ -та степен. . . . .	6
4	Напишете и докажете интерполационната формула на Нютон с разделени разлики. Напишете задачата, която се решава с тази формула. . . . .	7
5	Напишете и докажете формулата на Нютон с крайни разлики за интерполация напред. Напишете задачата, която се решава с тази формула. . . . .	8
6	Формулирайте интерполационната задача на Ермит. Докажете, че задачата има единствено решение. . . . .	9
7	Формулирайте и докажете рекурентната връзка за разделени разлики с кратни възли. Включително случая, в който всички възли съвпадат. . . . .	10
8	Напишете и докажете, формулата за интерполационния тригонометричен полином при произволно разположени интерполационни възли в $[0, 2\pi)$ . Напишете задачата, която се решава с тази формула. . . . .	10
9	Формулирайте и докажете теоремата за представяне на сплайн функция, като линейна комбинация на полиноми и отсечени степенни функции. . . . .	12
10	Напишете и докажете рекурентната връзка за В-сплайните .	14
11	Формулирайте теоремата на Чебишов за алтернанса. Докажете достатъчността. . . . .	15
12	Формулирайте теоремата на Вайерщрас. Докажете я като използвате полиномите на Бернщайн. . . . .	15
13	Напишете и докажете тричленната рекурентната връзка за редица от ортогонални полиноми. . . . .	17
14	Формулирайте и докажете теоремата за характеризация на елемента на най-добро приближение в Хилбертово пространство. (НДУ) . . . . .	18

15	Изведете формулата от вида $f'(a) C_0 f(a-h) + C_1 f(a+h)$ и грешката $O(h^2)$ при положение, че $f$ е достатъчно гладка. Обосновете порядъка на грешката. . . . .	18
16	Изведете елементарната квадратурна формула на трапеца и оценката на грешката при подходящи предположения за подинтегралната функция. . . . .	18
17	Формулирайте и докажете теоремата за квадратурната формула на Гаус. . . . .	18
18	Формулирайте и докажете теоремата за приближено решаване на нелинейно изображение по метода свиващото изображение. . . . .	20

# 1 Формулирайте интерполационната задача на Лагранж. Докажете единствеността. Изведете интерполационната формула на Лагранж.

## Постановка на задачата

Нека  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са различни точки и  $y_1, y_2, \dots, y_n$  са дадени реални числа.

Да се построи алгебричен полином  $P(x)$  от степен  $\leq n$ , който удовлетворява следните условия:

$$P(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n \quad (1.1)$$

**Теорема 1.1.** *Ако съществува решение на 1.1, то трябва да е единствено.*

*Доказателство.* Допускаме, че съществуват два полинома  $P$  и  $Q$  от степен  $n$ , които удовлетворяват 1.1, тогава разликата

$$R(x) = P(x) - Q(x)$$

ще бъде полином от степен  $\leq n$  и освен това

$$R(x_k) = P(x_k) - Q(x_k) = y_k - y_k = 0, \quad k = 0, \dots, n$$

Следователно  $R$  е полином от степен  $n$ , който се анулира в  $n + 1$  точки. Тогава от основната теорема на алгебрата  $R(x)$  е тъждествено равен на 0. Следователно  $P \equiv Q$ .

## Извеждане на формулата

При фиксирано  $k$  да се намери полинома  $l_{nk}(x) \in \pi_n$ , който удовлетворява условията:

1.  $l_{nk}(x_i) = 0$ , за  $i = 0, \dots, n$  и  $i \neq k$

2.  $l_{nk}(x_k) = 1$ , за  $i = k$

От 1. следва, че точките  $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$  са нули на полинома  $l_{nk}$ . От  $l_{nk} \in \pi_n$  следва, че  $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$  са всичките нули. Тогава  $l_{nk}$  може да се запише във вида:

$$l_{nk}(x) = A(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n),$$

където  $A$  е някакво число.  $A$  се определя от 2..

$$1 = l_{nk}(x_k) = A(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)$$

Следователно:

$$A = \frac{1}{\prod_{i=0, i \neq k}^n (x_k - x_i)}.$$

Тогава

$$\begin{aligned} l_{nk}(x) &= \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \\ &= \prod_{i=0, i \neq k}^n \left( \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Полиномите  $\{l_{nk}\}_{k=0}^n$  се наричат базисни полиноми на Лагранж. С тяхна помощ може лесно да се построи  $P$ .

Ще покажем, че решението  $P(x)$  на 1.1 се дава с

$$P(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_{nk}(x) \quad (1.3)$$

По построение

$$l_{nk}(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

Тогава

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k l_{nk}(x_i) = y_i l_{ni}(x_i) = y_i 1 = y_i,$$

за всяко  $i = 0, \dots, n$ . От това, че полиномът 1.3 е от  $\pi_n$  ( $l_{nk} \in \pi_n$ ) и удовлетворява 1.1, следва, че  $P(x)$  даден в 1.3 е решение на интерполационната задача.

