

Развити въпроси за изпит по ЧМ

Информатика при Лозко Милев

Теодора Иванова

22 юни 2019 г.

Съдържание

1	Формулирайте интерполационната задача на Лагранж. Докажете единствеността. Изведете интерполационната формула на Лагранж.	3
2	Формулирайте и докажете теоремата за оценка на грешката при интерполация на Лагранж.	5
3	Дайте определение за полином на Чебишов. Напишете и докажете рекурентната връзка. Намерете нулите на полинома на Чебишов от n -та степен.	6
4	Напишете и докажете интерполационната формула на Нютон с разделени разлики. Напишете задачата, която се решава с тази формула.	7
5	Напишете и докажете формулата на Нютон с крайни разлики за интерполация напред. Напишете задачата, която се решава с тази формула.	8
6	Формулирайте интерполационната задача на Ермит. Докажете, че задачата има единствено решение.	9
7	Формулирайте и докажете рекурентната връзка за разделени разлики с кратни възли. Включително случая, в който всички възли съвпадат.	10
8	Напишете и докажете, формулата за интерполационния тригонометричен полином при произволно разположени интерполационни възли в $[0, 2\pi)$. Напишете задачата, която се решава с тази формула.	10
9	Формулирайте и докажете теоремата за представяне на сплайн функция, като линейна комбинация на полиноми и отсечени степенни функции.	12
10	Напишете и докажете рекурентната връзка за В-сплайните .	14
11	Формулирайте теоремата на Чебишов за алтернанса. Докажете достатъчността.	15
12	Формулирайте теоремата на Вайерщрас. Докажете я като използвате полиномите на Бернщайн.	15
13	Напишете и докажете тричленната рекурентната връзка за редица от ортогонални полиноми.	17
14	Формулирайте и докажете теоремата за характеризация на елемента на най-добро приближение в Хилбертово пространство. (НДУ)	18

15	Изведете формулата от вида $f'(a) \approx C_0 f(a-h) + C_1 f(a+h)$ и грешката $O(h^2)$ при положение, че f е достатъчно гладка. Обосновете порядъка на грешката.	18
16	Изведете елементарната квадратурна формула на трапеца и оценката на грешката при подходящи предположения за подинтегралната функция.	19
17	Формулирайте и докажете теоремата за квадратурната формула на Гаус.	19
18	Формулирайте и докажете теоремата за приближено решаване на нелинейно изображение по метода свиващото изображение.	21

1 Формулирайте интерполационната задача на Лагранж. Докажете единствеността. Изведете интерполационната формула на Лагранж.

Постановка на задачата

Нека x_1, x_2, \dots, x_n са различни точки и y_1, y_2, \dots, y_n са дадени реални числа.

Да се построи алгебричен полином $P(x)$ от степен $\leq n$, който удовлетворява следните условия:

$$P(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n \quad (1.1)$$

Теорема 1.1. *Ако съществува решение на 1.1, то трябва да е единствено.*

Доказателство. Допускаме, че съществуват два полинома P и Q от степен n , които удовлетворяват 1.1, тогава разликата

$$R(x) = P(x) - Q(x)$$

ще бъде полином от степен $\leq n$ и освен това

$$R(x_k) = P(x_k) - Q(x_k) = y_k - y_k = 0, \quad k = 0, \dots, n$$

Следователно R е полином от степен n , който се анулира в $n + 1$ точки. Тогава от основната теорема на алгебрата $R(x)$ е тъждествено равен на 0. Следователно $P \equiv Q$.

Извеждане на формулата

При фиксирано k да се намери полинома $l_{nk}(x) \in \pi_n$, който удовлетворява условията:

1. $l_{nk}(x_i) = 0$, за $i = 0, \dots, n$ и $i \neq k$

2. $l_{nk}(x_k) = 1$, за $i = k$

От 1. следва, че точките $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ са нули на полинома l_{nk} . От $l_{nk} \in \pi_n$ следва, че $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ са всичките нули. Тогава l_{nk} може да се запише във вида:

$$l_{nk}(x) = A(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n),$$

където A е някакво число. A се определя от 2..

$$1 = l_{nk}(x_k) = A(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)$$

Следователно:

$$A = \frac{1}{\prod_{i=0, i \neq k}^n (x_k - x_i)}.$$

Тогава

$$\begin{aligned} l_{nk}(x) &= \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \\ &= \prod_{i=0, i \neq k}^n \left(\frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Полиномите $\{l_{nk}\}_{k=0}^n$ се наричат базисни полиноми на Лагранж. С тяхна помощ може лесно да се построи P .

Ще покажем, че решението $P(x)$ на 1.1 се дава с

$$P(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_{nk}(x) \quad (1.3)$$

По построение

$$l_{nk}(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

Тогава

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k l_{nk}(x_i) = y_i l_{ni}(x_i) = y_i 1 = y_i,$$

за всяко $i = 0, \dots, n$. От това, че полиномът 1.3 е от π_n ($l_{nk} \in \pi_n$) и удовлетворява 1.1, следва, че $P(x)$ даден в 1.3 е решение на интерполационната задача.

