Задачи второ контролно ЧМ

Информатика при Лозко Милев

Теодора Иванова 20.05.2019

Първи тип

Задача 1.
Като използвате интерполационна формула на Лагранж, намерете полинома $p \in \pi_2$, който удовлетворява условията: $p(-1) = 2, p(1) = 2, p(2) = 5$. Представете $p(x)$ по степените на x. **Решение:**
Използваме формулата

$$L_2(f;x) = \sum_{k=0}^{2} f(x_k) \prod_{i=0, i\neq k}^{2} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

за $x_0 = -1, x_1 = 1, x_2 = 2$ и получаваме

$$\begin{aligned}
L_2(f;x) &= f(-1)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\\
&= 2\frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} + 2\frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} + 5\frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)}\\
&= 2\frac{x^2-3x+2}{6} + 2\frac{x^2-x-2}{-2} + 5\frac{x^2-1}{3}\\
&= \frac{x^2-3x+2+5x^2-5}{3} - x^2 + x + 2 = \frac{6x^2-3x-3-3x^2+3x+6}{3}\\
&= \frac{3x^2+3}{3} = \boxed{x^2+1}
\end{aligned}$$

Задача 2.
Полиномът $L_2(f;x)$ интерполира $f(x) = e^x$ в $-1, 0, 1$. Като използвате формулата за оценка на грешката докажете, че:

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_2(f;x)| \leq \frac{1}{5}.$$

Решение:
Формулата за оценка на грешката има вида:

$$f(x) - L_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x), \xi \in [-1,1].$$

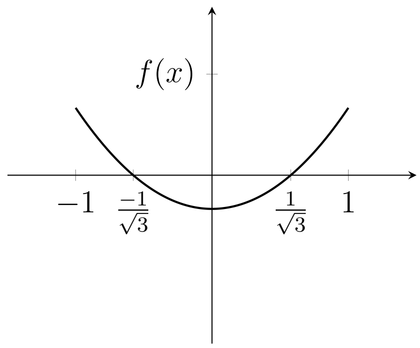
Замествайки за $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ получаваме:

$$\begin{aligned}
f(x) - L_2(f;x) &= \frac{f^3(\xi)}{(3)!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\
&= \frac{e^\xi}{6}(x+1)x(x-1) = \boxed{\frac{e^\xi}{6}(x^3-x).}
\end{aligned}$$

Търсим максимума на получената функция

$$(f(x) - L_2(f;x))' = \frac{e^{\xi}}{6}(3x^2 - 1)$$

Този полином се нулира в $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$



Като максимума си достига при $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.
От $\xi \in [-1, 1]$ следва, че e^{ξ} достига максимума си при $x = 1$. Тогава

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_2(f;x)| \leq \frac{e}{6} \max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{-2}{3\sqrt{3}}\right|$$

От $e < 3$ и $\sqrt{3} < 2$

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_2(f;x)| \leq \frac{3}{6}\frac{2}{6} = \frac{1}{6} \leq \frac{1}{5}$$

Задача 3.
Като използвате интерполационна формула на Нютон с разделени разлики, намерете полинома $p \in \pi_3$, който удовлетворява условията: $p(-2) = -8, p(0) = 2, p(1) = 4, p(2) = 12$.Представете $p(x)$ по степените на x. **Решение:**
Използваме таблицата за пресмятане на разделените разлики спрямо рекурентната им дефиниция.

Нека $x_0, \ldots, x_n$ са дадени различни точки. Разделената разлика на функция f в точките $x_0, \ldots, x_n$ се бележи с $f[x_0, \ldots, x_n]$ и се определя индуктивно със следната рекурентна връзка.

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \quad n = 1, \ldots, \infty$$

, като приемаме, че $f[x_i] = f(x_i)$

x_i	f_i	$f[.,.]$	$f[.,.,.]$	$f[.,.,.,.]$
-2	-8			
		5		
0	2		-1	
		2		1
1	4		3	
		8		
2	12			

Използваме формулата на Нютон

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0,\dots,x_k](x-x_0)\dots(x-x_{k-1}),$$

като приемаме, че $(x-x_0)\dots(x-x_{k-1}) = 1$ при $k=0$.

$$\begin{aligned}
p(x) = L_3(f;x) &= \sum_{k=0}^{3} f[-2,\dots,2](x+2)\dots(x-x_{k-1}) \\
&= f[-2] + f[-2,0](x+2)x + f[-2,0,1](x+2)x + f[-2,0,1,2](x+2)x(x-1) \\
&= -8 + 5x + 10 - x^2 - 2x + x^3 + x^2 - 2x \\
&= \boxed{2 + x + x^3}
\end{aligned}$$

Задача 4.

