

1 Интерполационна формула на Лагранж

Постановка на задачата

Нека x_1, x_2, \dots, x_n са различни точки и y_1, y_2, \dots, y_n са дадени реални числа.

Да се построи алгебричен полином $P(x)$ от степен $\leq n$, който удовлетворява следните условия:

$$P(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n \quad (1.1)$$

С други думи, при дадените $n + 1$ точки $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^n$ в равнината, да се построи полином P от степен n , чиято гафика минава през дадените точки $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^n$.

Да отбележим най-напред, че ако изобщо съществува решение на 1.1, то трябва да е единствено.

Допускаме, че съществуват два полинома P и Q от степен n , които удовлетворяват 1.1, тогава разликата

$$R(x) = P(x) - Q(x)$$

ще бъде полином от степен $\leq n$ и освен това

$$R(x_k) = P(x_k) - Q(x_k) = y_k - y_k = 0, \quad k = 0, \dots, n$$

Следователно R е полином от степен n , който се анулира в $n + 1$ точки. Тогава от основната теорема на алгебрата $R(x)$ е тъждествено равен на 0. Следователно $P \equiv Q$.

Съществуването и единствеността на решението на 1.1 се виждат и по следния начин.

Да напишем P в общ вид.

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

Тогава 1.1 добива следния вид:

$$a_0x_0^n + \dots + a_n = y_0$$

$$a_0x_1^n + \dots + a_n = y_1$$

\dots

$$a_0x_n^n + \dots + a_n = y_n$$

Това е система от $n+1$ линейни уравнения по отношение на (a_0, a_1, \dots, a_n) .
Детерминантата ѝ

$$V(x_0, \dots, x_n) = \det \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

е детерминантата на Вандермонд. От линейната алгебра знаем, че детерминантата на Вандермонд съответстваща на точките x_0, \dots, x_n е различна от 0, ако $x_i \neq x_j$, при $i \neq j$. Тъй като точките x_0, \dots, x_n в (1) са различни по условие, $V(x_0, \dots, x_n) \neq 0$ и следователно системата, а оттук и задачата има единствено решение (тоест системата е определена ???).

Извеждане на формулата При фиксирано k да се намери полинома $l_{nk}(x) \in \pi_n$, който удовлетворява условията:

1. $l_{nk}(x_i) = 0$, за $i = 0, \dots, n$ и $i \neq k$
2. $l_{nk}(x_k) = 1$, за $i = k$

От 1. следва, че точките $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ са нули на полинома l_{nk} . От $l_{nk} \in \pi_n$ следва, че $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ са всичките нули. Тогава l_{nk} може да се запише във вида:

$$l_{nk}(x) = A(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n),$$

където A е някакво число. A се определя от 2..

$$1 = l_{nk}(x_k) = A(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)$$

Следователно:

$$A = \frac{1}{\prod_{i=0, i \neq k}^n (x_k - x_i)}.$$

Тогава

$$\begin{aligned} l_{nk}(x) &= \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} \\ &= \prod_{i=0, i \neq k}^n \left(\frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Полиномите $\{l_{nk}\}_{k=0}^n$ се наричат базисни полиноми на Лагранж. С тяхна помощ може лесно да се построи P .

Ще покажем, че решението $P(x)$ на 1.1 се дава с

$$P(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_{nk}(x) \quad (1.3)$$

По построение

$$l_{nk}(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

Тогава

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k l_{nk}(x_i) = y_i l_{ni}(x_i) = y_i 1 = y_i,$$

за всяко $i = 0, \dots, n$. От това, че полиномът 1.3 е от π_n ($l_{nk} \in \pi_n$) и удовлетворява 1.1, следва, че $P(x)$ даден в 1.3 е решение на интерполационната задача.

Най-често $\{y_k\}_{k=0}^n$ са стойностите на някаква функция $f(x)$ в точките x_0, x_1, \dots, x_n , тоест

$$y_k = f(x_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

В такъв случай

$$P(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \dots, n$$

се бележи с $L_n(f; x)$ и се нарича интерполационен полином на Лагранж за функцията f с възли x_0, \dots, x_n . Казваме още, че $L_n(f; x)$ интерполира $f(x)$ в точките (x_0, \dots, x_n) .

И така доказахме следната теорема

Теорема 1.1. *Нека $x_0 < \dots < x_n$ и $f(x)$ е определена в тези точки. Тогава съществува единствен полином от π_n , който интерполира f в x_0, \dots, x_n . Този полином се представя чрез формулата:*

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad (1.4)$$

Твърдението следва веднага от 1.3 като вземем предвид, че съгласно 1.2

$$l_{nk}(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Формула 1.4 се нарича интерполационна формула на Лагранж.

Понякога ще използваме по-кратък запис за l_{nk} .

$$w'(x_k) = (x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n),$$

където

$$w(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n).$$

Тогава

$$l_{nk} = \frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)}$$

и

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)}.$$

Оценка на грешката Обикновено интерполационния полином $L_n(f; x)$ се използва за приближаване на по сложна функция $f(x)$. Тогава възниква въпроса : Какво можем да кажем за разликата:

$$R_n(f; x) = f(x) - L_n(f; x)$$

в някакво предварително избрано x ?

Да обърнем внимание, че полиномът $L_n(f; x)$ беше построен само въз основа на точките $\{x_k, f(x_k)\}_{k=0}^n$. Но през тези същите точки минават графиките на безброй други непрекъснати функции $g(x)$ и очевидно за тях имаме $L_n(g; x) \equiv L_n(f; x)$. При това за всяко $c > 0$ можем да построим непрекъснатата функция g от разглеждания клас - такава, че $g(x) - L_n(f; x) = c$. Следователно грешката може да бъде произволно голяма ако нищо не знаем за формулата освен това, че е непрекъсната. За това в следващата теорема се налага едно допълнително условие за гладкост на f .

Теорема 1.2. Нека $[a, b]$ е даден краен интервал и x_0, \dots, x_n са различни точки в него. Нека функцията $f(x)$ има непрекъснатата $(n + 1)$ -ва производна в $[a, b]$. Тогава $\forall x \in [a, b] \exists \xi \in [a, b]$:

$$f(x) - L_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n).$$

Доказателство. Образуваме помощната функция

$$F(t) = f(t) - L_n(f; t) - c(t - x_0) \dots (t - x_n),$$

където c е параметър. $F(t)$ се анулира в точките x_0, \dots, x_n при всеки избор на c .

$$F(x_k) = f(x_k) - L_n(f; k) - c \cdot 0 = f(x_k) - f(x_k) = 0.$$

Избираме c така, че $F(t)$ да се анулира и при $t = x$. От равенството

$$f(x) - L_n(f; x) - c(x - x_0) \dots (x - x_n) = 0$$

определяме

$$c = \frac{R_n(f; x)}{(x - x_0) \dots (x - x_n)}. \quad (1.5)$$

И така при този избор на c функцията $F(t)$ има поне $n + 2$ нули. Това са точките x, x_0, \dots, x_n . По теоремата на Рол $F'(t)$ ще има поне $n + 1$ нули, които лежат в интервала $[a, b]$, $F''(t)$ ще има поне n нули и тн. $F^{(n+1)}(t)$ ще има поне една нула, която лежи в $[a, b]$. Да я означим с ξ . Имаме $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. От друга страна,

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(\xi) &= f^{(n+1)}(\xi) - L_n(f; \xi) - c(n+1)! = \\ &= f^{(n+1)}(\xi) - c(n+1)!. \end{aligned}$$

Следователно

$$c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Като сравним това равенство с 1.5 получаваме:

$$R_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n).$$

Теоремата е доказана. □

2 Разделени разлики. Интерполационна формула на Нютон.