Най-често $\{y_k\}_{k=0}^n$ са стойностите на някаква функция $f(x)$ в точките x_0, x_1, \dots, x_n , тоест

$$y_k = f(x_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

В такъв случай

$$P(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \dots, n$$

се бележи с $L_n(f; x)$ и се нарича интерполационен полином на Лагранж за функцията f с възли x_0, \dots, x_n . Казваме още, че $L_n(f; x)$ интерполира $f(x)$ в точките (x_0, \dots, x_n) .

И така доказахме следната теорема

Теорема 1.2. Нека $x_0 < \dots < x_n$ и $f(x)$ е определена в тези точки. Тогава съществува единствен полином от π_n , който интерполира f в x_0, \dots, x_n . Този полином се представя чрез формулата:

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad (1.4)$$

Формула 1.4 се нарича интерполационна формула на Лагранж.

2 Формулирайте и докажете теоремата за оценка на грешката при интерполация на Лагранж.

Теорема 2.1. Нека $[a, b]$ е даден краен интервал и x_0, \dots, x_n са различни точки в него. Нека функцията $f(x)$ има непрекъснатата $(n+1)$ -ва производна в $[a, b]$. Тогава $\forall x \in [a, b] \exists \xi \in [a, b]$:

$$f(x) - L_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n).$$

Доказателство. Образуваме помощната функция

$$F(t) = f(t) - L_n(f; t) - c(t - x_0) \dots (t - x_n),$$

където c е параметър. $F(t)$ се анулира в точките x_0, \dots, x_n при всеки избор на c .

$$F(x_k) = f(x_k) - L_n(f; x_k) - c \cdot 0 = f(x_k) - f(x_k) = 0.$$

Избираме c така, че $F(t)$ да се анулира и при $t = x$. От равенството

$$f(x) - L_n(f; x) - c(x - x_0) \dots (x - x_n) = 0$$

определяме

$$c = \frac{R_n(f; x)}{(x - x_0) \dots (x - x_n)}. \quad (2.1)$$

И така при този избор на c функцията $F(t)$ има поне $n + 2$ нули. Това са точките x, x_0, \dots, x_n . По теоремата на Рол $F'(t)$ ще има поне $n + 1$ нули, които лежат в интервала $[a, b]$, $F''(t)$ ще има поне n нули и тн. $F^{(n+1)}(t)$ ще има поне една нула, която лежи в $[a, b]$. Да я означим с ξ . Имаме $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. От друга страна,

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(\xi) &= f^{(n+1)}(\xi) - L_n(f; \xi) - c(n+1)! = \\ &= f^{(n+1)}(\xi) - c(n+1)!. \end{aligned}$$

Следователно

$$c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Като сравним това равенство с 2.1 получаваме:

$$R_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n).$$

Теоремата е доказана. □

3 Дайте определение за полином на Чебишов. Напишете и докажете рекурентната връзка. Намерете нулите на полинома на Чебишов от n -та степен.

Дефиниция 3.1. Полиномът на Чебишов от първи род от n -та степен се бележи с $T_n(x)$ и се определя в интервала $[-1, 1]$ чрез равенството

$$T_n(x) = \cos(\arccos(x)), x \in [-1, 1]. \quad (3.1)$$

Непосредствено от дефиницията следва, че:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \end{aligned}$$

Освен това съгласно формулата за събиране на синуси:

$$\begin{aligned} T_{n+1} + T_{n-1} &= \cos((n+1)\arccos x) + \cos((n-1)\arccos x) \\ &= 2\cos(\arccos x)\cos(n\arccos x) \\ &= \boxed{2xT_n(x)}, \end{aligned}$$

при всяко $n > 1$. Оттук получаваме следната рекурентна връзка

$$T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (3.2)$$

Като използваме равенство 3.1 веднага можем да намерим нулите на полинома. Очевидно $T_n(x) = 0$ при $\arccos x = (2k-1)\frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, \dots$. Оттук следва, че нулите на полинома са:

$$\xi_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, \dots, n.$$

4 Напишете и докажете интерполационната формула на Нютон с разделени разлики. Напишете задачата, която се решава с тази формула.

Ще изведем формулата на Нютон за интерполационни полиноми. За целта разглеждаме разликата:

$$L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x),$$

където $L_{k+1}(f; x)$ интерполира f в x_0, \dots, x_{k+1} , а $L_k(f; x)$ интерполира f в x_0, \dots, x_k . Ясно е, че $L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x) \in \pi_{k+1}$. Освен това

$$L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x) = f(x_i) - f(x_i) = 0, \text{ за } i = 0, \dots, k.$$

Следователно x_0, \dots, x_k са всичките нули на полинома $L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x)$. Тогава той може да се запише във вида:

$$L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x) = A(x - x_0) \dots (x - x_k), \quad (4.1)$$

където A е константа. За да намерим A нека сравним коефициентите пред x^{k+1} в 4.1.

