1 Интерполационна формула на Лагранж

Постановка на задачата

Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ са различни точки и $y_1, y_2, ..., y_n$ са дадени реални числа.

Да се построи алгебричен полином $P(x)$ от степен $\leq n$, който удовлетворява следните условия:

$$P(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n \tag{1.1}$$

С други думи, при дадените $n+1$ точки $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n}$ в равнината, да се построи полином P от степен n, чиято гафика минава през дадените точки $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^{n}$.

Да отбележим най-напред, че ако изобщо съществува решение на 1.1, то трябва да е единствено.

Допускаме, че съществуват два полинома P и Q от степен n, които удовлетворяват 1.1, тогава разликата

$$R(x) = P(x) - Q(x)$$

ще бъде полином от степен $\leq n$ и освен това

$$R(x_k) = P(x_k) - Q(x_k) = y_k - y_k = 0, \quad k = 0, \dots, n$$

Следователно R е полином от степен n, който се анулира в $n+1$ точки. Тогава от основната теорема на алгебрата $R(x)$ е тъждествено равен на 0. Следователно $P \equiv Q$.

Съществуването и единствеността на решението на 1.1 се виждат и по следния начин.

Да напишем P в общ вид.

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

Тогава 1.1 добива следния вид:

$$\begin{aligned} a_0 x_0^n + \ldots + a_n &= y_0 \\ a_0 x_1^n + \ldots + a_n &= y_1 \\ &\cdots \\ a_0 x_n^n + \ldots + a_n &= y_n \end{aligned}$$

Това е система от $n+1$ линейни уравнения по отношение на $(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Детерминантата ѝ

$$V(x_0, \dots, x_n) = det \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

е детерминантата на Вандермонд. От линейната алгебра знаем, че детерминантата на Вандермонд съответстваща на точките $x_0, \dots, x_n$ е различна от), ако $x_i \neq x_j$, при $i \neq j$. Тъй като точките $x_0, \dots, x_n$ в (1) са различни по условие, $V(x_0, \dots, x_n \neq 0$ и следователно системата, а оттук и задачата има единствено решение (тоест системата е определена ???).

Извеждане на формулата При фиксирано k да се намери полинома $l_{nk}(x) \in \pi_n$, който удовлетворява условията:

1. $l_{nk}(x_i) = 0$, за $i = 0, \dots, n$ и $i \neq k$
2. $l_{nk}(x_i) = 1$, за $i = k$

От 1. следва, че точките $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots x_n$ са нули на полинома l_{nk}. От $l_{nk} \in \pi_n$ следва, че $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots x_n$ са всичките нули. Тогава l_{nk} може да се запише във вида:

$$l_{nk}(x) = A(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n),$$

където A е някакво число. A се определя от 2..

$$1 = l_{nk}(x_k) = A(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)$$

Следователно:

$$A = \frac{1}{\prod\limits_{i=0, i \neq k}^{n} (x_k - x_i)}.$$

Тогава

$$\begin{aligned} l_{nk}(x) &= \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x - x_n)} \\ &= \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Полиномите $\{l_{nk}\}_{k=0}^{n}$ се наричат базисни полиноми на Лагранж. С тяхна помощ може лесно да се построи P.

Ще покажем, че решението $P(x)$ на 1.1 се дава с

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_{nk}(x) \tag{1.3}$$

По построение

$$l_{nk}(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

Тогава

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_{nk}(x_i) = y_i l_{ni}(x_i) = y_i 1 = y_i,$$

за всяко $i = 0, \ldots, n$. От това, че полиномът 1.3 е от $\pi_n(l_{nk} \in \pi_n)$ и удовлетворява 1.1, следва,че $P(x)$ даден в 1.3 е решение на интерполационната задача.

Най-често $\{y_k\}_{k=0}^{n}$ са стойностите на някаква функция $f(x)$ в точките $x_0, x_1, \ldots, x_n$, тоест

$$y_k = f(x_k), \quad , k = 0, \ldots, n.$$

В такъв случай

$$P(x_k) = f(x_k), \quad , k = 0, \ldots, n$$

се бележи с $L_n(f; x)$ и се нарича интерполационен полином на Лагранж за функцията f с възли $x_0, \ldots, x_n$. Казваме още, че $L_n(f; x)$ интерполира $f(x)$ в точките $(x_0, \ldots, x_n)$.

И така доказахме следната теорема

Теорема 1.1. *Нека $x_0 < \ldots < x_n$ и $f(x)$ е определена в тези точки. Тогава съществува единствен полином от π_n, който интерполира f в $x_0, \ldots, x_n$. Този полином се представя чрез формулата:*

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \tag{1.4}$$

Твърдението следва веднага от 1.3 като вземем предвид, че съгласно 1.2

$$l_{nk}(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Формула 1.4 се нарича интерполационна формула на Лагранж.

Понякога ще използваме по-кратък запис за l_{nk}.

$$w'(x_k) = (x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n),$$

където

$$w(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n).$$

Тогава

$$l_{nk} = \frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)}$$

и

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)}.$$

Оценка на грешката Обикновено интерполационнния полином $L_n(f;x)$ се използва за приближаване на по сложна функция $f(x)$. Тогава възниква въпроса : Какво можем да кажем за разликата:

$$R_n(f;x) = f(x) - L_n(f;x)$$

в някакво предварително избрано x?

Да обърнем внимание, че полиномът $L_n(f;x)$ беше построен само въз основа на точките $\{x_k, f(x_k)\}_{k=0}^{n}$. Но през тези същите точки минават графиките на безброй други непрекъснати функции $g(x)$ и очевидно за тях имаме $L_n(g;x) \equiv L_n(f;x)$. При това за всяко $c > 0$ можем да построим непрекъсната функция g от разглеждания клас - такава, че $g(x) - L_n(f;x) = c$. Следователно грешката може да бъде произволно голяма ако нищо не знаем за формулата освен това, че е непрекъсната. За това в следващата теорема се налага едно допълнително условие за гладкост на f.

Теорема 1.2. *Нека $[a,b]$ е даден краен интервал и $x_0, \dots, x_n$ са различни точки в него. Нека функцията $f(x)$ има непрекъсната $(n+1)$-ва производна в $[a,b]$. Тогава $\forall x \in [a,b] \exists \xi \in [a,b]$:*

$$f(x) - L_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)\dots(x - x_n).$$

Доказателство. Образуваме помощната функция

$$F(t) = f(t) - L_n(f;t) - c(t - x_0)\dots(t - x_n),$$

където c е параметър. $F(t)$ се анулира в точките $x_0, \dots, x_n$ при всеки избор на c.

$$F(x_k) = f(x_k) - L_n(f;k) - c.0 = f(x_k) - f(x_k) = 0.$$

Избираме c така, че $F(t)$ да се анулира и при $t = x$. От равенството

$$f(x) - L_n(f;x) - c(x - x_0)\dots(x - x_n) = 0$$

определяме

$$c = \frac{R_n(f;x)}{(x - x_0)\dots(x - x_n)}. \tag{1.5}$$

И така при този избор на c функцията $F(t)$ има поне $n+2$ нули. Това са точките $x, x_0, \dots, x_n$. По теоремата на Рол $F'(t)$ ще има поне $n+1$ нули, които лежат в интервала $[a,b], F''(t)$ ще има поне n нули и тн. $F^{(n+1)}(t)$ ще има поне една нула, която лежи в $[a,b]$. Да я означим с ξ. Имаме $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. От друга страна,

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(\xi) &= f^{(n+1)}(\xi) - L_n(f;\xi) - c(n+1)! = \\ &= f^{(n+1)}(\xi) - c(n+1)!. \end{aligned}$$

Следователно

$$c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Като сравним това равенство с 1.5 получаваме:

$$R_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)\dots(x - x_n).$$

Теоремата е доказана. □

2 Разделени разлики. Интерполационна формула на Нютон.