Дефиниция 2.1. Нека x_0, \dots, x_n са дадени различни точки. Разделената разлика на функцията f в точките x_0, \dots, x_n се бележи с $f[x_0, \dots, x_n]$ и се определя индуктивно със следната рекурентна връзка.

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \quad n = 1, \dots, \infty \quad (2.1)$$

, като приемаме, че $f[x_i] = f(x_i)$

Съществува връзка между интерполационния полином на Лагранж с възли x_0, \dots, x_n и разделената разлика $f[x_0, \dots, x_n]$. Тя се разкрива в следната теорема.

Теорема 2.1. Разделената разлика $f[x_0, \dots, x_n]$ съвпада с коефициента пред x^n в интерполационния полином на Лагранж $L_n(f; x)$ за функцията f с възли в същите точки x_0, \dots, x_n .

Доказателство. Доказателството се извършва по индукция относно броя на точките. База: $n = 1 - x_0, x_1$

$$\begin{aligned} L_1(f; x) &= f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \\ &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) + f(x_0) = \\ &= f[x_0, x_1] (x - x_0) + f(x_0). \end{aligned}$$

Следователно коефициентът пред x в $L_1(f; x)$ е равен на разделената разлика $f[x_0, x_1]$.

Да допуснем, че теоремата е изпълнена за произволно n . Ще докажем, че е изпълнена и за $n + 1$ точки.

Нека x_0, \dots, x_n са произволни $n + 1$ различни точки и нека $p(x) \in \pi_{n-1}$ интерполира f в x_1, \dots, x_n $q(x) \in \pi_{n-1}$ интерполира f в x_0, \dots, x_{n-1}

Разглеждаме полинома

$$r(x) = \frac{(x - x_0)p(x) - (x - x_n)q(x)}{x_n - x_0}$$

От p и $q \in \pi_{n-1}$, следва, че r е алгебричен полином от степен $\leq n$. Освен това при $i \in (1, n-1)$,

$$r(x_i) = \frac{(x_i - x_0)f(x_i) - (x_i - x_n)f(x_i)}{x_n - x_0} = f(x_i)$$

При $i = 0$ и $i = n$ имаме

$$\begin{aligned} r(x_0) &= -\frac{x_0 - x_n}{x_n - x_0}q(x_0) &= f(x_0) \\ r(x_n) &= \frac{x_n - x_0}{x_n - x_0}p(x_n) &= f(x_n) \end{aligned}$$

Следователно $r \in \pi_n$ и r интерполира $f(x)$ в точките x_0, \dots, x_n . От единствеността на интерполационния полином на Лагранж следва, че:

$$r(x) \equiv L_n(f; x)$$

Следователно коефициентът пред x^n в $L_n(f; x)$ е равен на коефициентът пред x^n в $r(x)$.

Нека α и β са коефициентите пред x^{n-1} съответно в $p(x)$ и $q(x)$. Тогава от формулата за $r(x)$ се вижда, че коефициентът D пред x^n в $r(x)$ е равен на $\frac{\alpha - \beta}{x_n - x_0}$.

Но съгласно индукционното предположение

$$\begin{aligned} \alpha &= f[x_1, \dots, x_n] \\ \beta &= f[x_0, \dots, x_{n-1}] \end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned} D &= \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} = \\ &= f[x_0, \dots, x_n] \end{aligned}$$

Последното равенство следва от рекурентна връзка 2.1. Следователно индукцията е завършена и теоремата е доказана. \square

От теорема 2.1 следват редица интересни свойства на разделената разлика.

От записа

$$f[x_0, x_1] = f(x_0)\frac{1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{1}{x_1 - x_0}$$

се виждам, че разделената разлика $f[x_0, x_1]$ се представя като линейна комбинация на стойностите на функцията f в x_0, x_1 . Тогава от 2.1 следва, че $f[x_0, \dots, x_n]$ се представя като линейна комбинация на f в x_0, \dots, x_n .

За намиране на коефициентите пред $f(x_0), \dots, f(x_n)$ ще използваме теорема 2.1.

От формулата на Лагранж

$$\begin{aligned} L_n(f; x) &= \sum_{k=0}^n f(x_k) \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_0 - x_i} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\prod_{i=0, i \neq k}^n (x_k - x_i)} \frac{w(x)}{x - x_k}, \end{aligned}$$

където $w(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$.

От последното равенство се вижда, че коефициентът пред x^n в $L_n(f; x)$ е равен на:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\prod_{i=0, i \neq k}^n (x_k - x_i)}$$

Следователно съгласно теорема 2.1

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\prod_{i=0, i \neq k}^n (x_k - x_i)} \quad (2.2)$$

Това е търсеното явно представяне на разделената разлика чрез стойностите на f в точките x_0, \dots, x_n .

Като използваме

$$w'(x_k) = \prod_{i=0, i \neq k}^n (x_k - x_i)$$

можем да запишем 2.2 като

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{w'(x_k)}.$$

от 2.2 се вижда, че разделената разлика е един линеен функционал, тоест за всеки две функции f, g и число c е в сила формулата

$$(f + cg)[x_0, \dots, x_n] = f[x_0, \dots, x_n] + cg[x_0, \dots, x_n],$$

за всяко разместване (пермутация) (i_0, \dots, i_n) на индексите $(0, \dots, n)$.

Ще докажем, че ако

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \text{ то} \\ f[x_0, \dots, x^n] &= a_0 \end{aligned}$$

С други думи разделената разлика в $n+1$ точки на полином от степен n е равна на коефициента пред x^n . Това твърдение следва веднага от факта, че ако $f \in \pi_n$, то f съвпада с интерполационния си полином на Лагранж с $n+1$ точки. Тогава

$$\begin{aligned} f[x_0, \dots, x_n] &= \text{коефициента пред } x^n \text{ в } L_n(f; x) \\ &= \text{коефициента пред } x^n \text{ в } f(x) \\ &= a_0 \end{aligned}$$

Един важен частен случай на това твърдение е следното свойство:

Свойство 1. Ако $f \in \pi_{n-1}$, то $f[x_0, \dots, x_n] = 0$

Следователно разделената разлика в $n+1$ точки винаги анулира всички полиноми от степен по-малка или равна на $n-1$.