Съгласно теоремата за разделените разлики коефициента пред x^{k+1} в $L_{k+1}(f; x)$ е равен на разделената разлика $f[x_0, \dots, x_{k+1}]$. Следователно

$$A = f[x_0, \dots, x_{k+1}]$$

и следователно от 4.1

$$L_{k+1}(f; x) = L_k(f; x) + f[x_0, \dots, x_{k+1}](x - x_0) \dots (x - x_k) \quad (4.2)$$

Нека приложим 4.2 за $k = n-1, n-3, \dots, 2, 1, 0$. Получаваме следния явен израз за интерполационния полином на Лагранж.

$$\begin{aligned} L_n(f; x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \\ & + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ & + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Това е интерполационната формула на Нютон. Понякога ще я записваме съкратено така

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}), \quad (4.3)$$

като приемаме, че $(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) = 1$ при $k = 0$. Може и с инфукция наобратно Напишете задачата - може би табличката

5 Напишете и докажете формулата на Нютон с крайни разлики за интерполация напред. Напишете задачата, която се решава с тази формула.

Нека вземете $\{x_i\}_0^n$ са равноотдалечени и функцията f е дефинирана в тях. Търсим полинома $L_n(f; x) \in \pi_n$, който интерполира f в x_0, \dots, x_n . Съгласно интерполационната формула на Нютон:

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}).$$

Нека $x_i = x_0 + ih, i = 0, \dots, n$ и $x = x_0 + th$. Тогава

$$(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) = \prod_{i=0}^{k-1} (x_0 + th - x_0 - ih) = h^k t(t-1) \dots (t-k+1).$$

Сега като използваме връзката между разделената разлика и крайната разлика, тоест $f[x_0, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$, получаваме

$$L_n(f; x) = L_n(f; x_0 + th) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f_0}{k!} t(t-1) \dots (t-k+1) = \boxed{\sum_{k=0}^n \Delta^k f_0 \binom{t}{k}}.$$

Това е формула на Нютон с крайни разлики за интерполиране напред. май пак схемата

6 Формулирайте интерполационната задача на Ермит. Докажете, че задачата има единствено решение.

Постановка: Нека x_0, \dots, x_n са дадени $n + 1$ различни точки и ν_0, \dots, ν_n са цели положителни числа и

$$\{y_{k\lambda} : k = 0, \dots, n, \lambda = 0, \dots, \nu_k - 1\}$$

е таблица от произволни реални стойности. Означаваме с $N = \nu_0 + \dots + \nu_n - 1$. Да се построи алгебричен полином P от степен N , който удовлетворява условията:

$$P^{(\lambda)}(x_k) = y_{k\lambda}, k = 0, \dots, n, \lambda = 0, \dots, \nu_k - 1. \quad (6.1)$$

Теорема 6.1. *При всеки избор на интерполационни възли $\{x_k\}_0^n, x_i \neq x_j \Leftrightarrow i \neq j$ и при всяка таблица от стойности $\{y_{k\lambda}\}$ интерполационната задача на Ермит 6.1 има единствено решение.*

Доказателство. Условията 6.1 представляват една система от $N + 1$ линейни уравнения с неизвестни - коефициентите a_0, \dots, a_N на полинома $P(x)$. Тази система има единствено решение, ако детерминантата ѝ е различна от 0. Да допуснем, че детерминантата ѝ е 0. Тогава хомогенната система:

$$P^{(\lambda)}(x_k) = 0, k = 0, \dots, n, \lambda = 0, \dots, \nu_k - 1$$

ще има някакво ненулево решение $P(x) = a_0x^N + \dots + a_{N-1}x + a_N$. Но горните условия означават, че P има $N+1$ нули, броейки кратностите. От друга страна $P \in \pi_N$. Следователно $P(x) \equiv 0$ и оттук $a_0 = \dots = a_N = 0$ и стигаме до противоречие.

7 Формулирайте и докажете рекурентната връзка за разделени разлики с кратни възли. Включително случая, в който всички възли съвпадат.

