

Задачи второ контролно ЧМ

Информатика при Лозко Милев

Първи тип

Задача 1.

Като използвате интерполационна формула на Лагранж, намерете полинома $p \in \pi_2$, който удовлетворява условията: $p(-1) = 2, p(1) = 2, p(2) = 5$. Представете $p(x)$ по степените на x . **Решение:**

Използваме формулата

$$L_2(f; x) = \sum_{k=0}^2 f(x_k) \prod_{i=0, i \neq k}^2 \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

за $x_0 = -1, x_1 = 1, x_2 = 2$ и получаваме

$$\begin{aligned} L_2(f; x) &= f(-1) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= 2 \frac{(x - 1)(x - 2)}{(-1 - 1)(-1 - 2)} + 2 \frac{(x + 1)(x - 2)}{(1 + 1)(1 - 2)} + 5 \frac{(x + 1)(x - 1)}{(2 + 1)(2 - 1)} \\ &= 2 \frac{x^2 - 3x + 2}{6} + 2 \frac{x^2 - x - 2}{-2} + 5 \frac{x^2 - 1}{3} \\ &= \frac{x^2 - 3x + 2 + 5x^2 - 5}{3} - x^2 + x + 2 = \frac{6x^2 - 3x - 3 - 3x^2 + 3x + 6}{3} \\ &= \frac{3x^2 + 3}{3} = \boxed{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Задача 2.

Полиномът $L_2(f; x)$ интерполира $f(x) = e^x$ в $-1, 0, 1$. Като използвате формулата за оценка на грешката докажете, че:

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - L_2(f; x)| \leq \frac{1}{5}.$$

Решение:

Формулата за оценка на грешката има вида:

$$f(x) - L_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x), \xi \in [-1, 1].$$

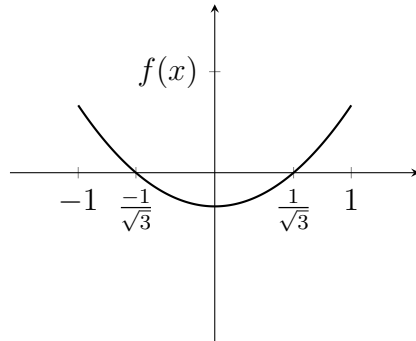
Замествайки за $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ получаваме:

$$\begin{aligned} f(x) - L_2(f; x) &= \frac{f^3(\xi)}{(3)!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= \frac{e^\xi}{6} (x + 1)x(x - 1) = \boxed{\frac{e^\xi}{6} (x^3 - x)}. \end{aligned}$$

Търсим максимума на получената функция

$$(f(x) - L_2(f; x))' = \frac{e^\xi}{6}(3x^2 - 1)$$

Този полином се нулира в $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$



Като максимума си достига при $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

От $\xi \in [-1, 1]$ следва, че e^ξ достига максимума си при $x = 1$. Тогава

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - L_2(f; x)| \leq \frac{e}{6} \max_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{-2}{3\sqrt{3}} \right|$$

От $e < 3$ и $\sqrt{3} < 2$

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - L_2(f; x)| \leq \frac{3}{6} \frac{2}{6} = \frac{1}{6} \leq \frac{1}{5}$$

Задача 3.

Като използвате интерполационна формула на Нютон с разделени разлики, намерете полинома $p \in \pi_3$, който удовлетворява условията: $p(-2) = -8, p(0) = 2, p(1) = 4, p(2) = 12$. Представете $p(x)$ по степените на x . **Решение:**

Използваме таблицата за пресмятане на разделените разлики спрямо рекурентната им дефиниция.

Нека x_0, \dots, x_n са дадени различни точки. Разделената разлика на функция f в точките x_0, \dots, x_n се бележи с $f[x_0, \dots, x_n]$ и се определя индуктивно със следната рекурентна връзка.