Нека $S_k = 1^2 + \dots + k^2$ за $k \geq 1, S_0 = 0$. Покажете, че съществува единствен $p \in \pi_3 : p(k) = S_k, k = 0,1,2,\dots$. Намерете S_k като използвате формулата на Нютон с крайни разлики за интерполация напред.

Решение:

Крайна разлика от k-ти ред дефинираме индуктивно по следния начин:

$$\begin{aligned}
\Delta^0 f_i &= f_i \\
\Delta^k f_i &= \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i
\end{aligned}$$

Използвайки дефиницията за крайни разлики ще покажем, че всички крайни разлики от 4-ти ред са 0.

k	S_k	ΔS_k	$\Delta^2 S_k$	$\Delta^3 S_k$	$\Delta^4 S_k$
0	0				
		1			
1	1		3		
		4		2	
2	5		5		0
		9		2	
3	14		7		0
		16		2	
4	30		9		0
		25		2	
5	55		11		0
		36		2	
6	71		13		
....	....	......	......	.....	.....

От това, че всички крайни разлики от 4-ти ред са 0, следва, че интерполационния полином на S_k е от π_3. За да намерим $p(x) \in \pi_3$ ще използваме формула на Нютон за интерполиране напред. Провери формулите

Формула на Нютон за интерполиране напред в равноотдалечени възли

$$L_n(f; x_0 + th) = \sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} \Delta^k f_0$$

КОМЕНТАР

Формула на Нютон за интерполиране назад в равноотдалечени възли

$$L_n(f; x_n + th) = \sum_{k=0}^{n} \binom{t+k-1}{k} \Delta^k f_{n-k}$$

Тоест

$$p(x) = L_n(S;x) = \sum_{k=0}^{3} \binom{x}{k} \Delta^k S_0 = \binom{x}{0}\Delta^0 S_0 + \binom{x}{1}\Delta S_0 + \binom{x}{2}\Delta^2 S_0 + \binom{x}{3}\Delta^3 S_0$$

$$= 0 + x.1 + \frac{x(x-1)}{2!}.3 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}.2$$

$$= x + \frac{3x^2-3x}{2} + \frac{2x^3-6x^2+4x}{6} = \frac{6x+9x^2-9x+2x^3-6x^2+4x}{6}$$

$$= \frac{2x^3+3x^2+x}{6} = \boxed{\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}}$$

Задача 5.
Като използвате интерполационна формула на Нютон с разделени разлики с кратни възли, намерете интерполационния полином на Ермит, който усовлетворява условията: $p(0) = -1, p'(0) = 1, p''(0) = 2, p(1) = 0, p'(1) = -1$. Представете $p(x)$ по степените на x.

Решение:

Теорема.Нека $x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n$ е редица от реални числа и $f(x)$ е достатъчно гладка функция в интервал, който ги съдържа. Тогава

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \begin{cases} \frac{f[x_1,\ldots,x_n]-f[x_0,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}, x_0 < x_1 < \ldots < x_n \\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, x_0 = x_1 = \ldots = x_n \end{cases}$$

Използвайки горната теорема ще пресметнем таблицата с разделените разлики:

x_i	f_i	$f[.,.]$	$f[.,.,.]$	$f[.,.,.,.]$	
0	-1				
		1			
0	-1		$\frac{2}{2!}=1$		
		1		-1	
0	-1		0		-1
		1		-2	
1	0		-2		
		-1			
1	0				

Тогава интерполационния полином ще има вида:

$$\begin{aligned}
p(x) = L_5(f;x) &= \sum_{k=0}^{5} f[0,\dots,1]x\dots(x-x_{k-1}) \\
&= f[0] + f[0,0]x + f[0,0,0]x.x + f[0,0,0,1]x.x.x + f[0,0,0,1,1]x.x.x.(x-1) \\
&= -1 + x + x^2 - x^3 - x^4 + x^3 = \boxed{-1 + x + x^2 - x^4}
\end{aligned}$$

Задача 6.