Теорема 7.1. Нека f има k непрекъснати производни в $[a, b]$. Тогава за произволни точки $x_0 \leq \dots \leq x_k$ от $[a, b]$ е в сила рекурентната връзка:

$$f[x_0, \dots, x_k] = \begin{cases} \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, & x_0 < x_k \\ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & x_0 = x_k \end{cases} \quad (7.1)$$

Доказателство. При $x_0 = x_k$ разглеждаме разделената разлика $f[x_0, x_0, \dots, x_0]$ построяваме полинома $p(x)$ използвайки формулата на Тейлър:

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

. Този полином удовлетворява условието $p^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0), j = 0, \dots, k$. С други думи полиномът p интерполира f в точката x_0 с кратност $k+1$. От явния вид на p се вижда, че коефициента пред x^n е $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. И от това, че разделената разлика е равна на коефициента пред x^n следва, че

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \text{ при } x_0 = \dots = x_k$$

Нека $x_0 < \dots < x_k$ и тъй като разделената разлика е линеен функционал, то

$$\begin{aligned} (x_k - x_0)f[x_0, \dots, x_k] &= \{(x_k - x_0 + x - x_0)f\}[x_0, \dots, x_k] \\ &= (x_k - x_0)f[x_0, \dots, x_k] + \{x - x_0\}f[x_0, \dots, x_k] \\ &= -f[x_0, \dots, x_{k-1}] + f[x_1, \dots, x_k] \end{aligned}$$

Следователно

$$\frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

8 Напишете и докажете, формулата за интерполационния тригонометричен полином при произволно разположени интерполационни възли в $[0, 2\pi)$. Напишете задачата, която се решава с тази формула.

Теорема 8.1. Нека $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < 2\pi$. Тогава за всяка функция f определена в точките $\{x_i\}_0^{2n}$ съществува единствен триго-

нометричен полином t_n от ред n такъв, че

$$t_n(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, 2n \quad (8.1)$$

и той има вида

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k f(x_k) \quad (8.2)$$

където

$$\lambda_k = \prod_{i=0, i \neq k}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_k-x_i}{2}\right)} \quad (8.3)$$

Доказателство. Функциите λ_k удовлетворяват условията

$$\begin{aligned} \lambda_k(x_i) &= 0, \text{ за } i \neq k \\ \lambda_k(x_i) &= 1, \text{ иначе.} \end{aligned}$$

От това следва, че изразът 8.2 ще удовлетворява интерполационните условия 8.1. Остава само да докажем, че λ_k , следователно и t_n са тригонометрични полиноми от ред n . За целта ще използваме индукция по n . При $n = 1$:

$$\begin{aligned} \lambda_k(x_1) &= \sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{x-\beta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2} - \cos\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right) \\ &= \boxed{a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x} \end{aligned}$$

Следователно $\lambda_k(x)$ е тригонометричен полином от ред 1.

Допускаме, че всяко едно произведение от $n-1$ двойки синуси е тригонометричен полином от ред $n-1$. Да разгледаме произволен израз за $\lambda_k(x)$ от вид 8.3. Той може да се запише по следния начин:

$$\begin{aligned} \lambda_k(x) &= c \prod_{i=0, i \neq k}^{2n} \sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right) \\ &= C \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \sin\left(\frac{x-\alpha_i}{2} \sin\left(\frac{x-\beta_i}{2}\right)\right) \right\} \left\{ \sin\left(\frac{x-\alpha}{2} \sin\left(\frac{x-\beta}{2}\right)\right) \right\}, \end{aligned}$$

където C е константа. Но съгласно идукционното предположение и двата израза в големите скоби са тригонометрични полиноми от ред $n-1$ и 1 съответно и следователно:

$$\begin{aligned}
\lambda_k(x) &= \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) (a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x) \\
&= a_0^2 + a_0 a_1 \cos x + a_0 b_1 \sin x + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k a_0 \cos(kx) + b_k a_0 \sin(kx)) \\
&\quad + a_k a_1 \cos x \cos(kx) + b_k a_1 \cos x \sin(kx) \\
&\quad + a_k b_1 \sin x \cos(kx) + b_k b_1 \sin x \sin(kx)) \\
&= a_0^2 + a_0 a_1 \cos x + a_0 b_1 \sin x + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k a_0 \cos(kx) + b_k a_0 \sin(kx)) \\
&\quad + a_k a_1 \frac{1}{2} (\cos(k-1)x + \cos(k+1)x) \\
&\quad + b_k a_1 \frac{1}{2} (\sin(k+1)x - \sin(k-1)x) + a_k b_1 \frac{1}{2} (\sin(k+1)x - \sin(k-1)x) \\
&\quad + b_k b_1 \frac{1}{2} (\cos(k-1)x - \cos(k+1)x)) \\
&= A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + \sum_{k=1}^{n-1} A_{k-1} \cos(k-1)x \\
&\quad + B_{k-1} \sin(k-1)x + A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx) + A_{k+1} \cos(k+1)x + B_{k+1} \sin(k+1)x
\end{aligned}$$

Очевидно $\lambda_k(x)$ е линейна комбинация на $\sin kx, \cos kx, k = 0, \dots, n$, което означава, че λ_k е тригонометричен полином от ред n . Следователно и t_n също е тригонометричен полином от ред n изпълняващ условията 8.1 за интерполация.

