定理1.3.6:s为整数时,上述定义中引进的Sobolev空间与定义1.3.2引进的Sobolev空间是一致的.

证明:本定理以$H^s\left(R^n\right)$表示上述定义引进的Sobolev空间,以$H^{s,2}\left(R^n\right)$表示定义1.3.2引入的Sobolev空间.

$s=0$时,两者均为$L^2\left(R^n\right)$.

当s为正整数时:$\|u\|_{H^{s,2}}\left(R^n\right)$

$=(\sum_{|a|\leq s}\|D^a u\|^2_{L^2(R^n)})^{1/2}$

$=\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{|a|\leq s}\int_{R^n}\left|\xi^a\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}$

于是由不等式:$c_1\left(1+|\xi|^2\right)^s\leq\sum_{|a|\leq s}|\xi|^{2a}\leq c_2\left(1+|\xi|^2\right)^s$

即得$\|u\|_s$与$\|u\|_{H^{s,2}}\left(R^n\right)$等价.

当s为负整数时,由于:$H_0^{m,2}\left(R^n\right)=H^{m,2}\left(R^n\right)$对任意正整数m成立

记$m=-s$,有:$H^{s,2}\left(R^n\right)=\left(H^{m,2}\left(R^n\right)\right)'$

利用前面已证明的事实:$H^{m,2}\left(R^n\right)=H^m\left(R^n\right)$

s小于0时,我们只需证明$H^s\left(R^n\right)$与$H^{-s}\left(R^n\right)$对偶.

(1)书上证法:对于s大于0,先定义:$H^{-s}\left(\mathbf{R}^n\right)=\left(H^s\left(\mathbf{R}^n\right)\right)'$

记负指数Sobolev空间为$\left(H^{-s}\left(\mathbf{R}^n\right)\right)^*$

$\left(H^{-s}\left(\mathbb{R}^n\right)\right)^*=\left\{f\in S'\left(\mathbb{R}^n\right)\middle|\left(1+|\xi|^2\right)^{-s/2}\hat{f}(\xi)\in L^2\left(\mathbb{R}^n\right)\right\}$

设$f\in H^{-s}\left(\mathbf{R}^n\right)=\left(H^s\left(\mathbb{R}^n\right)\right)'$,由Riesz表示定理: 存在$\omega\in H^s\left(\mathbb{R}^n\right)$使对任意$\phi\in H^s\left(\mathbf{R}^n\right)$有:

$\langle f,\phi\rangle=\langle\phi,\omega\rangle=\int_{\mathbf{R}^n}\left(1+|\xi|^2\right)^s\hat{\phi}(\xi)\hat{\omega}(\xi)\mathrm{d}\xi$,且$\|f\|_{(H^s)'}=\|\omega\|_{H^s}$

令$v=F^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2\right)^s\hat{\omega}(\xi)\right]$,由于$\omega\in H^s\left(\mathrm{R}^n\right)$,

故$\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2}\hat{\omega}(\xi)\in L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$

则$\left(1+|\boldsymbol{\xi}|^2\right)^{-s/2}\hat{v}=\left(1+|\boldsymbol{\xi}|^2\right)^{s/2}\hat{\omega}\in L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$即$v\in\left(H^{-s}\left(\mathbb{R}^n\right)\right)^*$

且有$\langle f,\phi\rangle=\int_{\mathbf{R}^n}\hat{\phi}(\boldsymbol{\xi})\bar{\hat{v}}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=(v,\phi)$

所以有$\|f\|_{(\boldsymbol{H}^s)'}=\|\omega\|_{\boldsymbol{H}^s}=$

$\left(\int_{\mathbf{R}^n}\left(1+|\xi|^2\right)^s|\hat{\omega}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(\int_{\mathbf{R}^n}\left(1+|\boldsymbol{\xi}|^2\right)^{-s}|\hat{v}(\boldsymbol{\xi})|^2\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\|v\|_{(H^{-s})^*}$

这说明$\left(H^s\left(\mathbb{R}^n\right)\right)'$上任意元素f对应$\left(H^{-s}\left(\mathbb{R}^n\right)\right)^*$上一个元素且两者范数相等.

又容易说明每个$v\in\left(H^{-s}\left(\mathbb{R}^n\right)\right)^*$可生成一个$H^s\left(\mathbf{R}^n\right)$上一个线性泛函.

(2) 考虑:L_k^2,定义为:$\left(1+t^2\right)^{k/2}g(t)\subset L^2$ 的 g.

内积即为L^2内积.考虑L_k^2中Cauchy列u_ν

$\left(1+t^2\right)^{k/2}u_\nu\longrightarrow v(L^2\left(R^n\right))$

令$u=(1+t^2)^{-k/2}\,v$即u $\in L_k^2$.
且:$(1+t^2)^{k/2}\,u_\nu \longrightarrow (1+t^2)^{k/2}\,u$ 即L_k^2是完备的,则L_k^2是个Hilbert空间.
考虑映射φ:$L_k^2 \to L^2 : g \longmapsto (1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}\,g$.
$\int_{R^n}(1+|t|^2)^k(1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}\,g\bar{h}= \int_{R^n}(1+|t|^2)^k g(1+\bar{|t|^2})^{\frac{k}{2}}\,\bar{h}$
$\langle\varphi g, h\rangle = \langle g, \varphi^* h\rangle$
则φ的共轭映射是从L^2映到L_k^2的共轭空间的(L^2映到L_{-k}^2)
而H^k与L_k^2是同构.
(考虑Φ :　$H^k \to L_k^2$
$\hat{h}(\xi) \in H^k$,则$(1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}\,\hat{\hat{h}} \in L^2(R^n)$
$2\pi\ (1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}\,h(-t) \in L^2(R^n)$
$(1+|-t|^2)^{\frac{k}{2}}\,h(-t) \in L^2(R^n)$得到h(t)$\in L_k^2(R^n)$
故以傅里叶变换为映射,此映射为同构映射.)
则可证得H^{-k}与H^k互为共轭.
(3)在考虑椭圆型偏微分方程时:考虑求二阶导:
当$u \in H^1$时
$\int_{R^n}\left(1+|t|^2\right)^{-1}\left|t^2\hat{u}(t)\right|^2 dt$
$=\int_{R^n}\frac{|t|^4}{1+|t|^2}|\hat{u}(t)|^2 dt$
$\leqslant \int_{R^n}\left(1+|t|^2\right)|\hat{u}(t)|^2 dt$
得到$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in H^{-1}$
同理有若$u \in H^{m-s}\left(R^n\right)$则:
$\frac{\partial^m u}{\partial x^m} \in H^{-s}$.
定理1.4.3:设γ是$\mathcal{C}^\infty\left(\bar{R}_+^n\right)$函数$\varphi\left(x_1,\cdots,x_n\right)$到边界 $x_n=0$上的边界值的映射,则它可连续地扩张到整个$H^1\left(R_+^n\right)$上,且$\gamma\left(H^1\left(R_+^n\right)\right) \subset H^{1/2}\left(R^{n-1}\right)$.
证明:设$u \in H^1\left(R_+^n\right)$,则存在$\mathcal{C}^\infty\left(\bar{R}_+^n\right)$中具有紧支集的函数列$\{u_v\}$使
$u_v \to u\left(H^1\left(R_+^n\right)\right)$.
以$\hat{u}_v\left(\xi',x_n\right)$记$u_v(x)$关于$(x_1,\cdots,x_{n-1})$的傅里叶变换.
$\int_0^{+\infty}\frac{\partial\hat{u}_v}{\partial x_n}\left(\xi',x_n\right)\widehat{u}_v\left(\xi',x_n\right)dx_n$=-$(\hat{u}_v\left(\xi',0\right))^2$-$\int_0^{+\infty}\frac{\partial\hat{u}_n}{\partial x_n}\left(\xi',x_n\right)\hat{u}_v\left(\xi',x_n\right)dx_n$
$\left|\hat{u}_v\left(\xi',0\right)\right|^2=-2\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}\frac{\partial\hat{u}_v}{\partial x_n}\left(\xi',x_n\right)\,\widehat{u}_v\left(\bar{\xi'},x_n\right)$
两边乘以$\left(1+|\xi'|^2\right)^{1/2}$并关于$\xi'$在$R^{n-1}$上积分.
$\|\gamma u_v\|_{H^{1/2}}^2\left(R_{x'}^{n-1}\right) \leq$
$2\mathrm{Re}\left(\int_{R_{\xi'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial\hat{u}_v}{\partial x_n}\left(\xi',x_n\right)\right|^2 dx_n d\xi'\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{R_{\xi'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left(1+|\xi'|^2\right)\left|\hat{u}_v\left(\xi',x_n\right)\right|^2 dx_n d\xi'\right)^{\frac{1}{2}}$
$\leq$ C $(\int_{R_{x'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial u_v}{\partial x_n}\left(x',x_n\right)\right|^2 dx_n dx' + \int_{R_{x'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|u_v\left(x',x_n\right)\right|^2 dx_n dx' +$

