Sobolev space: 定义1.3.1:设$\Omega \subset R^n$是一给定区域,对$m \geqslant 0$,$1 \leqslant p \leqslant \infty$定义Sobolev空间 $H^{m,p}(\Omega)$为满足条件$D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ $(|\alpha| \leqslant m)$ 的广义函数u全体构成的集合,并装备以范数: $\|u\|_{H^{m,p}}(\Omega) = \left(\sum_{|a|<m} \|D^a u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p}$

$\|u\|_{H^{m,\infty}}(\Omega) = \max_{|a|<m} \|D^a u\|_{L^\infty(\Omega)}$ 特别当$p=2$时,记$H^{m,2}(\Omega)$为$H^m(\Omega)$这时可引进内积$(u,v)_m = \sum_{|a|<m} (D^a u, D^a v)_{L^2(\Omega)}$ 他们分别时满足内积和范数的几个要求的. 定义1.2.2:使广义函数T取零值的最大开集的余集,称为广义函数的支集,记为suppK.

例1:$\delta$函数的支集是原点0.

例2:将在$\Omega$上几乎处处为0的函数视为广义函数,其支集是空集.

定义1.2.3:若$\mathscr{D}'(\Omega)$中广义函数列$\{T_k\}$对任一$\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ 均成立$\langle T_k, \varphi\rangle \to 0 \quad (k \to \infty)$则称 $T_k$弱收敛于0.若$T_k - T$弱收敛于0,则称$T_k$弱收敛于T,记为$T_k \to T$.

定义1.2.5:设T是$\mathscr{D}'(\Omega)$广义函数,定义T关于$x_k$的偏导数$\frac{\partial T}{\partial x_k}$ 为下式决定的广义函数:

$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ (2.6)

由于从$\varphi_v \to 0\,(C_c^\infty(\Omega))$ 可推出$\frac{\partial \varphi_v}{\partial x_k} \to 0\,(C_c^\infty(\Omega))$

所以(2.6)确实定义了一个$C_c^\infty(\Omega)$上的广义函数. 即$\frac{\partial T}{\partial x_k}$是$\mathscr{D}'(\Omega)$广义函数,称为T关于$x_k$的广义导数或导数. 类似可以定义高阶导数:对于重指标$\alpha$,定义$\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

关于广义导数的两个性质: (1):广义函数任意阶导数成立. (2):广义函数的导数与求导次序无关: 对任意$\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ $\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k}, \quad \varphi \right\rangle$

$= \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} \right\rangle$

$= \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \right\rangle$

$= \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_i}, \varphi \right\rangle$

广义函数的Fourier变换若$f \in \mathscr{S}(R^n)$,则定义$f$的Fourier变换:

$(Ff)(\xi) = \int_{R^\pi} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$其中: $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$. $(Ff)(\xi)$也常记为$\hat{f}(\xi)$.

若$g \in \mathscr{S}(R^n)$,还可定义g的Fourier逆变换为: $(F^{-1}g)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{ix\cdot\xi} g(x)dx$.

我们有如下事实:

(1)若$f \in \mathscr{S}(R^n)$,则$\hat{x_i} f(\xi) = -D_i \hat{f}(\xi)$, $\widehat{D_i} f(\xi) = \xi_i \hat{f}(\xi)$,

这里$D_i = \frac{1}{i}\partial_i$.

(2)若$f, g \in \mathscr{S}(R^n)$,则: $\langle \hat{f}, g\rangle = \langle f, \hat{g}\rangle$由此又可得出关于$L^2(R^n)$内积成立:

$$\int_{R^n} f \hat{\bar{\hat{g}}} \, d\xi = \int_{R^n} \hat{f}^{1} \bar{\hat{g}} \, d\xi = 2\pi \int_{R^n} f \bar{g} \, dx$$

$(f,g)=(2\pi)^{-n}(\hat{f},\hat{g})$ （变一次后作共轭再变一次）

原因是经过两次傅里叶变换后:

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dte^{-j\theta\omega}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\theta+t)\omega}d\omega dt=2\pi x(-\theta)$

$2\pi X(\theta)$

在以后的讨论中,我们一般只要求所讨论的区域$\Omega$有界,且边界$\partial\Omega$为$C^{\infty}$光滑.这里$C^{\infty}$光滑的定义是对任意$x\in\partial\Omega$,存在x的邻域U,使$U\cap\partial\Omega$可用$x_i=\varphi\left(x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n\right)$表示, 其中$1\leqslant i\leqslant n$,且$\varphi$是$C^{\infty}$函数.显然,当区域$\Omega$有界时边界$\partial\Omega$是紧集,我们的假定即等价于在每个 $U_i(1\leqslant i\leqslant N)$中,$\partial\Omega\cap U_i$可以用$C^{\infty}$显函数表示.