Дефиниция 2.1. *Нека $x_0, \dots, x_n$ са дадени различни точки. Разделената разлика на функция f в точките $x_0, \dots, x_n$ се бележи с $f[x_0, \dots, x_n]$ и се определя индуктивно със следната рекурентна връзка.*

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \quad n = 1, \dots, \infty \tag{2.1}$$

, като приемаме, че $f[x_i] = f(x_i)$

Съществува връзка между интерполационния полином на Лагранж с възли $x_0, \dots, x_n$ и разделената разлика $f[x_0, \dots, x_n]$. Тя се разкрива в следната теорема.

Теорема 2.1. *Разделената разлика $f[x_0, \dots, x_n]$ съвпада с коефициента пред x^n в интерполационния полином на Лагранж $L_n(f; x)$ за функцията f с възли в същите точки $x_0, \dots, x_n$.*

Доказателство. Доказателството се извършва по индукция относно броя на точките. База: $n = 1 - x_0, x_1$

$$\begin{aligned} L_1(f; x) &= f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \\ &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0) = \\ &= f[x_0, x_1](x - x_0) + f(x_0). \end{aligned}$$

Следователно коефициентът пред x в $L_1(f; x)$ е равен на разделената разлика $f[x_0, x_1]$.

Да допуснем, че теоремата е изпълнена за произволно n. Ще докажем, че е изпълнена и за $n + 1$ точки.

Нека $x_0, \dots, x_n$ са произволни $n + 1$ различни точки и нека $p(x) \in \pi_{n-1}$ интерполира f в $x_1, \dots, x_n$ $\quad q(x) \in \pi_{n-1}$ интерполира f в $x_0, \dots, x_{n-1}$

Разглеждаме полинома

$$r(x) = \frac{(x - x_0)p(x) - (x - x_n)q(x)}{x_n - x_0}$$

От p и $q \in \pi_{n-1}$, следва, че r е алгебричен полином от степен $\leq n$. Освен това при $i \in (1, n-1)$,

$$r(x_i) = \frac{(x_i - x_0)f(x_i) - (x_i - x_n)f(x_i)}{x_n - x_0} = f(x_i)$$

При $i = 0$ и $i = n$ имаме

$$\begin{aligned} r(x_0) &= -\frac{x_0 - x_n}{x_n - x_0} q(x_0) &&= f(x_0) \\ r(x_n) &= \frac{x_n - x_0}{x_n - x_0} p(x_n) &&= f(x_n) \end{aligned}$$

Следователно $r \in \pi_n$ и r интерполира $f(x)$ в точките $x_0, \dots, x_n$. От единствеността на интерполационния полином на Лагранж следва, че:

$$r(x) \equiv L_n(f; x)$$

Следователно коефициентът пред x^n в $L_n(f; x)$ е равен на коефициентът пред x^n в $r(x)$.

Нека α и β са коефициентите пред x^{n-1} съответно в $p(x)$ и $q(x)$. Тогава от формулата за $r(x)$ се вижда, че коефициентът D пред x^n в $r(x)$ е равен на $\frac{\alpha-\beta}{x_n-x_0}$.

Но съгласно индукционното предположение

$$\begin{aligned} \alpha &= f[x_1, \dots, x_n] \\ \beta &= f[x_0, \dots, x_{n-1}] \end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned} D &= \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} = \\ &= f[x_0, \dots, x_n] \end{aligned}$$

Последното равенство следва от рекурентна връзка 2.1. Следователно индукцията е завършена и теоремата е доказана. □

От теорема 2.1 следват редица интересни свойства на разделената разлика.

От записа

$$f[x_0, x_1] = f(x_0)\frac{1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{1}{x_1 - x_0}$$

се виждам, че разделената разлика $f[x_0, x_1]$ се представя като линейна комбинация на стойностите на функцията f в x_0, x_1. Тогава от 2.1 следва, че $f[x_0, \ldots, x_n]$ се представя като линейна комбинация на f в $x_0, \ldots, x_n$.

За намиране на коефициентите пред $f(x_0), \ldots, f(x_n)$ ще използваме теорема 2.1.

От формулата на Лагранж

$$\begin{aligned} L_n(f; x) &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_0 - x_i} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n} x_k - x_i} \frac{w(x)}{x - x_k}, \end{aligned}$$

където $w(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n)$.

От последното равенство се вижда, че коефициентът пред x^n в $L_n(f; x)$ е равен на:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)}$$

Следователно съгласно теорема 2.1

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)} \tag{2.2}$$

Това е търсеното явно представяне на разделената разлика чрез стойностите на f в точките $x_0, \ldots, x_n$.

Като използваме

$$w'(x_k) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} (x_k - x_i)$$

можем да запишем 2.2 като

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{w'(x_k)}.$$

от 2.2 се вижда, че разделената разлика е един линеен функционал, тоест за всеки две функции f, g и число c е в сила формулата

$$(f + cg)[x_0, \dots, x_n] = f[x_0, \dots, x_n] + cg[x_0, \dots, x_n],$$

за всяко разместване (пермутация) $(i_0, \dots, i_n)$ на индексите $(0, \dots, n)$.

Ще докажем, че ако

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \text{то}$$
$$f[x_0, \dots, x^n] = a_0$$

С други думи разделената разлика в $n+1$ точки на полиом от степен n е равна на коефициента пред x^n. Това твърдение следва веднага от факта, че ако $f \in \pi_n$, то f съвпада с интерполационния си полином на Лагранж с $n+1$ точки. Тогава

$$\begin{aligned} f[x_0, \dots, x_n] &= \text{коефициента пред } x^n \text{ в } L_n(f; x) \\ &= \text{коефициента пред } x^n \text{ в } f(x) \\ &= a_0 \end{aligned}$$

Един важен частен случай на това твърдение е следното свойство:

Свойство 1. *Ако $f \in \pi_{n-1}$, то $f[x_0, \dots, x_n] = 0$*

Следователно разделената разлика в $n+1$ точки винаги анулира всички полиноми от степен по-малка или равна на $n-1$.

Сега вече сме готови да изведем формулата на Нютон за интерполационни полиноми. За целта разглеждаме разликата:

$$L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x),$$

където $L_{k+1}(f; x)$ интерполира f в $x_0, \dots, x_{k+1}$, а $L_k(f; x)$ интерполира f в $x_0, \dots, x_k$. Ясно е, че $L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x) \in \pi_{k+1}$. Освен това

$$L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x) = f(x_i) - f(x_i) = 0, \text{за} i = 0, \dots, k.$$

Следователно $x_0, \dots, x_k$ са всичките нули на полинома $L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x)$. Тогава той може да се запише във вида:

$$L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x) = A(x - x_0) \dots (x - x_k), \tag{2.3}$$

където A е константа. За да намерим A нека сравним коефициентите пред x^{k+1} в 2.3.