$\sum_{i=1}^{n-1} \int_{R_{x'}^{n-1}} \int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial u_v'}{\partial x_i}(x', x_n)\right|^2 dx_n dx')$

$= \text{C} \|u_v\|_{H^1(R_+^n)}^2$

由于$u_v \to u\left(H^1\left(R_+^n\right)\right)$可知$\gamma u_v$在$H^{1/2}\left(R^{n-1}\right)$中是一个柯西列,由其完备性知有极限$\gamma v$,并称之为u在边界$x_n = 0$上的迹.

R^n的情形:$u \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$时,$\hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{x}_n\right)$表示u关于$\boldsymbol{x}'$的Fourier变换,$\left|\hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}', 0\right)\right|^2 = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_n}\left|\hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}', x_n\right)\right|^2 \mathrm{d}x_n$

两边乘以$\left(1+|\xi'|^2\right)^{m-1}$且对$\boldsymbol{\xi}'$积分:

$\|u(\boldsymbol{x}', 0)\|_{\boldsymbol{H}^{m-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})}$

$= \int_{\mathbf{R}^{n-1}}\left(1+\left|\boldsymbol{\xi}'\right|^2\right)^{m-1/2}\left|\hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}', 0\right)\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}'$

$= -\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\left(1+\left|\boldsymbol{\xi}'\right|^2\right)^{m-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_n}\left|\hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}', x_n\right)\right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}_n \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}'$

$\leqslant 2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty\left(1+\left|\boldsymbol{\xi}'\right|^2\right)^{m/2}\left|\hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{x}_n\right)\right|\left(1+\left|\boldsymbol{\xi}'\right|^2\right)^{m/2-1/2}\left|\frac{\partial \hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{x}_n\right)}{\partial x_n}\right| \mathrm{d}x_n \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}'$

$\leqslant 2\left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \int_0^\infty\left(1+|\xi'|^2\right)^m\left|\hat{u}\left(\xi', x_n\right)\right|^2 \mathrm{d}x_n \mathrm{d}\xi'\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty\left(1+\left|\boldsymbol{\xi}'\right|^2\right)^{m-1}\left|\frac{\partial \hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}', x_n\right)}{\partial x_n}\right|^2 \mathrm{d}x_n \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}'\right)^{1/2}$

$= 2\left(\int_0^\infty\left\|u\left(\cdot, x_n\right)\right\|_{H^m(\mathbf{R}^{n-1})} \mathrm{d}x_n\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty\left\|\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(\cdot, x_n\right)\right\|_{H^{m-1}(\mathbf{R}^{n-1})}^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}_n\right)^{\frac{1}{2}}$

$\leqslant 2\|u\|_{H^m(\mathbf{R}^n)}\|u\|_{H^m(\mathbf{R}^n)} = 2\|u\|_{H^m(\mathbf{R}^n)}^2$

注:对于边界$\partial\Omega$,若它为C^∞光滑,则存在开集组$\{O_i\}$,$1 \leqslant i \leqslant$ N,使$UO_i \supset \partial\Omega$,且在每个$O_i$中可引入$C^\infty$变换将$\partial\Omega \cap O_i$展平为$R^{n-1}$中一部分$\omega_i$.于是如果u是定义在$\partial\Omega$上的函数,利用从属于$\{O_i\}$的单位分解$\{\eta_i\}$,(在$\partial\Omega$上$\sum \eta_i = 1$,$\operatorname{supp} \eta_i \subset O_i$,$\eta_i \in C_c^\infty\left(O_i\right)$),可以将u改写为$\sum \eta_i u = \sum u_i$.今若每个$u_i$变换导出的函数$\tilde{u}_i$属于$H^s\left(\omega_i\right)$,就称$u \in H^s(\partial\Omega)$.将$\sum_{i=1}^N \|\tilde{u}_i\|_{H^s}\left(\omega_i\right)$作为u的$H^s(\partial\Omega)$范数.(这里的展平操作可取如下变换:$x_n = \varphi\left(x_1, \cdots, x_{n-1}\right)$,$\begin{cases} y_i = x_i & 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ y_n = x_n - \varphi\left(x_1, \cdots, x_{n-1}\right) \end{cases}$,此变换将$U_i \cap \partial\Omega$变换到$y_n = 0$上.)

定理1.4.4:(一般的迹定理)设Ω是具有光滑边界的有界区域,$s > \frac{1}{2} + k$

$u \in H^s(\Omega)$,则可定义u在$\partial\Omega$上的迹$\gamma_0 u, \gamma_1 u, \cdots, \gamma_k u$,

其中$\gamma_i (0 \leqslant j \leqslant k)$是$H^s(\Omega)$到$H^{s-1/2-j}(\partial\Omega)$的线性连续映照, 且对于$C^\infty\left(\bar{R}_+^n\right)$函数u,$\gamma_i u$就是$\frac{\partial^i u}{\partial v^i}$在边界上的取值,这里$\frac{\partial}{\partial v}$是对$\Omega$的外法向求导.

延拓:

定理:我们想证明:任意$H^m(\Omega)$函数必可以延拓成一个$H^m\left(R^n\right)$函数.

