Развити въпроси за изпит по ЧМ

Информатика при Лозко Милев

Теодора Иванова

22 юни 2019 г.

Съдържание

1 Формулирайте интерполационната задача на Лагранж. Докажете единствеността. Изведете интерполационната формула на Лагранж. 3

2 Формулирайте и докажете теоремата за оценка на грешката при интерполация на Лагранж. 5

3 Дайте определение за полином на Чебишов. Напишете и докажете рекурентната връзка. Намерете нулите на полинома на Чебишов от n-та степен. 6

4 Напишете и докажете интерполационната формула на Нютон с разделени разлики. Напишете задачата, която се решава с тази формула. 7

5 Напишете и докажете формулата на Нютон с крайни разлики за интерполация напред. Напишете задачата, която се решава с тази формула. 8

6 Формулирайте интерполационната задача на Ермит. Докажете, че задачата има единствено решение. 9

7 Формулирайте и докажете рекурентната връзка за разделени разлики с кратни възли. Включително случая, в който всички възли съвпадат. 10

8 Напишете и докажете, формулата за интерполационния тригонометричен полином при произволно разположени интерполационни възли в $[0, 2\pi)$. Напишете задачата, която се решава с тази формула. 10

9 Формулирайте и докажете теоремата за представяне на сплайн функция, като линейна комбинация на полиноми и отсечени степенни функции. 12

10 Напишете и докажете рекуретната връзка за B-сплайните . 14

11 Формулирайте теоремата на Чебишов за алтернанса. Докажете достатъчността. 15

12 Формулирайте теоремата на Вайерщрас. Докажете я като използвате полиномите на Бернщайн. 15

13 Напишете и докажете тричленната рекуретната връзка за редица от ортогонални полиноми. 17

14 Формулирайте и докажете теоремата за характеризация на елемента на най-добро приближение в Хилбертово пространство. (НДУ) 18

15 Изведете формулата от вида $f'(a) \approx C_0 f(a-h) + C_1 f(a+h)$ и грешката $O(h^2)$ при положение, че f е достатъчно гладка. Обосновете порядъка на грешката. 18
16 Изведете елементарната квадратурна формула на трапеца и оценката на грешката при подходящи предположения за подинтегралната функция. 19
17 Формулирайте и докажете теоремата за квадратурната формула на Гаус. 20
18 Формулирайте и докажете теоремата за приближено решаване на нелинейно изображение по метода свиващото изображение. 22

1 Формулирайте интерполационната задача на Лагранж. Докажете единствеността. Изведете интерполационната формула на Лагранж.

Постановка на задачата

Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ са различни точки и $y_1, y_2, ..., y_n$ са дадени реални числа.

Да се построи алгебричен полином $P(x)$ от степен $\leq n$, който удовлетворява следните условия:

$$P(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n \tag{1.1}$$

Теорема 1.1. *Ако съществува решение на 1.1, то трябва да е единствено.*

Доказателство. Допускаме, че съществуват два полинома P и Q от степен n, които удовлетворяват 1.1, тогава разликата

$$R(x) = P(x) - Q(x)$$

ще бъде полином от степен $\leq n$ и освен това

$$R(x_k) = P(x_k) - Q(x_k) = y_k - y_k = 0, \quad k = 0, \dots, n$$

Следователно R е полином от степен n, който се анулира в $n + 1$ точки. Тогава от основната теорема на алгебрата $R(x)$ е тъждествено равен на 0. Следователно $P \equiv Q$.

Извеждане на формулата

При фиксирано k да се намери полинома $l_{nk}(x) \in \pi_n$, който удовлетворява условията:

1. $l_{nk}(x_i) = 0$, за $i = 0, \dots, n$ и $i \neq k$
2. $l_{nk}(x_i) = 1$, за $i = k$

От 1. следва, че точките $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots x_n$ са нули на полинома l_{nk}. От $l_{nk} \in \pi_n$ следва, че $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots x_n$ са всичките нули. Тогава l_{nk} може да се запише във вида:

$$l_{nk}(x) = A(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n),$$

където A е някакво число. A се определя от 2..

$$1 = l_{nk}(x_k) = A(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)$$

Следователно:

$$A = \frac{1}{\displaystyle\prod_{i=0, i\neq k}^{n}(x_k - x_i)}.$$

Тогава

$$\begin{aligned} l_{nk}(x) &= \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x - x_n)} \\ &= \prod_{i=0, i\neq k}^{n}\left(\frac{x - x_i}{x_k - x_i}\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Полиномите $\{l_{nk}\}_{k=0}^{n}$ се наричат базисни полиноми на Лагранж. С тяхна помощ може лесно да се построи P.

Ще покажем, че решението $P(x)$ на 1.1 се дава с

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_{nk}(x) \tag{1.3}$$

По построение

$$l_{nk}(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

Тогава

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_{nk}(x_i) = y_i l_{ni}(x_i) = y_i 1 = y_i,$$

за всяко $i = 0, \dots, n$. От това, че полиномът 1.3 е от $\pi_n (l_{nk} \in \pi_n)$ и удовлетворява 1.1, следва,че $P(x)$ даден в 1.3 е решение на интерполационната задача.

