

# Задачи второ контролно ЧМ

Информатика при Лозко Милев

## Първи тип

### Задача 1.

Като използвате интерполационна формула на Лагранж, намерете полинома  $p \in \pi_2$ , който удовлетворява условията:  $p(-1) = 2, p(1) = 2, p(2) = 5$ . Представете  $p(x)$  по степените на  $x$ . **Решение:**

Използваме формулата

$$L_2(f; x) = \sum_{k=0}^2 f(x_k) \prod_{i=0, i \neq k}^2 \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

за  $x_0 = -1, x_1 = 1, x_2 = 2$  и получаваме

$$\begin{aligned} L_2(f; x) &= f(-1) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= 2 \frac{(x - 1)(x - 2)}{(-1 - 1)(-1 - 2)} + 2 \frac{(x + 1)(x - 2)}{(1 + 1)(1 - 2)} + 5 \frac{(x + 1)(x - 1)}{(2 + 1)(2 - 1)} \\ &= 2 \frac{x^2 - 3x + 2}{6} + 2 \frac{x^2 - x - 2}{-2} + 5 \frac{x^2 - 1}{3} \\ &= \frac{x^2 - 3x + 2 + 5x^2 - 5}{3} - x^2 + x + 2 = \frac{6x^2 - 3x - 3 - 3x^2 + 3x + 6}{3} \\ &= \frac{3x^2 + 3}{3} = \boxed{x^2 + 1} \end{aligned}$$

### Задача 2.

Полиномът  $L_2(f; x)$  интерполира  $f(x) = e^x$  в  $-1, 0, 1$ . Като използвате формулата за оценка на грешката докажете, че:

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - L_2(f; x)| \leq \frac{1}{5}.$$

### Решение:

Формулата за оценка на грешката има вида:

$$f(x) - L_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x), \xi \in [-1, 1].$$

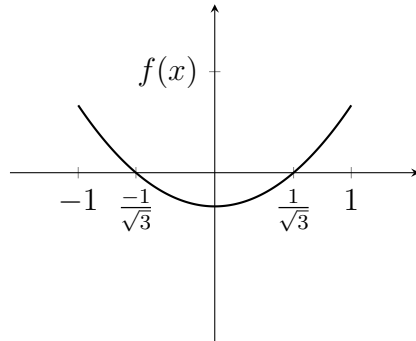
Замествайки за  $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$  получаваме:

$$\begin{aligned} f(x) - L_2(f; x) &= \frac{f^3(\xi)}{(3)!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= \frac{e^\xi}{6} (x + 1)x(x - 1) = \boxed{\frac{e^\xi}{6} (x^3 - x)}. \end{aligned}$$

Търсим максимума на получената функция

$$(f(x) - L_2(f; x))' = \frac{e^\xi}{6}(3x^2 - 1)$$

Този полином се нулира в  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$



Като максимума си достига при  $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ .

От  $\xi \in [-1, 1]$  следва, че  $e^\xi$  достига максимума си при  $x = 1$ . Тогава

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - L_2(f; x)| \leq \frac{e}{6} \max_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{-2}{3\sqrt{3}} \right|$$

От  $e < 3$  и  $\sqrt{3} < 2$

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - L_2(f; x)| \leq \frac{3}{6} \frac{2}{6} = \frac{1}{6} \leq \frac{1}{5}$$

### Задача 3.

Като използвате интерполационна формула на Нютон с разделени разлики, намерете полинома  $p \in \pi_3$ , който удовлетворява условията:  $p(-2) = -8, p(0) = 2, p(1) = 4, p(2) = 12$ . Представете  $p(x)$  по степените на  $x$ . **Решение:**

Използваме таблицата за пресмятане на разделените разлики спрямо рекурентната им дефиниция.

Нека  $x_0, \dots, x_n$  са дадени различни точки. Разделената разлика на функция  $f$  в точките  $x_0, \dots, x_n$  се бележи с  $f[x_0, \dots, x_n]$  и се определя индуктивно със следната рекурентна връзка.