证明:首先指出,若对任意开集$\Omega \subset\subset \Omega_1$能将u延拓成$H^m\left(\Omega_1\right)$函数,则u必能延拓成$H^m\left(R^n\right)$函数.事实上,将延拓成的$H^m\left(\Omega_1\right)$函数记为$u_1$,并做函数$\eta \in$

$C_c^\infty(\Omega_1)$,使它在Ω上等于1.那么ηu_1的零延拓就是u在R^n上的延拓.并且显然有$\eta u_1 \in H^m(R^n)$.所以只要能将$H^m(\Omega)$函数保持$H^m(\Omega)$性质向外延拓一点点,就能将u保持H^m性质延拓到R^n上.

固定$x^0 \in \partial U$,首先假设∂U在x^0附件平坦,位于平面$\{x_n = 0\}$.

我们有一个开球B,以x^0为圆心,以r为半径,我们有:

$$\begin{cases} B^+ := B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \bar{U} \\ B^- := B \cap \{x_n \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n - U \end{cases}$$

我们这样定义:

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{if } x \in B^+ \\ -3u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) + 4u\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}\right) & \text{if } x \in B^- \end{cases}$$

这叫做从B^+到B^-的高阶反射.

又有:$u^- := \bar{u}|_{B^-}, u^+ := \bar{u}|_{B^+}$

首先有:$u^-_{x_n} = u^+_{x_n} \quad$ 在 $\{x_n = 0\}$上

(因为:$\frac{\partial u^-}{\partial x_n}(x) = 3\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) - 2\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}\right)$)

又因为在$\{x_n = 0\}$上有:$u^+ = u^-$,所以就又有:

$u^-_{x_i}\big|_{\{x_n=0\}} = u^+_{x_i}| \{x_n = 0\}$,$(i = 1, \ldots, n-1)$

故又有:$D^\alpha u^-|_{\{x_n=0\}} = D^\alpha u^+|_{\{x_n=0\}}$.

我们容易得到以下不等式:$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(B^+)}$

考虑边界不是平坦的,我们可以找到一个C^1映射$\mathbf{\Phi}$以及它的逆:$\mathbf{\Psi}$,其中$\mathbf{\Phi}$把边界拉直了.

将边界拉直的过程:

球与区域的交集:$U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) | x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$

沿着∂U定义外法向量:$\nu = (\nu^1, \ldots, \nu^n)$

$u \in C^1(\bar{U})$,我们称$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nu \cdot Du$是u关于外法向量得导数.

我们考虑以下变换:$\begin{cases} y_i = x_i =: \Phi^i(x) \\ y_n = x_n - \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1}) =: \Phi^n(x) \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$

写作$y = \mathbf{\Phi}(x)$.

相应的:$\begin{cases} x_i = y_i =: \Psi^i(y) \\ x_n = y_n + \gamma(y_1, \ldots, y_n) =: \Psi^n(y) \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$

写作:$x = \Psi(y)$

于是就有:$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Psi}^{-1}$

映射$x \mapsto \Phi(x) = y$将x^0附近的边界区域拉直.

设$y = \Phi(x), x = \Psi(y), u'(y) := u(\Psi(y))$.

在拉直边界后的新区域内找一个球B:我们将u'从B^+延拓到B,得到函数$\bar{u}'$.($\bar{u}'$是C^1的.

我们有不等式:$\|\bar{u}'\|_{W^{1,p}(B)} \leq C\,\|u'\|_{W^{1,p}(B^+)}$.
令$W := \Psi(B)$,我们回到坐标x,我们得到u到W中的延拓,且又有不等式:
$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$成立.
又因为∂U是紧的,故有有限个边界上的点$x_i^0 \in \partial U$,开集W_i以及在u在各个W_i上的延拓$\bar{u}_i$.
令$\Gamma \subset U_{i=1}^N W_i$并取$W_0 \subset\subset U$所以$U \subset U_{i=0}^N W_i$.
令$\{\zeta_i\}_{i=0}^N$是它的一个单位分解,我们令:
$\bar{u} := \sum_{i=0}^N \zeta_i \bar{u}_i$其中$\bar{u}_0 = u$.
所以我们就可以将函数往外延拓一点点,则得证.
迹定理:假设U是开集,有界,边界∂U是C^1的,则存在一个有界线性算子:
$T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$满足:
(1)若$u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$,$Tu = u|_{\partial U}$.
(2)对于每个$u \in W^{1,p}(U)$,$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$,
其中C仅取决于p和U.
证明:首先假设$u \in C^1(\bar{U})$,固定$x^0 \in \partial U$,首先假设∂U在x^0附件平坦,位于平面$\{x_n = 0\}$.
我们有一个开球B,以x^0为圆心,以r为半径,与开球$\hat{B}$,以x^0为圆心,以r/2为半径.
又之前定理:可以找到一个$\zeta \in C_c^\infty(B)$,$\zeta \equiv 1$在$\hat{B}$上.
Γ是在$\hat{B}$内部分的∂U.
$x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x_n = 0\}$
于是我们有以下不等式:
$\int_\Gamma |u|^p dx' \leq \int_{\{x_n=0\}} \zeta |u|^p dx' = -\int_{B^+} (\zeta |u|^p)_{x_n} dx$
$= -\int_{B^+} |u|^p \zeta_{x_n} + p|u|^{p-1} (\operatorname{sgn} u) u_{x_n} \zeta dx$
我们使用Young不等式:

$\leq C\int_{B^+}|u|^p+|Du|^p dx$

若$x^0\in\partial U$,但∂U在x^0附近不是平坦的,可以用之前的方法将边界展平.

运用平坦情况下的不等式估计与变量变换:

$\int_\Gamma |u|^p dS\leq C\int_U |u|^p+|Du|^p dx$

然后对边界用有限覆盖定理:在边界上有有限个点$x_i^0\in\partial U$与$\Gamma_i\subset\partial U(i=1,\ldots,N)$使$\partial U=\bigcup_{i=1}^N\Gamma_i$

有不等式:$\|u\|_{L^p(\Gamma_i)}\leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}\quad(i=1,\ldots,N)$

因此若我们定义:$Tu:=u|_{\partial U}$,就有:

$\|Tu\|_{L^p(\partial U)}\leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$,其中的C不取决于u.

迹零定理:设U有界且∂U是C^1的,$u\in W^{1,p}(U)$则$u\in W_0^{1,p}(U)$等价于$Tu=0$在∂U上.

证明:假设在∂U上$Tu=0$.

用单位分解定理与展平技巧:我们可以设$u\in W^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$,u在$\overline{\mathbb{R}}_+^n$中有紧支集,

在$\partial\mathbb{R}_+^n=\mathbb{R}^{n-1}$上$Tu=0$.