Като използвате формулата за тригонометрична интерползция при равноотдалечени възли, определете коефициентите a_0, a_1, b_1 така, че $\tau(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 cosx + b_1 sinx$ да удовлетворява условията $\tau(0) = -1, \tau(\frac{2\pi}{3}) = 2, \tau(\frac{4\pi}{3}) = 2$.

Решение:

Теорема.Нека $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < 2\pi$ са дадени възли и $y_0, \dots, y_{2n}$ са дадени числа. Тогава съществува единствен тригонометричен полином от степен $n - \tau_n(x) : \tau_n(x_i) = y_i, i = 0, \dots, 2n$, който се задава с формулата

$$\tau_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k(x) y_k, \text{ където}$$

$$\lambda_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{2n} \frac{sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{sin\left(\frac{x_k-x_i}{2}\right)}$$

Задача 7.

Да се намери явния вид на $B(1,2,4,t)$ за $t \in [1,4]$.

Решение:

Използваме

$$B(t_0,t_1,t_2,t) = \begin{cases} \frac{t-t_0}{(t_2-t_0)(t_1-t_0)}, t \in [t_0,t_1] \\ \frac{t_2-t}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)}, t \in [t_1,t_2] \\ 0 \qquad , \text{ иначе} \end{cases} .$$

И получаваме

$$B(1,2,4,t) = \begin{cases} \frac{t-1}{(4-1)(2-1)}, t \in [1,2] \\ \frac{4-t}{(4-2)(4-1)}, t \in [2,4] \\ 0 \qquad , \text{ иначе} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t-1}{3}, t \in [1,2] \\ \frac{4-t}{6}, t \in [2,4] \\ 0 \quad , \text{ иначе} \end{cases} .$$

Задача 8.
Да се намери полинома на най-добро равномерно приближение от π_1 за функцията $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ в $[-1, 1]$ и $E_1(f)$.
Решение:
//Избираме средната точка да е там където полинома си сменя знака
Нека $-1, \frac{1}{2}, 1$ са точки на алтернанс, тоест

$$E_1(f) = +[f(-1) - p(-1)] = -[f(\frac{1}{2}) - p(\frac{1}{2})] = +[f(1) - p(1)]$$

и търсения полином е $p(x) = ax + b$. //Направи го и за произволна точка t. Тогава

$$\frac{3}{2} + a - b = \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2} - a - b$$
$$\frac{3}{2} + a - b = \frac{1}{2} - a - b \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$
$$\frac{3}{2} + a - b = \frac{1}{2}a + b \Rightarrow 2b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}a \Rightarrow \boxed{b = \frac{5}{8}} \Rightarrow p(x) = \frac{1}{2}a - \frac{5}{8}$$

. От $p(x)$ линейна функция, следва че в $[-1, 1/2]$ тя достига своите екстремуми в краищата наинтервала и аналогично и за $[1/2, 1]$. Тогава $E_1(f) = \underbrace{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{5}{8}}_{\frac{3}{8}} = \underbrace{-\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{5}{8}}_{\frac{3}{8}} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{8}}_{\frac{3}{8}} \Rightarrow E_1(f) = \frac{3}{8}$

Задача 9.
Да се намери полинома на най-добро средноквадратично приближение от π_1 за функцията $f(x) = e^x$ в интервала $[-1, 1]$ при тегло $\mu(x) \equiv 1$.
Решение:
Търсим $p = ax + b$, чиито базисни функции са $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x$. За да минимизираме

$$\int_{-1}^{1} \mu(x)(f(x) - p(x))^2 dx$$

Трябва да са изпълнени следните условия за ортогоналността с π_1.