Най-често  $\{y_k\}_{k=0}^n$  са стойностите на някаква функция  $f(x)$  в точките  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , тоест

$$y_k = f(x_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

В такъв случай

$$P(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \dots, n$$

се бележи с  $L_n(f; x)$  и се нарича интерполационен полином на Лагранж за функцията  $f$  с възли  $x_0, \dots, x_n$ . Казваме още, че  $L_n(f; x)$  интерполира  $f(x)$  в точките  $(x_0, \dots, x_n)$ .

И така доказахме следната теорема

**Теорема 1.2.** Нека  $x_0 < \dots < x_n$  и  $f(x)$  е определена в тези точки. Тогава съществува единствен полином от  $\pi_n$ , който интерполира  $f$  в  $x_0, \dots, x_n$ . Този полином се представя чрез формулата:

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad (1.4)$$

Формула 1.4 се нарича интерполационна формула на Лагранж.

## 2 Формулирайте и докажете теоремата за оценка на грешката при интерполация на Лагранж.

**Теорема 2.1.** Нека  $[a, b]$  е даден краен интервал и  $x_0, \dots, x_n$  са различни точки в него. Нека функцията  $f(x)$  има непрекъснатата  $(n + 1)$ -ва производна в  $[a, b]$ . Тогава  $\forall x \in [a, b] \exists \xi \in [a, b]$  :

$$f(x) - L_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n).$$

*Доказателство.* Образоваме помощната функция

$$F(t) = f(t) - L_n(f; t) - c(t - x_0) \dots (t - x_n),$$

където  $c$  е параметър.  $F(t)$  се анулира в точките  $x_0, \dots, x_n$  при всеки избор на  $c$ .

$$F(x_k) = f(x_k) - L_n(f; x_k) - c \cdot 0 = f(x_k) - f(x_k) = 0.$$

Избираме  $c$  така, че  $F(t)$  да се анулира и при  $t = x$ . От равенството

$$f(x) - L_n(f; x) - c(x - x_0) \dots (x - x_n) = 0$$

определяме

$$c = \frac{R_n(f; x)}{(x - x_0) \dots (x - x_n)}. \quad (2.1)$$

И така при този избор на  $c$  функцията  $F(t)$  има поне  $n + 2$  нули. Това са точките  $x, x_0, \dots, x_n$ . По теоремата на Рол  $F'(t)$  ще има поне  $n + 1$  нули, които лежат в интервала  $[a, b]$ ,  $F''(t)$  ще има поне  $n$  нули и тн.  $F^{(n+1)}(t)$  ще има поне една нула, която лежи в  $[a, b]$ . Да я означим с  $\xi$ . Имаме  $F^{(n+1)}(\xi) = 0$ . От друга страна,

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(\xi) &= f^{(n+1)}(\xi) - L_n(f; \xi) - c(n+1)! = \\ &= f^{(n+1)}(\xi) - c(n+1)!. \end{aligned}$$

Следователно

$$c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Като сравним това равенство с 2.1 получаваме:

$$R_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n).$$

Теоремата е доказана. □

### 3 Дайте определение за полином на Чебишов. Напишете и докажете рекурентната връзка. Намерете нулите на полинома на Чебишов от $n$ -та степен.

**Дефиниция 3.1.** Полиномът на Чебишов от първи род от  $n$ -та степен се бележи с  $T_n(x)$  и се определя в интервала  $[-1, 1]$  чрез равенството

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), x \in [-1, 1]. \quad (3.1)$$

Непосредствено от дефиницията следва, че:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \end{aligned}$$

Освен това съгласно формулата за събиране на синуси:

$$\begin{aligned} T_{n+1} + T_{n-1} &= \cos((n+1)\arccos x) + \cos((n-1)\arccos x) \\ &= 2\cos(\arccos x)\cos(n\arccos x) \\ &= \boxed{2xT_n(x)}, \end{aligned}$$

при всяко  $n > 1$ . Оттук получаваме следната рекурентна връзка

$$T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (3.2)$$

Като използваме равенство 3.1 веднага можем да намерим нулите на полинома. Очевидно  $T_n(x) = 0$  при  $\arccos x = (2k-1)\frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, \dots$ . Оттук следва, че нулите на полинома са:

$$\xi_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, \dots, n.$$

#### 4 Напишете и докажете интерполационната формула на Нютон с разделени разлики. Напишете задачата, която се решава с тази формула.