9 Формулирайте и докажете теоремата за представяне на сплайн функция, като линейна комбинация на полиноми и отсечени степенни функции.

Дефиниция 9.1. Функцията $s(x)$ се нарича сплайн функция от степен r с възли $x_1 < \dots < x_n$, ако:

1. $s(x)$ е полином от степен най-много r във всеки подинтервал (x_i, x_{i+1}) , $i = 0, \dots, n$ ($x_0 = -\infty, x_n = +\infty$)

2. $s(x), s'(x), \dots, s^{(r-1)}(x)$ са непрекъснати функции в $(-\infty, +\infty)$

Дефиниция 9.2. $S_r(x_1, \dots, x_n)$ отбелязва множеството от сплайн-функции от степен r свързани в точките x_1, \dots, x_n .

Дефиниция 9.3. Отсечената степенна функция :

$$(x - \xi)_+^r = \begin{cases} (x - \xi)^r, & x \geq \xi \\ 0 & , x < \xi \end{cases}$$

е сплайн от степен r с единствен възел в точката ξ .

Теорема 9.1. Всяка сплайн функция $s(x)$ от класа $S_r(x_1, \dots, x_n)$ се представя по единствен начин от вида:

$$s(x) = p(x) + \sum_{k=1}^n c_k (x - x_k)_+^r, \quad (9.1)$$

където $p(x)$ е полином от степен r , а c_1, \dots, c_n са реални числа:

$$c_k = \frac{s^{(k)}(x_k + 0) - s^{(r)}(x_k - 0)}{r!}, k = 1, \dots, n \quad (9.2)$$

Доказателство. Означението $f(x+0) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x+h)$ и аналогично е за $f(x-0)$. Нека $s(x) \in S_r(x_1, \dots, x_n)$. Тогава s съвпада с някакъв полином P_k от степен r в подинтервала (x_k, x_{k+1}) , $k = 0, \dots, n$. Тъй като $s^{(j)}(x)$ е непрекъснатата функция в точката x_k , то $P_{k-1}^{(j)}(x_k) = P_k^{(j)}(x_k)$, $j = 0, \dots, r-1$. Следователно

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + c_k (x - x_k)^r, \forall x, \quad (9.3)$$

където c_k е някаква константа. От тази рекурентна връзка следва, че

$$P_k(x) = P_0(x) + \sum_{i=1}^k c_i (x - x_i)^r.$$

Като вземем предвид, че $s(x) \equiv P_k(x)$, $x \in (x_k, x_{k+1})$ и определението за отсечена функция от горното равенство получаваме

$$s(x) = P_0(x) + \sum_{i=0}^n c_i (x - x_i)_+^r,$$

което е търсено представяне. Остава да покажем, че коефициентите c_k се определят еднозначно. Диференцираме 9.3 r -пъти в точката x_k и получаваме:

$$P_k^{(r)} = P_{k-1}^{(r)}(x_k) + c_k r!$$

и оттук

$$c_k = \frac{s^{(k)}(x_k + 0) - s^{(r)}(x_k - 0)}{r!}.$$

Полиномът $p(x)$ в 9.1 се определя също еднозначно и съвпада с $P_0(x)$.

10 Напишете и докажете рекурентната връзка за В-сплайните

Дефиниция 10.1. Разделената разлика на отсечената степенна функция $(x - t)_+^{r-1}$ по отношение на x в точките $x_1 < \dots < x_r$ се нарича В-сплайн от степен $r - 1$ с възли x_0, \dots, x_r .

Теорема 10.1. За всяко $r \geq 2$ и $t \in (-\infty, \infty)$ е в сила равенството:

$$B_{i,r-1}(t) = \frac{t - x_i}{x_{i+r} - x_i} B_{i,r-2}(t) + \frac{x_{i+r} - t}{x_{i+r} - x_i} B_{i+1,r-2}(t). \quad (10.1)$$

Доказателство. Ще използваме правилото на Сефансон за намиране на разделената разлика на произведение на функции:

$$(f.g)[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k] g[x_k, \dots, x_n].$$

Избираме $f(x) = x - t$ и $g(x) = (x - t)_+^{r-2}$. Очевидно

$$f(x)g(x) = (x - t)_+^{r-1}, x \in (-\infty, \infty)$$

и следователно

$$B_{i,r-1}(t) = (f.g)[x_i, \dots, x_{i+r}] = f(x_i)g[x_i, \dots, x_{i+r}] + f[x_i, x_{i+1}]g[x_{i+1}, \dots, x_{i+r}],$$

тъй като $f[x_i, \dots, x_{i+k}] = 0, k \geq 2$. Като вземем предвид, че $f[x_i, x_{i+1}] = 1$

и рекурентната връзка за разделените разлики получаваме:

$$\begin{aligned} B_{i,r-1}(t) &= f(x_i) \frac{g[x_{i+1}, \dots, x_{i+r}] - g[x_i, \dots, x_{i+r-1}]}{x_{i+r} - x_i} + g[x_{i+1}, \dots, x_{i+r}] \\ &= \left(1 + \frac{f(x_i)}{x_{i+r} - x_i}\right) g[x_{i+1}, \dots, x_{i+r}] - \frac{f(x_i)}{x_{i+r} - x_i} g[x_i, \dots, x_{i+r-1}] \\ &= \frac{x_{i+r} - t}{x_{i+r} - x_i} B_{i+1,r-2}(t) + \frac{t - x_i}{x_{i+r} - x_i} B_{i,r-2}(t). \end{aligned}$$

11 Формулирайте теоремата на Чебишов за алтернанса. Докажете достатъчността.

