Развити въпроси за изпит по ЧМ

Информатика при Лозко Милев

Теодора Иванова

19 юни 2019 г.

Съдържание

1 Формулирайте интерполационната задача на Лагранж. Докажете единствеността. Изведете интерполационната формула на Лагранж.

Постановка на задачата

Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ са различни точки и $y_1, y_2, ..., y_n$ са дадени реални числа.

Да се построи алгебричен полином $P(x)$ от степен $\leq n$, който удовлетворява следните условия:

$$P(x_k) = y_k, \quad k = 0, \ldots, n \tag{1.1}$$

Теорема 1.1. *Ако съществува решение на 1.1, то трябва да е единствено.*

Доказателство. Допускаме, че съществуват два полинома P и Q от степен n, които удовлетворяват 1.1, тогава разликата

$$R(x) = P(x) - Q(x)$$

ще бъде полином от степен $\leq n$ и освен това

$$R(x_k) = P(x_k) - Q(x_k) = y_k - y_k = 0, \quad k = 0, \ldots, n$$

Следователно R е полином от степен n, който се анулира в $n + 1$ точки. Тогава от основната теорема на алгебрата $R(x)$ е тъждествено равен на 0. Следователно $P \equiv Q$.

Извеждане на формулата

При фиксирано k да се намери полинома $l_{nk}(x) \in \pi_n$, който удовлетворява условията:

1. $l_{nk}(x_i) = 0$, за $i = 0, \ldots, n$ и $i \neq k$
2. $l_{nk}(x_i) = 1$, за $i = k$

От 1. следва, че точките $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n$ са нули на полинома l_{nk}. От $l_{nk} \in \pi_n$ следва, че $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n$ са всичките нули. Тогава l_{nk} може да се запише във вида:

$$l_{nk}(x) = A(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n),$$

където A е някакво число. A се определя от 2..

$$1 = l_{nk}(x_k) = A(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)$$

Следователно:

$$A = \frac{1}{\prod\limits_{i=0, i\neq k}^{n}(x_k - x_i)}.$$

Тогава

$$\begin{aligned} l_{nk}(x) &= \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x - x_n)} \\ &= \prod_{i=0, i\neq k}^{n}\left(\frac{x - x_i}{x_k - x_i}\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Полиномите $\{l_{nk}\}_{k=0}^{n}$ се наричат базисни полиноми на Лагранж. С тяхна помощ може лесно да се построи P.

Ще покажем, че решението $P(x)$ на 1.1 се дава с

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_{nk}(x) \tag{1.3}$$

По построение

$$l_{nk}(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

Тогава

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_{nk}(x_i) = y_i l_{ni}(x_i) = y_i 1 = y_i,$$

за всяко $i = 0, \dots, n$. От това, че полиномът 1.3 е от $\pi_n (l_{nk} \in \pi_n)$ и удовлетворява 1.1, следва,че $P(x)$ даден в 1.3 е решение на интерполационната задача.

Най-често $\{y_k\}_{k=0}^{n}$ са стойностите на някаква функция $f(x)$ в точките $x_0, x_1, \dots, x_n$, тоест

$$y_k = f(x_k), \quad , k = 0, \dots, n.$$

В такъв случай

$$P(x_k) = f(x_k), \quad , k = 0, \ldots, n$$

се бележи с $L_n(f;x)$ и се нарича интерполационен полином на Лагранж за функцията f с възли $x_0, \ldots, x_n$. Казваме още, че $L_n(f;x)$ интерполира $f(x)$ в точките $(x_0, \ldots, x_n)$.

И така доказахме следната теорема

Теорема 1.2. *Нека $x_0 < \ldots < x_n$ и $f(x)$ е определена в тези точки. Тогава съществува единствен полином от π_n, който интерполира f в $x_0, \ldots, x_n$. Този полином се представя чрез формулата:*

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \tag{1.4}$$

Формула 1.4 се нарича интерполационна формула на Лагранж.

2 Формулирайте и докажете теоремата за оценка на грешката при интерполация на Лагранж.