Съгласно теорема 2.1 коефициента пред x^{k+1} в $L_{k+1}(f;x)$ е равен на разделената разлика $f[x_0,\dots,x_{k+1}]$. Следователно

$$A = f[x_0,\dots,x_k+1]$$

и следователно от 2.3

$$L_{k+1}(f;x) = L_k(f;x) + f[x_0,\dots,x_{k+1}](x-x_0)\dots(x-x_k) \tag{2.4}$$

Нека приложим 2.4 за $k = n-1, n-3, \dots, 2, 1, 0$. Получаваме следния явен израз за интерполационния полином на Лагранж.

$$\begin{aligned} L_n(f;x) = f(x_0) &+ f[x_0,x_1](x-x_0)+ \\ &+ f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\dots+ \\ &+ f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

Това е интерполационната формула на Нютон. Понякога ще я записваме съкратено така

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\dots,x_k](x-x_0)\dots(x-x_{k-1}), \tag{2.5}$$

като приемаме, че $(x-x_0)\dots(x-x_{k-1}) = 1$ при $k=0$.

Представяне на грешката Сега ще изведем един израз за остатъка на f като използваме разделени разлики.

Нека x е произволна фиксирана точка различна от $x_0,\dots,x_n$. Да означим с $L_{n+1}(f;t)$ полинома, който интерполира f в точките $x_0,\dots,x_n$ и x. Нека $L_n(f;t)$ интерполира f в $x_0,\dots,x_n$.

От 2.4 следва, че

$$L_{n+1}(f;t) = L_n(f;t) + f[x_0,\dots,x_n,x](t-x_0)\dots(t-x_n).$$

Това равенство е вярно за всяко t. Специално при $t=x$ имаме

$$L_{n+1}(f;x) = L_n(f;x) + f[x_0,\dots,x_n,x](x-x_0)\dots(x-x_n).$$

Но тъй като x е интерполационнен възел на $L_{n+1}(f;t)$, то $L_{n+1}(f;t) = f(x)$. Следователно

$$f(x) = L_n(f,x) + f[x_0,\dots,x_n,x](x-x_0)\dots(x-x_n). \tag{2.6}$$

Равенството беше изведено при предположение, че $x \notin (x_0,\dots,x_n)$. При $x = x_k, k = 0,\dots,n$ по дефиниция имаме $f(x) = L_n(f;x)$.

Да отбележим, че 2.6 е в сила за всяка функция f определена в точките $x_0,\dots,x_n,x$.

Да сравним сега формулата 2.6 с известната ни вече формула

$$f(x) = L_n(f;x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n),$$

изведена при предположение, че f има непрекъната $(n+1)$-ва производна. В първия случай остатъка при интерполиране с $L_n(f;x)$ е записан като

$$f[x_0,\dots,x_n,x]w(x), \quad w(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n),$$

а във втория като

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w(x),$$

където ξ е някаква точка. Следователно разделената разлика на f в $n+2$ точки $x_0,\dots,x_n,x$ е равна на $(n+1)$-вата производна в някаква междинна точка ξ.

Свойство 2. *Нека $f(x)$ има непрекъсната производна до k-тата включително в интервала $[a,b]$ и $x_0,\dots,x_n$ са произволни различни точки в $[a,b]$. Тогава*

$$f[x_0,\dots,x_k] = \frac{f^(k)(\xi)}{k!}, \tag{2.7}$$

където ξ е някаква точка от интервала $[min\{x_0,\dots,x_k\}, max\{x_0,\dots,x_k\}]$.

От тази връзка директно следва, че ако $f \in \pi_{n-1}$, то $f[x_0,\dots,x_k] = 0$, защото $f^(k)(t) \equiv 0$

Схемата за пресмятане на разделени разлики се представя по следния начин

- в $I^{\text{вия}}$ стълб - x_i възлите

- в $II^{\text{рия}}$ стълб - стойностите $\{f(x)\}$.

Коефициентите $f[x_0,\dots,x_k], k = 0,\dots,n$ във формулата на Нютон се намират по горния диагонал на таблицата.

Схема за пресмятане на разделени разлики

x_i	f_i	$f[.,.]$	$f[.,.,.]$	$f[.,.,.,.]$
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2,x_3,x_4]$	
		$f[x_3,x_4]$		
x_4	$f(x_4)$			

3 Средноквадратични приближения

Дефиниция 3.1. *Едно линейно пространство H се нарича хилбертово, ако в него е въведено скаларно произведение. Това значи, че за всеки два елемента $f, g \in H$ се съпоставя число (f, g), което удовлетворява исловията:*

1. $(f, f) \leq 0$, *като* $(f, f) = 0 \iff f = 0$,
2. $(f, g) = (g, f)$,
3. $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h)$

Дефиниция 3.2. *Всяко хилбертово пространство може да се нормира, като се въведе норма по следния начин:*

$$||f|| = \sqrt{(f, f)}. \tag{3.1}$$

Дефиниция 3.3. *Нормата 3.1 поражда разстоянието*

$$d(f, g) = ||f - g|| = \sqrt{(f - g, f - g)}$$

Дефиниция 3.4. *Нека $[a, b]$ е даден интервал, краен или безкраен и функцията μ е определена и неотрицателна в $[a, b]$. Да предположин още, че*

$$\int_a^b \mu(x)dx > 0$$

за всеки подинтервана $[\alpha, \beta]$ на $[a, b]$. Всяка функция $\mu(x)$ с тези свойства се нарича теглова функция или тегло в $[a, b]$

Дефиниция 3.5. *Нека $[a, b]$ е даден интервал и нека μ е интегруема теглова функция в $[a, b]$. Да означим с $\mathcal{L}_2[a, b]$ пространството от всички функции опрефелин в $[a, b]$, за които*

$$\int_a^b \mu(x)f^2(x)dx < \infty.$$

Ясно е, че $\mathcal{L}_2[a, b]$ е линейно пространство.

Дефиниция 3.6. *Нека в $\mathcal{L}_2[a, b]$ е въведо скаларно произведение по следния начин:*

$$(f, g) = \int_a^b \mu(x)f(x)g(x)dx.$$

Лесно се вижда, че това определение наистина удовлетворява условията за скаларно произведение. Така $\mathcal{L}_2[a,b]$ става хилбертово пространство.

Дефиниция 3.7. *Нормата*

$$||f|| = \left\{ \int_a^b \mu(x) f^2(x) dx \right\}_{\frac{1}{2}}$$

се нарича средноквадратична норма. Тя поражда средноквадратично разстояние

$$\rho(f,g) = \left\{ \int_a^b \mu(x)(f(x) - g(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Дефиниция 3.8. *Нека $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$ са произволно линейно независими функции от пространството $\mathcal{L}_2[a,b]$. В частност, $\{\varphi_i\}$ могат да бъдат например алгебричните полиноми $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Тогава в $\mathcal{L}_2[a,b]$ можем да разглеждаме задачата за средноквадратично приближение на дадена функция $f \in \mathcal{L}_2[a,b]$ с обобщени полиноми $a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$.*

Съгласно общата теория на приближения в хилбертово пространство е в сила следната теорема.