$$\left|\begin{array}{l}\int_{-1}^{1}\mu(x)(f(x)-p(x))dx=0\\ \\ \int_{-1}^{1}\mu(x)(f(x)-p(x))xdx=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\int_{-1}^{1}(e^x-ax-b)dx=0\\ \int_{-1}^{1}(e^x-ac-b)xdx=0\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{c}\int_{-1}^{1}e^x dx=a\int_{-1}^{1}xdx+b\int_{-1}^{1}dx\\ \\ \int_{-1}^{1}e^x xdx=a\int_{-1}^{1}x^2dx+b\int_{-1}^{1}xdx\end{array}\right. \Rightarrow\left|\begin{array}{c}e^x|_{-1}^{1}=a\frac{x^2}{2}|_{-1}^{1}+bx|_{-1}^{1}\\ \\ xe^x|_{-1}^{1}-e^x|_{-1}^{1}=a\frac{x^3}{3}|_{-1}^{1}xdx+b\frac{x^2}{2}|_{-1}^{1}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{c}e-\frac{1}{e}=2b\\ \\ e+\frac{1}{e}-e+\frac{1}{e}=\frac{2}{3}a\end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\left|\begin{array}{c}b=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\\ \\ a=\frac{3}{e}\end{array}\right.}$$

Тогава

$$\boxed{p(x)=\frac{3}{e}x+\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}}.$$

Задача 10.

Да се намери полинома от π_1, приближаващ по метода на най-малките квадрати таблицата:

x_i	0	1	3	4
f_i	5	2	2	1

Решение:

Търсим полинома $p(x)\in\pi_1 : p(x)=ax+b$, където $\varphi_0(x)=x, \varphi_1(x)=1$ са базисните полиноми, за който

$$\sum_{i=1}^{4}[f_i-p(x_i)]^2$$

е минимална. От ортогоналността получаваме системата

$$\left|\begin{array}{c}\sum_{i=1}^4[f_i-p(x_i)]^2=0\\ \sum_{i=1}^4[f_i-p(x_i)]^2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c}\sum_{i=1}^4[f_i-ax_i-b]=0\\ \sum_{i=1}^4[f_i-ax_i-b]x=0\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{c}\sum_{i=1}^4[f_i]=a\sum_{i=1}^4 x_i+b\sum_{i=1}^4\\ \sum_{i=1}^4[f_i]x_i=a\sum_{i=1}^4 x_i^2+b\sum_{i=1}^4 x_i\end{array}\right. \Rightarrow\left|\begin{array}{c}10=8a+4b\\ 12=26a+8b\end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\left|\begin{array}{c}a=-\frac{4}{5}\\ b=\frac{41}{10}\end{array}\right.}$$

Тогава $p(x)=-\frac{4}{5}x+\frac{41}{10}$.

Втори тип

Задача 7.
Нека $B(x_0,\ldots,x_r;t)$ е B-сплайнът от степен $r-1$ с възли $x0<\ldots<x_r$. Да се намери $\int_{x_0}^{x_r} B(x_0,\ldots,x_r,t)dt$. Отговорът да се представи като функция зависеща само от r.
Решение:

$$B(x_0,\ldots,x_r;t)=(x-t)_+^{r-1}[x_0,\ldots,x_r]=\sum_{k=0}^{r} c_k(x_k-t)_+^{r-1}, \text{където} c_k=\frac{1}{w'(x_k)}$$

. От

$$f[x_0,\ldots,x_r]=\sum_{k=0}^{r} c_k f(x_k).$$

Разглеждаме за някое k примитивната

$$\int (x_k-t)^{r-1}dt=\frac{(x_k-t)^r}{-r},$$

където $(x_k-t)<0$ и $-r<0$ тоест $\frac{(x_k-t)^r}{-r}<0$. Тогава

$$\int_{x_0}^{x_r} B(x_0,\ldots,x_r;t)dt=\sum_{k=0}^{r} c_k\int_{x_0}^{x_r}(x_k-t)_+^{r-1}=\left(\frac{-1}{r}\sum_{k=0}^{r} x_k(x_k-t)_+^r\right)\Bigg|_{x_0}^{x_r}$$
$$=-\frac{1}{r}(x-t)_+^r[x_0,\ldots,x_r]|_{x_0}^{x_r}=-\frac{1}{r}((x-x_r)_+^r[x_0,\ldots,x_r]-(x-x_0)_+^r[x_0,\ldots,x_r])$$
$$=-\frac{1}{r}(0-(x-x_0)_+^r[x_0,\ldots,x_r])$$

$(x-x_0)_+^r[x_0,\ldots,x_r]$ – коефициента пред $x^r=1$.