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \quad n = 1, \dots, \infty$$

, като приемаме, че $f[x_i] = f(x_i)$

x_i	f_i	$f[.,.]$	$f[.,.,.]$	$f[.,.,.,.]$
-2	-8			
		5		
0	2		-1	
		2		1
1	4		3	
		8		
2	12			

Използваме формулата на Нютон

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}),$$

като приемаме, че $(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) = 1$ при $k = 0$.

$$\begin{aligned}
p(x) = L_3(f; x) &= \sum_{k=0}^3 f[-2, \dots, 2](x + 2) \dots (x - x_{k-1}) \\
&= f[-2] + f[-2, 0](x + 2)x + f[-2, 0, 1](x + 2)x + f[-2, 0, 1, 2](x + 2)x(x - 1) \\
&= -8 + 5x + 10 - x^2 - 2x + x^3 + x^2 - 2x \\
&= \boxed{2 + x + x^3}
\end{aligned}$$

Задача 4.

Нека $S_k = 1^2 + \dots + k^2$ за $k \geq 1, S_0 = 0$. Покажете, че съществува единствен $p \in \pi_3 : p(k) = S_k, k = 0, 1, 2, \dots$. Намерете S_k като използвате формулата на Нютон с крайни разлики за интерполация напред.

Решение:

Крайна разлика от k -ти ред дефинираме индуктивно по следния начин:

$$\begin{aligned}
\Delta^0 f_i &= f_i \\
\Delta^k f_i &= \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i
\end{aligned}$$

Използвайки дефиницията за крайни разлики ще покажем, че всички крайни разлики от 4-ти ред са 0.

k	S_k	ΔS_k	$\Delta^2 S_k$	$\Delta^3 S_k$	$\Delta^4 S_k$
0	0				
		1			
1	1		3		
		4		2	
2	5		5		0
		9		2	
3	14		7		0
		16		2	
4	30		9		0
		25		2	
5	55		11		0
		36		2	
6	71		13		
....

От това, че всички крайни разлики от 4-ти ред са 0, следва, че интерполационния полином на S_k е от π_3 . За да намерим $p(x) \in \pi_3$ ще използваме формула на Нютон за интерполиране напред. Провери формулите

Формула на Нютон за интерполиране напред в равноотдалечени възли

$$L_n(f; x_0 + th) = \sum_{k=0}^n \binom{t}{k} \Delta^k f_0$$

КОМЕНТАР

Формула на Нютон за интерполиране назад в равноотдалечени възли

$$L_n(f; x_n + th) = \sum_{k=0}^n \binom{t+k-1}{k} \Delta^k f_{n-k}$$

Тоест

$$\begin{aligned}
 p(x) = L_n(S; x) &= \sum_{k=0}^3 \binom{x}{k} \Delta^k S_0 = \binom{x}{0} \Delta^0 S_0 + \binom{x}{1} \Delta S_0 + \binom{x}{2} \Delta^2 S_0 + \binom{x}{3} \Delta^3 S_0 \\
 &= 0 + x \cdot 1 + \frac{x(x-1)}{2!} \cdot 3 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \cdot 2 \\
 &= x + \frac{3x^2 - 3x}{2} + \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x}{6} = \frac{6x + 9x^2 - 9x + 2x^3 - 6x^2 + 4x}{6} \\
 &= \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6} = \boxed{\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}}
 \end{aligned}$$

Задача 5.

Като използвате интерполационна формула на Нютон с разделени разлики с кратни възли, намерете интерполационния полином на Ермит, който усовлетворява условията: $p(0) = -1, p'(0) = 1, p''(0) = 2, p(1) = 0, p'(1) = -1$. Представете $p(x)$ по степените на x .