Ще изведем формулата на Нютон за интерполационни полиноми. За целта разглеждаме разликата:

$$L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x),$$

където  $L_{k+1}(f; x)$  интерполира  $f$  в  $x_0, \dots, x_{k+1}$ , а  $L_k(f; x)$  интерполира  $f$  в  $x_0, \dots, x_k$ . Ясно е, че  $L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x) \in \pi_{k+1}$ . Освен това

$$L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x) = f(x_i) - f(x_i) = 0, \text{ за } i = 0, \dots, k.$$

Следователно  $x_0, \dots, x_k$  са всичките нули на полинома  $L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x)$ . Тогава той може да се запише във вида:

$$L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x) = A(x - x_0) \dots (x - x_k), \quad (4.1)$$

където  $A$  е константа. За да намерим  $A$  нека сравним коефициентите пред  $x^{k+1}$  в 4.1.

Съгласно теоремата за разделените разлики коефициента пред  $x^{k+1}$  в  $L_{k+1}(f; x)$  е равен на разделената разлика  $f[x_0, \dots, x_{k+1}]$ . Следователно

$$A = f[x_0, \dots, x_{k+1}]$$



и следователно от 4.1

$$L_{k+1}(f; x) = L_k(f; x) + f[x_0, \dots, x_{k+1}](x - x_0) \dots (x - x_k) \quad (4.2)$$

Нека приложим 4.2 за  $k = n-1, n-3, \dots, 2, 1, 0$ . Получаваме следния явен израз за интерполационния полином на Лагранж.

$$\begin{aligned} L_n(f; x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \\ & + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ & + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Това е интерполационната формула на Нютон. Понякога ще я записваме съкратено така

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}), \quad (4.3)$$

като приемаме, че  $(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) = 1$  при  $k = 0$ . Може и с инфукция наобратно Напишете задачата - може би табличката

## 5 Напишете и докажете формулата на Нютон с крайни разлики за интерполация напред. Напишете задачата, която се решава с тази формула.

Нека вземете  $\{x_i\}_0^n$  са равноотдалечени и функцията  $f$  е дефинирана в тях. Търсим полинома  $L_n(f; x) \in \pi_n$ , който интерполира  $f$  в  $x_0, \dots, x_n$ . Съгласно интерполационната формула на Нютон:

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}).$$

Нека  $x_i = x_0 + ih, i = 0, \dots, n$  и  $x = x_0 + th$ . Тогава

$$(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) = \prod_{i=0}^{k-1} (x_0 + th - x_0 - ih) = h^k t(t-1) \dots (t-k+1).$$

Сега като използваме връзката между разделената разлика и крайната разлика, тоест  $f[x_0, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$ , получаваме

$$L_n(f; x) = L_n(f; x_0 + th) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f_0}{k!} t(t-1) \dots (t-k+1) = \boxed{\sum_{k=0}^n \Delta^k f_0 \binom{t}{k}}.$$

Това е формула на Нютон с крайни разлики за интерполиране напред. май пак схемата

## 6 Формулирайте интерполационната задача на Ермит. Докажете, че задачата има единствено решение.

Постановка: Нека  $x_0, \dots, x_n$  са дадени  $n + 1$  различни точки и  $\nu_0, \dots, \nu_n$  са цели положителни числа и

$$\{y_{k\lambda} : k = 0, \dots, n, \lambda = 0, \dots, \nu_k - 1\}$$

е таблица от произволни реални стойности. Означаваме с  $N = \nu_0 + \dots + \nu_n - 1$ . Да се построи алгебричен полином  $P$  от степен  $N$ , който удовлетворява условията:

$$P^{(\lambda)}(x_k) = y_{k\lambda}, k = 0, \dots, n, \lambda = 0, \dots, \nu_k - 1. \quad (6.1)$$

**Теорема 6.1.** *При всеки избор на интерполационни възли  $\{x_k\}_0^n, x_i \neq x_j \Leftrightarrow i \neq j$  и при всяка таблица от стойности  $\{y_{k\lambda}\}$  интерполационната задача на Ермит 6.1 има единствено решение.*

*Доказателство.* Условията 6.1 представляват една система от  $N + 1$  линейни уравнения с неизвестни - коефициентите  $a_0, \dots, a_N$  на полинома  $P(x)$ . Тази система има единствено решение, ако детерминантата ѝ е различна от 0. Да допуснем, че детерминантата ѝ е 0. Тогава хомогенната система:

$$P^{(\lambda)}(x_k) = 0, k = 0, \dots, n, \lambda = 0, \dots, \nu_k - 1$$

ще има някакво ненулево решение  $P(x) = a_0x^N + \dots + a_{N-1}x + a_N$ . Но горните условия означават, че  $P$  има  $N+1$  нули, броейки кратностите. От друга страна  $P \in \pi_N$ . Следователно  $P(x) \equiv 0$  и оттук  $a_0 = \dots = a_N = 0$  и стигаме до противоречие.