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \quad n = 1, \dots, \infty$$

, като приемаме, че  $f[x_i] = f(x_i)$

$x_i$	$f_i$	$f[.,.]$	$f[.,.,.]$	$f[.,.,.,.]$
-2	-8			
		5		
0	2		-1	
		2		1
1	4		3	
		8		
2	12			

Използваме формулата на Нютон

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}),$$

като приемаме, че  $(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) = 1$  при  $k = 0$ .

$$\begin{aligned}
p(x) = L_3(f; x) &= \sum_{k=0}^3 f[-2, \dots, 2](x + 2) \dots (x - x_{k-1}) \\
&= f[-2] + f[-2, 0](x + 2)x + f[-2, 0, 1](x + 2)x + f[-2, 0, 1, 2](x + 2)x(x - 1) \\
&= -8 + 5x + 10 - x^2 - 2x + x^3 + x^2 - 2x \\
&= \boxed{2 + x + x^3}
\end{aligned}$$

#### Задача 4.

Нека  $S_k = 1^2 + \dots + k^2$  за  $k \geq 1, S_0 = 0$ . Покажете, че съществува единствен  $p \in \pi_3 : p(k) = S_k, k = 0, 1, 2, \dots$ . Намерете  $S_k$  като използвате формулата на Нютон с крайни разлики за интерполация напред.

#### Решение:

Крайна разлика от  $k$ -ти ред дефинираме индуктивно по следния начин:

$$\begin{aligned}
\Delta^0 f_i &= f_i \\
\Delta^k f_i &= \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i
\end{aligned}$$

Използвайки дефиницията за крайни разлики ще покажем, че всички крайни разлики от 4-ти ред са 0.

$k$	$S_k$	$\Delta S_k$	$\Delta^2 S_k$	$\Delta^3 S_k$	$\Delta^4 S_k$
0	0				
		1			
1	1		3		
		4		2	
2	5		5		0
		9		2	
3	14		7		0
		16		2	
4	30		9		0
		25		2	
5	55		11		0
		36		2	
6	71		13		
....	....	.....	.....	.....	.....

От това, че всички крайни разлики от 4-ти ред са 0, следва, че интерполационния полином на  $S_k$  е от  $\pi_3$ . За да намерим  $p(x) \in \pi_3$  ще използваме формула на Нютон за интерполиране напред. Провери формулите

Формула на Нютон за интерполиране напред в равноотдалечени възли

$$L_n(f; x_0 + th) = \sum_{k=0}^n \binom{t}{k} \Delta^k f_0$$

КОМЕНТАР

Формула на Нютон за интерполиране назад в равноотдалечени възли

$$L_n(f; x_n + th) = \sum_{k=0}^n \binom{t+k-1}{k} \Delta^k f_{n-k}$$

Тоест

$$\begin{aligned}
 p(x) = L_n(S; x) &= \sum_{k=0}^3 \binom{x}{k} \Delta^k S_0 = \binom{x}{0} \Delta^0 S_0 + \binom{x}{1} \Delta S_0 + \binom{x}{2} \Delta^2 S_0 + \binom{x}{3} \Delta^3 S_0 \\
 &= 0 + x \cdot 1 + \frac{x(x-1)}{2!} \cdot 3 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \cdot 2 \\
 &= x + \frac{3x^2 - 3x}{2} + \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x}{6} = \frac{6x + 9x^2 - 9x + 2x^3 - 6x^2 + 4x}{6} \\
 &= \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6} = \boxed{\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}}
 \end{aligned}$$

### Задача 5.

Като използвате интерполационна формула на Нютон с разделени разлики с кратни възли, намерете интерполационния полином на Ермит, който усовлетворява условията:  $p(0) = -1, p'(0) = 1, p''(0) = 2, p(1) = 0, p'(1) = -1$ . Представете  $p(x)$  по степените на  $x$ .