Решение:

Теорема. Нека $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ е редица от реални числа и $f(x)$ е достатъчно гладка функция в интервал, който ги съдържа. Тогава

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \begin{cases} \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, & x_0 < x_1 < \dots < x_n \\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, & x_0 = x_1 = \dots = x_n \end{cases}$$

Използвайки горната теорема ще пресметнем таблицата с разделени-

те разлики:

x_i	f_i	$f[.,.]$	$f[.,.,.]$	$f[.,.,.,.]$	
0	-1				
		1			
0	-1		$\frac{2}{2!}=1$		
		1		-1	
0	-1		0		-1
		1		-2	
1	0		-2		
		-1			
1	0				

Тогава интерполационния полином ще има вида:

$$\begin{aligned}
 p(x) = L_5(f; x) &= \sum_{k=0}^5 f[0, \dots, 1]x \dots (x - x_{k-1}) \\
 &= f[0] + f[0, 0]x + f[0, 0, 0]x.x + f[0, 0, 0, 1]x.x.x + f[0, 0, 0, 1, 1]x.x.x.(x - 1) \\
 &= -1 + x + x^2 - x^3 - x^4 + x^5 = \boxed{-1 + x + x^2 - x^4}
 \end{aligned}$$

Задача 6.

Като използвате формулата за тригонометрична интерполация при равноотдалечени възли, определете коефициентите a_0, a_1, b_1 така, че $\tau(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ да удовлетворява условията $\tau(0) = -1, \tau(\frac{2\pi}{3}) = 2, \tau(\frac{4\pi}{3}) = 2$.

Решение:

Теорема. Нека $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < 2\pi$ са дадени възли и y_0, \dots, y_{2n} са дадени числа. Тогава съществува единствен тригонометричен полином от степен n – $\tau_n(x) : \tau_n(x_i) = y_i, i = 0, \dots, 2n$, който се задава с формулата

$$\begin{aligned}
 \tau_n(x) &= \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k(x) y_k, \text{ където} \\
 \lambda_k(x) &= \prod_{i=0, i \neq k}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_k-x_i}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

Използвайки горната теорема ще пресметнем първо λ -те:

$$\begin{aligned}
\lambda_0(x) &= \frac{\sin\left(\frac{x-x_1}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right) \sin\left(\frac{x_0-x_2}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x-\frac{2\pi}{3}}{2}\right) \sin\left(\frac{x-\frac{4\pi}{3}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{0-\frac{2\pi}{3}}{2}\right) \sin\left(\frac{0-\frac{4\pi}{3}}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{x-\frac{2\pi}{3}}{2}\right) \sin\left(\frac{x-\frac{4\pi}{3}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)} \\
&= \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right) \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)} \\
&= \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right) \left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)} \\
&= \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= 4 \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3} \\
&= \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{4} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
\lambda_1(x) &= \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x-0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-\frac{4\pi}{3}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}-0}{2}\right) \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}}{2}\right)} \\
&= -\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x-\frac{4\pi}{3}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)} \\
&= -4 \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3} \\
\lambda_2(x) &= \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_1-x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x-0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}-0}{2}\right) \sin\left(\frac{\frac{4\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)} \\
&= 4 \frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3}
\end{aligned}$$

Тогава за интерполационния полином получаваме:

$$\begin{aligned}
\tau_1(x) &= \sum_{k=0}^2 \lambda_k(x) y_k = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{3}{4} \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right. \\
&\quad - 2 \left(\sin \left(\frac{x}{2} \right) \right) \left(-\sin \left(\frac{x}{2} \right) \frac{1}{2} - \cos \left(\frac{x}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
&\quad \left. + 2 \left(\sin \left(\frac{x}{2} \right) \right) \left(\sin \left(\frac{x}{2} \right) \frac{1}{2} - \cos \left(\frac{x}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \\
&= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{3}{4} \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\sin \left(\frac{x}{2} \right) \right) \left(2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \frac{1}{2} + 2 \cos \left(\frac{x}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \frac{1}{2} - 2 \cos \left(\frac{x}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \\
&= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{3}{4} \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) + 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) \\
&= \frac{4}{3} \left(3 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{3}{4} \right) = \boxed{1 - 2 \cos(x)}
\end{aligned}$$

Следователно $a_0 = 2, a_1 = -2, b_1 = 0$. **Задача 7.**

Да се намери явния вид на $B(1, 2, 4, t)$ за $t \in [1, 4]$.