## 7 Формулирайте и докажете рекурентната връзка за разделени разлики с кратни възли. Включително случая, в който всички възли съвпадат.

**Теорема 7.1.** Нека  $f$  има  $k$  непрекъснати производни в  $[a, b]$ . Тогава за произволни точки  $x_0 \leq \dots \leq x_k$  от  $[a, b]$  е в сила рекурентната връзка:

$$f[x_0, \dots, x_k] = \begin{cases} \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, & x_0 < x_k \\ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & x_0 = x_k \end{cases} \quad (7.1)$$

*Доказателство.* При  $x_0 = x_k$  разглеждаме разделената разлика  $f[x_0, x_0, \dots, x_0]$  построяваме полинома  $p(x)$  използвайки формулата на Тейлър:

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

. Този полином удовлетворява условието  $p^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0), j = 0, \dots, k$ . С други думи полиномът  $p$  интерполира  $f$  в точката  $x_0$  с кратност  $k+1$ . От явния вид на  $p$  се вижда, че коефициента пред  $x^n$  е  $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ . И от това, че разделената разлика е равна на коефициента пред  $x^n$  следва, че

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \text{ при } x_0 = \dots = x_k$$

Нека  $x_0 < \dots < x_k$  и тъй като разделената разлика е линеен функционал, то

$$\begin{aligned} (x_k - x_0)f[x_0, \dots, x_k] &= \{(x_k - x_0 + x - x_0)f\}[x_0, \dots, x_k] \\ &= (x_k - x_0)f[x_0, \dots, x_k] + \{x - x_0\}f[x_0, \dots, x_k] \\ &= -f[x_0, \dots, x_{k-1}] + f[x_1, \dots, x_k] \end{aligned}$$

Следователно

$$\frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

## 8 Напишете и докажете, формулата за интерполационния тригонометричен полином при произволно разположени интерполационни възли в $[0, 2\pi)$ . Напишете задачата, която се решава с тази формула.

**Теорема 8.1.** Нека  $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < 2\pi$ . Тогава за всяка функция  $f$  определена в точките  $\{x_i\}_0^{2n}$  съществува единствен триго-

нометричен полином  $t_n$  от ред  $n$  такъв, че

$$t_n(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, 2n \quad (8.1)$$

и той има вида

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k f(x_k) \quad (8.2)$$

където

$$\lambda_k = \prod_{i=0, i \neq k}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_k-x_i}{2}\right)} \quad (8.3)$$

*Доказателство.* Функциите  $\lambda_k$  удовлетворяват условията

$$\begin{aligned} \lambda_k(x_i) &= 0, \text{ за } i \neq k \\ \lambda_k(x_i) &= 1, \text{ иначе.} \end{aligned}$$

От това следва, че изразът 8.2 ще удовлетворява интерполационните условия 8.1. Остава само да докажем, че  $\lambda_k$ , следователно и  $t_n$  са тригонометрични полиноми от ред  $n$ . За целта ще използваме индукция по  $n$ . При  $n = 1$  :

$$\begin{aligned} \lambda_k(x_1) &= \sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{x-\beta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos\frac{\beta-\alpha}{2} - \cos\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right) \\ &= \boxed{a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x} \end{aligned}$$

Следователно  $\lambda_k(x)$  е тригонометричен полином от ред 1.

Допускаме, че всяко едно произведение от  $n-1$  двойки синуси е тригонометричен полином от ред  $n-1$ . Да разгледаме произволен израз за  $\lambda_k(x)$  от вид 8.3. Той може да се запише по следния начин:

$$\begin{aligned} \lambda_k(x) &= c \prod_{i=0, i \neq k}^{2n} \sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right) \\ &= C \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \sin\left(\frac{x-\alpha_i}{2} \sin\left(\frac{x-\beta_i}{2}\right)\right) \right\} \left\{ \sin\left(\frac{x-\alpha}{2} \sin\left(\frac{x-\beta}{2}\right)\right) \right\}, \end{aligned}$$