Теорема 11.1. Нека f е произволна непрекъсната функция в крайния и затворен интервал $[a, b]$. Необходимо и достатъчно условие е полиномът $P \in \pi_n$ да бъде полином на най-добро равномерно приближение за f от n -та степен в $[a, b]$ е да съществува $n+2$ точки $\{x_i\}_0^{n+1} \in [a, b] : a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ и

$$f(x_i) - P(x_i) = (-1)^i \epsilon \|f - P\|, i = 0, \dots, n+1, \quad (11.1)$$

където $\epsilon = 1$ или $\epsilon = -1$.

Доказателство. Условието 11.1 означава, че разликата $f(x) - P(x)$ достига максимумалата си по модул стойност в $n+2$ точки, като си сменя алтернативно знака. В такъв случай казваме, че f и P осъществяват алтернанс в $n+2$ точки. Достатъчност на 11.1.

Нека P удовлетворява 11.1, тоест съществува $n+2$ точки $\{x_i\}_0^{n+1} \in [a, b] : a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ и $f(x_i) - P(x_i) = (-1)^i \epsilon \|f - P\|$, $i = 0, \dots, n+1$, където $\epsilon = 1$ или $\epsilon = -1$. Тогава е изпълнено:

$$E_n(f) \geq \|f - P\|.$$

Но, по определение, $E_n(f) \leq \|f - Q\|, \forall Q \in \pi_n$. Следователно $E_n(f) = \|f - P\|$ и P е полином на най-добро равномерно приближение

12 Формулирайте теоремата на Вайерщрас. Докажете я като използвате полиномите на Бернщайн.

Дефиниция 12.1. Нека $f(x)$ е произволна функция, дефинирана в интервала $[0, 1]$. Полиномът на Бернщайн от степен n за функцията f

се бележи с $B_n(f; t)$ и се определя с равенството:

$$B_n(f; t) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

Дефиниция 12.2. Нека f е функция дефинирана в $[a, b]$. Величината:

$$w(f; \delta) = \sup |f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b], |x - y| \leq \delta$$

се нарича модул на непрекъснатост на f в $[a, b]$.

Теорема 12.1. Нека f е произволна непрекъсната функция в $[0, 1]$. Тогава за всяко n и всяко $t \in [0, 1]$ имаме

$$|f(t) - B_n(f; t)| \leq \frac{3}{2} w\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (12.1)$$

Теорема 12.2. Нека $[a, b]$ е произволен краен интервал и $f(x)$ е непрекъсната функция в него. Тогава $\forall \epsilon > 0$ съществува алгебричен полином $P(x)$ такъв, че:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| \leq \epsilon.$$

Доказателство. Въвеждаме функцията:

$$h(t) = f(a + t(b - a)), t \in [0, 1].$$

Тъй като $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$, то и $h(t)$ ще е непрекъсната в $[0, 1]$ и следователно

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w(h, \delta) = 0.$$

Тогава $\exists n$:

$$\frac{3}{2} w\left(h; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \epsilon$$

От теорема 12.1

$$|h(t) - B_n(h; t)| \leq \frac{3}{2} w\left(h; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \epsilon$$

за това n . Тоест полинома $B_n(h; t)$ приближава h в $[0, 1]$ с точност ϵ . Сега, като се върнем обратно към променливата x със смяната $t = \frac{x-a}{b-a}$, получаваме:

$$\left| h\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - B_n\left(h; \frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \epsilon, x \in [a, b].$$

Където $f(x) = h\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ и $P(x) = B_n\left(h; \frac{x-a}{b-a}\right)$ са алгебрични полиноми от степен n . Тогава $P(x)$ е полином, за който

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, x \in [a, b].$$

Доказателството е завършено.

13 Напишете и докажете тричленната рекурентната връзка за редица от ортогонални полиноми.

Свойство 1. За всяка система от ортогонални полиноми $P_0(x), P_1(x) \dots$ съществува тричленна рекурентна връзка от вида:

$$P_{n+1} = (A_n x - B_n)P_n(x) + C_n P_{n-1}(x), n = 1, 2, \dots, \quad (13.1)$$

където A_n, B_n, C_n са константи.