Най-често $\{y_k\}_{k=0}^{n}$ са стойностите на някаква функция $f(x)$ в точките $x_0, x_1, \dots, x_n$, тоест

$$y_k = f(x_k), \quad , k = 0, \dots, n.$$

В такъв случай

$$P(x_k) = f(x_k), \quad , k = 0, \ldots, n$$

се бележи с $L_n(f; x)$ и се нарича интерполационен полином на Лагранж за функцията f с възли $x_0, \ldots, x_n$. Казваме още, че $L_n(f; x)$ интерполира $f(x)$ в точките $(x_0, \ldots, x_n)$.

И така доказахме следната теорема

Теорема 1.2. *Нека $x_0 < \ldots < x_n$ и $f(x)$ е определена в тези точки. Тогава съществува единствен полином от π_n, който интерполира f в $x_0, \ldots, x_n$. Този полином се представя чрез формулата:*

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \tag{1.4}$$

Формула 1.4 се нарича интерполационна формула на Лагранж.

2 Формулирайте и докажете теоремата за оценка на грешката при интерполация на Лагранж.

Теорема 2.1. *Нека $[a, b]$ е даден краен интервал и $x_0, \ldots, x_n$ са различни точки в него. Нека функцията $f(x)$ има непрекъсната $(n+1)$-ва производна в $[a, b]$. Тогава $\forall x \in [a, b] \exists \xi \in [a, b]$:*

$$f(x) - L_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0) \ldots (x - x_n).$$

Доказателство. Образуваме помощната функция

$$F(t) = f(t) - L_n(f; t) - c(t - x_0) \ldots (t - x_n),$$

където c е параметър. $F(t)$ се анулира в точките $x_0, \ldots, x_n$ при всеки избор на c.

$$F(x_k) = f(x_k) - L_n(f; k) - c.0 = f(x_k) - f(x_k) = 0.$$

Избираме c така, че $F(t)$ да се анулира и при $t = x$. От равенството

$$f(x) - L_n(f; x) - c(x - x_0) \ldots (x - x_n) = 0$$

определяме

$$c = \frac{R_n(f;x)}{(x-x_0)\dots(x-x_n)}. \tag{2.1}$$

И така при този избор на c функцията $F(t)$ има поне $n+2$ нули. Това са точките $x, x_0, \dots, x_n$. По теоремата на Рол $F'(t)$ ще има поне $n+1$ нули, които лежат в интервала $[a,b]$, $F''(t)$ ще има поне n нули и тн. $F^{(n+1)}(t)$ ще има поне една нула, която лежи в $[a,b]$. Да я означим с ξ. Имаме $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. От друга страна,

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(\xi) &= f^{(n+1)}(\xi) - L_n(f;\xi) - c(n+1)! = \\ &= f^{(n+1)}(\xi) - c(n+1)!. \end{aligned}$$

Следователно

$$c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Като сравним това равенство с 2.1 получаваме:

$$R_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n).$$

Теоремата е доказана. □

3 Дайте определение за полином на Чебишов. Напишете и докажете рекурентната връзка. Намерете нулите на полинома на Чебишов от n-та степен.

Дефиниция 3.1. *Полиномът на Чебишов от първи род от $n-$та степен се бележи с $T_n(x)$ и се определя в интервала $[-1,1]$ чрез равенството*

$$T_n(x) = cos(narccos(x)), x \in [-1,1]. \tag{3.1}$$

Непосредствено от дефиницията следва, че:

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$

Освен това съгласно формулата за събиране на синуси:

$$\begin{aligned} T_{n+1} + T_{n-1} &= cos\left((n+1)arccosx\right) + cos\left((n-1)arccosx\right) \\ &= 2cos(arccosx)cos(narccosx) \\ &= \boxed{2xT_n(x)}, \end{aligned}$$

при всяко $n > 1$. Оттук получаваме следната рекурентна връзка

$$T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{3.2}$$

Като използваме равенство 3.1 веднага можем да намерим нулите на полинома. Очевидно $T_n(x) = 0$ при $narcosx = (2k-1)\frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, \ldots$. Оттук следва, че нулите на полинома са:

$$\xi_k = cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, \ldots, n.$$

4 Напишете и докажете интерполационната формула на Нютон с разделени разлики. Напишете задачата, която се решава с тази формула.

Ще изведем формулата на Нютон за интерполационни полиноми. За целта разглеждаме разликата:

$$L_{k+1}(f;x) - L_k(f;x),$$

където $L_{k+1}(f;x)$ интерполира f в $x_0, \ldots, x_{k+1}$, а $L_k(f;x)$ интерполира f в $x_0, \ldots, x_k$. Ясно е, че $L_{k+1}(f;x) - L_k(f;x) \in \pi_{k+1}$. Освен това

$$L_{k+1}(f;x) - L_k(f;x) = f(x_i) - f(x_i) = 0, \text{за } i = 0, \ldots, k.$$

Следователно $x_0, \ldots, x_k$ са всичките нули на полинома $L_{k+1}(f;x) - L_k(f;x)$. Тогава той може да се запише във вида:

$$L_{k+1}(f;x) - L_k(f;x) = A(x-x_0)\ldots(x-x_k), \tag{4.1}$$

където A е константа. За да намерим A нека сравним коефициентите пред x^{k+1} в 4.1.