Теорема 3.1. *За всяка функция f от $\mathcal{L}_2[a,b]$ съществува единствен полином*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x),$$

за който в

$$\int_a^b \mu(x)|f(x) - p(x)|^2 dx = \min_{a_k} \int_a^b \mu(x) \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x) \right]^2 dx$$

При това, ако $\varphi_0, \ldots, -\varphi_n$ е ортогонална система, то

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b \mu(t) f(t) \varphi_k(t) dt . \varphi_k(x) \tag{3.2}$$

Метод на най-малките кввадрати На практика често се сблъскваме със следната задача.

От теоретични съображения е известно, че изследваната от нас функция f е от определен вид зависещ от n параметри $a_1, \ldots, a_n$.(Например $\sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1}, \prod_{k=1}^{n} \sin(a_k x), \sum_{k=1}^{n} a_k x$ и тн.) Можем да изчислим стойността на f с определена точност с определен брой точки. При това, намирането на стойността на f в дадена точка може да бъде свързана с провеждане на скъпоструващ експеримент. Целта е да възстановим приближено параметрите $a_1, \ldots, a_n$ с възможено най-голяма точност въз основа на информацията

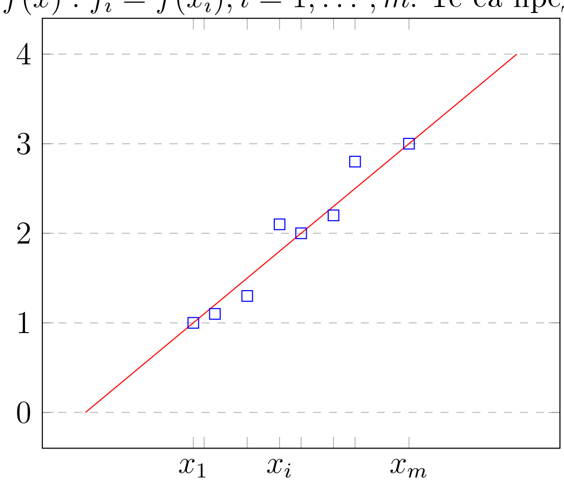
$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m), m > n.$$

Най-често тези числа са приближения на истинската стоност на f.

Например, нека знаем, че зависимостта $y = f(x)$, която изследваме е линейна, тоест

$$f(x) = Ax + B$$

при някакви A и B. Разполагаме с експирементално получени стойности на $f(x) : f_i = f(x_i), i = 1, \ldots, m$. Те са представени по долу на фиг. 7.



фиг. 7

Поради неточността на измерването или несъвършенството на експеримента точките $(x_i, f_i), i = 1, \ldots, m$ явно не лежат на една права. Знаем, че функцията $f(x)$ е линейна. Тогава коя права да вземем за представител на получените данни? Има много кандидати за такъв представител. Например, бихме могли да вземем произволни две точки (x_i, f_i) и

(x_j, f_j) от таблицата о за приближение на f да вземем правата l през тези две точки. Това е един случаен избор да се опитаме да подходим по-теоретично. Търсим функция от вида $f(x) = Ax + B$. Да означим с d_i отклонението на експериментално получената стойност f_i в точката x_i от предлаганата стойност чрез l, тоест

$$d_i = f_i - (Ax_i + B), i = 1, \dots, m.$$

Съществуват няколко разумни подхода за избора на параметрите A и B на l.

1) Избираме A и B така, че да минимизираме величината

$$\underset{1 \le i \le m}{max} |d_i|.$$

По този начин се стараем да направим максималното разстояние между f и l в точките $x_1, \dots, x_m$ минимално. Такъв критерий е приемлив, но неговата реализация е трудна, тъй като води до репаването на една нелинейна задача(функцията $max|di|$ е нелинейна спрямо A и B). 2) Избираме A и B така, че да минимизира величината

$$\sum_{i=1}^{m} |d_i|.$$

Възраженията срещу критерия 1) остават и в този случай. Те се възприемали твърде сериозно в миналото, когато хората не са разполагали със средства за бързо смятане. Затова може би изборът е паднал на следващия критерийй, който води до линейна система за определяне на параметрите. 3) Избираме A и B така, че да минимизират

$$S(A, B) \sum_{i=1}^{m} d_i^2$$

В този случай

$$S(A, B) = \sum_{i=1}^{m} |f_i - (Ax_i + B)|^2$$

и необходмите условия за минимум(които са и достатъчни) водят до системата

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0 \qquad\qquad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m}(f_i - (Ax_i + B))x_i = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = 0 \qquad\qquad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m}(f_i - (Ax_i + B)) = 0$$

Този подход за определяне на неизвестни параметри на функцията по таблица от данни се нарича метод на най-малките квадрати. Да го представим в една по-обща форма.

Нека $\{F(x, a_1, \dots, a_n)\}$ е фамилия от функции, която се описва от параметрите $a_i \in I_i, i = 1, \dots, n$. Нека $f_1, \dots, f_m$ са стойностите на конкретна функция от тази фамилия.

Дефиниция 3.9. *Ще казваме, че $F(x, a_1, \dots, a_n)$ е приближение на данните $f_1, \dots, f_m$ по метода на най-малките квадрати, ако $a_1, \dots, a_n$ минимизира израза*

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i [F(x_i, a_1, \dots, a_n) - f_i]^2,$$

където $\{\mu_i\}_1^m$ са предварително зададени числа(наречени тегла).

Да разгледаме една конкретна ситуация - приближаване на функция с алгебрични полиноми от степен n в множеството от точки $x_1 < \dots < x_m (m > n)$. И така, искаме да намерим приближение

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

на f по метода на най-малките квадрати, въз основа на стойностите $f_i = f(x_i), i = 1, \dots, m$. Нека $\{\mu_i\}_1^m$ са дадени тегла. Тогава съгласно казаното по-горе $a_0, a_1, \dots, a_n$ се определят така, че да минимизират израза

$$\Phi(a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i [f_i - \sum_{i=1}^{n} a_k x_i^k]^2$$

Вижда се, че $\Phi^{\frac{1}{2}}(a_0, \dots, a_n)$ е всъщност разстоянието между f и p в хилбертово пространство H_Δ от функции, определени в $x_1, \dots, x_n$ снабдени със скаларно произведение

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i f(x_i) g(x_i).$$

Това скаларно произведение поражда нормата

$$||f|| = \left\{\sum_{i=1}^{m} \mu_i f^2(x_i)\right\}^1 /2,$$

която от своя страна поражда разстоянието

$$\rho(f,g) = \left\{\sum_{i=1}^{m} \mu_i [f(x_i) - g(x_i)]^2\right\}^1 /2.$$

В тези термини, нашата функция $\{\Phi(a_0, \ldots, a_n\}$ е точка равна на разстоянието между f и p. Следователно методът на най-малките квадрати води до задачата за най-добро приближение с алгебрични в хилбертово пространство H_Δ. От общата теория следва, че решението $a_0, \ldots, a_n$ се определя от линейната система (4), което в този случай приема вида

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i [a_0 x_i^k + a_1 x_i^{k+1} + \ldots + a_n x_i k + n] = \sum_{i=1}^{m} \mu_i f(x_i)^k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

За да избегнем решаването на тази система можем да изберем предварително подходящ базис в пространството π_n от алгебрични полиноми. Например, ако търсехме полином p от вида

$$p(x) = b_0 P_0(x) + \ldots + b_n P_n(x),$$

където полиномите $\{P_k(x)\}$ образуват ортогонална система в множеството от точки $x_1, \ldots, x_m$ с тегла $\{\mu_i\}$, то горната система щеше да се редуцира до една диагонална система

$$b_k \sum_{i=1}^{m} \mu_i P_k^2(x_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i P_k(x_i) f(x_i),$$

откъдето коефициентът b_k се определя веднага.