Доказателство.

$$xP_n(x) = a_0 P_0(x) + \dots + a_n P_n(x) + a_{n+1} P_{n+1}(x)$$

с някакви константи a_0, \dots, a_{n+1} . Умножаваме с $P_i(x)$ и интегрираме. Получаваме:

$$\int_a^b \mu(x) x P_n(x) P_i(x) dx = a_i (P_i, P_i), i = 0, \dots, n+1. \quad (13.2)$$

Като интеграла е равен на 0 за $i = 0, \dots, n-2$ от ортогоналността и $P_i \in \pi_{n-1}$. Следователно $a_i = 0$ при $i = 0, \dots, n-2$ и

$$xP_n(x) = a_{n-1} P_{n-1}(x) + a_n P_n(x) + a_{n+1} P_{n+1}(x). \quad (13.3)$$

Така получаваме търсената връзка, а за коефициентите от 13.2

$$a_{n-1} = \frac{(xP_n, P_{n-1})}{(P_{n-1}, P_{n-1})}$$

$$a_n = \frac{(xP_n, P_n)}{(P_n, P_n)}$$

и от 13.3 $a_{n+1} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$, ако $P_k(x) = \alpha_k x^k + \dots \in \pi_{k-1}, k = 0, 1, \dots$

14 Формулирайте и докажете теоремата за характеризацията на елемента на най-добро приближение в Хилбертово пространство. (НДУ)

Теорема 14.1. Нека H е произволно хилбертово пространство и $f \in H$. Елементът $p \in \Omega_n$ е елемент на най-добро приближение за f с елемент от Ω_n тогава и само тогава, когато

$$(f - p, \phi) = 0, \forall \phi \in \Omega_n. \quad (14.1)$$

Доказателство. (\Rightarrow)

Да предположим, че p е елемент на най-добро приближение, тоест

$$\|f - p\| = \inf\{\|f - \phi\| : \phi \in \Omega_n\} = \epsilon_n(f).$$

Тогава за произволно $\phi \in \Omega_n$ и $\phi \neq 0$ функцията:

$$\begin{aligned} r(\lambda) &= \|f - p + \lambda\phi\|^2 = (f - p + \lambda\phi, f - p + \lambda\phi) \\ &= \epsilon_n^2(f) + 2\lambda(f - p, \phi) + \lambda^2(\phi, \phi) \end{aligned}$$

ще има минимум при $\lambda = 0$. Това означава, че и $r'(0) = 0$. Но $r'(0) = 2(f - p, \phi)$, следователно $(f - p, \phi) = 0, \forall \phi \in \Omega_n$ (\Leftarrow)

Да допуснем, че $p \in \Omega_n$ и p удовлетворява условията за ортогоналност 14.1. Нека ϕ е произволен друг елемент от Ω_n . Тогава $\delta = p - \phi \in \Omega_n$ и следователно

$$\begin{aligned} \|f - \phi\|^2 &= \|f - p + p - \phi\|^2 \\ &= (f - p + \delta, f - p + \delta) = \|f - p\|^2 + \|\delta\|^2 \text{ (защото } (f - p) \perp \delta) \\ &\geq \|f - p\|^2 \end{aligned}$$

И така, ако p удовлетворява 14.1, то

$$\|f - p\| \leq \|f - \phi\|, \forall \phi \in \Omega_n$$

Като равенство се достига само при $\delta = 0$, тоест когато $p \equiv \phi$.

15 Изведете формулата от вида $f'(a) \approx C_0 f(a - h) + C_1 f(a + h)$ и грешката $O(h^2)$ при положение, че f е достатъчно гладка. Обосновете порядъка на грешката.

Нека $f(t)$ е дефинирана в $[a - h, a + h]$ и $x_0 = a - h, x_1 = a + h$ са различни възли на интерполация симитрични спрямо точката a . Търсим

приближение на $f'(a)$. Съгласно формулата на Нютон

$$f(t) = L_1(f; t) + f[a - h, a + h, t](t - a + h)(t - a - h)$$

Очевидно

$$L_1(f; t) = f(a - h) + f[a - h, a + h](t - a + h).$$

Следователно $f'(a) \approx L_1'(a) = f[a - h, a + h]$ и получаваме следната формула за приближение от търсения вид:

$$f'(a) = \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h}$$

Тогава за грешката имаме

$$\begin{aligned} E(f) &= (f[a - h, a + h, t](t - a + h))' \\ &= f[a - h, a + h, t, t](t - a + h)(t - a - h) + f[a - h, a + h, t]2(x - a) \\ E(a) &= f[a - h, a + h, t, t](a - a + h)(a - a - h) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(-h^2) \\ &= \boxed{-\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}h^2} \end{aligned}$$

От $E(a) \rightarrow 0$ при $h^2 \rightarrow 0$, следва, че порядъка на грешката е $o(h^2)$.