定理1.3.1:$H^{m,p}(\Omega)$是Banach空间,$H^{m}(\Omega)$是Hilbert空间.

证明:只需证明$H^{m,p}(\Omega)$是完备的.以m=1为例:

令$\{w_v\}$是$H^{1,p}(\Omega)$中一列柯西列,

则$\{w_v\}$与$\left\{\frac{\partial w_v}{\partial x_j}\right\}$都是$L^p(\Omega)$中的柯西列.

从而有极限w与$w^{(j)}$.

由$w_v\to w\,(L^p(\Omega))$可推得$w_v\to u(\mathscr{D}'(\Omega))$. $\because C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset L^p(\mathbb{R}^n)$

则又有:$\frac{\partial w_v}{\partial x_i}\to\frac{\partial w}{\partial x_i}\quad(\mathscr{D}'(\Omega))$

$\langle\varphi,w_v\rangle=\langle\varphi,w\rangle$

而$\frac{\partial w_v}{\partial x_i}\to w^{(i)}\,(L^p(\Omega))$

故$\frac{\partial w}{\partial x_i}=w^{(i)}$

且有$w\in H^{1,p}(\Omega)$与$w_v\to w\,(H^{1,p}(\Omega))$

$\langle\frac{\partial w_v}{\partial x_i},\varphi\rangle=-\langle w_v,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\rangle$

根据$H^{m,p}(\Omega)$的定义我们有如下性质:

(1)$H^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$

(2)若$m_1\geqslant m_2\geqslant 0$,则$H^{m_1,p}(\Omega)\subset H^{m_2,p}(\Omega)$;

又若$p_1\geqslant p_2\geqslant 1$,则$H^{m,p_1}(\Omega)\subset H^{m,p_2}(\Omega)$($\Omega$为有限区域.)

(3)若$u\in H^{m,p}(\Omega)$,$|\beta|\leqslant m$,则

$D^{\beta}u\in H^{m-|\beta|,p}(\Omega)$

(4)若$\tau:\Omega_x\to\omega_y$是一个$C^{\infty}$变换,其逆变换$\tau^{-1}$也属于$C^{\infty}$,且两个变换的Jacobi行列式在$\bar{\Omega}_x$与$\bar{\omega}y$上都有界,$u\in H^{m,p}\left(\Omega_x\right)$. 则u(x)经变换$\tau$所导出的函数$v(y)=u\left(\tau^{-1}(y)\right)$属于$H^{m,p}\left(\omega_y\right)$.

证明:$v(y)=u\left(\tau^{-1}(y)\right)$

$=u\left(y_1\left(x_1\cdots x_n\right),\cdots y_n\left(x_1\cdots x_n\right)\right)$



$\int\cdots\int_{\omega_y}|v(y_1\cdots y_n)|^p dy_1\cdots dy_n$

$=\int\cdots\int_{\Omega_x}|u(y_1(x_1\cdots x_n),\cdots,y_n(x_1\cdots x_n))|^p J\,dx_1\cdots dx_n$

$\int \ldots \int_{\omega_y} v\left(y_1 \cdots y_n\right) dy_1 \cdot dy_n$
$=\int \cdots \int_{\Omega_X} u\left(y_1\left(x_1 \cdots x_n\right), \cdots, y_n\left(x_1 \cdots x_n\right)\right) \mathrm{J} dx_1 \cdots dx_n$
由于雅可比行列式J有界,所以若u$\in H^{m,p}\left(\Omega_x\right)$,则v$\in H^{m,p}\left(\omega_y\right)$.
定义1.3.2:$H_0^{m,p}(\Omega)$是$C_c^{\infty}(\Omega)$在$H^{m,p}(\Omega)$中的闭包.
这时,$u \in H_0^{m,p}(\Omega)$等价于存在$u_v \in C_c^{\infty}(\Omega)$使得
$u_v \rightarrow u(H^{m,p}(\Omega))$
事实上$H^{m \cdot p}\left(R^n\right)=H_0^{m,p}\left(R^n\right)$
因为若考虑任一$u \in H^{m,p}(R^n)$,存在$\zeta\left(\frac{|x|}{v}\right) u$逼近u.
这里的$\zeta(t)$为$t<1$时等于1而$t>2$时等于0的$C^{\infty}$函数.则$\zeta\left(\frac{|x|}{v}\right) u=u_v \in C_c^{\infty}(R^n) \rightarrow u$（$H^{m,p}(R^n)$）
但$\Omega$有界时$H_0^{m,p}(\Omega)$是$H^{m,p}(\Omega)$的真子空间.
例如设$\Omega=(a, b)$,考虑常数函数u=1,易得矛盾.
定义1.3.3:对正整数m,$1 \leqslant p<\infty$,将$H_0^{m,p}(\Omega)$的对偶空间$(H_0^{m,p}(\Omega))'$视作$\mathscr{D}'(\Omega)$的子空间,称为$H^{-m,p'}(\Omega)$,其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.
说明:由于$C_c^{\infty}(\Omega)$在$H_0^{m,p}(\Omega)$中稠密,所以$(H_0^{m,p}(\Omega))'$可视为$\mathscr{D}'(\Omega)$的子空间.其次$(H_0^m(\Omega))'$中的元素如何表示?
给出内积:$(u, v):=\int_U DuDv+uvdx$.
由在Hilbert空间中的Riesz表示定理:任意一个$(H_0^m(\Omega))'$上的泛函F可用:
$(H_0^m(\Omega))$中函数v,对任意u$\epsilon(H_0^m(\Omega))$函数,以m=1为例子:
F(u)=$\int_U DuDv+uvdx$