Сега вече сме готови да изведем формулата на Нютон за интерполационни полиноми. За целта разглеждаме разликата:

$$L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x),$$

където $L_{k+1}(f; x)$ интерполира f в x_0, \dots, x_{k+1} , а $L_k(f; x)$ интерполира f в x_0, \dots, x_k . Ясно е, че $L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x) \in \pi_{k+1}$. Освен това

$$L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x) = f(x_i) - f(x_i) = 0, \text{ за } i = 0, \dots, k.$$

Следователно x_0, \dots, x_k са всичките нули на полинома $L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x)$. Тогава той може да се запише във вида:

$$L_{k+1}(f; x) - L_k(f; x) = A(x - x_0) \dots (x - x_k), \quad (2.3)$$

където A е константа. За да намерим A нека сравним коефициентите пред x^{k+1} в 2.3.

Съгласно теорема 2.1 коефициента пред x^{k+1} в $L_{k+1}(f; x)$ е равен на разнесената разлика $f[x_0, \dots, x_{k+1}]$. Следователно

$$A = f[x_0, \dots, x_k + 1]$$

и следователно от 2.3

$$L_{k+1}(f; x) = L_k(f; x) + f[x_0, \dots, x_{k+1}](x - x_0) \dots (x - x_k) \quad (2.4)$$

Нека приложим 2.4 за $k = n-1, n-3, \dots, 2, 1, 0$. Получаваме следния явен израз за интерполационния полином на Лагранж.

$$\begin{aligned} L_n(f; x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \\ & + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ & + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Това е интерполационната формула на Нютон. Понякога ще я записваме съкратено така

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}), \quad (2.5)$$

като приемаме, че $(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) = 1$ при $k = 0$.

Представяне на грешката Сега ще изведем един израз за остатъка на f като използваме разделени разлики.

Нека x е произволна фиксирана точка различна от x_0, \dots, x_n . Да означим с $L_{n+1}(f; t)$ полинома, който интерполира f в точките x_0, \dots, x_n и x . Нека $L_n(f; t)$ интерполира f в x_0, \dots, x_n .

От 2.4 следва, че

$$L_{n+1}(f; t) = L_n(f; t) + f[x_0, \dots, x_n, x](t - x_0) \dots (t - x_n).$$

Това равенство е вярно за всяко t . Специално при $t = x$ имаме

$$L_{n+1}(f; x) = L_n(f; x) + f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \dots (x - x_n).$$

Но тъй като x е интерполационен възел на $L_{n+1}(f; t)$, то $L_{n+1}(f; t) = f(x)$. Следователно

$$f(x) = L_n(f, x) + f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \dots (x - x_n). \quad (2.6)$$

Равенството беше изведено при предположение, че $x \notin (x_0, \dots, x_n)$. При $x = x_k, k = 0, \dots, n$ по дефиниция имаме $f(x) = L_n(f; x)$.

Да отбележим, че 2.6 е в сила за всяка функция f определена в точките x_0, \dots, x_n, x .

Да сравним сега формулата 2.6 с известната ни вече формула

$$f(x) = L_n(f; x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0) \dots (x - x_n),$$

изведена при предположение, че f има непрекъзната $(n+1)$ -ва производна. В първия случай остатък при интерполиране с $L_n(f; x)$ е записан като

$$f[x_0, \dots, x_n, x]w(x), \quad w(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n),$$

а във втория като

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w(x),$$

където ξ е някаква точка. Следователно разнесената разлика на f в $n+2$ точки x_0, \dots, x_n, x е равна на $(n+1)$ -вата производна в някаква междинна точка ξ .

Свойство 2. Нека $f(x)$ има непрекъзната производна до k -тата включително в интервала $[a, b]$ и x_0, \dots, x_n са произволни различни точки в $[a, b]$. Тогава

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \quad (2.7)$$

където ξ е някаква точка от интервала $[\min\{x_0, \dots, x_k\}, \max\{x_0, \dots, x_k\}]$.

От тази връзка директно следва, че ако $f \in \pi_{n-1}$, то $f[x_0, \dots, x_k] = 0$, защото $f^{(k)}(t) \equiv 0$

Схемата за пресмятане на разделени разлики се представя по следния начин

- в $I^{\text{вия}}$ стълб - x_i възлите

- в $II^{\text{рия}}$ стълб - стойностите $\{f(x)\}$.

Коефициентите $f[x_0, \dots, x_k], k = 0, \dots, n$ във формулата на Нютон се намират по горния диагонал на таблицата.

Схема за пресмятане на разделени разлики

x_i	f_i	$f[., .]$	$f[., ., .]$	$f[., ., ., .]$
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2, x_3, x_4]$	
		$f[x_3, x_4]$		
x_4	$f(x_4)$			

3 Средноквадратични приближения

Дефиниция 3.1. *Едно линейно пространство H се нарича хилбертово, ако в него е въведено скалярно произведение. Това значи, че за всеки два елемента $f, g \in H$ се съпоставя число (f, g) , което удовлетворява условията:*

1. $(f, f) \geq 0$, като $(f, f) = 0 \iff f = 0$,
2. $(f, g) = (g, f)$,
3. $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h)$

Дефиниция 3.2. *Всяко хилбертово пространство може да се нормира, като се въведе норма по следния начин:*

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}. \quad (3.1)$$

Дефиниция 3.3. *Нормата 3.1 поражда разстоянието*

$$d(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{(f - g, f - g)}$$

Дефиниция 3.4. *Нека $[a, b]$ е даден интервал, краен или безкраен и функцията μ е определена и неотрицателна в $[a, b]$. Да предположим още, че*

$$\int_a^b \mu(x) dx > 0$$

за всеки подинтервала $[\alpha, \beta]$ на $[a, b]$. Всяка функция $\mu(x)$ с тези свойства се нарича теглова функция или тегло в $[a, b]$

Дефиниция 3.5. *Нека $[a, b]$ е даден интервал и нека μ е интегрируема теглова функция в $[a, b]$. Да означим с $\mathcal{L}_2[a, b]$ пространството от всички функции определени в $[a, b]$, за които*

$$\int_a^b \mu(x) f^2(x) dx < \infty.$$

Ясно е, че $\mathcal{L}_2[a, b]$ е линейно пространство.

Дефиниция 3.6. *Нека в $\mathcal{L}_2[a, b]$ е въведено скалярно произведение по следния начин:*

$$(f, g) = \int_a^b \mu(x) f(x) g(x) dx.$$

Лесно се вижда, че това определение наистина удовлетворява условията за скалярно произведение. Така $\mathcal{L}_2[a, b]$ става хилбертово пространство.

Дефиниция 3.7. *Нормата*

$$\|f\| = \left\{ \int_a^b \mu(x) f^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

се нарича средноквадратична норма. Тя поражда средноквадратично разстояние

$$\rho(f, g) = \left\{ \int_a^b \mu(x) (f(x) - g(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Дефиниция 3.8. *Нека $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ са произволно линейно независими функции от пространството $\mathcal{L}_2[a, b]$. В частност, $\{\varphi_i\}$ могат да бъдат например алгебричните полиноми $1, x, x^2, \dots, x^n$. Тогава в $\mathcal{L}_2[a, b]$ можем да разглеждаме задачата за средноквадратично приближение на дадена функция $f \in \mathcal{L}_2[a, b]$ с обобщени полиноми $a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)$.*

Съгласно общата теория на приближения в хилбертово пространство е в сила следната теорема.