където  $C$  е константа. Но съгласно идукционното предположение и двата израза в големите скоби са тригонометрични полиноми от ред  $n-1$  и  $1$  съответно и следователно:

$$\begin{aligned}
\lambda_k(x) &= \left( a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) (a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x) \\
&= a_0^2 + a_0 a_1 \cos x + a_0 b_1 \sin x + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k a_0 \cos(kx) + b_k a_0 \sin(kx)) \\
&\quad + a_k a_1 \cos x \cos(kx) + b_k a_1 \cos x \sin(kx) \\
&\quad + a_k b_1 \sin x \cos(kx) + b_k b_1 \sin x \sin(kx)) \\
&= a_0^2 + a_0 a_1 \cos x + a_0 b_1 \sin x + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k a_0 \cos(kx) + b_k a_0 \sin(kx)) \\
&\quad + a_k a_1 \frac{1}{2} (\cos(k-1)x + \cos(k+1)x) \\
&\quad + b_k a_1 \frac{1}{2} (\sin(k+1)x - \sin(k-1)x) + a_k b_1 \frac{1}{2} (\sin(k+1)x - \sin(k-1)x) \\
&\quad + b_k b_1 \frac{1}{2} (\cos(k-1)x - \cos(k+1)x)) \\
&= A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + \sum_{k=1}^{n-1} A_{k-1} \cos(k-1)x \\
&\quad + B_{k-1} \sin(k-1)x + A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx) + A_{k+1} \cos(k+1)x + B_{k+1} \sin(k+1)x
\end{aligned}$$

Очевидно  $\lambda_k(x)$  е линейна комбинация на  $\sin kx, \cos kx, k = 0, \dots, n$ , което означава, че  $\lambda_k$  е тригонометричен полином от ред  $n$ . Следователно и  $t_n$  също е тригонометричен полином от ред  $n$  изпълняващ условията 8.1 за интерполация.

## 9 Формулирайте и докажете теоремата за представяне на сплайн функция, като линейна комбинация на полиноми и отсечени степенни функции.

**Дефиниция 9.1.** Функцията  $s(x)$  се нарича сплайн функция от степен  $r$  с възли  $x_1 < \dots < x_n$ , ако:

1.  $s(x)$  е полином от степен най-много  $r$  във всеки подинтервал  $(x_i, x_{i+1}), i = 0, \dots, n$  ( $x_0 = -\infty, x_n = +\infty$ )

2.  $s(x), s'(x), \dots, s^{(r-1)}(x)$  са непрекъснати функции в  $(-\infty, +\infty)$

**Дефиниция 9.2.**  $S_r(x_1, \dots, x_n)$  отбелязва множеството от сплайн-функции от степен  $r$  свързани в точките  $x_1, \dots, x_n$ .

**Дефиниция 9.3.** Отсечената степенна функция :

$$(x - \xi)_+^r = \begin{cases} (x - \xi)^r, & x \geq \xi \\ 0, & x < \xi \end{cases}$$

е сплайн от степен  $r$  с единствен възел в точката  $\xi$ .

**Теорема 9.1.** Всяка сплайн функция  $s(x)$  от класа  $S_r(x_1, \dots, x_n)$  се представя по единствен начин от вида:

$$s(x) = p(x) + \sum_{k=1}^n c_k (x - x_k)_+^r, \quad (9.1)$$

където  $p(x)$  е полином от степен  $r$ , а  $c_1, \dots, c_n$  са реални числа:

$$c_k = \frac{s^{(k)}(x_k + 0) - s^{(r)}(x_k - 0)}{r!}, k = 1, \dots, n \quad (9.2)$$

*Доказателство.* Означението  $f(x+0) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x+h)$  и аналогично е за  $f(x-0)$ . Нека  $s(x) \in S_r(x_1, \dots, x_n)$ . Тогава  $s$  съвпада с някакъв полином  $P_k$  от степен  $r$  в подинтервала  $(x_k, x_{k+1})$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Тъй като  $s^{(j)}(x)$  е непрекъснатата функция в точката  $x_k$ , то  $P_{k-1}^{(j)}(x_k) = P_k^{(j)}(x_k)$ ,  $j = 0, \dots, r-1$ . Следователно

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + c_k (x - x_k)^r, \forall x, \quad (9.3)$$

където  $c_k$  е някаква константа. От тази рекурентна връзка следва, че

$$P_k(x) = P_0(x) + \sum_{i=1}^k c_i (x - x_i)^r.$$

Като вземем предвид, че  $s(x) \equiv P_k(x)$ ,  $x \in (x_k, x_{k+1})$  и определението за отсечена функция от горното равенство получаваме

$$s(x) = P_0(x) + \sum_{i=0}^n c_i (x - x_i)_+^r,$$

което е търсено представяне. Остава да покажем, че коефициентите  $c_k$  се определят еднозначно. Диференцираме 9.3  $r$ -пъти в точката  $x_k$  и получаваме:

$$P_k^{(r)} = P_{k-1}^{(r)}(x_k) + c_k r!$$

и оттук

$$c_k = \frac{s^{(k)}(x_k + 0) - s^{(r)}(x_k - 0)}{r!}.$$

Полиномът  $p(x)$  в 9.1 се определя също еднозначно и съвпада с  $P_0(x)$ .