Съгласно теоремата за разделените разлики коефициента пред x^{k+1} в $L_{k+1}(f;x)$ е равен на разделената разлика $f[x_0, \ldots, x_{k+1}]$. Следователно

$$A = f[x_0, \ldots, x_{k+1}]$$

и следователно от 4.1

$$L_{k+1}(f;x) = L_k(f;x) + f[x_0, \dots, x_{k+1}](x - x_0)\dots(x - x_k) \tag{4.2}$$

Нека приложим 4.2 за $k = n-1, n-3, \dots, 2, 1, 0$. Получаваме следния явен израз за интерполационния полином на Лагранж.

$$\begin{aligned} L_n(f;x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \\ + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0)\dots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Това е интерполационната формула на Нютон. Понякога ще я записваме съкратено така

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \dots, x_k](x - x_0)\dots(x - x_{k-1}), \tag{4.3}$$

като приемаме, че $(x-x_0)\dots(x-x_{k-1}) = 1$ при $k = 0$. Може и с инфукция наобратно Напишете задачата - може би табличката

5 Напишете и докажете формулата на Нютон с крайни разлики за интерполация напред. Напишете задачата, която се решава с тази формула.

Нека възлите $\{x_i\}_0^n$ са равноотдалечени и функцията f е дефинирана в тях. Търсим полинома $L_n(f;x) \in \pi_n$, който интерполира f в $x_0, \dots, x_n$. Съгласно интерполационната фирмула на Нютон:

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \dots, x_k](x - x_0)\dots(x - x_{k-1}).$$

Нека $x_i = x_0 + ih, i = 0, \dots, n$ и $x = x_0 + th$.Тогава

$$(x - x_0)\dots(x - x_{k-1}) = \prod_{i=0}^{k-1}(x_0 + th - x_0 - ih) = h^k t(t-1)\dots(t-k+1).$$

Сега като използваме връзката между разделената разлика и крайната разлика, тоест $f[x_0, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$, получаваме

$$L_n(f;x) = L_n(f;x_0+th) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k!} t(t-1)\dots(t-k+1) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \Delta^k f_0 \binom{t}{k}}.$$

Това е формула на Нютон с крайни разлики за интерполиране напред. май пак схемата

6 Формулирайте интерполационната задача на Ермит. Докажете, че задачата има единствено решение.

Постановка: Нека $x_0, \dots, x_n$ са дадени $n+1$ различни точки и $\nu_0, \dots, \nu_n$ са цели положителни числа и

$$\{y_{k\lambda} : k = 0, \dots, n, \lambda = 0, \dots, \nu_k - 1\}$$

е таблица от произволни реални стойностти. Означаваме с $N = \nu_0 + \dots + \nu_n - 1$. Да се построи алгебричен полином P от степен N, който удовлетворява условията:

$$P_{(\lambda)}(x_k) = y_{k\lambda}, k = 0, \dots, n, \lambda = 0, \dots, \nu_k - 1. \tag{6.1}$$

Теорема 6.1. *При всеки избор на интерполационни възли $\{x_k\}_0^n, x_i \neq x_j \Leftrightarrow i \neq j$ и при всяка таблица от стойностти $\{y_{k\lambda}\}$ интерполационната задача на Ермит 6.1 има единствено решение.*

Доказателство. Условията 6.1 представляват една система от $N+1$ линейни уравнения с неизвестни - коефициентите $a_0, \dots, a_N$ на полинома $P(x)$. Тази система има единствено решение, ако детерминантата ѝ е различна от 0. Да допуснем, че детерминанатата ѝ е 0. Тогава хомогенната система:

$$P^{(\lambda)}(x_k) = 0, k = 0, \dots, n\lambda = 0, \dots, \nu_k - 1$$

ще има някакво ненулево решение $P(x) = a_0 x^N + \dots + a_{N-1}x + a_N$. Но горните условия означават, че P има $N+1$ нули, броейки кратностите. От друга страна $P \in \pi_N$. Следователно $P(x) \equiv 0$ и оттук $a_0 = \dots = a_N = 0$ и стигаме до противоречие.

7 Формулирайте и докажете рекурентната връзка за разделени разлики с кратни възли. Включително случая, в който всички възли съвпадат.

Теорема 7.1. *Нека f има k непрекъснати производни в $[a,b]$. Тогава за произволни точки $x_0 \leq \ldots x_k$ от $[a,b]$ е в сила рекурентната връзка:*

$$f[x_0,\ldots,x_k] = \begin{cases} \frac{f[x_1,\ldots,x_k]-f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}, x_0 < x_k \\ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \qquad\qquad\qquad x_0 = x_k \end{cases} \tag{7.1}$$

Доказателство. При $x_0 = x_k$ разглеждаме разделената разлика $f[x_0, x_0, \ldots, x_0]$ построяваме полинома $p(x)$ използвайки формулата на Тейлър:

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

. Този полином удовлетворява условието $p^(j)(x_0) = f^{(j)}(x_0), j = 0,\ldots,k$. С други думи полиномът p интерполира f в точката x_0 с кратност $k+1$. От явния вид на p се вижда, че коефициента пред x^n е $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. И от това, че разделената разлика е равна на коефициента пред x^n следва, че

$$f[x_0,\ldots,x_k] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\text{при } x_0 = \ldots = x_k$$