Теорема 3.1. *За всяка функция f от $\mathcal{L}_2[a, b]$ съществува единствен полином*

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x),$$

за който в

$$\int_a^b \mu(x) |f(x) - p(x)|^2 dx = \min_{a_k} \int_a^b \mu(x) \left[f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) \right]^2 dx$$

При това, ако $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ е ортогонална система, то

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \int_a^b \mu(t) f(t) \varphi_k(t) dt \cdot \varphi_k(x) \quad (3.2)$$

Метод на най-малките квадрати На практика често се сблъскваме със следната задача.

От теоретични съображения е известно, че изследваната от нас функция f е от определен вид зависещ от n параметри a_1, \dots, a_n . (Например $\sum_{k=1}^n a_k x^{k-1}$, $\prod_{k=1}^n \sin(a_k x)$, $\sum_{k=1}^n a_k x$ и тн.) Можем да изчислим стойността на f с определена точност с определен брой точки. При това, намирането на стойността на f в дадена точка може да бъде свързано с провеждане на скъпо струващ експеримент. Целта е да възстановим приближено параметрите a_1, \dots, a_n с възможно най-голяма точност въз основа на информацията

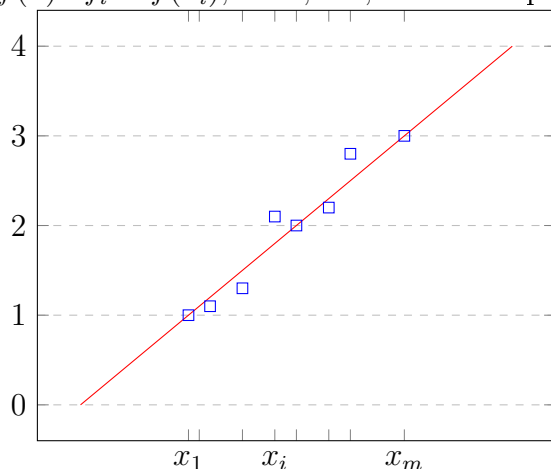
$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m), m > n.$$

Най-често тези числа са приближения на истинската стойност на f .

Например, нека знаем, че зависимостта $y = f(x)$, която изследваме е линейна, тоест

$$f(x) = Ax + B$$

при някакви A и B . Разполагаме с експериментално получени стойности на $f(x) : f_i = f(x_i), i = 1, \dots, m$. Те са представени по долу на фиг. 7.



фиг. 7

Поради неточността на измерването или несъвършенството на експеримента точките $(x_i, f_i), i = 1, \dots, m$ явно не лежат на една права. Знаем, че функцията $f(x)$ е линейна. Тогава коя права да вземем за представител на получените данни? Има много кандидати за такъв представител. Например, бихме могли да вземем произволни две точки (x_i, f_i) и

(x_j, f_j) от таблицата о за приближение на f да вземем правата l през тези две точки. Това е един случаен избор да се опитаме да подходим по-теоретично. Търсим функция от вида $f(x) = Ax + B$. Да означим с d_i отклонението на експериментално получената стойност f_i в точката x_i от предлаганата стойност чрез l , тоест

$$d_i = f_i - (Ax_i + B), i = 1, \dots, m.$$

Съществуват няколко разумни подхода за избора на параметрите A и B на l .

1) Избираме A и B така, че да минимизираме величината

$$\max_{1 \leq i \leq m} |d_i|.$$

По този начин се стараем да направим максималното разстояние между f и l в точките x_1, \dots, x_m минимално. Такъв критерий е приемлив, но неговата реализация е трудна, тъй като води до репаването на една нелинейна задача (функцията $\max |d_i|$ е нелинейна спрямо A и B). 2) Избираме A и B така, че да минимизира величината

$$\sum_{i=1}^m |d_i|.$$

Възраженията срещу критерия 1) остават и в този случай. Те се възприемали твърде сериозно в миналото, когато хората не са разполагали със средства за бързо смятане. Затова може би изборът е паднал на следващия критерий, който води до линейна система за определяне на параметрите. 3) Избираме A и B така, че да минимизират

$$S(A, B) = \sum_{i=1}^m d_i^2$$

В този случай

$$S(A, B) = \sum_{i=1}^m |f_i - (Ax_i + B)|^2$$

и необходимите условия за минимум (които са и достатъчни) водят до системата

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial A} = 0 & \Rightarrow \sum_{i=1}^m (f_i - (Ax_i + B))x_i = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial B} = 0 & \Rightarrow \sum_{i=1}^m (f_i - (Ax_i + B)) = 0\end{aligned}$$

Този подход за определяне на неизвестни параметри на функцията по таблица от данни се нарича метод на най-малките квадрати. Да го представим в една по-обща форма.

Нека $\{F(x, a_1, \dots, a_n)\}$ е фамилия от функции, която се описва от параметрите $a_i \in I_i, i = 1, \dots, n$. Нека f_1, \dots, f_m са стойностите на конкретна функция от тази фамилия.

Дефиниция 3.9. Ще казваме, че $F(x, a_1, \dots, a_n)$ е приближение на данните f_1, \dots, f_m по метода на най-малките квадрати, ако a_1, \dots, a_n минимизира израза

$$\sum_{i=1}^m \mu_i [F(x_i, a_1, \dots, a_n) - f_i]^2,$$

където $\{\mu_i\}_1^m$ са предварително зададени числа (наречени тегла).

Да разгледаме една конкретна ситуация - приближаване на функция с алгебрични полиноми от степен n в множеството от точки $x_1 < \dots < x_m (m > n)$. И така, искаме да намерим приближение

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

на f по метода на най-малките квадрати, въз основа на стойностите $f_i = f(x_i), i = 1, \dots, m$. Нека $\{\mu_i\}_1^m$ са дадени тегла. Тогава съгласно казаното по-горе a_0, a_1, \dots, a_n се определят така, че да минимизират израза

$$\Phi(a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^m \mu_i [f_i - \sum_{k=1}^n a_k x_i^k]^2$$

Вижда се, че $\Phi^{\frac{1}{2}}(a_0, \dots, a_n)$ е всъщност разстоянието между f и p в хилбертово пространство H_Δ от функции, определени в x_1, \dots, x_n снабдени със скалярно произведение

$$(f, g) = \sum_{i=1}^m \mu_i f(x_i)g(x_i).$$

Това скалярно произведение поражда нормата

$$\|f\| = \left\{ \sum_{i=1}^m \mu_i f^2(x_i) \right\}^{1/2},$$

която от своя страна поражда разстоянието

$$\rho(f, g) = \left\{ \sum_{i=1}^m \mu_i [f(x_i) - g(x_i)]^2 \right\}^{1/2}.$$

В тези термини, нашата функция $\{\Phi(a_0, \dots, a_n)\}$ е точка равна на разстоянието между f и p . Следователно методът на най-малките квадрати води до задачата за най-добро приближение с алгебрични в хилбертово пространство H_Δ . От общата теория следва, че решението a_0, \dots, a_n се определя от линейната система (4), което в този случай приема вида

$$\sum_{i=1}^m \mu_i [a_0 x_i^k + a_1 x_i^{k+1} + \dots + a_n x_i^k + n] = \sum_{i=1}^m \mu_i f(x_i)^k, \quad k = 0, \dots, n.$$

За да избегнем решаването на тази система можем да изберем предварително подходящ базис в пространството π_n от алгебрични полиноми. Например, ако търсехме полином p от вида

$$p(x) = b_0 P_0(x) + \dots + b_n P_n(x),$$

където полиномите $\{P_k(x)\}$ образуват ортогонална система в множеството от точки x_1, \dots, x_m с тегла $\{\mu_i\}$, то горната система ще се редуцира до една диагонална система

$$b_k \sum_{i=1}^m \mu_i P_k^2(x_i) = \sum_{i=1}^m \mu_i P_k(x_i) f(x_i),$$

откъдето коефициентът b_k се определя веднага.