## 10 Напишете и докажете рекурентната връзка за В-сплайните

**Дефиниция 10.1.** Разделената разлика на отсечената степенна функция  $(x - t)_+^{r-1}$  по отношение на  $x$  в точките  $x_1 < \dots < x_r$  се нарича В-сплайн от степен  $r - 1$  с възли  $x_0, \dots, x_r$ .

**Теорема 10.1.** За всяко  $r \geq 2$  и  $t \in (-\infty, \infty)$  е в сила равенството:

$$B_{i,r-1}(t) = \frac{t - x_i}{x_{i+r} - x_i} B_{i,r-2}(t) + \frac{x_{i+r} - t}{x_{i+r} - x_i} B_{i+1,r-2}(t). \quad (10.1)$$

*Доказателство.* Ще използваме правилото на Сефансон за намиране на разделената разлика на произведение на функции:

$$(f.g)[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k] g[x_k, \dots, x_n].$$

Избираме  $f(x) = x - t$  и  $g(x) = (x - t)_+^{r-2}$ . Очевидно

$$f(x)g(x) = (x - t)_+^{r-1}, x \in (-\infty, \infty)$$

и следователно

$$B_{i,r-1}(t) = (f.g)[x_i, \dots, x_{i+r}] = f(x_i)g[x_i, \dots, x_{i+r}] + f[x_i, x_{i+1}]g[x_{i+1}, \dots, x_{i+r}],$$

тъй като  $f[x_i, \dots, x_{i+k}] = 0, k \geq 2$ . Като вземем предвид, че  $f[x_i, x_{i+1}] = 1$

и рекурентната връзка за разделените разлики получаваме:

$$\begin{aligned} B_{i,r-1}(t) &= f(x_i) \frac{g[x_{i+1}, \dots, x_{i+r}] - g[x_i, \dots, x_{i+r-1}]}{x_{i+r} - x_i} + g[x_{i+1}, \dots, x_{i+r}] \\ &= \left(1 + \frac{f(x_i)}{x_{i+r} - x_i}\right) g[x_{i+1}, \dots, x_{i+r}] - \frac{f(x_i)}{x_{i+r} - x_i} g[x_i, \dots, x_{i+r-1}] \\ &= \frac{x_{i+r} - t}{x_{i+r} - x_i} B_{i+1,r-2}(t) + \frac{t - x_i}{x_{i+r} - x_i} B_{i,r-2}(t). \end{aligned}$$

## 11 Формулирайте теоремата на Чебишов за алтернанса. Докажете достатъчността.

**Теорема 11.1.** Нека  $f$  е произволна непрекъсната функция в крайния и затворен интервал  $[a, b]$ . Необходимо и достатъчно условие е полиномът  $P \in \pi_n$  да бъде полином на най-добро равномерно приближение за  $f$  от  $n$ -та степен в  $[a, b]$  е да съществува  $n+2$  точки  $\{x_i\}_0^{n+1} \in [a, b] : a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$  и

$$f(x_i) - P(x_i) = (-1)^i \epsilon \|f - P\|, i = 0, \dots, n+1, \quad (11.1)$$

където  $\epsilon = 1$  или  $\epsilon = -1$ .

*Доказателство.* Условието 11.1 означава, че разликата  $f(x) - P(x)$  достига максимумалата си по модул стойност в  $n+2$  точки, като си сменя алтернативно знака. В такъв случай казваме, че  $f$  и  $P$  осъществяват алтернанс в  $n+2$  точки. Достатъчност на 11.1.

Нека  $P$  удовлетворява 11.1, тоест съществува  $n+2$  точки  $\{x_i\}_0^{n+1} \in [a, b] : a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$  и  $f(x_i) - P(x_i) = (-1)^i \epsilon \|f - P\|$ ,  $i = 0, \dots, n+1$ , където  $\epsilon = 1$  или  $\epsilon = -1$ . Тогава е изпълнено:

$$E_n(f) \geq \|f - P\|.$$

Но, по определение,  $E_n(f) \leq \|f - Q\|, \forall Q \in \pi_n$ . Следователно  $E_n(f) = \|f - P\|$  и  $P$  е полином на най-добро равномерно приближение

## 12 Формулирайте теоремата на Вайерщрас. Докажете я като използвате полиномите на Бернщайн.

**Дефиниция 12.1.** Нека  $f(x)$  е произволна функция, дефинирана в интервала  $[0, 1]$ . Полиномът на Бернщайн от степен  $n$  за функцията  $f$



се бележи с  $B_n(f; t)$  и се определя с равенството:

$$B_n(f; t) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

**Дефиниция 12.2.** Нека  $f$  е функция дефинирана в  $[a, b]$ . Величината:

$$w(f; \delta) = \sup |f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b], |x - y| \leq \delta$$

се нарича модул на непрекъснатост на  $f$  в  $[a, b]$ .