Решение:

Използваме

$$B(t_0, t_1, t_2, t) = \begin{cases} \frac{t-t_0}{(t_2-t_0)(t_1-t_0)}, t \in [t_0, t_1] \\ \frac{t_2-t}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)}, t \in [t_1, t_2] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}.$$

И получаваме

$$B(1, 2, 4, t) = \begin{cases} \frac{t-1}{(4-1)(2-1)}, t \in [1, 2] \\ \frac{4-t}{(4-2)(4-1)}, t \in [2, 4] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t-1}{3}, t \in [1, 2] \\ \frac{4-t}{6}, t \in [2, 4] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}.$$

Задача 8.

Да се намери полинома на най-добро равномерно приближение от π_1 за

функцията $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ в $[-1, 1]$ и $E_1(f)$.

Решение:

//Избираме средната точка да е там където полинома си сменя знака

Нека $-1, \frac{1}{2}, 1$ са точки на алтернанс, тоест

$$E_1(f) = +[f(-1) - p(-1)] = -[f(\frac{1}{2}) - p(\frac{1}{2})] = +[f(1) - p(1)]$$

и търсения полином е $p(x) = ax + b$. //Направи го и за произволна точка t. Тогава

$$\frac{3}{2} + a - b = \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2} - a - b$$

$$\frac{3}{2} + a - b = \frac{1}{2} - a - b \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

$$\frac{3}{2} + a - b = \frac{1}{2}a + b \Rightarrow 2b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}a \Rightarrow \boxed{b = \frac{5}{8}} \Rightarrow p(x) = \frac{1}{2}a - \frac{5}{8}$$

. От $p(x)$ линейна функция, следва че в $[-1, 1/2]$ тя достига своите екстремуми в краищата на интервала и аналогично и за $[1/2, 1]$. Тогава

$$E_1(f) = \underbrace{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{5}{8}}_{\frac{3}{8}} = \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{8}}_{\frac{3}{8}} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{8}}_{\frac{3}{8}} \Rightarrow E_1(f) = \frac{3}{8}$$

Задача 9.

Да се намери полинома на най-добро средноквадратично приближение от π_1 за функцията $f(x) = e^x$ в интервала $[-1, 1]$ при тегло $\mu(x) \equiv 1$.

Решение:

Търсим $p = ax + b$, чиито базисни функции са $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x$. За да минимизираме

$$\int_{-1}^1 \mu(x)(f(x) - p(x))^2 dx$$

Трябва да са изпълнени следните условия за ортогоналността с π_1 .

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{aligned} \int_{-1}^1 \mu(x)(f(x) - p(x))dx &= 0 \\ \int_{-1}^1 \mu(x)(f(x) - p(x))xdx &= 0 \end{aligned} \right. & \Leftrightarrow & \left| \begin{aligned} \int_{-1}^1 (e^x - ax - b)dx &= 0 \\ \int_{-1}^1 (e^x - ax - b)xdx &= 0 \end{aligned} \right. \\
 & \Rightarrow \left| \begin{aligned} \int_{-1}^1 e^x dx &= a \int_{-1}^1 x dx + b \int_{-1}^1 dx \\ \int_{-1}^1 e^x x dx &= a \int_{-1}^1 x^2 dx + b \int_{-1}^1 x dx \end{aligned} \right. & \Rightarrow & \left| \begin{aligned} e^x|_{-1}^1 &= a \frac{x^2}{2}|_{-1}^1 + bx|_{-1}^1 \\ x e^x|_{-1}^1 - e^x|_{-1}^1 &= a \frac{x^3}{3}|_{-1}^1 + b \frac{x^2}{2}|_{-1}^1 \end{aligned} \right. \\
 & \Rightarrow \left| \begin{aligned} e - \frac{1}{e} &= 2b \\ e + \frac{1}{e} - e + \frac{1}{e} &= \frac{2}{3}a \end{aligned} \right. & \Rightarrow & \boxed{\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \\ a &= \frac{3}{e} \end{aligned}}
 \end{aligned}$$

Тогава

$$p(x) = \frac{3}{e}x + \frac{e}{2} - \frac{1}{2e}.$$

Задача 10.