Нека $x_0 < \ldots < x_k$ и тъй като разделената разлика е линеен функционал,то

$$\begin{aligned}(x_k - x_0)f[x_0,\ldots,x_k] &= \{(x_k - x + x - x_0)f\}[x_0,\ldots,x_k] \\ &= (x_k - x)f[x_0,\ldots,x_k] + \{x - x_0 f\}[x_0 \ldots, x_k] \\ &= -f[x_0,\ldots,x_{k-1}] + f[x_1,\ldots,x_k]\end{aligned}$$

Следователно

$$\frac{f[x_1,\ldots,x_k] - f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

8 Напишете и докажете, формулата за интерполационния тригонометричен полином при произволно разположени интерполационни възли в $[0, 2\pi)$. Напишете задачата, която се решава с тази формула.

Теорема 8.1. *Нека $0 \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} < 2\pi$. Тогава за всяка функция f определена в точките $\{x_i\}_0^{2n}$ съществува единствен триго-*

нометричен полином t_n от ред n такъв, че

$$t_n(x_i) = f(x_i), i = 0, \ldots, 2n \tag{8.1}$$

и той има вида

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k f(x_k) \tag{8.2}$$

където

$$\lambda_k = \prod_{i=0, i\neq k}^{2n} \frac{sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{sin\left(\frac{x_k-x_i}{2}\right)} \tag{8.3}$$

Доказателство. Функциите λ_k удовлетворяват условията

$$\begin{aligned} \lambda_k(x_i) &= 0, \text{за } i \neq j \\ \lambda_k(x_i) &= 1, \text{иначе.} \end{aligned}$$

От това следва, че изразът 8.2 ще удовлетворява интерполационните условия 8.1. Остава само да докажем, че λ_k, следователно и t_n са тригонометрични полиноми от ред n. За целта ще използваме индукция по n. При $n = 1$:

$$\begin{aligned} \lambda_k(x_1) &= sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) sin\left(\frac{x-\beta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(cos\frac{\beta-\alpha}{2} - cos\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) \\ &= \boxed{a_0 + a_1 cosx + b_1 sinx} \end{aligned}$$

Следователно $\lambda_k(x)$ е тригонометричен полином от ред 1.
Допускаме, че всяко едно произведение от $n-1$ двойки синуси е тригонометричен полином от ред $n-1$. Да разгледаме произволен израз за $\lambda_k(x)$ от вид 8.3. Той може да се запише по следния начин:

$$\begin{aligned} \lambda_k(x) &= c \prod_{i=0, i\neq k}^{2n} sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right) \\ &= C\left\{\prod_{i=1}^{n-1} sin\left(\frac{x-\alpha_i}{2} sin\left(\frac{x-\beta_i}{2}\right)\right)\right\}\left\{sin\left(\frac{x-\alpha}{2} sin\left(\frac{x-\beta}{2}\right)\right)\right\}, \end{aligned}$$

където C е константа. Но съгласно идукционното предположение и двата израза в големите скоби са тригонометрични полиноми от ред $n-1$ и 1 съответно и следователно:

$$\lambda_k(x) = \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k cos(kx) + b_k sin(kx))\right)(a_0 + a_1 cosx + b_1 sinx)$$
$$= a_0^2 + a_0a_1cosx + a_0b_1sinx + \sum_{k=1}^{n-1}\big(a_ka_0cos(kx) + b_ka_0sin(kx)$$
$$+ a_ka_1cosxcos(kx) + b_ka_1cosxsin(kx)$$
$$+ a_kb_1sinxcos(kx) + b_kb_1sinxsin(kx)\big)$$
$$= a_0^2 + a_0a_1cosx + a_0b_1sinx + \sum_{k=1}^{n-1}\big(a_ka_0cos(kx) + b_ka_0sin(kx)$$
$$+ a_ka_1\frac{1}{2}(cos(k-1)x + cos(k+1)x)$$
$$+ b_ka_1\frac{1}{2}(sin(k+1)x - sin(k-1)x) + a_kb_1\frac{1}{2}(sin(k+1)x - sin(k-1)x)$$
$$+ b_kb_1\frac{1}{2}(cos(k-1)x - cos(k+1)x))$$
$$= A_0 + A_1cosx + B_1sinx + \sum_{k=1}^{n-1}A_{k-1}cos(k-1)x$$
$$+ B_{k-1}sin(k-1)x + A_kcos(kx) + B_ksin(kx) + A_{k+1}cos(n+1)x + B_{k+1}sin(n+1)x$$

Очевидно $\lambda_k(x)$ е линейна комбинация на $sinkx, coskx, k = 0, \ldots, n$, което означава, че λ_k е тригонометричен полином от ред n. Следователно и t_n също е тригонометричен полином от ред n изпълняващ условята 8.1 за интерполация.

9 Формулирайте и докажете теоремата за представяне на сплайн функция, като линейна комбинация на полиноми и отсечени степенни функции.