**Теорема 12.1.** Нека  $f$  е произволна непрекъсната функция в  $[0, 1]$ . Тогава за всяко  $n$  и всяко  $t \in [0, 1]$  имаме

$$|f(t) - B_n(f; t)| \leq \frac{3}{2} w\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (12.1)$$

**Теорема 12.2.** Нека  $[a, b]$  е произволен краен интервал и  $f(x)$  е непрекъсната функция в него. Тогава  $\forall \epsilon > 0$  съществува алгебричен полином  $P(x)$  такъв, че:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| \leq \epsilon.$$

*Доказателство.* Въвеждаме функцията:

$$h(t) = f(a + t(b - a)), t \in [0, 1].$$

Тъй като  $f(x)$  е непрекъсната в  $[a, b]$ , то и  $h(t)$  ще е непрекъсната в  $[0, 1]$  и следователно

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w(h, \delta) = 0.$$

Тогава  $\exists n$  :

$$\frac{3}{2} w\left(h; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \epsilon$$

От теорема 12.1

$$|h(t) - B_n(h; t)| \leq \frac{3}{2} w\left(h; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \epsilon$$

за това  $n$ . Тоест полинома  $B_n(h; t)$  приближава  $h$  в  $[0, 1]$  с точност  $\epsilon$ . Сега, като се върнем обратно към променливата  $x$  със смяната  $t = \frac{x-a}{b-a}$ , получаваме:

$$\left| h\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - B_n\left(h; \frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \epsilon, x \in [a, b].$$

Където  $f(x) = h\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$  и  $P(x) = B_n\left(h; \frac{x-a}{b-a}\right)$  са алгебрични полиноми от степен  $n$ . Тогава  $P(x)$  е полином, за който

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, x \in [a, b].$$

Доказателството е завършено.

### 13 Напишете и докажете тричленната рекурентната връзка за редица от ортогонални полиноми.

**Свойство 1.** За всяка система от ортогонални полиноми  $P_0(x), P_1(x) \dots$  съществува тричленна рекурентна връзка от вида:

$$P_{n+1} = (A_n x - B_n)P_n(x) + C_n P_{n-1}(x), n = 1, 2, \dots, \quad (13.1)$$

където  $A_n, B_n, C_n$  са константи.

*Доказателство.*

$$xP_n(x) = a_0 P_0(x) + \dots + a_n P_n(x) + a_{n+1} P_{n+1}(x)$$

с някакви константи  $a_0, \dots, a_{n+1}$ . Умножаваме с  $P_i(x)$  и интегрираме. Получаваме:

$$\int_a^b \mu(x) x P_n(x) P_i(x) dx = a_i (P_i, P_i), i = 0, \dots, n+1. \quad (13.2)$$

Като интеграла е равен на 0 за  $i = 0, \dots, n-2$  от ортогоналността и  $P_i \in \pi_{n-1}$ . Следователно  $a_i = 0$  при  $i = 0, \dots, n-2$  и

$$xP_n(x) = a_{n-1} P_{n-1}(x) + a_n P_n(x) + a_{n+1} P_{n+1}(x). \quad (13.3)$$

Така получаваме търсената връзка, а за коефициентите от 13.2

$$a_{n-1} = \frac{(xP_n, P_{n-1})}{(P_{n-1}, P_{n-1})}$$

$$a_n = \frac{(xP_n, P_n)}{(P_n, P_n)}$$

и от 13.3  $a_{n+1} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$ , ако  $P_k(x) = \alpha_k x^k + \dots \in \pi_{k-1}, k = 0, 1, \dots$

**14 Формулирайте и докажете теоремата за характеризация на елемента на най-добро приближение в Хилбертово пространство. (НДУ)**

**Теорема 14.1.** *Нека  $H$  е произволно хилбертово пространство и  $f \in H$ . Елементът  $p \in \Omega_n$  е елемент на най-добро приближение за  $f$  с елемент от  $\Omega_n$  тогава и само тогава, когато*

$$(f - p, \phi) = 0, \forall \phi \in \Omega_n. \quad (14.1)$$

*Доказателство.* **15 Изведете формулата от вида  $f'(a)C_0f(a-h) + C_1f(a+h)$  и грешката  $O(h^2)$  при положение, че  $f$  е достатъчно гладка. Обосновете порядъка на грешката.**

**16 Изведете елементарната квадратурна формула на трапеца и оценката на грешката при подходящи предположения за подинтегралната функция.**

**17 Формулирайте и докажете теоремата за квадратурната формула на Гаус.**

**Теорема 17.1.** *При всяко естествено число  $n$  съществува единствена квадратурна формула от вида:*

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx \equiv \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (17.1)$$