4 Интерполационни квадратурни формули

Определеният интеграл е основно математическо понятие. Редица величини се представят чрез определен интеграл. Затова много често на практика възниква необходимостта от численото пресмятане на определени интеграли.

Известно е от курса по анализ, че един определен интеграл $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ може да бъде пресметнат точно само когато подинтегралната функция е достатъчно проста. В общия случай числото $I(f)$, което се определя като граница на числова редица, е недостъпно за математика въоръжен с молив, лист и курса по анализ. Съществуват обаче редица числени методи, които позволяват определения интеграл да бъде пресметнат с дадена точност. Тук ще разгледаме някои от тези методи.

Просто правило за приближено смятане на интеграли може да се получи, като заменим подинтегралната функция $f(x)$ с нейния полином на Лагранж.

Да предположим, че са известни стойностите на $f(x)$ в точките x_0, \dots, x_n . Съгласно формулата на Нютон

$$f(x) = L_n(f; x) + f[x_0, \dots, x_n, x]w(x), \quad (4.1)$$

където $L_n(f; x)$ е интерполационния полином на Лагранж

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)l_k(x),$$

а $w(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$. Като интегрираме 4.1 почленно от a до b получаваме формулата

$$I(f) = \sum_{k=0}^n c_k f(x_k), \quad (4.2)$$

където

$$c_k = I(l_k) = \int_a^b \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx, \quad k = 0, \dots, n. \quad (4.3)$$

Грешката на това приближение е :

$$R(f) = I(f) - I(L_n(f; x)) = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x]w(x)dx \quad (4.4)$$

Формула за приближение, в която определеният интеграл се приближава с линейна комбинация на стойностите на подинтегралната функция или нейни производни в краен брой точки, се нарича квадратурна формула. 4.2 е една квадратурна формула. Точките x_0, \dots, x_n са възли, а числата c_0, \dots, c_n - коефициент на квадратурната формула.

Дефиниция 4.1. *Една квадратурна формула от вида 4.2 се нарича интерполационна, ако нейните коефициенти c_k се получават по формула 4.3.*

С други думи, формула с $n + 1$ възела се нарича интерполационна квадратурна формула, ако тя се получава чрез интегриране на интерполационния полином на Лагранж със същите възли.

Дефиниция 4.2. *Ще казваме, че формула 4.2 е точна за f , ако $R(f) = 0$.*

Теорема 4.1. *Ако квадратурната формула 4.2 е интерполационна, то тя е точна за всеки полином от класа π_n . Обратно, ако една формула от вида 4.2 е точна за всички полиноми от класа π_n , то тя е интерполационна.*

Доказателство. (\Rightarrow) Нека 4.2 е интерполационна квадратурна формула и $f \in \pi_n$. Тогава $f(x) = L_n(f; x)$ и следователно $R(f) = 0$, тоест формулата е точна (по дефиниция 4.2). (\Leftarrow) Да допуснем, че 4.2 е точна за всички полиноми $f \in \pi_n$. Тогава тя ще бъде точна и за полиномите $l_i(x)$. Следователно

$$I(l_i) = \sum_{k=0}^n c_k l_i(x_k) = c_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

защото $l_i(x_k) = \delta_{ik}$. Получихме 4.3.

Теоремата е доказана. \square

Както вече видяхме, грешката на интерполационната квадратурна формула се дава с израза 4.4. Тази формула не е удобна за приложение, тъй като грешката се изразява отново чрез интеграл, който дори е по-сложен от предишния. Въз основа на 4.4 обаче се правят оценки, които се използват на практика. Ще разгледаме два случая, в които се изразът за грешката може да се запише в по прост вид.

Нека полиномът $w(x)$ не си сменя знака в (a, b) . Да предположим още, че $f(x)$ има непрекъсната $(n + 1)$ -ва производна в $[a, b]$. Тогава $f[x_0, \dots, x_n, x]$ е непрекъсната функция на x в $[a, b]$ и съгласно теоремата за средните стойности съществува точка $t \in (a, b)$:

$$R(f) = f[x_0, \dots, x_n, t] \int_a^b w(x) dx$$

По нататък, от връзката между разделената разлика и производната следва, че $\exists \xi \in [a, b]$:

$$R(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b w(x) dx \quad (4.5)$$

Ако $w(x)$ си сменя знака само един път в $[a, b]$ и $\int_a^b w(x) = 0$, то изразът 4.4 също може да се опрости. В този случай използваме рекурентната връзка

$$f[x_0, \dots, x_{n+1}, x] = \frac{f[x_0, \dots, x_n, x] - f[x_0, \dots, x_{n+1}]}{x - x_{n+1}},$$

за да получим

$$f[x_0, \dots, x_n, x] = f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}](x - x_{n+1}) + f[x_0, \dots, x_{n+1}],$$

за всяка точка x_{n+1} от $[a, b]$. Следователно

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b f[x_0, \dots, x_{n+1}, x](x - x_{n+1}) dx + f[x_0, \dots, x_{n+1}] \int_a^b w(x) dx = \\ &= \int_a^b f[x_0, \dots, x_{n+1}, x](x - x_{n+1}) w(x) dx. \end{aligned}$$

В последното равенство използваме условието, че $\int_a^b w(x) dx = 0$. Да предположим сега, че x_{n+1} е точката, в която $w(x)$ си сменя знака. Тогава функцията $(x - x_{n+1})w(x)$ ще има постоянен знак в $[a, b]$. По нататък, при предположение, че f има непрекъсната производна, заключаваме въз основа на теоремата за средните стойности, че $\exists \xi \in (a, b)$:

$$R(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b (x - x_{n+1}) w(x) dx. \quad (4.6)$$

Да отбележим, че в този случай грешката се изразява, чрез $(n+2)$ -та производна. Следователно $R(f) = 0 \forall f \in \pi_{n+1}$, тоест квадратурната формула е точна за всички полиноми дори и от $(n+1)$ -ва степен.