Дефиниция 9.1. *Функцията $s(x)$ се нарича сплайн функция от степен r с възли $x_1 < \ldots < x_n$, ако:*

1. *$s(x)$ е полином от степен най-много r във всеки подинтервал $(x_i, x_{i+1}), i = 0, \ldots, n(x_0 = -\infty, x_n = +\infty)$*

2. $s(x), s'(x), \ldots, s^{(r-1)}(x)$ *са непрекъснати функции в* $(-\infty, +\infty)$

Дефиниция 9.2. $S_r(x_1, \ldots, x_n)$ *отбелязва множеството от сплайн-функции от степен* r *свъзли в точките* $x_1, \ldots, x_n$.

Дефиниция 9.3. *Отсечената степенна функция :*

$$(x-\xi)_+^r = \begin{cases} (x-\xi)^r, x \geq \xi \\ 0 \qquad\quad , x < \xi \end{cases}$$

е сплайн от степен r *с единствен възел в точката* ξ.

Теорема 9.1. *Всяка сплайн функция* $s(x)$ *от класа* $S_r(x_1, \ldots, x_n)$ *се представя по единствен начин от вида:*

$$s(x) = p(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k (x - x_k)_+^r, \tag{9.1}$$

където $p(x)$ *е полином от степен* $r, a c_1, \ldots, c_n$ *са реални числа:*

$$c_k = \frac{s^{(k)}(x_k+0) - s^{(r)}(x_k-0)}{r!}, k = 1, \ldots, n \tag{9.2}$$

Доказателство. Означението $f(x+0) = \lim_{h\to 0, h>0} f(x+h)$ и аналогично е за $f(x-0)$. Нека $s(x) \in S_r(x_1, \ldots, x_n)$. Тогава s съвпада с някакъв полином P_k от степен r в подинтервала $(x_k, x_{k+1}), k = 0, \ldots, n$. Тъй като $s^{(j)}(x)$ е непрекъсната функция в точката x_k, то $P_{k-1}^{(j)}(x_k) = P_k^{(j)}(x_k), j = 0, \ldots, r-1$. Следователно

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + c_k(x - x_k)^r, \forall x, \tag{9.3}$$

където c_k е някаква константа. От тази рекурентна връзка следва, че

$$P_k(x) = P_0(x) + \sum_{i=1}^{k} c_i (x - x_i)^r.$$

Като вземем предвид, че $s(x) \equiv P_k(x), x \in (x_k, x_{k+1})$ и определението за отсечена функция от горното равенство получаваме

$$s(x) = P_0(x) + \sum_{i=0}^{n} c_i (x - x_i)_+^r,$$

което е търсенео представяне. Остава да покажем, че коефициентите c_k се определят еднозначно. Диференцираме 9.3 $r-$пъти в точката x_k и получаваме:

$$P_k^{(r)} = P_{k-1}^{(r)}(x_k) + c_k r!$$

и оттук

$$c_k = \frac{s^{(k)}(x_k + 0) - s^{(r)}(x_k - 0)}{r!}.$$

Полиномът $p(x)$ в 9.1 се определя също еднозначно и съвпада с $P_0(x)$.

10 Напишете и докажете рекуретната връзка за В-сплайните

Дефиниция 10.1. *Разделената разлика на отсечената степенна функция $(x-t)_+^{r-1}$ по отношение на x в точките $x_1 < \ldots < x_r$ се нарича $B-$сплайн от степен $r-1$ с възли $x_0, \ldots, x_r$.*

Теорема 10.1. *За всяко $r \geq 2$ и $t \in (-\infty, \infty)$ е в сила равенството:*

$$B_{i,r-1}(t) = \frac{t - x_i}{x_{i+r} - x_i} B_{i,r-2}(t) + \frac{x_{i+r} - t}{x_{i+r} - x_i} B_{i+1,r-2}(t). \qquad (10.1)$$

Доказателство. Ще използваме правилото на Сефансон за намиране на разделената разлика на произведение на функции:

$$(f.g)[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] g[x_k, \ldots, x_n].$$

Избираме $f(x) = x - t$ и $g(x) = (x-t)_+^{r-2}$. Очевидно

$$f(x)g(x) = (x-t)_+^{r-1}, x \in (-\infty, \infty)$$

и следователно

$$B_{i,r-1}(t) = (f.g)[x_i, \ldots, x_{i+r}] = f(x_i) g[x_i, \ldots, x_{i+r}] + f[x_i, x_{i+1}] g[x_{i+1}, \ldots, x_{i+r}],$$

тъй като $f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = 0, k \geq 2$. Като вземем предвид, че $f[x_i, x_{i+1}] = 1$

и рекурентната връзка за разделените разлики получаваме:

$$\begin{aligned}
B_{i,r-1}(t) &= f(x_i)\frac{g[x_{i+1},\ldots,x_{i+r}]-g[x_i,\ldots,x_{r+i-1}]}{x_{i+r}-x_i}+g[x_{i+1,\ldots,x_i+r}]\\
&=\left(1+\frac{f(x_i)}{x_{x+r}-x_i}\right)g[x_{i+1},\ldots,x_{i+r}]-\frac{f(x_i)}{x_{i+r}-x_i}g[x_i,\ldots,x_{i+r-1}]\\
&=\frac{x_{i+r}-t}{x_{i+r}-x_i}B_{i+1,r-2}(t)+\frac{t-x_i}{x_{i+r}-x_i}B_{i,r-2}(t).
\end{aligned}$$

11 Формулирайте теоремата на Чебишов за алтернанса. Докажете достатъчността.