且存在$u_m\in C^1\left(\overline{\mathbb{R}}_+^n\right)$,$u_m\to u(W^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^n\right))$

$Tu_m=u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}}\to 0(L^p\left(\mathbb{R}^{n-1}\right))$

现在若$x'\in\mathbb{R}^{n-1},x_n\geq 0$,

我们有:$|u_m\left(x',x_n\right)|\leq|u_m\left(x',0\right)|+\int_0^{x_n}|u_{m,x_n}\left(x',t\right)|dt$

于是又有:$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|u_m\left(x',x_n\right)\right|^p dx'\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|u_m\left(x',0\right)\right|^p dx'\ +x_n^{p-1}\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|Du_m\left(x',t\right)\right|^p dx'dt\right)$

令$m\rightarrow\infty$有$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|u\left(x',x_n\right)\right|^p dx'\leq Cx_n^{p-1}\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|Du|^p dx'dt$

令$\zeta\in C^\infty(\mathbb{R}_+)$是满足在[0,1]上$\zeta\equiv 1$,在$\mathbb{R}-[0,2]$上$\zeta\equiv 0$,$0\leq\zeta\leq 1$.

又有以下定义:$\begin{cases}\zeta_m(x):=\zeta\left(mx_n\right) & \left(x\in\mathbb{R}_+^n\right)\\ w_m:=u(x)\left(1-\zeta_m\right)\end{cases}$

于是有:$\begin{cases}w_{m,x_n}=u_{x_n}\left(1-\zeta_m\right)-mu\zeta'\\ D_{x'}w_m=D_{x'}u\left(1-\zeta_m\right)\end{cases}$

因此:$\int_{\mathbb{R}_+^n}\left|Dw_m-Du\right|^p dx\leq C\int_{\mathbb{R}_+^n}\left|\zeta_m\right|^p|Du|^p dx+Cm^p\int_0^{2/m}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u|^p dx'dt$

$=:A+B$

$m\rightarrow\infty$时$A\rightarrow 0$

又由:$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|u\left(x',x_n\right)\right|^p dx'\leq Cx_n^{p-1}\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|Du|^p dx'dt$

估计B:$B\leq Cm^p\left(\int_0^{2/m}t^{p-1}dt\right)\left(\int_0^{2/m}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|Du|^p dx'dx_n\right)$

$\leq C\int_0^{2/m}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|Du|^p dx'dx_n\rightarrow 0$

所以$Dw_m\rightarrow Du(L^p\left(\mathbb{R}_+^n\right))$

又因为$w_m\rightarrow u(w_m\rightarrow u)$

所以$w_m\rightarrow u(H^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^n\right))$

定理1.4.7:(广义函数的Green公式)设$u\in H^1(\Omega)$,Ω是上述区域,则

$\underline{\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}dx=\int_{\partial\Omega}u\cos\left(n,x_i\right)ds}$

又当$u\in H^2(\Omega)$且$a_{ij}(x)\in C^\infty(\bar{\Omega})$时:

$\underline{\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dx=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial v}ds}$

其中$\frac{\partial}{\partial v}=\sum_j\left(\sum_i a_{ij}\cos\left(n,x_i\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$

cos($\vec{n}$, x_i) 是外法向量与x_i坐标轴的夹角余弦.

椭圆型偏微分方程:

在$\boldsymbol{\Omega}$上讨论如下椭圆型偏微分方程边值问题:

$Lu=\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=$f

$u|\partial\Omega=0$

a_{ij},b_i,c为$C^\infty(\bar{\Omega})$实函数,且满足$a_{ij}=a_{ji}$

以及椭圆型条件:$\sum_{i=1}^\infty a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\alpha\sum_{i=1}^n\xi_i^2$

又有u在边界上取零值的要求,故应当在$H_0^1(\Omega)$中考虑问题的解.

这个例子说明考虑Dirichlet边值问题时在$H^1(\Omega)$中考虑问题合适,问题转化为当$f\in H^{-1}(\Omega)$时寻找$H_0^1(\Omega)$函数u使得:

按广义函数意义满足Lu=f.

$H_0^1(\Omega)$

$Lu=f\in H^{-1}(\Omega)$

$Lu\in H^{-1}(\Omega)$

$H^m(\Omega) \to H^m(R^n)$

$f = g$

$f|_\Omega = g$

边界条件还可以改成非齐次的,如:$u|\partial_\Omega = g$

若在边界定义的函数g可延拓成$H^1(\Omega)$函数,我们仍然用g记它.则非齐次边值问题化为:

$$\begin{cases} L\bar{u} = \boxed{f - Lg} \\ \bar{u}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$H^{\frac{1}{2}}$? $H^1(\Omega)$ $u|_{\partial\Omega} = g$

由于$H^1(\Omega)$函数在边界上的迹是$H^{1/2}$函数,为使$\partial\Omega$上的函数g延拓成一个$H^1(\Omega)$函数.

g必须是$H^{1/2}(\partial\Omega)$函数.

若方程讨论的是Neumann问题,边界条件应该改成$\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega} = 0$ 这里:$\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \cos(n, x_i)\right) \frac{\partial}{\partial x_j}$ H^1 H^2

若仅在$H^1(\Omega)$中讨论,则$\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega} = 0$无确切意义.

$(-Lu, v)_{L^2(\Omega)}$

利用Green公式对问题进行变化:

若$u \in H^2(\Omega)$,$v \in H^1(\Omega)$.利用green公式可得:

$a(u,v)$

想证明:$-\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + (c(x))\, u\right) \bar{v} dx$

$= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \left(-b_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right) \frac{\partial u}{\partial x_i} \bar{v} - \text{cu}\bar{\text{v}}\, dx - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v\right)_{L^2}(\partial_\Omega)$

由于$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \bar{v} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \bar{v}$

$= \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \bar{v}\right)_{x_j}$

再利用Green公式:当$u \in H^2(\Omega)$且$a_{ij}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$时:

$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$ dx$= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$

其中: $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \cos(n, x_i)\right) \frac{\partial}{\partial x_j}$

得到$\boxed{(-Lu, v)_{L^2(\Omega)} = a(u,v) - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, v\right)_{L^2(\partial_\Omega)}}$ 分部

其中a(u,v)是个u,v的双线性形式.

则Neumann问题化为:$a(u,v) = -(f,v)_{L^2(\Omega)}$.

推知:若$u \in H^2(\Omega)$对每一个$v \in H^1(\Omega)$,满足$a(u,v) = -(f,v)_{L^2(\Omega)}$.

则可推得满足Neumann问题.又注意到这个式子对于$u \in H^1(\Omega)$也是有意义的.显然,$u \in H^2(\Omega)$时这样定义的Neumann问题解在边界$\partial\Omega$上导数$\partial\nu$按广义函数迹的意义满足边界条件.

若 $u \in H^1(\Omega)$ 且满足上式. 是Neumann问题的解.

Garding不等式:

定理2.2.1:设Ω, L如前所定义,则存在正常数C_1, C_2,使对一切$C_c^\infty(\Omega)$函数u成立:

$\text{Re}(-Lu, u)_{L^2(\Omega)} \geqslant C_1 \|u\|_1^2 - C_2 \|u\|^2$

证明:利用Green公式:

$(-Lu, u)_{L^2(\Omega)} = a(u,u) - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, u\right)_{L^2(\partial\Omega)}$

$X^T A X = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \\ - & & \\ \vdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

$=a(u,u)$

根据双线性形式:a(u,u)$= a(u,u) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} - b_i\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{u} - c|u|^2\right]dx$

$\geq \int_\Omega \left[\alpha \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 + \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} - b_i\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{u} - c|u|^2\right]dx$

$\geq \alpha\|\operatorname{grad} u\|^2 - C'\|\operatorname{grad} u\|\|u\| - C''\|u\|^2$

又利用不等式:$2ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon}b^2$.