Теорема 2.1. *Нека $[a,b]$ е даден краен интервал и $x_0, \ldots, x_n$ са различни точки в него. Нека функцията $f(x)$ има непрекъсната $(n+1)$-ва производна в $[a,b]$. Тогава $\forall x \in [a,b] \exists \xi \in [a,b]$:*

$$f(x) - L_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)\ldots(x - x_n).$$

Доказателство. Образуваме помощната функция

$$F(t) = f(t) - L_n(f;t) - c(t - x_0)\ldots(t - x_n),$$

където c е параметър. $F(t)$ се анулира в точките $x_0, \ldots, x_n$ при всеки избор на c.

$$F(x_k) = f(x_k) - L_n(f;k) - c.0 = f(x_k) - f(x_k) = 0.$$

Избираме c така, че $F(t)$ да се анулира и при $t = x$. От равенството

$$f(x) - L_n(f;x) - c(x - x_0)\ldots(x - x_n) = 0$$

определяме

$$c = \frac{R_n(f;x)}{(x-x_0)\dots(x-x_n)}. \tag{2.1}$$

И така при този избор на c функцията $F(t)$ има поне $n+2$ нули. Това са точките $x, x_0, \dots, x_n$. По теоремата на Рол $F'(t)$ ще има поне $n+1$ нули, които лежат в интервала $[a,b]$, $F''(t)$ ще има поне n нули и тн. $F^{(n+1)}(t)$ ще има поне една нула, която лежи в $[a,b]$. Да я означим с ξ. Имаме $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. От друга страна,

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(\xi) &= f^{(n+1)}(\xi) - L_n(f;\xi) - c(n+1)! = \\ &= f^{(n+1)}(\xi) - c(n+1)!. \end{aligned}$$

Следователно

$$c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Като сравним това равенство с 2.1 получаваме:

$$R_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n).$$

Теоремата е доказана. □

3 Дайте определение за полином на Чебишов. Напишете рекурентната връзка. Намерете нулите на полинома на Чебишов от n-та степен.

Дефиниция 3.1. *Полиномът на Чебишов от първи род от $n-$та степен се бележи с $T_n(x)$ и се определя в интервала $[-1,1]$ чрез равенството*

$$T_n(x) = cos(narccos(x)), x \in [-1,1]. \tag{3.1}$$

Рекурентна връзка:

$$T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{3.2}$$

Като използваме равенство 3.1 веднага можем да намерим нулите на полинома. Очевидно $T_n(x) = 0$ при $narcosx = (2k-1)\frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, \dots$. Оттук следва, че нулите на полинома са:

$$\xi_k = cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, \dots, n.$$

4 Напишете и докажете интерполационната формула на Нютон с разделени разлики. Напишете задачата, която се решава с тази формула.

Ще изведем формулата на Нютон за интерполационни полиноми. За целта разглеждаме разликата:

$$L_{k+1}(f;x) - L_k(f;x),$$

където $L_{k+1}(f;x)$ интерполира f в $x_0, \dots, x_{k+1}$, а $L_k(f;x)$ интерполира f в $x_0, \dots, x_k$. Ясно е, че $L_{k+1}(f;x) - L_k(f;x) \in \pi_{k+1}$. Освен това

$$L_{k+1}(f;x) - L_k(f;x) = f(x_i) - f(x_i) = 0, \text{за } i = 0, \dots, k.$$

Следователно $x_0, \dots, x_k$ са всичките нули на полинома $L_{k+1}(f;x) - L_k(f;x)$. Тогава той може да се запише във вида:

$$L_{k+1}(f;x) - L_k(f;x) = A(x - x_0)\dots(x - x_k), \tag{4.1}$$

където A е константа. За да намерим A нека сравним коефициентите пред x^{k+1} в 4.1.