4 Интерполационни квадратурни формули

Определеният интеграл е основно математическо понятие. Редица величини се представят чрез определен интеграл. Затова много често на практика възниква необходимостта от численото пресмятане на определени интеграли.

Известно е от курса по анализ, че един определен интеграл $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ може да бъде пресметнат точно само когато подинтегралната функция е достатъчно проста. В общия случай числото $I(f)$, което се определя като граница на числова редица, е недостъпно за математика въоръжен с молив, лист и курса по анализ. Съществуват обаче редица числени методи, които позволяват определения интеграл да бъде пресметнат с дадена точност. Тук ще разгледаме някои от тези методи.

Просто правило за приближено смятане на интеграли може да се получи, като заменим подинтегралната функция $f(x)$ с нейния полином на Лагранж.

Да предположим, че са известни стойностите на $f(x)$ в точките $x_0, \ldots, x_n$.Съгласно формулата на Нютон

$$f(x) = L_n(f;x) + f[x_0, \ldots, x_n, x]w(x), \tag{4.1}$$

където $L_n(f;x)$ е интерполационния полином на Лагранж

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x),$$

а $w(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_n)$. Като интегрираме 4.1 почленно от a до b получаваме формулата

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k), \tag{4.2}$$

където

$$c_k = I(l_k) = \int_a^b \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}dx, k = 0, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Грешката на това приближение е :

$$R(f) = I(f) - I(L_n(f;x)) = \int_a^b f[x_0, \ldots, x_n, x]w(x)dx \tag{4.4}$$

Формула за приближение, в която определеният интеграл се приближава с линейна комбинация на стойностите на подинтегралната функция или нейни производни в краен брой точки, се нарича квадратурна формула. 4.2 е една квадратурна формула. Точките $x_0, \ldots, x_n$ са възли, а числата $c_0, \ldots, c_n$ - коефициент на квадратурната формула.

Дефиниция 4.1. *Една квадратурна фирмула от вида 4.2 се нарича интерполационна, ако нейните коефициенти c_k се получават по формула 4.3.*

С други думи, формула с $n+1$ възела се нарича интерполационна квадратурна формула, ако тя се получава чрез интегриране на интерполационния полином на Лагранж със същите възли.

Дефиниция 4.2. *Ще казваме, че формула 4.2 е точна за f, ако $R(f) = 0$.*

Теорема 4.1. *Ако квадратурната формула 4.2 е интерполационна, то тя е точна за всеки полином от класа π_n. Обратно, ако една формула от вида 4.2 е точна за всички полиноми от класа π_n, то тя е интерполационна.*

Доказателство. $(\Rightarrow)$ Нека 4.2 е интерполационна квадратурна формула и $f \in \pi_n$. Тогава $f(x) = L_n(f; x)$ и следователно $R(f) = 0$, тоест формулата е точна (по дефиниция 4.2). $(\Leftarrow)$ Да допуснем, че 4.2 е точна за всички полиноми $f \in \pi_n$. Тогава тя ще бъде точна и за полиномите $l_i(x)$. Следователно

$$I(l_i) = \sum_{k=0}^{n} c_k l_i(x_k) = c_i, \quad i = 0, \ldots, n,$$

защото $l_i(x_k) = \delta_{ik}$. Получихме 4.3.

Теоремата е доказана. □

Както вече видяхме, грешката на интерполационната квадратурна формула се дава с израза 4.4. Тази формула не е удобна за приложение, тъй като грешката се изразява отново чрез интеграз, който дори е по-сложен от предишния. Въз основа на 4.4 обаче се правят оценки, които се използват на практика. Ще разгледаме два случая, в които се изразът за грешката може да се запише в по прост вид.

Нека полиномът $w(x)$ не си сменя знака в (a,b). Да предположим още, че $f(x)$ има непрекъсната $(n+1)$-ва производна в $[a,b]$. Тогава $f[x_0,\ldots,x_n,x]$ е непрекъсната функция на x в $[a,b]$ и съгласно теоремата за средните стойности съществува точка $t \in (a,b)$:

$$R(f) = f[x_0,\ldots,x_n,t]\int_a^b w(x)dx$$

По нататък, от връзката между разделената разлика и производната следва, че $\exists \xi \in [a,b]$:

$$R(f) = \frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n+1)!}\int_a^b w(x)dx \tag{4.5}$$

Ако $w(x)$ си сменя знака само един път в $[a,b]$ и $\int_a^b w(x) = 0$, то изразът 4.4 също може да се опрости. В този случай използваме рекурентната връзка

$$f[x_0,\ldots,x_{n+1},x] = \frac{f[x_0,\ldots,x_n,x] - f[x_0,\ldots,x_{n+1}]}{x - x_{n+1}},$$

за да получим

$$f[x_0,\ldots,x_n,x] = f[x_0,\ldots,x_n,x_{n+1},x](x-x_{n+1}) + f[x_0,\ldots,x_{n+1}],$$

за всяка точка x_{n+1} от $[a,b]$. Следователно

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b f[x_0,\ldots,x_{n+1},x](x-x_{n+1})dx + f[x_0,\ldots,x_{n+1}]\int_a^b w(x)dx = \\ &= \int_a^b f[x_0,\ldots,x_{n+1},x](x-x_{n+1})w(x)dx. \end{aligned}$$

В последното равенство използваме условието,че $\int_a^b w(x)dx = 0$. Да предположим сега, че x_{n+1} е точката, в която $w(x)$ си сменя знака. Тогава функцията $(x - x_n + 1)w(x)$ ще има постоянен знак в $[a.b]$. По нататък, при предположение, че f има непрекъсната производна, заключаваме въз основа на теоремата за средните стойности, че $\exists \xi \in (a,b)$:

$$R(f) = \frac{f^{(n+2)(\xi)}}{(n+2)!}\int_a^b (x-x_{n+1})w(x)dx. \tag{4.6}$$

Да отбележим, че в този случай грешката се изразява, чрез $(n+2)$-та производна. Следователно $R(f) = 0 \forall f \in \pi_{n+1}$, тоест квадратурната формула е точна за всички полиноми дори и от $(n+1)$-ва степен.