另一种定义方法:

在$H^{-m,p'}(\Omega)$中可引进范数$\|u\|_{H^{-m,p'}(\Omega)}=\sup_{v \in H_0^{m,p}(\Omega)} \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|v\|_{H_0^{m,p}(\Omega)}}$.

一般具有实指数的Sobolev空间,设s是一个实数,记$H^s\left(R^n\right)$是满足:
$\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \hat{u}(\xi) \in L^2\left(R^n\right)$的所有广义函数$u \in \mathscr{S}'\left(R^n\right)$ 所组成的空间,装备着内积
$(u, v)_s=\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)^s \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi$.
$H^s\left(R^n\right)$中范数为:
$\int_{R^n}\left(\left(1+|t|^2\right)^s\right)|\hat{u}(t)|^2 dt$

定理1.3.6:s为整数时,上述定义中引进的Sobolev空间与定义1.3.2引进的Sobolev空间是一致的.
证明:本定理以$H^s\left(R^n\right)$表示上述定义引进的Sobolev空间,以$H^{s,2}\left(R^n\right)$表示定义1.3.2引入的Sobolev空间.
$s=0$时,两者均为$L^2\left(R^n\right)$.

$$\|D^\alpha u\|^2_{L^2(R^n)} = \frac{1}{(2\pi)^n}\|\widehat{D^\alpha u}\|^2_{L^2(R^n)}$$

当s为正整数时:$\|u\|_{H^{s,2}}(R^n)$

$=(\sum_{|a|\leq s}\|D^a u\|^2_{L^2(R^n)})^{1/2}$

$=\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{|a|\leq s}\int_{R^n}\left|\xi^a\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}$

$$\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \hat{u}(\xi)$$

于是由不等式:$c_1\left(1+|\xi|^2\right)^s \leq \sum_{|a|\leq s}|\xi|^{2a} \leq c_2\left(1+|\xi|^2\right)^s$

即得$\|u\|_s$与$\|u\|_{H^{s,2}}(R^n)$等价.

当s为负整数时,由于:$H_0^{m,2}(R^n)=H^{m,2}(R^n)$对任意正整数m成立

记$m=-s$,有:$H^{s,2}(R^n)=(H^{m,2}(R^n))'$

利用前面已证明的事实:$H^{m,2}(R^n)=H^m(R^n)$

我们只需证明$H^s(R^n)$与$H^{-s}(R^n)$对偶.

(1)考虑: $\langle g,h\rangle=\int gh\,dx=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\hat{g}\hat{h}dt$

$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\left(1+|t|^2\right)^{\frac{s}{2}}\hat{g}\left(1+|t|^2\right)^{-\frac{s}{2}}\hat{h}dt$

当$g\in H^k$,考虑上述积分式子可知若$h\in H^{-k}$

则$\left(1+|t|^2\right)^{-\frac{k}{2}}\hat{h}\ L^2(R^n)$

知$H^{-k}$与$H^k$互为共轭.

(2)考虑映射$\varphi$:$L_k^2\to L^2: g\longmapsto\left(1+|t|^2\right)^{\frac{k}{2}}g$.

则$\varphi$的共轭映射是从$L^2$映到$L_k^2$的共轭空间的($L^2$映到$L_{-k}^2$)

$\varphi: L^2 \to L^2_{-k}$

而$H^k$与$L_k^2$是同构.

$g \mapsto (1+|t|^2)^{k/2} g$

则可证得$H^{-k}$与$H^k$互为共轭.