$2\,\|\operatorname{grad} u\|\|u\| \leqslant \frac{\alpha}{2C'}\|\operatorname{grad} u\|^2 + \frac{2C'}{\alpha}\|u\|^2$ 从而:$\operatorname{Re}(-Lu,u)_{L^2(\Omega)} = a(u,u) \geqslant$
$\frac{\alpha}{2}\|gradu\|^2 - \left(\frac{2(C')^2}{a} + C''\right)\|u\|^2$

定理2.2.2:对于椭圆算子L,存在常数C与Λ,使当$\operatorname{Re}\lambda > \Lambda$时:
对一切$C_c^\infty(\Omega)$函数u成立:
$\|-Lu+\lambda u\|_{-1} \geqslant C\|u\|_1$

证明:由定理2.2.1:$\operatorname{Re}(-Lu,u)_{L^2(\Omega)} \geqslant C_1\|u\|_1^2 - C_2\|u\|^2$
取$\Lambda = C_2$,在$\operatorname{Re}\lambda > \Lambda$时:
$\operatorname{Re}(-Lu+\lambda u,u)_{L^2(\Omega)} \geqslant C_1\|u\|_1^2$
由Sobolev空间性质:
$\left|(-Lu+\lambda u,u)_{L^2(\Omega)}\right| \leqslant \|(L-\lambda)u\|_{-1}\|u\|_1$ $\Rightarrow \|-Lu+\lambda u\|_{-1} \geqslant C\|u\|_1$
即证毕.

定理2.2.3:对于椭圆算子L,当m >0时,存在常数$C_1^{(m)}$与$C_2^{(m)}$使对一切$C_c^\infty(\Omega)$u成立:
$\operatorname{Re}(-Lu,u)_m \geqslant C_1^{(m)}\|u\|_{m+1}^2 - C_2^{(m)}\|u\|^2$
又存在正常数$C^{(m)}$与$\Lambda^{(m)}$使对一切$\operatorname{Re}\lambda > \Lambda^{(m)}$成立:
$\|-Lu+\lambda u\|_{m-1} \geqslant C^{(m)}\|u\|_{m+1}$

证明:就m=1的情形证明:
由Garding不等式: $\operatorname{Re}\left[-L(\partial_j u), \partial_j u\right] \geqslant C_1\|\partial_j u\|_1^2 - C_2\|\partial_j u\|^2$ (对任意$j = 1,\cdots,n$成立.)
其中:$L(\partial_j u) = \partial_j Lu - \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_j}\partial_{ik}^2 u - \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_j}\partial_i u - \frac{\partial c}{\partial x_j}u$
又因为$(\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_j}\partial_{ik}^2 u + \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_j}\partial_i u + \frac{\partial c}{\partial x_j}u, \partial_j u) \leq C\|u\|_2\|u\|_1$
故$\operatorname{Re}(-\partial_j Lu, \partial_j u) \geqslant \operatorname{Re}\left[-L(\partial_j u), \partial_j u\right] - C\|u\|_2\|u\|_1$
将所有$(-\partial_j Lu, \partial_j u)$关于j作和再加上$(-Lu,u)$
又由$\operatorname{Re}(-Lu,u)_{L^2(\Omega)} \geqslant C_1\|u\|_1^2 - C_2\|u\|^2$.
得:$\operatorname{Re}(-Lu,u)_1 \geqslant \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}(-L(\partial_j u), \partial_j u) - C'\|u\|_2\|u\|_1 - C_2\|u\|^2$
$\geqslant C_1\sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|_1^2 - C_2\|u\|_1^2 - C'\|u\|_2\|u\|_1 - C_2\|u\|^2$
$\geqslant \frac{C_1}{2}\|u\|_2^2 - C_3\left(\|u\|_1^2 + \|u\|^2\right)$

$C'\|u\|_2\|u\|_1 \leq \frac{C_1}{2}\|u\|_2^2 + \frac{C'^2}{2C_1}\|u\|_1^2$

$\mathrm{Re}(-Lu, u)_1 \geqslant C_1^{(1)} \|u\|_2^2 - C_2^{(1)} \|u\|^2$

因为:$\|u\|_1^2 = \sum_{j=1}^n (\partial_j u, \partial_j u) + (u, u) = \left(\left(1 - \Sigma \partial_j^2\right) u, u\right) \leqslant \|u\|_2 \|u\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2C_3} \|u\|_2^2 + \frac{C_3}{2\varepsilon} \|u\|^2$

证明的第一部分完成. 将 $\|u\|_1^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2C_3}\|u\|_2^2 + \frac{C_3}{2\varepsilon}\|u\|^2$ 代入上个不等式.

若取$\Lambda^{(1)} = C_2^{(1)}$,那么$\forall u \in C_c^\infty(\Omega)$,对任意$\lambda$,$\mathrm{Re}\,\lambda > \Lambda^{(1)}$有

$\mathrm{Re}\,(-Lu + \lambda u, u)_1 \geqslant C_1^{(1)} \|u\|_2^2$

左端分部积分:$\mathrm{Re}(-Lu + \lambda u, \left(I - \sum_{j=1}^n \partial_j^2\right) u)$

$\leqslant \|(L - \lambda)u\| \|u\|_2$ $\qquad \|-Lu+\lambda u\| \geqslant C^{(1)} \|u\|_2$

再带回原不等式可得m=1的情形:

定理2.2.4:对于以前给定的Ω与椭圆的算子L,存在常数Λ,使$\mathrm{Re}\,\lambda > \Lambda$时,方程$(-L+\lambda)u = f$对任一 $f \in H^{-1}(\Omega)$存在唯一$H_0^1(\Omega)$解.

证明:当Λ充分大时,$\mathrm{Re}\,\lambda > \Lambda$时, $\|-Lu + \lambda u\|_{-1} \geqslant C\|u\|_1$.对一切$H_0^1(\Omega)$函数u均成立.

$u_1 - u_2$

于是当$-Lu + \lambda u = 0$时,必有u=0,于是可得解的唯一性.

为证明存在性,作椭圆算子的形式共轭算子L^*:

$L^* v = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij} v) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i v) + cv$ $\qquad (Lu, v) = (u, L^* v)$

则L^*与L有共同的二阶项,也满足椭圆型条件.

可适当改变上面的C, Λ,使$\mathrm{Re}\,\lambda > \Lambda$时:

$\|(-L^* + \lambda) v\|_{-1} \geqslant C\|v\|_1$对一切$v \in C_c^\infty(\Omega)$成立.

于是$f \in H^{-1}(\Omega)$时,对$\mathrm{Re}\,\lambda > \Lambda$时:

$|(f, v)| \leqslant ||f||_{-1} ||v||_1 \leqslant C \|(-L^* + \lambda) v\|_{-1}$ $\qquad$ B是 $H^{-1}(\Omega)$ 线性子集.