Използването на интерполационен полином за приближено пресмятане на интеграли е било предложено от Нютон. Английският инженер Коутс е пресметнал коефициентите на интерполационните квадратурни формули в $[0, 1]$ в случая на равно отдалечени възли $x_k = \frac{k}{n}, k = 0, \dots, n$ за $n = 1, \dots, 15$ и публикувал таблицата с тези коефициенти. Затова интерполационните квадратурни формули с равноотдалечени възли се наричат формули на Нютон-Коутс.

Сега ще изведем в явен вид някои елементарни квадратурни формули.

Нека $n = 0$. Тогава

$$L_0(f; x) = f(x_0)$$

и следователно

$$I(f) \approx I(L_0) = f(x_0)(b-a).$$

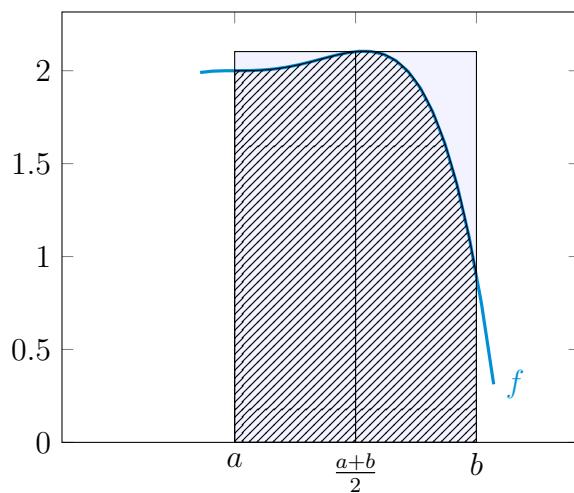
Специално при $x_0 = \frac{a+b}{2}$ получаваме

$$\int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a). \quad (4.7)$$

В този случай функцията $w(x) = x - \frac{a+b}{2}$ си сменя знака в точката $x = \frac{a+b}{2}$ и $\int_a^b w(x)dx = 0$.

Следователно при $x_0 = x_1 = \frac{a+b}{2}$ полиномът $(x-x_0)(x-x_1) = (x - \frac{a+b}{2})^2$ ще има постоянен знак в $[a, b]$. Тогава съгласно 4.6

$$R(f) = \frac{f''(\xi)}{2!} \int_a^b (x-x_0)^2 dx = f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{24}. \quad (4.8)$$



фиг. 4.7.

Формула 4.7 е известна като квадратурна формула на правоъгълниците. Тя има прост геометричен смисъл (фиг.4.7.). Интегралът $I(f)$, който е равен на лицето на фигурата, определена от графиката на f , се приближава с лицето на правоъгълника с основа $[a, b]$ и височина $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Оттук идва и наименованието на тази формула.

Нека $n = 1$. Да изберем $x_0 = a, x_1 = b$. Тогава

$$\begin{aligned} L_1(f; x) &= f(a) + f[a, b](x - a) \\ f(x) &= L_1(f; x) + f[a, b, x](x - a)(x - b) \end{aligned}$$

Заменяме $I(f)$ с $I(L_1)$ и получаваме квадратурна формула-

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]. \quad (4.9)$$

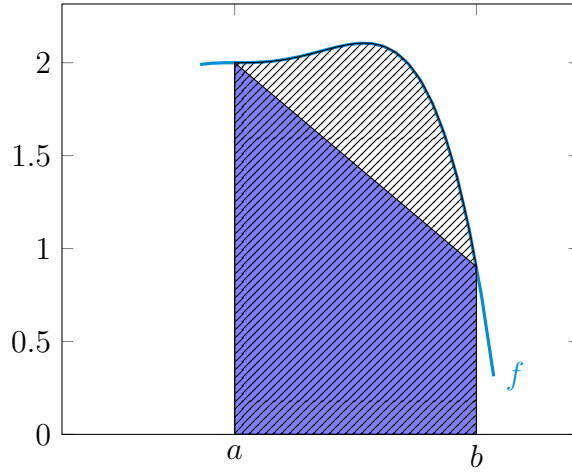
За определяне на грешката ще се възползваме от 4.5, тъй като в този случай полиномът $w(x) = (x-a)(x-b)$ има постоянен знак в (a, b) . Имаме

$$R(f) = \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)dx.$$

Пресмятаме интеграла и получаваме

$$R(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3. \quad (4.10)$$

Формула 4.9 се нарича квадратурна формула на трапеците. Нейният геометричен смисъл е показан на фиг.4.9.



фиг. 4.9.

Сега да разгледаме една интерполационна квадратурна формула с три равноотдалечени възли.

Нека $n = 2$. Имаме

$$f(x) = L_2(f; x) + f[x_0, x_1, x_2, x](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Оттук получаваме формулата

$$I(f) \approx I(L_2). \quad (4.11)$$

Да изберем $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$. В този случай функцията $w(x) = (x - a)(x - \frac{a+b}{2})(x - b)$ си сменя знака в (a, b) само в точката $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Освен това $\int_a^b w(x)dx = 0$. Следователно остатъчният член се представя като в 4.6. Имаме

$$R(f) = \frac{f^{IV}(\xi)}{4!} \int_a^b (x - a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 (x - b) dx$$

Пресмятаме интеграла и получаваме окончателно

$$R(f) = -\frac{f^{IV}(\xi)}{2880} (b - a)^5. \quad (4.12)$$

За да получим явния вид на квадратурната формула 4.11 бихме могли да запишем $L_2(f; x)$ по формулата на Нютон и да пресметнем $I(L_2)$. Ние ще покажем тук един по-прост начин. Да означим за удобство с $p(x)$

интерполационния полином $L_2(f; x)$. По формулата на право̀г̀ълниците 4.7 и по трапеците 4.9, съответно:

$$I(p) = p\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{p''(\xi_1)}{24}(b-a)^3$$

$$I(p) = \frac{b-a}{2}[p(a) + p(b)] - \frac{p''(\xi_2)}{12}(b-a)^3,$$

където ξ_1, ξ_2 са някакви точки в (a, b) . Но $p \in \pi_2$. Следователно $p''(t)$ е константа за всяко t . Оттук $p''(\xi_1) = p''(\xi_2)$. Тогава да умножим второто уравнение с $\frac{1}{2}$ и да го прибавим към първото. Получаваме

$$I(p) + \frac{1}{2}I(p) = p\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{b-a}{4}[p(a) + p(b)].$$

Тъй като полиномът $p(x)$ интерполира $f(x)$ в точките $a, \frac{a+b}{2}, b$, то от горното равенство следва, че

$$I(p) = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (4.13)$$

Получихме формулата

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (4.14)$$

Това е знаменитата квадратурна формула на Симпсън. От израза за грешката и 4.12 се вижда, че тя е точна за всички полиноми от степен по-малка или равна на 3.