**Решение:**

Теорема. Нека  $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$  е редица от реални числа и  $f(x)$  е достатъчно гладка функция в интервал, който ги съдържа. Тогава

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \begin{cases} \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, & x_0 < x_1 < \dots < x_n \\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, & x_0 = x_1 = \dots = x_n \end{cases}$$

Използвайки горната теорема ще пресметнем таблицата с разделени-

	$x_i$	$f_i$	$f[.,.]$	$f[.,.,.]$	$f[.,.,.,.]$	
те разлики:	0	-1				
			1			
	0	-1		$\frac{2}{2!}=1$		
			1		-1	
	0	-1		0		-1
			1		-2	
	1	0		-2		
			-1			
	1	0				

Тогава интерполационния полином ще има вида:

$$\begin{aligned}
 p(x) = L_5(f; x) &= \sum_{k=0}^5 f[0, \dots, 1]x \dots (x - x_{k-1}) \\
 &= f[0] + f[0, 0]x + f[0, 0, 0]x.x + f[0, 0, 0, 1]x.x.x + f[0, 0, 0, 1, 1]x.x.x.(x - 1) \\
 &= -1 + x + x^2 - x^3 - x^4 + x^3 = \boxed{-1 + x + x^2 - x^4}
 \end{aligned}$$

### Задача 6.

Като използвате формулата за тригонометрична интерполация при равноотдалечени възли, определете коефициентите  $a_0, a_1, b_1$  така, че  $\tau(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$  да удовлетворява условията  $\tau(0) = -1, \tau(\frac{2\pi}{3}) = 2, \tau(\frac{4\pi}{3}) = 2$ .

**Решение:**

Теорема. Нека  $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < 2\pi$  са дадени възли и  $y_0, \dots, y_{2n}$  са дадени числа. Тогава съществува единствен тригонометричен полином от степен  $n$  –  $\tau_n(x) : \tau_n(x_i) = y_i, i = 0, \dots, 2n$ , който се задава с формулата

$$\begin{aligned}
 \tau_n(x) &= \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k(x) y_k, \text{ където} \\
 \lambda_k(x) &= \prod_{i=0, i \neq k}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_k-x_i}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

Използвайки горната теорема ще пресметнем първо  $\lambda$ -те:

$$\begin{aligned}
\lambda_0(x) &= \frac{\sin\left(\frac{x-x_1}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right) \sin\left(\frac{x_0-x_2}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x-\frac{2\pi}{3}}{2}\right) \sin\left(\frac{x-\frac{4\pi}{3}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{0-\frac{2\pi}{3}}{2}\right) \sin\left(\frac{0-\frac{4\pi}{3}}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{x-\frac{2\pi}{3}}{2}\right) \sin\left(\frac{x-\frac{4\pi}{3}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)} \\
&= \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right) \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)} \\
&= \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right) \left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)} \\
&= \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= 4 \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3} \\
&= \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{4} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
\lambda_1(x) &= \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x-0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-\frac{4\pi}{3}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}-0}{2}\right) \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}}{2}\right)} \\
&= -\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x-\frac{4\pi}{3}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)} \\
&= -4 \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3} \\
\lambda_2(x) &= \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x-0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}-0}{2}\right) \sin\left(\frac{\frac{4\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)} \\
&= 4 \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3}
\end{aligned}$$



Тогава за интерполационния полином получаваме:

$$\begin{aligned}
\tau_1(x) &= \sum_{k=0}^2 \lambda_k(x) y_k = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right) - \frac{3}{4} \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right. \\
&\quad - 2 \left( \sin \left( \frac{x}{2} \right) \right) \left( -\sin \left( \frac{x}{2} \right) \frac{1}{2} - \cos \left( \frac{x}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
&\quad \left. + 2 \left( \sin \left( \frac{x}{2} \right) \right) \left( \sin \left( \frac{x}{2} \right) \frac{1}{2} - \cos \left( \frac{x}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \\
&= \frac{4}{3} \left( \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right) - \frac{3}{4} \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \sin \left( \frac{x}{2} \right) \right) \left( 2 \sin \left( \frac{x}{2} \right) \frac{1}{2} + 2 \cos \left( \frac{x}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \sin \left( \frac{x}{2} \right) \frac{1}{2} - 2 \cos \left( \frac{x}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \\
&= \frac{4}{3} \left( \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right) - \frac{3}{4} \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) + 2 \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right) \\
&= \frac{4}{3} \left( 3 \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right) - \frac{3}{4} \right) = \boxed{1 - 2 \cos(x)}
\end{aligned}$$

Следователно  $a_0 = 2, a_1 = -2, b_1 = 0$ . **Задача 7.**

Да се намери явния вид на  $B(1, 2, 4, t)$  за  $t \in [1, 4]$ .