Използването на интерполационен полином за приближено пресмятане на интеграли е било предложено от Нютон. Английският инжинер Коутс е пресметна коефициентите на интерполационните квадратурни формули в $[0,1]$ в случая на равно отдалечени възли $x_k = \frac{k}{n}, k = 0, \ldots, n$ за $n = 1, \ldots, 15$ и публокувал таблицата с тези коефициенти. Затова интерполационните квадратурни формули с равноотдалечени възли се наричат формули на Нютон-Коутс.

Сега ще изведем в явен вид някои елементарни квадратурни формули.

Нека $\underline{n=0}$.Тогава

$$L_0(f;x) = f(x_0)$$

и следователно

$$I(f) \approx I(L_0) = f(x_0)(b-a).$$

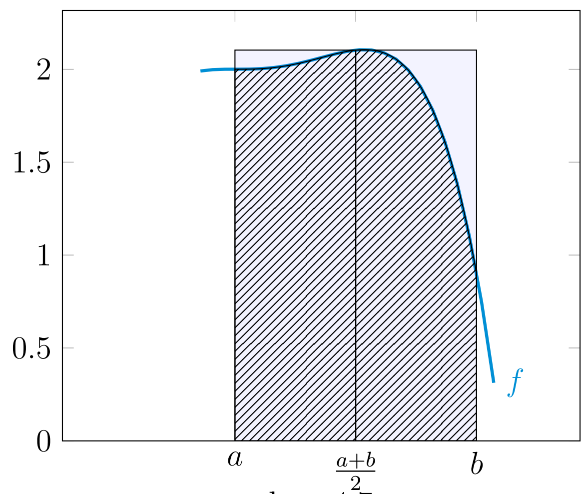
Специално при $x_0 = \frac{a+b}{2}$ получаваме

$$\int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a). \tag{4.7}$$

В този случай функцията $w(x) = x - \frac{a+b}{2}$ си сменя знака в точката $x = \frac{a+b}{2}$ и $\int_a^b w(x)dx = 0$.

Следователно при $x_0 = x_1 = \frac{a+b}{2}$ полиномът $(x-x_0)(x-x_1) = (x-\frac{a+b}{2})^2$ ще има постоянен знак в $[a,b]$. Тогава съгласно 4.6

$$R(f) = \frac{f''(\xi)}{2!}\int_a^b (x-x_0)^2 dx = f''(\xi)\frac{(b-a)^3}{24}. \tag{4.8}$$



фиг. 4.7.

Формула 4.7 е известна като квадратурна формула на правоъгълниците. Тя има прост геометричен смисъл (фиг.4.7.). Интегралът $I(f)$, който е равен на лицето на фигурата, определена от графиката на f, се приближава с лицето на правоъгълника с основа $[a, b]$ и височина $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Оттук идва и наименованието на тази формула.

<u>**Нека** $n = 1$</u>. Да изберем $x_0 = a, x_1 = b$. Тогава

$$L_1(f; x) = f(a) + f[a, b](x - a)$$
$$f(x) = L_1(f; x) + f[a, b, x](x - a)(x - b)$$

Заменяме $I(f)$ с $I(L_1)$ и получаваме квадратурна формула-

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) - f(b)]. \tag{4.9}$$

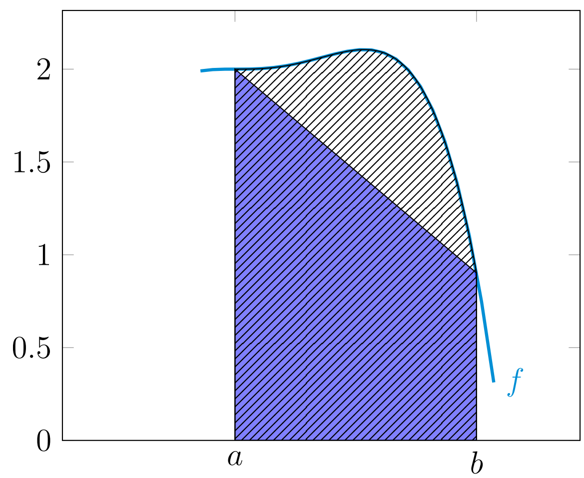
За определяне на грешката ще се възползваме от 4.5, тъй като в този случай полиномът $w(x) = (x-a)(x-b)$ има постоянен знак в (a, b). Имаме

$$R(f) = \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx.$$

Пресмятаме интеграла и получаваме

$$R(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3. \tag{4.10}$$

Формула 4.9 се нарича квадратурна формула на трапеците. Нейният геометричен смисъл е показан на фиг.4.9.



фиг. 4.9.

Сега да разгледаме една интерполационна квадратурна формула с три равноотдалечени възли.

<u>Нека $n = 2$</u>. Имаме

$$f(x) = L_2(f; x) + f[x_0, x_1, x_2, x](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Оттук получаваме формулата

$$I(f) \approx I(L_2). \tag{4.11}$$

Да изберем $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$. В този случай функцията $w(x) = (x - a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x - b)$ си сменя знака в (a, b) само в точката $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Освен това $\int_a^b w(x)dx = 0$. Следователно остатъчния член се представя като в 4.6. Имаме

$$R(f) = \frac{f^{IV}(\xi)}{4!} \int_a^b (x - a)\left(x - \frac{a + b}{2}\right)^2 (x - b)dx$$

Пресмятаме интеграла и получаваме окончателно

$$R(f) = -\frac{f^{IV}(\xi)}{2880}(b - a)^5. \tag{4.12}$$

За да получим явния вид на квадратурната формула 4.11 бихме могли да запишем $L_2(f; x)$ по формулата на Нютон и да пресметнем $I(L_2)$. Ние ще покажем тук един по-прост начин. Да означим за удобство с $p(x)$

интерполационния полином $L_2(f;x)$. По формулата на правоъгълниците 4.7 и по трапеците 4.9, съответно:

$$I(p) = p\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{p^{''}(\xi_1)}{24}(b-a)^3$$
$$I(p) = \frac{b-a}{2}[p(a)+p(b)] - \frac{p^{''}(\xi_2)}{12}(b-a)^3,$$

където ξ_1, ξ_2 са някакви точки в (a,b). Но $p \in \pi_2$. Следователно $p^{''}(t)$ е константа за всяко t. Оттук $p^{''}(\xi_1) = p^{''}(\xi_2)$. Тогава да умножим второто уравнение с $\frac{1}{2}$ и да го прибавим към първото. Получаваме

$$I(p) + \frac{1}{2}I(p) = p\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{b-a}{4}[p(a)+p(b)].$$

Тъй като полиномът $p(x)$ интерполира $f(x)$ в точките $a, \frac{a+b}{2}, b$, то от горното равенство следва, че

$$I(p) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]. \tag{4.13}$$

Получихме формулата

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \tag{4.14}$$

Това е знаменитата квадратурна формула на Симпсън. От израза за грешката и 4.12 се вижда, че тя е точна за всички полиноми от степен по-малка или равна на 3.