Изведените дотук квадратурни формули(на право̀г̀ълниците, на трапеците и на Симпсън) се наричат елементарни квадратурни формули. В този си вид те рядко се използват,з защото грешката при тяхното приложение е голяма, особено, ако интервалът на интегриране $[a, b]$ е голям. Това се вижда от изразите 4.8,4.10 и 4.12 за грешките. На практика обикновено се постъпва по следния начин. Интервалът $[a, b]$ се разделя на m равни части с помощта на точките x_0, \dots, x_m . След това във всеки подинтервал $[x_i, x_{i+1}]$ се прилага някоя от елементарните квадратурни формули за пресмятане на интеграла $\int_a^b f(x)dx$ и получените изрази се сумират. В резултат на което се получават така наречената съставна квадратурна формула. Ние тук ще изведем и съставните формули в явен вид, защото те имат голямо приложение.

Съставна квадратурна формула на правоъгълниците

Нека $x_i = a + ih, i = 0, \dots, m, h = \frac{b-a}{m}$. По формулата за правоъгълниците имаме

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(\xi)}{24}h^3,$$

където $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$.

Сумираме горните равенства за $i = 0, \dots, m$ и получаваме квадратурната формула

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^m f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

с грешка

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{24m^2} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m f''(\xi_i).$$

Но числото $\frac{1}{m}[f''(\xi_0) + \dots + f''(\xi_m)]$ е средно аритметично на m стойности на $f''(x)$ в $[a, b]$. Следователно то се намира между точната долна и точната горна граница на $f''(x)$ в $[a, b]$. Оттук следва, че $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\frac{1}{m}[f''(\xi_1) + \dots + f''(\xi_m)] = f''(\xi).$$

Тогава за грешката на съставната квадратурна формула на правоъгълниците получаваме

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{24m^2} f''(\xi).$$

Сега вече се вижда, че с помощта на съставната формула можем да пресметнем интеграла $I(f)$ с каквато точност искаме стига да изберем достатъчно голямо m .

Съставна квадратурна формула на трапеците

Напълно аналогично, като използваме формулата на трапеците 4.9

получаваме:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{b-a}{2m}[f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{m-1} + f_m] = \\ &= \frac{b-a}{2m}[f_0 + 2\sum_{i=1}^{m-1} f_i + f_m] \\ R(f) &= -\frac{(b-a)^3}{12m^3}f''(\xi), \xi \in [a, b].\end{aligned}$$

Тук за краткост сме записали f_i вместо $f(x_i)$.

Съставна квадратурна формула на Симпсън

В този случай разделяме $[a, b]$ на четен брой подинтервали $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, 2m$ и след това прилагам формулата на Симпсън за двойния подинтервал $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, $i = 1, 3, \dots, 2m-1$. Получаваме

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{b-a}{6m}[f_0 + f_{2m} + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2m-2}) + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2m-1})] = \\ &= \frac{b-a}{6m}[f_0 + 2\sum_{i=1}^{m-1} f_{2i} + 4\sum_{i=1}^m f_{2i-1} + f_{2m}] \\ R(f) &= -\frac{(b-a)^5}{2880m^4}f^{IV}(\xi), \xi \in [a, b].\end{aligned}$$

5 Итерационни методи за решаване на линейни системи

Приближените методи за решаване на линейни системи са главно итерационни. При тях се избира подходящо начално приближение $x_0 = \{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ на решението $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и след това на формула от вида

$$\bar{x}_{k+1} = B_k \bar{x}_k + \bar{d}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

се строи редица $\{\bar{x}_k\}$ от точки в \mathbb{R}^n , която клони към решението \bar{x} .

Тук ние ще разгледаме някои основни итерационни методи за решаване на линейни системи.

Метод на простата итерация

Нека е дадена система $A\bar{x} = \bar{b}$. Преобразуваме я с помощта на неособената матрица C в еквивалентна на нея система :

$$x = \bar{x} - C\{A\bar{x} - \bar{b}\}.$$

Построяваме итерационния процес

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - C\{A\bar{x}_k - \bar{b}\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

При някакво начално приближение \bar{x}_0 . Горната формула може да се запише още така

$$\bar{x}_{k+1} = (E - CA)\bar{x}_k + C\bar{b} = B\bar{x}_k + \bar{d}.$$

Теорема 5.1. *Итерационния процес*

$$\bar{x}_{k+1} = B\bar{x}_k + \bar{d}$$

е сходящ при произволен избор на начално приближение $\bar{x}_0 \iff$ всички собствени стойности на матрицата B са по модул по-малки от 1.

Доказателство. Имаме

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} &= B\bar{x}_k + \bar{d} = BB\bar{x}_{k-1} + B\bar{d} + \bar{d} = \dots = \\ &= B^{k+1}\bar{x}_0 + (B^k + B^{k-1} + \dots + E)\bar{d} \end{aligned}$$

При направените предположения за B , редът в скобите е сходящ. От това, че матричният геометричен ред $B^k + B^{k-1} + \dots + E$ е сходящ следва, че $B^{k+1} \rightarrow 0$. Следователно редицата $\{\bar{x}_k\}$ има граница при $k \rightarrow \infty$ и тази граница е $(E - B)^{-1}\bar{d}$. Вижда се, че тази граница е решение на уравнението $\bar{x} = B\bar{x} + \bar{d}$ (??), тоест решение на нашата система. Да забележим, че ако редът $E + B + \dots$ не е сходящ, то и редицата $\{\bar{x}_k\}$ може да бъде разходяща, например при $x_0 = \bar{0}$. Теоремата е доказана. \square

Следствие 5.1. Ако $\|B\| < 1$ за някоя норма $\|\cdot\|$, то итерационния процес е сходящ при произволно начално приближение \bar{x}_0 .

Твърдението следва веднага от теоремата, като се вземе в предвид, че всяка норма на матрицата е по-голяма по абсолютна стойност от всяка нейна собствена стойност. В този случай дори може да се изведе лесно в една оценка на грешката. Наистина имаме

$$\|\bar{x}_k - \bar{x}\| = \|B\bar{x}_{k-1} - B\bar{x}\| \leq \|B\| \|\bar{x}_{k-1} - \bar{x}\|,$$

откъдето следва

$$\|\bar{x}_k - \bar{x}\| \leq \|B\|^k \|\bar{x}_0 - \bar{x}\|.$$

Следователно при $\|B\| < 1$ скоростта на сходимост е както при геометрична прогресия.

При итерационни формули от вида

$$\bar{x}_{k+1} = (E - CA)\bar{x}_k + C\bar{b} \quad (5.1)$$

критериите за сходимост могат да се наложат направо на матрицата $A = \{a_{ij}\}$. Да разгледаме специалния случай на 5.1, когато C е диагонална матрица с елементи по диагонала $\frac{1}{a_n}$,

$$C = \text{diag} \left\{ \frac{1}{a_{11}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}} \right\} = \text{diag} \{a_{11}, \dots, a_{nn}\}^{-1}.$$

В този случай системата $A\bar{x} = \bar{b}$ се преобразува по стандартния начин - от i -тото уравнение се определя x_i :

$$\begin{aligned} x_i = & -\frac{a_{i1}}{a_{ii}}x_1 - \dots - \frac{a_{ii-1}}{a_{ii}}x_{i-1} - \frac{a_{ii+1}}{a_{ii}}x_{i+1} - \\ & - \dots - \frac{a_{in}}{a_{ii}}x_n + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

и формулите 5.1 за пресмятане на следващите приближения $x_i^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}$ добиват вида

$$x_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.2)$$

Този метод е известен като метод на простата итерация.