Теорема 11.1. *Нека f е произволна непрекъсната функция в крайния и затворен интервал $[a,b]$. Необходимо и достатъчно условие е полиномът $P \in \pi_n$ да бъде полином на най-добро равномерно приближение за f от $n-$та степен в $[a,b]$ е да съществува $n+2$ точки $\{x_i\}_0^{n+1} \in [a,b]$: $a \le x_0 < \ldots < x_n \le b$ и*

$$f(x_i)-P(x_i) = (-1)^i\epsilon||f-P||, i=0,\ldots,n+1, \tag{11.1}$$

където $\epsilon = 1$ или $\epsilon = -1$.

Доказателство. Условието 11.1 означава, че разликата $f(x)-P(x)$ достига максимумалата си по модул стойност в $n+2$ точки, като си сменя алтернативно знака. В такъв случай казваме, че f и P осъществяват алтернанс в $n+2$ точки. Достатъчност на 11.1.
Нека P удовлетворява 11.1, тоест съществува $n+2$ точки $\{x_i\}_0^{n+1} \in [a,b]$: $a \le x_0 < \ldots < x_n \le b$ и $f(x_i)-P(x_i) = (-1)^i\epsilon||f-P||$, $i = 0,\ldots,n+1$,където $\epsilon = 1$ или $\epsilon = -1$. Тогава е изпълнено:

$$E_n(f) \ge ||f-P||.$$

Но, по определение, $E_n(f) \le ||f-Q||, \forall Q \in \pi_n$. Следователно $E_n(f) = ||f-P||$ и P е полином на най-добро равномерно проближение

12 Формулирайте теоремата на Вайерщрас. Докажете я като използвате полиномите на Бернщайн.

Дефиниция 12.1. *Нека $f(x)$ е произволна функция, дефинирана в интервала $[0,1]$. Полиномът на Бернщайн от степен n за функцията f*

се бележи с $B_n(f;t)$ и се определя с равенството:

$$B_n(f;t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

Дефиниция 12.2. *Нека f е функция дефинирана в $[a,b]$. Величината:*

$$w(f;\delta) = sup|f(x) - f(y)| : x, y \in [a,b], |x-y| \leq \delta$$

се нарича модул на непрекъснатост на f в $[a,b]$.

Теорема 12.1. *Нека f е произволна непрекъсната функция в $[0,1]$. Тогава за всяко n и всяко $t \in [0,1]$ имаме*

$$|f(t) - B_n(f;t)| \leq \frac{3}{2} w\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{12.1}$$

Теорема 12.2. *Нека $[a,b]$ е произволен краен интервал и $f(x)$ е непрекъсната функция в него. Тогава $\forall \epsilon > 0$ съществува алгебричен полином $P(x)$ такъв, че:*

$$\underset{x\in[a,b]}{max}|f(x) - P(x)| \leq \epsilon.$$

Доказателство. Въвеждаме функцията:

$$h(t) = f(a + t(b-a)), t \in [0,1].$$

Тъй като $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$, то и $h(t)$ ще е непрекъсната в $[0,1]$ и следователно

$$\lim_{\delta\to 0} w(h,\delta) = 0.$$

Тогава $\exists n$:

$$\frac{3}{2} w\left(h; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \epsilon$$

От теорема 12.1

$$|h(t) - B_n(h;t)| \leq \frac{3}{2} w\left(h; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \epsilon$$

за това n. Тоест полинома $B_n(h;t)$ приблицава h в $[0,1]$ с точност ϵ. Сега, като се върнем обратно към променливата x със смяната $t = \frac{x-a}{b-a}$, получаваме:

$$\left| h\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - B_n\left(h; \frac{x-a}{b-a}\right)\right| < \epsilon, x \in [a,b].$$

Където $f(x) = h\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ и $P(x) = B_n\left(h; \frac{x-a}{b-a}\right)$ са алгебрични полиноми от степен n. Тогава $P(x)$ е полином, за който

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, x \in [a, b].$$

Доказателството е завършено.

13 Напишете и докажете тричленната рекуретната връзка за редица от ортогонални полиноми.

Свойство 1. *За всяка система от ортогонални полиноми $P_0(x), P_1(x) \ldots$ съществува тричленна рекурентна връзка от вида:*

$$P_{n+1} = (A_n x - B_n)P_n(x) + C_n P_{n-1}(x), n = 1, 2, \ldots, \tag{13.1}$$

където A_n, B_n, C_n са константи.

Доказателство.

$$xP_n(x) = a_0 P_0(x) + \ldots + a_n P_n(x) + a_{n+1} P_{n+1}(x)$$

с някакви константи $a_0, \ldots, a_{n+1}$. Умножаваме с $P_i(x)$ и интегрираме. Получаваме:

$$\int_a^b \mu(x) x P_n(x) P_i(x) dx = a_i(P_i, P_i), i = 0, \ldots, n+1. \tag{13.2}$$

Като интеграла е равен на 0 за $i = 0, \ldots, n-2$ от ортогоналността и $P_i \in \pi_{n-1}$. Следователно $a_i = 0$ при $i = 0, \ldots, n-2$ и

$$xP_n(x) = a_{n-1} P_{n-1}(x) + a_n P_n(x) + a_{n+1} P_{n+1}(x). \tag{13.3}$$

Така получаваме търсената връзка, а за коефициентите от 13.2

$$a_{n-1} = \frac{(xP_n, P_{n-1})}{(P_{n-1}, P_{n-1})}$$
$$a_n = \frac{(xP_n, P_n)}{(P_n, P_n)}$$

и от 13.3 $a_{n+1} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$, ако $P_k(x) = \alpha_k x^k + \ldots \in \pi_{k-1}, k = 0, 1, \ldots$.