Съгласно теоремата за разделените разлики коефициента пред x^{k+1} в $L_{k+1}(f;x)$ е равен на разделената разлика $f[x_0, \dots, x_{k+1}]$. Следователно

$$A = f[x_0, \dots, x_{k+1}]$$

и следователно от 4.1

$$L_{k+1}(f;x) = L_k(f;x) + f[x_0, \dots, x_{k+1}](x - x_0)\dots(x - x_k) \tag{4.2}$$

Нека приложим 4.2 за $k = n-1, n-3, \dots, 2, 1, 0$. Получаваме следния явен израз за интерполационния полином на Лагранж.

$$\begin{aligned} L_n(f;x) = {} & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \\ & + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ & + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0)\dots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Това е интерполационната формула на Нютон. Понякога ще я записваме съкратено така

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \dots, x_k](x - x_0)\dots(x - x_{k-1}), \tag{4.3}$$

като приемаме, че $(x-x_0)\dots(x-x_{k-1}) = 1$ при $k = 0$. Може и с инфукция наобратно Напишете задачата - може би табличката

5 Напишете и докажете формулата на Нютон с крайни разлики за интерполация напред. Напишете задачата, която се решава с тази формула.

Нека възлите $\{x_i\}_0^n$ са равноотдалечени и функцията f е дефинирана в тях. Търсим полинома $L_n(f;x) \in \pi_n$, който интерполира f в $x_0, \ldots, x_n$. Съгласно интерполационната фирмула на Нютон:

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k](x - x_0) \ldots (x - x_{k-1}).$$

Нека $x_i = x_0 + ih, i = 0, \ldots, n$ и $x = x_0 + th$.Тогава

$$(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1}) = \prod_{i=0}^{k-1}(x_0 + th - x_0 - ih) = h^k t(t-1) \ldots (t-k+1).$$

Сега като използваме връзката между разделената разлика и крайната разлика, тоест $f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}$, получаваме

$$L_n(f;x) = L_n(f;x_0 + th) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k!} t(t-1) \ldots (t-k+1) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \Delta^k f_0 \binom{t}{k}}.$$

Това е формула на Нютон с крайни разлики за интерполиране напред. май пак схемата

6 **Формулирайте интерполационната задача на Ермит. Докажете, че задачата има единствено решение.**

7 **Формулирайте и докажете рекурентната връзка за разделени разлики с кратни възли. Включително случая, в който всички възли съвпадат.**

8 **Напишете и докажете, формулата за интерполационния тригонометричен полином при произволно разположени интерполационни възли в $[0, 2\pi)$. Напишете задачата, която се решава с тази формула.**

9 **Формулирайте и докажете теоремата за представяне на сплайн функция, като линейна комбинация на полиноми и отсечени степенни функции.**

10 **Напишете и докажете рекуретната връзка за В-сплайните**

11 **Формулирайте теоремата на Чебишов за алтернанса. Докажете достатъчността.**

12 **Формулирайте теоремата на Вайерщрас. Докажете я като използвате полиномите на Бернщайн.**

13 **Напишете и докажете тричленната рекуретната връзка за редица от ортогонални полиноми.**

14 **Формулирайте и докажете теоремата за характеризация на елемента на най-добро орибличение в хилбартово пространство. (НДУ)**

15 **Изведете формулата от вида $f'(a)\ C_0 f(a-h) + C_1 f(a+h)$ и грешката $O(h^2)$ при положение, че f е достатъчно гладка. Обосновете порядъка на грешката.**

16 **Изведете елементарната квадратурна формула на трапеца и оценката на грешката при подходящи предположения за подинтегралната функция.**

17 **Формулирайте и докажете теоремата за квадратурната формула на Гаус.**

Теорема 17.1. *При всяко естествено число n съществува единствена квадратурна формула от вида:*

$$\int^b \mu(x) f(x) dx = \sum^n A_k f(x_k) \tag{17.1}$$

където $\mu(x)$ е дадено тегло, дефинирано в $[a,b], a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b, a\{A_k\}_1^n \in \mathbb{R}$ с алгебрична степен на точност $2n-1$. Възлите $\{x_k\}_1^n$ на тази формула са нулите на полинома от степен n, ортогонален $[a,b]$ с тегло $\mu(x)$ на всички алгебрични полиноми от степен $n-1$.