Изведените дотук квадратурни формули(на правоъгкниците, на трапеците и на Симпсън) се наричат елементарни квадратурни формули. В този си вид те рядко се използват,з защото грешката при тяхното приложение е голяма, особено, ако интервалът на интегриране $[a,b]$ е голям. Това се вижда от изразите 4.8,4.10 и 4.12 за грешките. На практика обикновено се постъпва по следния начин. Интервалът $[a,b]$ се разделя на m равни части с помощта на точките $x_0, \ldots, x_m$. След това във всеки подинтервал $[x_i, x_{i+1}]$ се прилага някоя от елементарните квадратурни формули за пресмятане на интеграла $\int_a^b f(x)dx$ и получените изрази се сумират. В резултат на което се получават така наречената съставна квадратурна формула. Ние тук ще изведем и съставните формули в явен вид, защото те имат голямо приложение.

Съставна квадратурна формула на правоъгълниците

Нека $x_i = a + ih, i = 0, \ldots, m, h = \frac{b-a}{m}$. По формулата за правоъгълниците имаме

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(\xi)}{24}h^3,$$

където $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$.

Сумираме горните равенства за $i = 0, \ldots, m$ и получаваме квадратурната формула

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

с грешка

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{24m^2} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m} f''(\xi_i).$$

Но числото $\frac{1}{m}[f''(\xi_0) + \ldots + f''(\xi_m)]$ е средно аритметично на m стойности на $f''(x)$ в $[a, b]$.Следователно то се намира между точната долна и точната горна граница на $f''(x)$ в $[a, b]$. Оттук следва, че $\exists \xi \in [a, b]:$

$$\frac{1}{m}[f^{''}(\xi_1) + \ldots + f^{''}(\xi_m)] = f^{''}(\xi).$$

Тогава за грешката на съставната квадратурна формула на правоъгълниците получаваме

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{24m^2} f^{''}(\xi).$$

Сега вече се вижда, че с помощта на съставната формула можем да пресметнем интеграла $I(f)$ с каквато точност искаме стига да изберем достатъчно голямо m.

Съставна квадратурна формула на трапеците

Напълно аналогично, като използваме формулата на трапеците 4.9

получаваме:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2m}[f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{m-1} + f_m] =$$

$$= \frac{b-a}{2m}[f_0 + 2\sum_{i=1}^{m-1} f_i + f_m]$$

$$R(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^3} f''(\xi), \xi \in [a, b].$$

Тук за краткост сме записали f_i вместо $f(x_i)$.

Съставна квадратурна формула на Симпсън

В този случай разделяме $[a, b]$ на четен брой подинтервали $[x_{i-1}, x_i], i = 1, \ldots, 2m$ и след това прилагам формулата на Симпсън за двойния подинтервал $[x_{i-1}, x_{i+1}], i = 1, 3, \ldots, 2m-1$. Получаваме

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}[f_0 + f_{2m} + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2m-2}) + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2m-1})] =$$

$$= \frac{b-a}{6m}[f_0 + 2\sum_{i=1}^{m-1} f_{2m} + 4\sum_{i=1}^{m} f_{2i-1} + f_{2m}]$$

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880m^4} f^{IV}(\xi), \xi \in [a, b].$$

5 Итерационни методи за решаване на линейни системи

Приближените методи за решаване на линейни системи са главно итерационни. При тях се избира подходящо начално приближение $x_0 = \{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$ на решението $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и след това на формула от вида

$$\bar{x}_{k+1} = B_k\bar{x}_k + \bar{d}_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

се строи редица $\{\bar{x}_k\}$ от точки в $\mathbb{R}^n$, която клони към решението $\bar{x}$.

Тук ние ще разгледаме някои основни итерационни методи за решаване на линейни системи.

Метод на простата итерация

Нека е дадена система $A\bar{x} = \bar{b}$. Преобразуваме я с помощта на неособената матрица C в еквивалентна на нея система :

$$x = \bar{x} - C\{A\bar{x} - \bar{b}\}.$$

Построяваме итерационния процес

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - C\{A\bar{x}_k - \bar{b}\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

При някакво начално приближение $\bar{x}_0$. Горната формула може да се запише още така

$$\bar{x}_{k+1} = (E - CA)\bar{x}_k + C\bar{b} = B\bar{x}_k + \bar{d}.$$

Теорема 5.1. *Итерационния процес*

$$\bar{x}_{k+1} = B\bar{x}_k + \bar{d}$$

е сходящ при произволен избор на начално приближение $\bar{x}_0 \iff$ всички собствени стойности на матрицата B са по модул по-малки от 1.

Доказателство. Имаме

$$\begin{aligned}\bar{x}_{k+1} &= B\bar{x}_k + \bar{d} = BB\bar{x}_{k-1} + B\bar{d} + \bar{d} = \ldots = \\ &= B^{k+1}x_0 + (B^k + B^{k-1} + \ldots + E)\bar{d}\end{aligned}$$

При направените предположения за B, редът в скобите е сходящ.От това,че матричния геометричен ред $B^k + B^{k-1} + \ldots + E$ е сходящ следва, че$B^{k+1} \to 0$. Следователно редицата $\{\bar{x}_k\}$ има граница при $k \to \infty$ и тази граница е $(E-B)^{-1}\bar{d}$. Вижда се, че тази граница е решение на уравнението $\bar{x} = B\bar{x} + \bar{d}$(**???**),тоест решение на нашата система. Да забележим, че ако редът $E + B + \ldots$ не е сходящ, то и редицата $\{\bar{x}_k\}$ може да бъде разходяща, например при $x_0 = \bar{o}$. Теоремата е доказана. □

Следствие 5.1. *Ако $||B|| < 1$ за някоя норма $||.||$, то итерационния процес е сходящ при призволно начално приближение $\bar{x}_0$.*

Твърдението следва веднага от теоремата, като се вземе в предвис, че всяка норма на матрицата е по-голяма по абсолютна стойност от всяка нейна собствена стойност. В този случай дори може да се изведе лесно в една оценка на грешката. Наистина имаме

$$||\bar{x}_k - \bar{x}|| = ||B\bar{x}_{k-1} - B\bar{x} \leq ||B||||\bar{x}_{k-1} - \bar{x}||,$$

откъдето следва

$$||\bar{x}_k - \bar{x}|| \leq ||B||^k||\bar{x}_0 - \bar{x}||.$$

Следователно при $||B|| < 1$ скоростта на сходимост е както при геометрична прогресия.

При итерационни формули от вида

$$\bar{x}_{k+1} = (E - CA)\bar{x}_k + C\bar{b} \qquad (5.1)$$

критериите за сходимост могат да се наложат направо на матрицата $A = \{a_{ij}\}$. Да разгледаме специалния случай на 5.1, когато C е диагонална матрица с елементи по диагонала $\frac{1}{a_n}$,

$$C = diag\left\{\frac{1}{a_{11}}, \ldots, \frac{1}{a_{nn}}\right\} = diag\{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}^{-1}.$$

В този случай системата $A\bar{x} = \bar{b}$ се преобразува по стандартния начин - от i-тото уравнения се определя x_i :

$$x_i = -\frac{a_{i1}}{a_{ii}}x_1 - \ldots - \frac{a_{ii-1}}{a_{ii}}x_{i-1} - \frac{a_{ii+1}}{a_{ii}}x_{i+1} - \\ - \ldots - \frac{a_{in}}{a_{ii}}x_n + \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

и формулите 5.1 за пресмятане на следващите приближения $x_i^{(k+1)}, \dots x_n^{(k+1)}$ добиват вида

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{5.2}$$

Този метод е известен като метод на простата итерация.