14 Формулирайте и докажете теоремата за характеризация на елемента на най-добро приближение в Хилбертово пространство. (НДУ)

Теорема 14.1. *Нека H е произволно хилбертово пространство и $f \in H$. Елементът $p \in \Omega_n$ е елемент на най-добро проближение за f с елемент от Ω_n тогава и само тогава, когато*

$$(f - p, \phi) = 0, \forall \phi \in \Omega_n. \tag{14.1}$$

Доказателство. ($\Rightarrow$)
Да предположим, че p е елемент на най-добро приближение, тоест

$$||f - p|| = inf\{||f - \phi|| : \phi \in \Omega_n\} = \epsilon_n(f).$$

Тогава за произволно $\phi \in \Omega_n$ и $\phi \neq 0$ функцията:

$$r(\lambda) = ||f - p + \lambda\phi||^2 = (f - p + \lambda\phi, f - p + \lambda\phi) = \epsilon_n^2(f) + 2\lambda(f - p, \phi) + \lambda^2(\phi, \phi)$$

ще има минимум при $\lambda = 0$. Това означава, че и $r'(0) = 0$. Но $r'(0) = 2(f - p, \phi)$, следователно $(f - p, \phi) = 0, \forall \phi \in \Omega_n$ ($\Leftarrow$)
Да допуснем, че $p \in \Omega_n$ и p удовлетворява условията за ортогоналност 14.1. Нека ϕ е произволен друг елемент от Ω_n. Тогава $\delta = p - \phi \in \Omega_n$ и следователно

$$\begin{aligned} ||f - \phi||^2 &= ||f - p + p - \phi||^2 \\ &= (f - p + \delta, f - p + \delta) = ||f - p||^2 + ||\delta||^2 (\text{защото} (f - p) \perp \delta) \\ &\geq ||f - p||^2 \end{aligned}$$

И така, ако p удовлетворява 14.1, то

$$||f - p|| \leq ||f - \phi||, \forall \phi \in \Omega_n$$

Като равенство се достига само при $\delta = 0$, тоест когато $p \equiv \phi$.

15 Изведете формулата от вида $f'(a) \approx C_0 f(a - h) + C_1 f(a + h)$ и грешката $O(h^2)$ при положение, че f е достатъчно гладка. Обосновете порядъка на грешката.

Нека $f(t)$ е дефинирана в $[a - h, a - h]$ и $x_0 = a - h, x_1 = a + h$ са различни възли на интерполация симитрични спрямо точката a. Търсим приближение на $f'(a)$. Съгласно формулата на Нютон

$$f(t) = L_1(f;t) + f[a-h, a+h, t](t-a+h)(t-a-h)$$

Очевидно

$$L_1(f;t) = f(a-h) + f[a-h, a+h](t-a+h).$$

Следователно $f'(a) \approx L_1'(a) = f[a-h, a+h]$ и получаваме следната формула за приближение от търсения вид:

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

Тогава за грешката имаме

$$\begin{aligned}
E(f) &= (f[a-h, a+h, t](t-a+h))' \\
&= f[a-h, a+h, t, t](t-a+h)(t-ah) + f[a-h, a+h, t]2(x-a) \\
E(a) &= f[a-h, a+h, t, t](a-a+h)(a-a-h) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(-h^2) \\
&= \boxed{-\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}h^2}
\end{aligned}$$

От $E(a) \to 0$ при $h^2 \to 0$, следва, че порядъка на грешката е $o(h^2)$.

16 Изведете елементарната квадратурна формула на трапеца и оценката на грешката при подходящи предположения за подинтегралната функция.

Нека $f(x)$ е непрекъсната и дефинирана в $[a, b]$ и нека $x_0 = a, x_1 = b$. Тогава

$$\begin{aligned}
L_1(f;x) &= f(a) + f[a, b](x-a) \\
f(x) &= L_1(f;x) + f[a, b, x](x-a)(x-b)
\end{aligned}$$

Заменяме под интеграланата функция f с L_1 и получаваме квадратурна формула на трапците:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_1(f;x)dx = \int_a^b f(a) + f[a,b](x-a) \\ = f(a)(b-a) + f[a,b]\frac{b^2-a^2}{2} - f[a,b]a(b-a) \\ = f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2} - ab + a^2\right) \\ = f(a)(b-a) + \frac{f(b-f(a))}{b-a}\frac{b^2-2ab+a^2}{2} \\ = f(a)(b-a) + \frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{2} = \boxed{\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)].}\end{aligned}$$

От това, че $w(x) = (x-a)(x-b)$ има постоянен знак в (a,b) и използвайки теоремата за средните стойностти за грешката получаваме:

$$\begin{aligned}R(f) &= \int_a^b f[a,b,x](x-a)(x-b)dx = \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x^2-ax-bx+ab)dx, \xi \in [a,b] \\ R(f) &= \frac{f''(\xi)}{2}\left(\frac{b^3-a^3}{3} - \frac{ab^2-a^3}{2} - \frac{b^3-ba^2}{2} + ab^2 - a^2b\right) \\ &= \frac{f''(\xi)}{2}\left(\frac{2b^3-2a^3-3ab^2+3a^3-3b^3+3ba^2+6ab^2-ba^2b}{6}\right) \\ &= \boxed{-\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3}.\end{aligned}$$

17 Формулирайте и докажете теоремата за квадратурната формула на Гаус.