Да видим как изглеждат достатъчните условия за сходимост на простата итерация, които произлизат от следствието 5.1, при използване на нормата

$$\|B\|_w = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}|.$$

В нашия случай $B = E - CA$. Нека $\{b_{ij}\}, \{c_{ij}\}, \{\delta_{ij}\}$ са съответно елементите на B, C и E . Тогава

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \delta_{ij} - c_{i1}a_{1j} - \dots - c_{in}a_{nj} = \\ &= \delta_{ij} - \frac{1}{a_{ii}}a_{ij} \end{aligned}$$

и следователно

$$\begin{aligned} \|B\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \left| \delta_{ij} - \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \end{aligned}$$

Оттук се вижда, че условието $\|B\|_\infty < 1$ се записва като

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < a_{ii}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Това всъщност е условието A да бъде матрица с доминиращ главен диагонал.

Аналогично, условието

$$\|B\|_1 = \sum_{i=1}^n \max_{j=1}^n |b_{ij}| < 1$$

се свежда към

$$\sum_{i=j}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Метод на Зайдел

На практика често се използва една естествена модификация на метода на простата итерация, наречена метод на Зайдел. При нея в поредното i -то уравнение от 5.2 за определяне на $x_i^{(k+1)}$ се използват изчислените вече $(k+1)$ -ви приближения на x_1, \dots, x_{i-1} . По този начин се получават формулите

$$x_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Теорема 5.2. *Методът на Зайдел е сходящ при произволно начално приближение $\bar{x}_0 \iff$ всички корени на уравнението*

$$\det \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

са по модул по-малки от 1.

Доказателство. Да представим A като $A = U + V$, където U е долна триъгълна матрица, включваща главния диагонал, а V е горна триъгълна матрица с нулеви елементи по главния диагонал и под него. Тогава системата $A\bar{x} = \bar{b}$ се записва във вида:

$$U\bar{x} = -V\bar{x} + \bar{b}$$

и метода на Зайдел се представя чрез итерационния процес

$$U\bar{x}_{k+1} = -V\bar{x}_k + \bar{b}.$$

Решаваме относно \bar{x}_{k+1} и получаваме

$$\bar{x}_{k+1} = -U^{-1}V\bar{x}_k + U^{-1}\bar{b}. \quad (5.3)$$

Но това е изчислителен процес от типа на метода на простата итерация, който беше разгледан в теорема 5.1. Съгласно тази теорема методът 5.3 е сходящ \iff собствените стойности на матрицата $-U^{-1}V$ са по модул по-малки от 1. тоест когато корените на уравнението

$$\det|-U^{-1}V - \lambda E| = -\det|\lambda E + U^{-1}V| = 0,$$

което е еквивалентно (като умножим с $\det U$) на

$$\det|\lambda U + V| = 0,$$

са по модул по-малки от 1. Теоремата е доказана. \square

Сравняване на метода на Зайдел и метода на простата итерация

Областите на сходимост на простата итерация и метода на Зайдел се пресичат. Не е трудно да се покаже, че и методът на Зайдел е сходящ за системата $A\bar{x} = \bar{b}$, когато матрицата A е с доминиращ главен диагонал. По долу ще покажем, че в този случай методът на Зайдел е по-бързо сходящ (в известен смисъл) от метода на простата итерация.

Теорема 5.3. *Ако матрицата A има доминиращ главен диагонал, то метода на Зайдел е по-бързо сходящ от метода на простата итерация.*

Доказателство. Това твърдение трябва да се разбира в следния смисъл. Ще намерим еднотипни оценки за скоростта на сходимост на метода на простата итерация и на метода на Зайдел и ще покажем, че оценката при метода на Зайдел е по-добра от тази при метода на простата итерация.

Ще използваме векторната норма $\|\bar{x}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ и съответната съгласувана метрична норма $\|\cdot\|_{\infty}$.

Нека $A = \{a_{ij}\}$ е произволна матрица с доминиращ главен диагонал, тоест

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Означаваме

$$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$$

$$d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$\mu = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1, j \neq i}^n |c_{ij}|$$

Да отбележим, че съгласно нашето предположение за $A, \mu < 1$. На простата итерация съответства схемата

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n c_{ij} x_j^{(k)} + d_i,$$

а на метода на Зайдел

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{i+1}^n c_{ij} x_j^{(k)} + d_i.$$

Нека \bar{x} е решението на системата. Имаме

$$x_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n c_{ij} x_j + d_i.$$

За грешката по метода на простата итерация получаваме

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - \bar{x}_{k+1}\|_{\infty} &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1, j \neq i}^n |c_{ij}| |x_j^{(k)} - \bar{x}_j| \leq \\ &\leq \mu \|\bar{x}_k - \bar{x}\|_{\infty} \leq \dots \leq \\ &\leq \mu^{k+1} \|\bar{x}_0 - \bar{x}\|_{\infty} \end{aligned}$$

Да въведем още означения

$$\begin{aligned}\beta_i &= \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| \\ \gamma_i &= \sum_{j=i+1}^n |c_{ij}| \\ \nu &= \max_i \frac{\gamma_i}{1 - \beta_i}.\end{aligned}$$

За метода на Зайдел имаме

$$\begin{aligned}\|\bar{x} - \bar{x}_{k+1}\|_\infty &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_i^{(k+1)}| \leq \\ &\leq \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| |x_j^{(k+1)} - x_j| + \sum_{j=i+1}^n |c_{ij}| |x_j^{(k)} - x_j| \right\} \leq \\ &\leq \max_i \{ \beta_{i_0} \|\bar{x}_{k+1} - \bar{x}\|_\infty + \gamma_{i_0} \|\bar{x}_k - \bar{x}\|_\infty \}\end{aligned}$$

Оттук

$$\begin{aligned}\|\bar{x} - \bar{x}_{k-1}\|_\infty &\leq \frac{\gamma_{i_0}}{1 - \beta_{i_0}} \|\bar{x} - \bar{x}_k\|_\infty \leq \\ &\leq \nu \|\bar{x} - \bar{x}_k\|_\infty \leq \dots \leq \\ &\leq \nu^{k+1} \|\bar{x}_0 - \bar{x}\|_\infty.\end{aligned}$$

Но $\beta_i + \gamma_i \leq \mu \leq 1$. Тогава

$$\begin{aligned}\beta_i + \gamma_i - \frac{\gamma_i}{1 - \beta_i} &= \frac{\beta_i(1 - \beta_i) - \gamma_i\beta_i + \gamma_i - \gamma_i}{1 - \beta_i} = \\ &= \frac{\beta_i(1 - \beta_i - \gamma_i)}{1 - \beta_i} \geq 0.\end{aligned}$$

Следователно

$$\mu = \max_i (\beta_i + \gamma_i) \geq \max_i \frac{\gamma_i}{1 - \beta_i} = \nu.$$

И така грешката при метода на Зайдел се оценява с израз, който клони към нула по-бързо от този получен при метода на простата итерация. \square