Тогава $\boxed{\int_{x_0}^{x_r} B(x_0,\ldots,x_r;t)dt=\frac{1}{r}}$

Задача 8.
Да се докаже, че най-доброто равномерно приближение с полиноми от π_n за функцията $f(x)=cos$x в $[-1,1]$ удовлетворява неравенството: $E_n(f)\leq\frac{1}{2^n(n+1)!}$.

Решение:

$$E_n(f) = \min_{p*\in\pi_n} \rho(f;p*) \leq \rho(f;p), \forall p \in \pi_n.$$

Нека p е интерполационння полином на Лагранж във възлите $\xi_0, \dots, \xi_n$, които са нулите на $T_{n+1} = cos\left((n+1)arccos\text{x}\right)$.

$$\rho(f;p) = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p(x)|$$

$$|f(x) - p(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\xi_0)\dots(x-\xi_n) \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}.\frac{1}{2^n}|T_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!}$$

От $T_{n+1}(x) = c(x-\xi_0)\dots(x-\xi_n)$, следва че $|T_{n+1}| \leq 1$.

Задача 9.

Докажете, че ако ако $f \in C^1[0,1]$ то за производната на полинома на Бернщайн е изпълнено:

$$B'_{n+1}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f'(\xi_k) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

където $\xi_k \in \left[\frac{k}{n+1} \frac{k+1}{n+1}\right], k = 0, \dots, n$.

Решение:

Имаме, че

$$B_{n+1}(f;t) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) t^{k-1}(1-t)^{n+1-k}.$$

Диференцираме по t.

$$\begin{aligned} B'_{n+1}(f;t) = &\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) kt_{k-1}(1-t)^{n+1-k} \\ &+ \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) (n+1-k)t^k(1-t)^{n-k}(-1). \end{aligned}$$

Първата сума започва от $k = 1$, защото за $= 0$ е 0, аналогично втората сума е до $k = n$.

За първата сума полагаме $j = k - 1$.

$$\begin{aligned}
B'_{n+1}(f;t) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j+1} f\left(\frac{j+1}{n+1}\right)(j+1)t_j(1-t)^{n-j} \\
&- \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right)(n+1-k)t^k(1-t)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)(k+1)t_k(1-t)^{n-k} \\
&- \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right)(n+1-k)t^k(1-t)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} t^k(1-t)^{n-k} \left(\binom{n+1}{k+1} f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)(k+1) - \binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right)(n+1-k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} = \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k}(n+1)\left(f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right).
\end{aligned}$$

От теоремата на Лагранж получаваме, че за някаква средна точка $\xi_k \in \left[\frac{k}{n+1} \frac{k+1}{n+1}\right]$ е изпълнено

$$B'_{n+1}(f;t) = \sum_{k=0}^{n} = \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k}(n+1)f'(\xi_k)\left(\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n+1}\right).$$

Откъдето

$$B'_{n+1}(f;t) = \sum_{k=0}^{n} = \binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} f'(\xi_k)$$

Задача 10.
Да се докаже, че полиномите на Льожандър

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$$

удовлетворяват

$$\int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$$

(Упътване: $L_n(1) = 1, L_n(-1) = (-1)^n$.)
Решение:

$$I = \int_{-1}^{1} L_n^2(x)dx = xL_n^2(x)|_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} L_n(x)L'(x)xdx.$$

Имаме, че

$$L_n(x) = \alpha_n x^n + \dots$$
$$L_n'(x) = n\alpha_n x^{n-1} + \dots$$

От $xL_n'(x) = n\alpha_n x^n + \ldots = nL_n(x) + P(x)$ следва, че

$$\begin{aligned} I &= 2 - 2\int_{-1}^{1} L_n(x)(nL_n(x) + P)dx \\ &= 2 - 2\int_{-1}^{1} nL_n^2(x)dx - \underbrace{2\int_{-1}^{1} \underbrace{L_n(x)}_{\text{четна ф-я}} \underbrace{P(x)dx}_{\text{нечетна ф-я}}}_{\text{интеграл на нечетна ф-я в симитричен интервал е 0}} \\ &= 2 - 2nI \end{aligned}$$

Следователно $\boxed{I = \dfrac{2}{1+2n}}$.

Задача 11.

Задача 12.