*където  $\mu(x)$  е дадено тегло, дефинирано в  $[a, b]$ ,  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ , а  $\{A_k\}_1^n \in \mathbb{R}$  с алгебрична степен на точност  $2n-1$ . Взлите  $\{x_k\}_1^n$  на тази формула са нулите на полинома от степен  $n$ , ортогонален  $[a, b]$  с тегло  $\mu(x)$  на всички алгебрични полиноми от степен  $n-1$ .*

*Доказателство.* ( $\Leftarrow$ ) Нека  $w(x)$  е полином от степен  $n$ , с коефициент 1 пред  $x_n$ , който е ортогонален в  $[a, b]$  с тегло  $\mu(x)$  на всички полиноми от степен  $n-1$  и нека  $x_1, \dots, x_n$  са неговите нули, тоест  $w(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n)$ . Ще построим интерполационната квадратурна формула от вида 17.1 с възли нулите  $\{x_k\}_1^n$  на  $w(x)$  и ще покажем, че тази формула има АСТ=

$2n - 1$ . Нека  $f$  е произволен полином от степен  $2n - 1$ . Разделяме  $f(x)$  на  $w(x)$  и получаваме:

$$f(x) = w(x)q(x) + r(x), \quad (17.2)$$

където  $q$  и  $r$  са полиноми от по-малка или равна на  $n - 1$ . Тогава:

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx = \int_a^b \mu(x)w(x)q(x)dx + \int_a^b \mu(x)r(x)dx.$$

От  $w(x)$  ортогонален на  $q(x)$ , следва че:

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx = \int_a^b \mu(x)r(x)dx$$

Формула 17.1 е точна за  $r(x)$ , тогава

$$\int_a^b \mu(x)r(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k)$$

От  $w(x_k) = 0$ , следва, че  $r(x_k) = f(x_k)$ . Получаваме

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

Квадратурната формула е точна за всяко  $f(x) \in \pi_{2n-1}$  следователно АСТ=  $2n - 1$ .

$\Rightarrow$  Нека квадратурната формула 17.1 има АСТ=  $2n - 1$ . Ще покажем, че полинома  $w(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$  е ортогонален на всеки полином от  $\pi_{n-1}$ . Тогава полиномът  $f(x) = Q(x)w(x)$  е от степен  $2n - 1$  и квадратурната формула ще бъде точна за него. Имаме

$$\int_a^b \mu(x)Q(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k Q(x_k)w(x_k) = 0,$$

тоест  $w(x)$  е ортогонален на  $Q(x)$ . Единствеността на полинома с най-висока АСТ, тоест  $2n - 1$ , следва от единствеността на полинома  $w(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$ , ортогонален на всички полиноми от  $\pi_{n-1}$ .

## 18 Формулирайте и докажете теоремата за приближено решаване на нелинейно изображение по метода свиващото изображение.

**Теорема 18.1.** Нека  $\phi$  е непрекъснато изображение на  $[a, b]$  в себе си, което удовлетворява условието на Липшиц с константа  $q < 1$ . Тогава

а Уравнението  $x = \phi(x)$  има единствен корен  $\xi \in [a, b]$ ;

б Редицата  $\{x_n\}$  клони към  $\xi$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Нещо повече

$$|x_n - \xi| \leq (b - a)q^n, \forall n \quad (18.1)$$

*Доказателство.* От това, че  $\phi$  е непрекъснато изображение на интервала  $[a, b]$  в себе си следва, че  $\phi$  има неподвижна точка в  $[a, b]$ . Да допуснем, че неподвижните точки са повече от една. Нека  $\xi_1 = \phi(\xi_1)$ ,  $\xi_2 = \phi(\xi_2)$ , за някои  $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$ . Тогава при  $\xi_2 \neq \xi_1$ :

$$\begin{aligned} |\xi_1 - \xi_2| &= |\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)| \\ &\leq q|\xi_1 - \xi_2| \quad (\text{по условие на Липшиц}) < |\xi_1 - \xi_2| \quad (\text{от } q < 1) \end{aligned}$$

И достигнахме до противоречие, следователно в интервала  $[a, b]$  имаме единствена неподвижна точка  $\xi$ . Ще докажем оценката 18.1, от която следва б. Имаме

$$\begin{aligned} |x_n - \xi| &= |\phi(x_{n-1}) - \phi(\xi)| \leq q|x_{n-1} - \xi| \\ &= q|\phi(x_{n-2}) - \phi(\xi)| \leq q^2|x_{n-2} - \xi| \\ &\dots \\ &\leq q^n|x_0 - \xi| \end{aligned}$$

От  $x_0 \in [a, b]$  и  $\xi \in [a, b]$ , то  $|x_0 - \xi| < b - a$