Теорема 17.1. *При всяко естествено число n съществува единствена квадратурна формула от вида:*

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx \equiv \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \tag{17.1}$$

където $\mu(x)$ е дадено тегло, дефинирано в $[a,b], a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b, a\{A_k\}_1^n \in \mathbb{R}$ с алгебрична степен на точност $2n-1$. Възлите $\{x_k\}_1^n$ на *тази формула са нулите на полинома от степен n, ортогонален $[a, b]$ с тегло $\mu(x)$ на всички алгебрични полиноми от степен $n-1$.*

Доказателство. ($\Leftarrow$)Нека $w(x)$ е полином от степен n, с коефициент 1 пред x_n , който е ортогонален в $[a, b]$ с тегло $\mu(x)$ на всички полиноми от степен $n-1$ и нека $x_1, \ldots, x_n$ са неговите нули, тоест $w(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_n)$. Ще построим интерполационната квадратурна формула от вида 17.1 с възли нулите $\{x_k\}_1^n$ на $w(x)$ и ще покажем, че тази формула има АСТ$= 2n-1$. Нека f е произволен полином от степен $2n-1$. Разделяме $f(x)$ на $w(x)$ и получаваме:

$$f(x) = w(x)q(x) + r(x), \tag{17.2}$$

където q и r са полиноми от по-малка или равна на $n-1$. Тогава:

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx = \int_a^b \mu(x)w(x)q(x)dx + \int_a^b \mu(x)r(x)dx.$$

От $w(x)$ ортогонален на $q(x)$, следва че:

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx = \int_a^b \mu(x)r(x)dx$$

Формула 17.1 е точна за $r(x)$, тогава

$$\int_a^b \mu(x)r(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k r(x_k)$$

От $w(x_k) = 0$, следва, че $r(x_k) = f(x_k)$.Получаваме

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

Квадратурната формула е точна за всяко $f(x) \in \pi_{2n-1}$ следователно АСТ$= 2n-1$.
$\Rightarrow$ Нека квадратурната формула 17.1 има АСТ$= 2n-1$. Ще покажем, че полинома $w(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_n)$ е ортогонален на всеки полином от π_{n-1}.Тогава полиномът $f(x) = Q(x)w(x)$ е от степен $2n-1$ и квадратурната формула ще бъде точна за него.Имаме

$$\int_a^b \mu(x)Q(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k Q(x_k)w(x_k) = 0,$$

тоест $w(x)$ е ортогонален на $Q(x)$. Единствеността на полинома с най-висока АСТ, тоест $2n-1$, следва от единствеността на полинома $w(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n)$, ортогонален на всички полиноми от π_{n-1}.

18 Формулирайте и докажете теоремата за приближено решаване на нелинейно изображение по метода свиващото изображение.

Теорема 18.1. *Нека ϕ е непрекъснато изображение на $[a,b]$ в себе си, което удовлетворява условието на Липшиц с константа $q < 1$. Тогава*

- а *Уравнението $x = \phi(x)$ има единствен корен $\xi \in [a,b]$;*
- б *Редицата $\{x_n\}$ клони към ξ при $n \to \infty$.*

Нещо повече

$$|x_n - \xi| \le (b-a)q^n, \forall n \tag{18.1}$$

Доказателство. От това, че ϕ е непрекъснато изображение на интервала $[a,b]$ в себе си следва, че ϕ има неподвижна точка в $[a,b]$. Да допуснем, че неподвижните точки са повече от една. Нека $\xi_1 = \phi(\xi_1), \xi_2 = \phi(\xi_2)$, за някои $\xi_1, \xi_2 \in [a,b]$. Тогава при $\xi_2 \ne \xi_2$:

$$\begin{aligned}|\xi_1 - \xi_2| &= |\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)| \\ &\le q|\xi_1 - \xi_2| \text{ (по условие на Липшиц)} \quad < |\xi_1 - \xi_2| \text{ (от } q < 1)\end{aligned}$$

И достигнахме до противоречие, следователно в интервала $[a,b]$ имаме единствена неподвижна точка ξ. Ще докажем оценката 18.1, от която следва b. Имаме

$$\begin{aligned}|x_n - \xi| &= |\phi(x_{n-1}) - \phi(\xi)| \le q|x_{n-1} - \xi| \\ &= q|\phi(x_{n-2}) - \phi(\xi)| \le q^2|x_{n-3} - \xi| \\ &\dots \\ &\le q^n|x_0 - \xi|\end{aligned}$$

От $x_0 \in [a,b]$ и $\xi \in [a,b]$, то $|x_0 - \xi| < b - a$