Доказателство. ($\Leftarrow$)Нека $w(x)$ е полином от степен n, с коефициент 1 пред x_n , който е ортогонален в $[a,b]$ с тегло $\mu(x)$ на всички полиноми от степен $n-1$ и нека $x_1,\ldots,x_n$ са неговите нули, тоест $w(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_n)$. Ще построим интерполационната квадратурна формула от вида 17.1 с възли нулите $\{x_k\}_1^n$ на $w(x)$ и ще покажем, че тази формула има АСТ$=2n-1$. Нека f е произволен полином от степен $2n-1$. Разделяме $f(x)$ на $w(x)$ и получаваме:

$$f(x) = w(x)q(x) + r(x), \tag{17.2}$$

където q и r са полиноми от по-малка или равна на $n-1$. Тогава:

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx = \int_a^b \mu(x)w(x)q(x)dx + \int_a^b \mu(x)r(x)dx.$$

От $w(x)$ ортогонален на $q(x)$, следва че:

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx = \int_a^b \mu(x)r(x)dx$$

Формула 17.1 е точна за $r(x)$, тогава

$$\int_a^b \mu(x)r(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k)$$

От $w(x_k) = 0$, следва, че $r(x_k) = f(x_k)$.Получаваме

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

Квадратурната формула е точна за всяко $f(x) \in \pi_{2n-1}$ следователно АСТ$= 2n-1$.
$\Rightarrow$ Нека квадратурната формула 17.1 има АСТ$= 2n-1$. Ще покажем,

че полинома $w(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$ е ортогонален на всеки полином от π_{n-1}.Тогава полиномът $f(x) = Q(x)w(x)$ е от степен $2n - 1$ и квадратурната формула ще бъде точна за него.Имаме

$$\int_a^b \mu(x)Q(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k Q(x_k)w(x_k) = 0,$$

тоест $w(x)$ е ортогонален на $Q(x)$. Единственоста на полинома с най-висока АСТ, тоест $2n-1$, следва от единствеността на полинома $w(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$, ортогонален на всички полиноми от π_{n-1}.

18 Формулирайте и докажете теоремата за приближено решаване на нелинейно изображение по метода свиващото изображение.

Теорема 18.1. *Нека ϕ е непрекъснато изображение на $[a, b]$ в себе си, което удовлетворява условието на Липшиц с константа $q < 1$. Тогава*

а *Уравнението $x = \phi(x)$ има единствен корен $\xi \in [a, b]$;*

б *Редицата $\{x_n\}$ клони към ξ при $n \to \infty$.*

Нещо повече

$$|x_n - \xi| \le (b - a)q^n, \forall n \tag{18.1}$$

Доказателство. От това, че ϕ е непрекъснато изображение на интервала $[a, b]$ в себе си следва, че ϕ има неподвижна точка в $[a, b]$. Да допуснем, че неподвижните точки са повече от една. Нека $\xi_1 = \phi(\xi_1), \xi_2 = \phi(\xi_2)$, за някои $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$. Тогава при $\xi_2 \neq \xi_2$:

$$\begin{aligned} |\xi_1 - \xi_2| &= |\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)| \\ &\le q|\xi_1 - \xi_2| \text{ (по условие на Липшиц)} \quad < |\xi_1 - \xi_2| \text{ (от } q < 1) \end{aligned}$$

И достигнахме до противоречие, следователно в интервала $[a, b]$ имаме единствена неподвижна точка ξ. Ще докажем оценката 18.1, от която следва b. Имаме

$$\begin{aligned} |x_n - \xi| &= |\phi(x_{n-1}) - \phi(\xi)| \le q|x_{n-1} - \xi| \\ &= q|\phi(x_{n-2}) - \phi(\xi)| \le q^2|x_{n-3} - \xi| \\ &\dots \\ &\le q^n|x_0 - \xi| \end{aligned}$$

От $x_0 \in [a, b]$ и $\xi \in [a, b]$, то $|x_0 - \xi| < b - a$