算子$-L^* + \lambda$将$C_c^\infty(\Omega)$映到中的线性子集B中,B可表示为:

$\{w \in H^{-1}(\Omega), w = (-L^* + \lambda) v, v \in C_c^\infty(\Omega)\}$

在B上定义一个线性泛函,在B上定义一个线性泛函:$l_f(w) = \left(f, \quad (-L^* + \lambda)^{-1} w\right) = (f, v)$

(f, w)

由$|(f, v)| \leqslant ||f||_{-1} ||v||_1 \leqslant C \|(-L^* + \lambda) v\|_{-1}$,知$l_f(w)$ 是线性连续泛函.由Hahn-Banach定理,将此泛函扩张到$H^{-1}(\Omega)$全空间.

Hahn-Banach定理中的p(x)该如何找?

$l_f(w) = (f, v)$

先给出几个定义:对于线性空间X中的子集S:

称S是凸的如果:任意$x, y \in S$,$0 < a < 1$,有$ax + (1-a)y \in S$

$= (f, (-L^* + \lambda)^{-1} w)$

称S是均衡的,若对任意$x \in S$, $|a| \leqslant 1$必有$ax \in S$

称S是吸收的,若对任意$x \in X$必定存在a>0使$\frac{1}{a}x \in S$

Minkowski泛函:设S为X的吸收凸子集,称X上的泛函:

$\leqslant C\|w\|$

$p_s(z) = \inf\left\{a | \frac{1}{a}x \in S, a > 0\right\}$为S的Minkowski泛函.

$C\|w\|$

在B上

$p(x) = C\|w_x\|$

若能扩张到 $H^{-1}(\Omega)$全空间:

则由表示定理: $(f, v) = l_f(w) = \boxed{(u, w)}$

存在$(u\in H^{-1}(\Omega))'=H_0^1(\Omega)$

使$(f,v)=(u,(-L^*+\lambda)v)=(\underbrace{-Lu+\lambda u}_{=f},v)$

(u,w) $=$ $\cancel{(f,v)}$

一个定理:若S是线性空间X的吸收凸子集,则S的Minkowski泛函满足:

$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y),\forall x,y\in X,p(ax)=ap(x),\forall a\geqslant 0,x\in X$

利用表示定理:可以找到一个元素$u\in(H^{-1}(\Omega))'=H_0^1(\Omega)$使$(f,v)=l_f(w)=(u,w)$.

即:$(f,v)=(u,(-L^*+\lambda)v)=(-Lu+\lambda u,v),\quad \forall v\in C_c^\infty(\Omega)$.

从而u是$-Lu+\lambda u=f$的$H_0^1(\Omega)$解.

正则性:引理2.3.1:设H_1,H_2是Hilbert空间,$T_\lambda(\lambda>0)$是一个$H_1\longrightarrow H_2$的线性连续算子,满足:

(1)存在一个与λ无关的常数C使得对任意$\lambda>0$:$\|T_\lambda\|\leqslant C$

(2)存在H_1中一个稠密子集$\mathscr{D}$,使$\forall x\in\mathscr{D}$,$\lim_{\lambda\to0}T_\lambda x$存在,

则存在一个$T\in B(H_1,H_2)$,使:$\lim_{\lambda\to0}T_\lambda x=Tx\forall x\in H_1$

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{T} & H_2 \\ \cup & T_\lambda & \\ \mathscr{D} & & \end{array}$$

证明:(1)事实上,对任意$y\in H_1$,$\lim_{\lambda\to0}T_\lambda y$存在,这是因为:

$|T_\lambda y-T_{\lambda_1}y\|\leqslant\|T_\lambda y-T_\lambda x\|+\|T_\lambda x-T_{\lambda_1}x\|+\|T_{\lambda_1}x-T_{\lambda_1}y\|$

$\leqslant 2C\|y-x\|+\|T_\lambda x-T_{\lambda_1}x\|$

对任一$\varepsilon>0$,可选取$x\in\mathscr{D}$,使$\|y-x\|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$,对固定x,选取$\lambda_0$ $\because\mathscr{D}$在H_1中稠密.

使$\lambda,\lambda_1\leqslant\lambda_0$时,$\|T_\lambda x-T_{\lambda_1}x\|<\frac{\varepsilon}{2}$

从而$\|T_\lambda y-T_{\lambda_1}y\|<\varepsilon$,这说明$\lim_{\lambda\to0}T_\lambda x$存在.

再定义算子:$T:H_1\in y\longmapsto\lim_{\lambda\to0}T_\lambda y=Ty\in H_2$

这样的T满足要求.

$\nabla_h u$

$\tau_h u=(x_1\cdots x_n+h)$

引理2.3.3:定义$\tau_h u=u(x_1+h,x_2,\cdots,x_n)$,若$u\in H^1(R_+^n)$,记$\nabla_h u=(\tau_h u-u)/h$,则$\|\nabla_h u\|^2\leqslant\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|^2$.

du

证明:若$u\in\boxed{C^\infty(\bar{R}_+^n)\cap H^1(R_+^n)}$,则:

∇_h是$H_1(R_+^n)$到$L^2(R_+^n)$的线性算子.

$\nabla_h u=\frac{1}{h}\int_{x_1}^{x_1+h}\frac{\partial u}{\partial x_1}(s,\quad)ds$

$=\int_0^1\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1+\lambda h,\quad\cdot)d\lambda$

所以:$\int_{R_+^n}|\nabla_h u|^2dx\leqslant\int_0^1d\lambda\int_{R_+^n}|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,\quad\cdot)|^2dx$

即:$\|\nabla_h u\|^2\leqslant\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|^2$

又由于$u\in H^1(R_+^n)$,故存在$u_n\in C^\infty(\bar{R_+^n})\cap H^1(R_+^n)$

使$\|u_n-u\|_1\to0$.

从而:$||\frac{\partial u_m}{\partial x_1}||\to||\frac{\partial u}{\partial x_1}||(n\to\infty)$

$\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right\|\to\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|$

$\|\nabla_h u_n\|\to\|\nabla_h u\|$

$\nabla_h u \to Tu,\ \forall u \in H^1(R_+^n)$

另一方面:$\|\nabla_h(u_n-u)\| \leqslant \frac{2}{h}\|u_n-u\| \to 0(n\to\infty)$

求极限即得所证.

引理2.3.4:若$u\in H^1\left(R_+^n\right)$,则$\nabla_h u \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(L^2\left(R_+^n\right)\right)$

$H^1(R_+^n) \xrightarrow{\nabla_h} L^2(R_+^n)$

$\cup$

$\nabla_h u \to \frac{\partial u}{\partial x_1}$

$C_c^\infty(\bar{R}_+^n)$在$H^1(R_+^n)$中稠密.

证明:∇_h是$H^1\left(R_+^n\right)$到$L^2\left(R_+^n\right)$的线性连续算子,且$\|\nabla_h\|\leqslant 1$.