**Решение:**

Използваме

$$B(t_0, t_1, t_2, t) = \begin{cases} \frac{t-t_0}{(t_2-t_0)(t_1-t_0)}, t \in [t_0, t_1] \\ \frac{t_2-t}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)}, t \in [t_1, t_2] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}.$$

И получаваме

$$B(1, 2, 4, t) = \begin{cases} \frac{t-1}{(4-1)(2-1)}, t \in [1, 2] \\ \frac{4-t}{(4-2)(4-1)}, t \in [2, 4] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t-1}{3}, t \in [1, 2] \\ \frac{4-t}{6}, t \in [2, 4] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}.$$

**Задача 8.**

Да се намери полинома на най-добро равномерно приближение от  $\pi_1$  за

функцията  $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$  в  $[-1, 1]$  и  $E_1(f)$ .

**Решение:**

//Избираме средната точка да е там където полинома си сменя знака  
Нека  $-1, \frac{1}{2}, 1$  са точки на алтернанс, тоест

$$E_1(f) = +[f(-1) - p(-1)] = -[f(\frac{1}{2}) - p(\frac{1}{2})] = +[f(1) - p(1)]$$

и търсения полином е  $p(x) = ax + b$ . //Направи го и за произволна точка  $t$ . Тогава

$$\frac{3}{2} + a - b = \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2} - a - b$$

$$\frac{3}{2} + a - b = \frac{1}{2} - a - b \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

$$\frac{3}{2} + a - b = \frac{1}{2}a + b \Rightarrow 2b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}a \Rightarrow \boxed{b = \frac{5}{8}} \Rightarrow p(x) = \frac{1}{2}a - \frac{5}{8}$$

. От  $p(x)$  линейна функция, следва че в  $[-1, 1/2]$  тя достига своите екстремуми в краищата на интервала и аналогично и за  $[1/2, 1]$ . Тогава

$$E_1(f) = \underbrace{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{5}{8}}_{\frac{3}{8}} = \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{8}}_{\frac{3}{8}} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{8}}_{\frac{3}{8}} \Rightarrow E_1(f) = \frac{3}{8}$$

**Задача 9.**

Да се намери полинома на най-добро средноквадратично приближение от  $\pi_1$  за функцията  $f(x) = e^x$  в интервала  $[-1, 1]$  при тегло  $\mu(x) \equiv 1$ .

**Решение:**

Търсим  $p = ax + b$ , чиито базисни функции са  $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x$ . За да минимизираме

$$\int_{-1}^1 \mu(x)(f(x) - p(x))^2 dx$$

Трябва да са изпълнени следните условия за ортогоналността с  $\pi_1$ .

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{l} \int_{-1}^1 \mu(x)(f(x) - p(x))dx = 0 \\ \int_{-1}^1 \mu(x)(f(x) - p(x))xdx = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \int_{-1}^1 (e^x - ax - b)dx = 0 \\ \int_{-1}^1 (e^x - ax - b)xdx = 0 \end{array} \right| \\
 & \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \int_{-1}^1 e^x dx = a \int_{-1}^1 x dx + b \int_{-1}^1 dx \\ \int_{-1}^1 e^x x dx = a \int_{-1}^1 x^2 dx + b \int_{-1}^1 x dx \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} e^x|_{-1}^1 = a \frac{x^2}{2}|_{-1}^1 + bx|_{-1}^1 \\ xe^x|_{-1}^1 - e^x|_{-1}^1 = a \frac{x^3}{3}|_{-1}^1 + b \frac{x^2}{2}|_{-1}^1 \end{array} \right| \\
 & \Rightarrow \left| \begin{array}{l} e - \frac{1}{e} = 2b \\ e + \frac{1}{e} - e + \frac{1}{e} = \frac{2}{3}a \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} b = \frac{1}{2} \left( e - \frac{1}{e} \right) \\ a = \frac{3}{e} \end{array}}
 \end{aligned}$$

Тогава

$$p(x) = \frac{3}{e}x + \frac{e}{2} - \frac{1}{2e}.$$

### Задача 10.

Да се намери полинома от  $\pi_1$ , приближаващ по метода на най-малките квадрати таблицата:

$x_i$	0	1	3	4
$f_i$	5	2	2	1

### Решение:

Търсим полинома  $p(x) \in \pi_1 : p(x) = ax + b$ , където  $\varphi_0(x) = x, \varphi_1(x) = 1$  са базисните полиноми, за който

$$\sum_{i=1}^4 [f_i - p(x_i)]^2$$

е минимална. От ортогоналността получаваме системата

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 [f_i - p(x_i)]^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^4 [f_i - p(x_i)]^2 x = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 [f_i - ax_i - b] = 0 \\ \sum_{i=1}^4 [f_i - ax_i - b]x = 0 \end{array} \right| \\
 & \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 [f_i] = a \sum_{i=1}^4 x_i + b \sum_{i=1}^4 1 \\ \sum_{i=1}^4 [f_i]x_i = a \sum_{i=1}^4 x_i^2 + b \sum_{i=1}^4 x_i \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 10 = 8a + 4b \\ 12 = 26a + 8b \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = -\frac{4}{5} \\ b = \frac{41}{10} \end{array}}
 \end{aligned}$$

Тогава  $p(x) = -\frac{4}{5}x + \frac{41}{10}$ .

### Задача 11.

Напишете съставната квадратурна формула на трапците, осигуряваща пресмятането на  $\int_0^1 \sin x dx$  с грешка по-малка от 0.01. Обосновете се като използвате формулата за оценка на грешката **Решение:**

Съставните квадратурни формули са:

**на правоъгълниците**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^m f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

**на трапците**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2m} \left( f_0 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f_i + f_m \right)$$

**на Симпсън**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m} \left( f_0 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f_{2i} + 4 \sum_{i=1}^m f_{2i-1} + f_{2m} \right)$$

Съответните им формули за оценка на грешката:

**на правоъгълниците**

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{24m^2} f''(\xi), \xi \in [a, b]$$

**на трапците**

$$R(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^3} f''(\xi), \xi \in [a, b]$$

**на Симпсън**

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880m^4} f_{IV}(\xi), \xi \in [a, b]$$

Тогава използвайки формулата за оценка на грешката на трапците:

$$\begin{aligned} R(f) &= -\frac{(1-0)^3}{12m^3}(-\sin(\xi)), \xi \in [0, 1] \\ &= \frac{1}{12m^3}\sin(\xi) < 0.01 \end{aligned}$$

Максимум на  $\sin \xi$  в  $[0, 1]$  е при 1, а  $\sin(1) < \sin(\pi) = 1$ . Тогава:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12m^3} &< 0.01 // && \Leftrightarrow \\ 100 &< 12m^3 \\ m &> \frac{5^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} > 2 \end{aligned}$$

Следователно  $m = 3$ . Тогава

$$\boxed{\int_0^1 \sin(x) dx \approx \frac{1}{6} \left( \sin(0) + 2\left(\sin\left(\frac{1}{3}\right) + \sin\left(\frac{2}{3}\right) + \sin(1)\right) \right)}$$

### Задача 12.

Намерете с грешка по малка от 0.001 положителен корен на уравнението  $x^3 - 2x - 5 = 0$  по метода на:

а свиващите изображения

б хордите

в Нютон

### Решение:

От правилото на Лагранж получаваме груба горна граница къде ни се намира корена на уравнението

$$1 + \sqrt[k]{\frac{A}{a_0}} = 1 + \sqrt[2]{\frac{5}{1}} < 3.5$$

, където  $k$  е индекса на първия отрицателен коефициент и е най-големия по модул отрицателен коефициент. Значи търсим корена в интервала  $[0, 3.5)$ .

а свиващите изображения Изображението е:

$$x = \frac{x^3 - 5}{2} = \phi(x)$$

Строим итерационния процес като  $x_{k+1} = \phi_k$  Проверяваме дали са изпълнени условията за сходимост

$$\phi : [2, 3] \rightarrow [2, 3]$$

Проверявам дали  $\phi$  е свиващо изображение, тоест гледаме в интервала дали първата и производна е консистентно  $< 1$ .

б хордите

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n)$$

в Нютон

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$