Да се намери полинома от π_1 , приближаващ по метода на най-малките квадрати таблицата:

x_i	0	1	3	4
f_i	5	2	2	1

Решение:

Търсим полинома $p(x) \in \pi_1 : p(x) = ax + b$, където $\varphi_0(x) = x, \varphi_1(x) = 1$ са базисните полиноми, за който

$$\sum_{i=1}^4 [f_i - p(x_i)]^2$$

е минимална. От ортогоналността получаваме системата

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 [f_i - p(x_i)]^2 &= 0 \\ \sum_{i=1}^4 [f_i - p(x_i)]^2 x &= 0 \end{aligned} \right. & \Leftrightarrow & \left| \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 [f_i - ax_i - b] &= 0 \\ \sum_{i=1}^4 [f_i - ax_i - b]x &= 0 \end{aligned} \right. \\
 & \Rightarrow \left| \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 [f_i] &= a \sum_{i=1}^4 x_i + b \sum_{i=1}^4 1 \\ \sum_{i=1}^4 [f_i]x_i &= a \sum_{i=1}^4 x_i^2 + b \sum_{i=1}^4 x_i \end{aligned} \right. & \Rightarrow & \left| \begin{aligned} 10 &= 8a + 4b \\ 12 &= 26a + 8b \end{aligned} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a &= -\frac{4}{5} \\ b &= \frac{41}{10} \end{aligned}}
 \end{aligned}$$

Тогава $p(x) = -\frac{4}{5}x + \frac{41}{10}$.

Втори тип

Задача 7.

Нека $B(x_0, \dots, x_r; t)$ е В-сплайнът от степен $r - 1$ с възли $x_0 < \dots < x_r$. Да се намери $\int_{x_0}^{x_r} B(x_0, \dots, x_r, t) dt$. Отговорът да се представи като функция зависеща само от r .

Решение:

$$B(x_0, \dots, x_r; t) = (x - t)_+^{r-1} [x_0, \dots, x_r] = \sum_{k=0}^r c_k (x_k - t)_+^{r-1}, \text{ където } c_k = \frac{1}{w'(x_k)}$$

. От

$$f[x_0, \dots, x_r] = \sum_{k=0}^r c_k f(x_k).$$

Разглеждаме за някое k примитивната

$$\int (x_k - t)^{r-1} dt = \frac{(x_k - t)^r}{-r},$$

където $(x_k - t) < 0$ и $-r < 0$ тоест $\frac{(x_k - t)^r}{-r} < 0$. Тогава

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_r} B(x_0, \dots, x_r; t) dt &= \sum_{k=0}^r c_k \int_{x_0}^{x_r} (x_k - t)_+^{r-1} dt = \left(\frac{-1}{r} \sum_{k=0}^r x_k (x_k - t)_+^r \right) \Big|_{x_0}^{x_r} \\ &= -\frac{1}{r} (x - t)_+^r [x_0, \dots, x_r] \Big|_{x_0}^{x_r} = -\frac{1}{r} ((x - x_r)_+^r [x_0, \dots, x_r] - (x - x_0)_+^r [x_0, \dots, x_r]) \\ &= -\frac{1}{r} (0 - (x - x_0)_+^r [x_0, \dots, x_r]) \\ &= (x - x_0)_+^r [x_0, \dots, x_r] - \text{коэффициента пред } x^r = 1. \end{aligned}$$

Тогава $\boxed{\int_{x_0}^{x_r} B(x_0, \dots, x_r; t) dt = \frac{1}{r}}$

Задача 8.