Да видим как изглеждат достатъчните условия за сходимост на проста-та итерация, които произлизат от следствието 5.1, при използване на нормата

$$||B||_w = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|.$$

В нашия случай $B = E - CA$. Нека $\{b_{ij}\}, \{c_{ij}\}, \{\delta_{ij}\}$ са съответно елементите на B, C и E. Тогава

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \delta_{ij} - c_{i1}a_{1j} - \dots - c_{in}a_{nj} = \\ &= \delta_{ij} - \frac{1}{a_{ii}} a_{ij} \end{aligned}$$

и следователно

$$||B||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \left| \delta_{ij} - \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| =$$

$$= \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Оттук се вижда, че условието $||B||_\infty < 1$ се записва като

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < a_{ii}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Това всъщност е условието A да бъде матрица с доминиращ главен диагонал.

Аналогично, условието

$$||B||_1 = {}_{1\leq i\leq n} \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| < 1$$

се свежда към

$$\sum_{i=j}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Метод на Зайдел

На практика често се използва една естествена модификация на метода на простата итерация, наречена метод на Зайдел. При нея в поредното i-то уравнение от 5.2 за определяне на $x_i^{(k+1)}$ се използват изчислените вече $(k+1)$-ви приближения на $x_1, \dots, x_{i-1}$. По този начин се получават формулите

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad , i = 1, \dots, n.$$

Теорема 5.2. *Методът на Зайдел е сходящ при произволно начално приближение* $\bar{x}_0 \iff$ *всички корени на уравнението*

$$det \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

са по модул по-малки от 1.

Доказателство. Да представим A като $A = U + V$, където U е долна триъгълна матрица, включваща главния диагонал, а V е горна триъгълна матрица с нулеви елементи по главния диагонал и под него. Тогава системата $A\bar{x} = \bar{b}$ се записва във вида:

$$U\bar{x} = -V\bar{x} + \bar{b}$$

и метода на Зайдел се представя чрез итерационния процес

$$U\bar{x}_{k+1} = -V\bar{x}_k + \bar{b}.$$

Решаваме относно $\bar{x}_{k+1}$ и получаваме

$$\bar{x}_{k+1} = -U^{-1}V\bar{x}_k + U^{-1}\bar{b}. \tag{5.3}$$

Но това е изчислителен процес от типа на метода на простата итерация, който беше разгледан в теорема 5.1. Съгласно тазо теорема методът 5.3 е сходящ $\Longleftrightarrow$ собствените стойности на матрицата $-U^{-1}V$ са по модул по-малки от 1. тоест когато корените на уравнението

$$det|-U^{-1}V-\lambda E| = -det|\lambda E + U^{-1}V| = 0,$$

което е еквивалентно(като умножим с $detU$) на

$$det|\lambda U + V| = 0,$$

са по модул по-малки от 1. Теоремата е доказана. $\square$

Сравняване на метода на Зайдел и метода на простата итерация

Областите на сходимост на простата итерация и метода на Зайдел се пресичат. Не е трудно да се покаже, че и методът на Зайдел е сходящ за системата $A\bar{x} = \bar{b}$, когато матрицата A е с доминиращ главен диагонал. По долу ще покажем, че в този случах методът на Зайдел е по-бързо сходящ(в известен смисъл) от метода на простата итерация.

Теорема 5.3. *Ако матрицата A има доминиращ главен диагонал , то метода на Зайдел е по-бързо сходящ от метода на простата итерация.*

Доказателство. Това твърдение трябва да се разбира в следния смисъл. Ще намерим еднотипни оценки за скоростта на сходимост на метода на простата итерация и на метода на Зайдел и ще покажем, че оценката при метода на Зайдел е по-добра от тази при метода на простата итерация.

Ще използваме векторната норма $||\bar{x}||_\infty = \underset{1\le i\le n}{max}|x_i|$ и съответната съгласувана метрична норма $||.||_\infty$.

Нека $A = \{a_{ij}\}$ е произволна матрица с доминиращ главен диагонал, тоест

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Означаваме

$$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$$
$$d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$
$$\mu = \max_{i \leq i \leq n} \frac{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |c_{ij}|$$

Да отбележим, че съгласно нашето предположение за $A, \mu < 1$. На простата итерация съответства схемата

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} c_{ij} x_j^{(k)} + d_i,$$

а на метода на Зайдел

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{i+1}^{n} c_{ij} x_j^{(k)} + d_i.$$

Нека $\bar{x}$ е решението на системата. Имаме

$$x_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} c_{ij} x_j + d_i.$$

За грешката по метода на простата итерация получаваме

$$\begin{aligned} ||\bar{x} - \bar{x}_{k+1}||_i nfty \leq {}_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |c_{ij}||x_j^{(k)} - x_j| \leq \\ \leq \mu ||\bar{x}_k - \bar{x}||_\infty \leq \ldots \leq \\ \leq \mu^{k+1} ||\bar{x}_0 - \bar{x}||_\infty \end{aligned}$$

Да въведем още означения

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}|$$

$$\gamma_i = \sum_{j=i+1}^{n} |c_{ij}|$$

$$\nu = \max_i \frac{\gamma_i}{1-\beta_i}.$$

За метода на Зайдел имаме

$$\begin{aligned} ||\bar{x} - \bar{x}_{k+1}||_\infty &\leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i - x_i^{(k+1)} \leq \\ &\leq \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}||x_j^{(k+1)} - x_j| + \sum_{j=i+1}^{n} |c_{ij}||x_j^{(k)} - x_j| \right\} \leq \\ &\leq \max_i \{\beta_{i_0} ||\bar{x}_{k+1} - \bar{x}||_\infty + \gamma_{i_0} ||\bar{x}_k - \bar{x}||_\infty\} \end{aligned}$$

Оттук

$$\begin{aligned} ||\bar{x} - \bar{x}_{k-1}||_\infty &\leq \frac{\gamma_{i_0}}{1-\beta_{i_0}} ||\bar{x} - \bar{x}_k||_\infty \leq \\ &\leq \nu ||\bar{x} - \bar{x}_k||_\infty \leq \ldots \leq \\ &\leq \nu^{k+1} ||\bar{x}_0 - \bar{x}||_\infty. \end{aligned}$$

Но $\beta_i + \gamma_i \leq \mu \leq 1$. Тогава

$$\begin{aligned} \beta_i + \gamma_i - \frac{\gamma_i}{1-\beta_i} &= \frac{\beta_i(1-\beta_i) - \gamma_i\beta_i + \gamma_i - \gamma_i}{1-\beta_i} = \\ &= \frac{\beta_i(1-\beta_i-\gamma_i)}{1-\beta_i} \geq 0. \end{aligned}$$

Следователно

$$\mu = \max_i (\beta_i + \gamma_i) \geq \max_i \frac{\gamma_i}{1-\beta_i} = \nu.$$

И така грешката при метода на Зайдел се оценява с израз, който клони към нула по-бързо от този получен при метода на простата итерация. $\square$