$\forall u\in C_c^\infty(\bar{R}_+^n)\nabla_h u \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(L^2\left(R_+^n\right)\right)$

而$C_c^\infty(\bar{R}_+^n)$在$H^1\left(R_+^n\right)$中稠密,故由引理2.3.1:

存在$T\in B\left(H^1\left(R_+^n\right), L^2\left(R_+^n\right)\right)$使得:

$\nabla_h u \longrightarrow Tu\ \forall u\in H^1\left(R_+^n\right)$

前面已经证明:$u\in C_c^\infty(\bar{R}_+^n)$时:$Tu=\frac{\partial u}{\partial x_1}$

$u\in C_c^\infty(\bar{R}_+^n)$时 $Tu=\frac{\partial u}{\partial x_1}$

因而对任意$u\in H^1\left(R_+^n\right)$,$Tu=\frac{\partial u}{\partial x_1}$.

引理2.3.5:L是椭圆算子,$u\in H_0^1\left(R_+^n\right)$,则存在与u,h无关的常数c使得:

$|(-L\nabla_h u, \nabla_h u)| \leqslant C\|\nabla_h u\|_1(\|u\|_1+\|Lu\|)$

$\frac{\tau_h u - u}{h} = \frac{u(x_1\cdots x_n+h)-u}{h}$

证明:$u\in H_0^1\left(R_+^n\right)$,$h\neq 0$时,$\nabla_h u\in H_0^1\left(R_+^n\right)$,

$L\nabla_h u = \nabla_h Lu + R_h u$

$R_h u = -\left(\sum_{i,j=1}^n \nabla_h a_{ij}\tau_k u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^m \nabla_h b_i \tau_h u_{x_i} + \nabla_h c\tau_h u\right)$

$|(-L\nabla_h u, \nabla_h u)| \leqslant |(\nabla_h Lu, \nabla_h u)| + |(R_h u, \nabla_h u)|$

$\leqslant \|\nabla_h Lu\|_{-1}\|\nabla_h u\|_1 + C'\left[\left(\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|\|\nabla_h u\| + \|u\|\|\nabla_h u\| + \sum_{i,j=1}^n \left\|\tau_k u_{x_ix_j}\right\|_{-1}\|\nabla_h u\|_1\right]\right.$

$\leqslant C''\|\nabla_h u\|_1\left(\|u\|_1 + \boxed{\|\nabla_h Lu\|_{-1}} + \boxed{\sum_{i,j=1}^n \left\|\tau_h u_{x_ix_j}\right\|_{-1}}\right)$

因为:$\left\|\tau_h u_{x_i,x_j}\right\|_{-1} = \sup_{\varphi\in C_c^\infty\left(R_+^n\right)} \frac{\left|\left(\tau_h u_{x_ix_j},\varphi\right)\right|}{\|\varphi\|_1}$

$\frac{|(\tau_h Lu - Lu, \varphi)|}{\|\varphi\|_1} \leq C\|Lu\|$

$= \sup_{\varphi\in C_c^\infty\left(R_+^n\right)} \frac{\left|\left(u_{x_j},\partial_{x_i}\tau_{-h}\varphi\right)\right|}{\|\varphi\|_1} \leq \|u\|_1$

$\frac{\tau_h Lu - Lu}{h}$

同理可得:$\|\nabla_h Lu\|_{-1}\leqslant C\|Lu\|$

定理2.3.2:设L如上给定,$\cancel{u\in H_0^1}\left(R_+^n\right)$,$Lu\in L^2\left(R_+^n\right)$,则$u\in H^2\left(R_+^n\right)\cap H_0^1\left(R_+^n\right)$且:

$||u||_2 \leq C(||u||+\|Lu\|)$

证明:证明分三步,(1)证明$\|\nabla_h u\|_1$一致有界.

(2)证明$\frac{\partial u}{\partial x_i}\in H^1\left(R_+^n\right)(i=1,\ldots,n-1)$

(3)证明$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\in H\left(R_+^n\right)$

证明:(1)证明:因为$\nabla_h u\in H_0^1\left(R_+^n\right)$.

$C_1\|\nabla_h u\|_1^2 \leqslant C_2\|\nabla_h u\|^2 + |(-L\nabla_h u, \nabla_h u)|$

于是有:$C_1\|\nabla_h u\|_1^2 \leqslant C_2\|u\|_1^2 + \varepsilon\|\nabla_h u\|_1^2 + \frac{C_3}{\varepsilon}(\|u\|_1^2+\|Lu\|^2)$

取$\varepsilon=\frac{C_1}{2}$,

即得:$\|\nabla_h u\|_1^2 \leqslant C_4(\|u\|_1^2+\|Lu\|^2)$

故$\|\nabla_h u\|_1$一致有界.

$H_0^1(R_+^n)$

任意序列 $\{f_k\}$ 有弱收敛子列. f^*

$\{f_k\}$ $(f_k, \varphi) \to (f_0, \varphi)$

(2)证明:因为$H^1\left(R_+^n\right)$单位球是弱紧的,故$\{\nabla_h u\}$存在子序列,仍记为$\{\nabla_h u\}$,
在$H^1\left(R_+^n\right)$中弱收敛于g,且$\|g\|_1^2 \leqslant C_4\left(\|u\|_1^2+\|Lu\|^2\right)$.
由于对固定的$\varphi \in L^2\left(R_+^n\right)$,$v \in H^1\left(R_+^n\right)$时有:
$|(v, \varphi)| \leqslant\|v\|\|\varphi\| \leqslant C\|v\|_1$

$\{\nabla_h u\}$ 在 $H^1(R_+^n)$ 中的

所以(v, φ)可视为$H^1\left(R_+^n\right)$上的连续泛函,且可表示为:
$(v, \varphi)_{L^2\left(R_+^n\right)}=(v, \psi)_{H^1\left(R_+^n\right)}\left(\forall v \in H^1\left(R_+^n\right)\right)$.
因此:当$\nabla_h u$在$H^1\left(R_+^n\right)$中弱收敛于g时,对任意ψ成立:

收敛于 g.

$(\nabla_h u, \psi)_{H^1\left(R_+^n\right)} \longrightarrow(g, \psi)_{H^1\left(R_+^n\right)}$
这也说明对任意$\varphi \in L^2\left(R_+^n\right)$,成立:
$(\nabla_h u, \varphi)_{L^2\left(R_+^n\right)} \longrightarrow(g, \phi)_{L^2\left(R_+^n\right)}$

$\nabla_h u$ 在 $L^2(R_+^n)$ 中弱收敛于 g.