16 Изведете елементарната квадратурна формула на трапеца и оценката на грешката при подходящи предположения за подинтегралната функция.

17 Формулирайте и докажете теоремата за квадратурната формула на Гаус.

Теорема 17.1. *При всяко естествено число n съществува единствена квадратурна формула от вида:*

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx \equiv \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (17.1)$$

където $\mu(x)$ е дадено тегло, дефинирано в $[a, b]$, $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$, $a\{A_k\}_1^n \in \mathbb{R}$ с алгебрична степен на точност $2n - 1$. Вземите $\{x_k\}_1^n$ на тази формула са нулите на полинома от степен n , ортогонален $[a, b]$ с тегло $\mu(x)$ на всички алгебрични полиноми от степен $n - 1$.

Доказателство. (\Leftarrow) Нека $w(x)$ е полином от степен n , с коефициент 1 пред x_n , който е ортогонален в $[a, b]$ с тегло $\mu(x)$ на всички полиноми от степен $n-1$ и нека x_1, \dots, x_n са неговите нули, тоест $w(x) = (x-x_1) \dots (x-x_n)$. Ще построим интерполационната квадратурна формула от вида 17.1 с възли нулите $\{x_k\}_1^n$ на $w(x)$ и ще покажем, че тази формула има АСТ = $2n-1$. Нека f е произволен полином от степен $2n-1$. Разделяме $f(x)$ на $w(x)$ и получаваме:

$$f(x) = w(x)q(x) + r(x), \quad (17.2)$$

където q и r са полиноми от по-малка или равна на $n-1$. Тогава:

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx = \int_a^b \mu(x)w(x)q(x)dx + \int_a^b \mu(x)r(x)dx.$$

От $w(x)$ ортогонален на $q(x)$, следва че:

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx = \int_a^b \mu(x)r(x)dx$$

Формула 17.1 е точна за $r(x)$, тогава

$$\int_a^b \mu(x)r(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k)$$

От $w(x_k) = 0$, следва, че $r(x_k) = f(x_k)$. Получаваме

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

Квадратурната формула е точна за всяко $f(x) \in \pi_{2n-1}$ следователно АСТ = $2n-1$.

\Rightarrow Нека квадратурната формула 17.1 има АСТ = $2n-1$. Ще покажем, че полинома $w(x) = (x-x_1) \dots (x-x_n)$ е ортогонален на всеки полином от π_{n-1} . Тогава полиномът $f(x) = Q(x)w(x)$ е от степен $2n-1$ и квадратурната формула ще бъде точна за него. Имаме

$$\int_a^b \mu(x)Q(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k Q(x_k)w(x_k) = 0,$$

тоест $w(x)$ е ортогонален на $Q(x)$. Единствеността на полинома с най-висока АСТ, тоест $2n-1$, следва от единствеността на полинома $w(x) = (x-x_1) \dots (x-x_n)$, ортогонален на всички полиноми от π_{n-1} .

18 Формулирайте и докажете теоремата за приближено решаване на нелинейно изображение по метода свиващото изображение.

Теорема 18.1. Нека ϕ е непрекъснато изображение на $[a, b]$ в себе си, което удовлетворява условието на Липшиц с константа $q < 1$. Тогава

а Уравнението $x = \phi(x)$ има единствен корен $\xi \in [a, b]$;

б Редицата $\{x_n\}$ клони към ξ при $n \rightarrow \infty$.

Нещо повече

$$|x_n - \xi| \leq (b - a)q^n, \forall n \quad (18.1)$$

Доказателство. От това, че ϕ е непрекъснато изображение на интервала $[a, b]$ в себе си следва, че ϕ има неподвижна точка в $[a, b]$. Да допуснем, че неподвижните точки са повече от една. Нека $\xi_1 = \phi(\xi_1)$, $\xi_2 = \phi(\xi_2)$, за някои $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$. Тогава при $\xi_2 \neq \xi_1$:

$$\begin{aligned} |\xi_1 - \xi_2| &= |\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)| \\ &\leq q|\xi_1 - \xi_2| \quad (\text{по условие на Липшиц}) < |\xi_1 - \xi_2| \quad (\text{от } q < 1) \end{aligned}$$

И достигнахме до противоречие, следователно в интервала $[a, b]$ имаме единствена неподвижна точка ξ . Ще докажем оценката 18.1, от която следва б. Имаме

$$\begin{aligned} |x_n - \xi| &= |\phi(x_{n-1}) - \phi(\xi)| \leq q|x_{n-1} - \xi| \\ &= q|\phi(x_{n-2}) - \phi(\xi)| \leq q^2|x_{n-3} - \xi| \\ &\dots \\ &\leq q^n|x_0 - \xi| \end{aligned}$$

От $x_0 \in [a, b]$ и $\xi \in [a, b]$, то $|x_0 - \xi| < b - a$