Да се докаже, че най-доброто равномерно приближение с полиноми от π_n за функцията $f(x) = \cos x$ в $[-1, 1]$ удовлетворява неравенството: $E_n(f) \leq \frac{1}{2^n(n+1)!}$.

Решение:

$$E_n(f) = \min_{p \in \pi_n} \rho(f; p) \leq \rho(f; p), \forall p \in \pi_n.$$

Нека p е интерполационния полином на Лагранж във възлите ξ_0, \dots, ξ_n , които са нулите на $T_{n+1} = \cos((n+1)\arccos x)$.

$$\rho(f; p) = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p(x)|$$

$$|f(x) - p(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - \xi_0) \dots (x - \xi_n) \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n} |T_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2^n (n+1)!}$$

От $T_{n+1}(x) = c(x - \xi_0) \dots (x - \xi_n)$, следва че $|T_{n+1}| \leq 1$.

Задача 9.

Докажете, че ако $f \in C^1[0, 1]$ то за производната на полинома на Бернщайн е изпълнено:

$$B'_{n+1}(f; x) = \sum_{k=0}^n f'(\xi_k) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

където $\xi_k \in \left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1} \right], k = 0, \dots, n$.

Решение:

Имаме, че

$$B_{n+1}(f; t) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) t^k (1-t)^{n+1-k}.$$

Диференцираме по t .

$$\begin{aligned} B'_{n+1}(f; t) &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) k t^{k-1} (1-t)^{n+1-k} \\ &\quad + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) (n+1-k) t^k (1-t)^{n-k} (-1). \end{aligned}$$

Първата сума започва от $k = 1$, защото за $k = 0$ е 0, аналогично втората сума е до $k = n$.

За първата сума полагаме $j = k - 1$.

$$\begin{aligned}
B'_{n+1}(f; t) &= \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j+1} f\left(\frac{j+1}{n+1}\right) (j+1) t_j (1-t)^{n-j} \\
&\quad - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) (n+1-k) t^k (1-t)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) (k+1) t_k (1-t)^{n-k} \\
&\quad - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) (n+1-k) t^k (1-t)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n t^k (1-t)^{n-k} \left(\binom{n+1}{k+1} f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) (k+1) - \binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) (n+1-k) \right) \\
&= \sum_{k=0}^n = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} (n+1) \left(f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right) \right).
\end{aligned}$$

От теоремата на Лагранж получаваме, че за някаква средна точка $\xi_k \in \left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right]$ е изпълнено

$$B'_{n+1}(f; t) = \sum_{k=0}^n = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} (n+1) f'(\xi_k) \left(\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n+1} \right).$$

Откъдето

$$B'_{n+1}(f; t) = \sum_{k=0}^n = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f'(\xi_k)$$

Задача 10.

Да се докаже, че полиномите на Лъожандър

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$$

удовлетворяват

$$\int_{-1}^1 L_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

(Упътване: $L_n(1) = 1, L_n(-1) = (-1)^n$.)

Решение:

$$I = \int_{-1}^1 L_n^2(x) dx = x L_n^2(x) \Big|_{-1}^1 - 2 \int_{-1}^1 L_n(x) L'_n(x) x dx.$$

Имаме, че

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \alpha_n x^n + \dots \\ L'_n(x) &= n \alpha_n x^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

От $x L'_n(x) = n \alpha_n x^n + \dots = n L_n(x) + P(x)$ следва, че

$$\begin{aligned} I &= 2 - 2 \int_{-1}^1 L_n(x) (n L_n(x) + P(x)) dx \\ &= 2 - 2 \int_{-1}^1 n L_n^2(x) dx - \underbrace{2 \int_{-1}^1 \underbrace{L_n(x)}_{\text{четна ф-я}} \underbrace{P(x)}_{\text{нечетна ф-я}} dx}_{\text{интеграл на нечетна ф-я в симитричен интервал е 0}} \\ &= 2 - 2nI \end{aligned}$$

Следователно $\boxed{I = \frac{2}{1+2n}}.$

Задача 11.

Задача 12.