即$\nabla_h u$在$L^2\left(R_+^n\right)$中弱收敛于g.
又有引理2.3.4:$\nabla_h u$在中强收敛于$\frac{\partial u}{\partial x_1}$,从而
$\frac{\partial u}{\partial x_1}=g \in H^1\left(R_+^n\right)$.
易知对i=1,...,n-1成立. ?
(3)因为$\sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqslant a|\xi|^2$,
取$\xi_i=0 \quad(i=1, \cdots, n-1)$,$\xi_n=1$,
得$a_{nn}(x) \geqslant \alpha>0$
又因为:$a_{nn} u_{x_n x_n}=f-\sum_{\substack{i+j<2n \\ i, j \leq n}} a_{ij} u_{x_i x_j}-\sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}-cu \in H\left(R_+^n\right)$
故$u_{x_n x_n} \in H\left(R_+^n\right)$
综合(2)可得$u \in H^2\left(R_+^n\right)$.
综合$\|g\|_1^2 \leqslant C_4\left(\|u\|_1^2+\|Lu\|^2\right)$,$\frac{\partial u}{\partial x_1}=g \in H^1\left(R_+^n\right)$,$a_{nn} u_{x_n x_n}=f-\sum_{\substack{i+j<2n \\ i, j \leq n}} a_{ij} u_{x_i x_j}-\sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}-cu \in H\left(R_+^n\right)$可得.
$\|u\|_2 \leqslant C(\|u\|+\|Lu\|)$
定理2.3.3:若L是上面假定的椭圆算子,$u \in H_0^1\left(R_+^n\right)$,$Lu \in H^k\left(R_+^n\right)$,k为非负整数,则$u \in H^{k+2}\left(R_+^n\right)$且有:
$\|u\|_{k+2} \leqslant C_k\left(\|u\|+\|Lu\|_k\right), \quad k \geqslant 0$
证明:k=0时即为定理2.3.2:设$k \leqslant s-1$时定理2.3.3成立.
现设$Lu \in H^s\left(R_+^n\right)$,由于$k \leqslant s-1$时$\|u\|_{k+2} \leqslant C_k\left(\|u\|+\|Lu\|_k\right)$成立.
所以$u \in H_0^1\left(R_+^n\right) \cap H^{s+1}\left(R_+^n\right) \subset H_0^1\left(R_+^n\right) \cap H^2\left(R_+^n\right)$
由之前定理:$\frac{\partial u}{\partial x_l} \in H_0^1(R_+^n)$,$l=1, \cdots, n-1$
此外:$L \frac{\partial u}{\partial x_l}=\frac{\partial}{\partial x_l}(Lu)-\left(\sum_{i, j=1}^n\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} u_{x_i x_j}\right)+\sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_l} u_{x_i}+\frac{\partial c_u}{\partial x_l} u\right) \in H^{s-1}(\Omega)$
故由归纳法:$\frac{\partial u}{\partial x_l} \in H^{s+1}\left(R_+^n\right), \quad l=1, \cdots, n-1$
且:$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_l}\right\|_{s+1} \leqslant C_{s-1}^{\prime}(\|u\|+\|Lu\|_s+\|u\|_{s+1})$

$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_l}\right\|_{s+1} \leqslant C_{s-1}\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x_l}\right\|+\left\|L \frac{\partial u}{\partial x_l}\right\|_{s-1}\right)$ 再将 $L \frac{\partial u}{\partial x_l}$ 代入.

$\Rightarrow\left\|\frac{\partial u}{\partial x_l}\right\|_{s+1} \leqslant C_{s-1}^{\prime}\left(\|u\|+\|Lu\|_s+\|u\|_{s+1}\right)$

又得: $\|u\|_{s+1} \leqslant C''_{s-1} (\|u\| + \|Lu\|_{s-1})$

$\leqslant C''_{s-1} (\|u\| + \|Lu\|_{s})$

关于l相加,利用归纳法可得:

$\sum_{i=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_l}\right\|_{s+1} \leqslant C\left(\|u\|+\|Lu\|_s\right)$

又根据2.3.2中的证明过程:$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\|_{s+1}$也成立同样估计式.

定理2.3.4:设Ω是R^n中有界区域,其边界光滑,L是$\bar{\Omega}$上具有光滑系数的椭圆算子.若$u \in H_0^1(\Omega)$,$Lu \in H^k(\Omega)(k \geqslant -1)$,则$u \in H^{k+2}(\Omega)$且:

$\|u\|_{k+2} \leqslant C_k\left(\|u\|+\|Lu\|_k\right)$

证明:运用局部化与展平技巧,设$\{U_0, \ldots\ U_N\}$是$\bar{\Omega}$上的有限覆盖.

且φ_σ是$U_\sigma \cap \bar{\Omega}$到半球$B^+$的微分同胚.

设$\{\eta_\sigma\}$是从属于$\{U_\sigma\}$的单位分解.

记$u_\sigma=\eta_\sigma u$,我们将证明:$u_\sigma \in H^{k+2}(\Omega)$,且具有相应的不等式.

$k=-1$时,要证的不等式是平凡的,现设$u \in H_0^1(\Omega)$,$Lu \in H^k(\Omega)$, $k \leqslant s-1 (s \geqslant 0)$上述定理成立.

即:$u \in H^{k+2}(\Omega)$且满足要证不等式.

若$Lu \in H^s(\Omega)$,因为$H^s(\Omega) \subset H^{s-1}(\Omega)$

故有归纳法:$u \in H^{s+1}(\Omega)$且有:

$\|u\|_{s+1} \leqslant Cs\left(\|u\|+\|Lu\|_{s-1}\right)$

直接计算可得:$Lu_\sigma=\eta_\sigma Lu+2\sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial \eta_\sigma}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}+\left(L\eta_\sigma-c\eta_\sigma\right) u$ $\quad (Lu_\sigma) \circ \varphi_\sigma^{-1} = f_\sigma \circ \varphi_\sigma^{-1}$

用f_σ表示右边,则$f_\sigma \in H^s(\Omega)$

记$v_\sigma=u_\sigma \circ \varphi_\sigma^{-1}$,将变换后的算子仍记为L,那么问题可改写为:

$Lv_\sigma=f_\sigma \circ \varphi_\sigma^{-1}$(在$B^+$上). $\quad Lv_\sigma = f_\sigma \circ \varphi_\sigma^{-1}$

v_σ零延拓到R_+^n上仍属于$H_0^1\left(R_+^n\right)$,记为$\hat{v}_\sigma$.

类似得将$f_\sigma \circ \varphi_\sigma^{-1}$零延拓到$R_+^n$上,仍属于$H^s\left(R_+^n\right)$.

记为$\hat{f}_\sigma$,还将算子L保持系数光滑性和椭圆性延拓到$\bar{R}^n$例如:

$\hat{L}=\psi L+(1-\psi)\Delta$其中$\psi \in C_c^\infty\left(\bar{R}_+^n\right)$,且当$x \in \operatorname{supp} \eta_\sigma$时$\psi(x)=1$,$\operatorname{supp} \psi \subset \bar{B}^+$,经过上述延拓有:

$\hat{L}\hat{v}_\sigma=\hat{f}_\sigma$(在$R_+^n$上).

由定理2.3.3:$\hat{v}_\sigma \in H^{s+2}\left(R_+^n\right)$且:

$\|\hat{v}_\sigma\|_{s+2} \leqslant C_\sigma\left(\|\hat{v}_\sigma\|+\left\|\hat{f}_\sigma\right\|_s\right)$

$\leqslant C_\sigma'\left(\|u\|+\|u\|_{s+1}+\|Lu\|_s\right)$

又有:$\|u\|_{s+1} \leqslant Cs\left(\|u\|+\|Lu\|_{s-1}\right)$

带入即得:$\|u\|_{s+2} \leqslant \sum_\sigma\|u_\sigma\|_{s+2} \leqslant C \sum_\sigma\|\hat{v}_\sigma\|_{s+2}$

$\leqslant C'\left(\|u\|+\|Lu\|_s\right)$