(3)书上证法:若$u\in\left(H^s\left(R_x^n\right)\right)'$

则对一切$\varphi\in H^s\left(R_x^n\right)$有$|\langle u,\varphi\rangle|\leqslant C|\varphi|_{H^s}$

现对任一$h(\xi)\in\mathscr{S}(R^n)$

令$\varphi=F^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2\right)^{-s/2}h(\xi)\right]$

$\forall u\in(H^s)'$, $u\in H^{-s}$

$\left|\left\langle\hat{u}(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{-s/2},h(\xi)\right\rangle\right)$

$=|\langle\hat{u},\hat{\varphi}\rangle|=(2\pi)^n|\langle u,\varphi\rangle|$

$\leqslant C\|\varphi\|_{H^s}=C\|h\|_{L^2}$

$(H^s)' \subseteq H^{-s}$

由$\mathscr{S}(R^n)$在$L^2(R^n)$中的稠密性可知:

$\hat{u}(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{-s/2}\in L^2\left(R_\xi^n\right)$

而 $H^{-s} \subseteq (H^s)'$ 由内积推得.

此即$u\in H^{-s}\left(R_\xi^n\right)$,得证.

(3)在考虑椭圆型偏微分方程时:考虑求二阶导:

当$u\in H^1$时

$\int_{R^n}\left(1+|t|^2\right)^{-1}\left|t^2\hat{u}(t)\right|^2dt$

$=\int_{R^n}\frac{|t|^4}{1+|t|^2}|\hat{u}(t)|^2dt$

$\leqslant\int_{R^n}\left(1+|t|^2\right)|\hat{u}(t)|^2dt$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial \hat{u}_v}{\partial x_n}(\xi',x_n)\,\overline{\hat{u}_v(\xi',x_n)}\,d\xi' = \hat{u}_v(\xi',x_n)\overline{\hat{u}_v(\xi',x_n)}\Big|_0 - \int_0^{+\infty} \hat{u}_v(\xi',x_n)\,\overline{\frac{\partial \hat{u}_v(\xi',x_n)}{\partial x_n}}\,d\xi'.$$

得到$u \in H^{-1}$

同理有若$u \in H^{m-s}\left(R^n\right)$则:

$\frac{\partial^m u}{\partial x^m} \in H^{-s}$. 定理1.4.3:设$\gamma$是$\mathcal{C}^\infty\left(\bar{R}_+^n\right)$函数$\varphi\left(x_1,\cdots,x_n\right)$到边界 $x_n=0$上的边界值的映射

则它可连续地扩张到整个$H^1\left(R_+^n\right)$上,且$\gamma\left(H^1\left(R_+^n\right)\right) \subset H^{1/2}\left(R^{n-1}\right)$.

证明:设$u \in H^1\left(R_+^n\right)$,则存在$\mathcal{C}^\infty\left(\bar{R}_+^n\right)$中具有紧支集的函数列$\{u_v\}$使

$u_v \rightarrow u\left(H^1\left(R_+^n\right)\right)$.

以$\hat{u}_v\left(\xi',x_n\right)$记$u_v(x)$关于$\left(x_1,\cdots,x_{n-1}\right)$的傅里叶变换.

$\left|\hat{u}_v\left(\xi',0\right)\right|^2=-2\,\mathrm{Re}\int_0^{+\infty} \frac{\partial \hat{u}_v}{\partial x_n}\left(\xi',x_n\right) \widehat{u}_v\left(\xi',x_n\right) dx_n$

两边乘以$\left(1+\left|\xi'\right|^2\right)^{1/2}$并关于$\xi'$在$R^{n-1}$上积分.

$\|\gamma u_v\|_{H^{1/2}}^2\left(R_{x'}^{n-1}\right) \leq 2\mathrm{Re}\left(\int_{R_{\xi'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial \hat{u}_v}{\partial x_n}\left(\xi',x_n\right)\right|^2 dx_n d\xi'\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{R_{\xi'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left(1+\left|\xi'\right|^2\right)\left|\hat{u}_v\left(\xi',x_n\right)\right|^2 dx_n\right.$

$\leq\int_{R_{x'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial u_v}{\partial x_n}\left(x',x_n\right)\right|^2 dx_n dx'+\int_{R_{x'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|u_v\left(x',x_n\right)\right|^2 dx_n dx'+\sum_{i=1}^{n-1}\int_{R_{x'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial u_v'}{\partial x_i}\left(x',x_n\right)\right|^2$

$=\|u_v\|_{H^1\left(R_{x'}^n\right)}^2$

由于$u_v \rightarrow u\left(H^1\left(R_+^n\right)\right)$可知$\gamma u_v$在$H^{1/2}\left(R^{n-1}\right)$中有极限$\gamma v$,并称之为u在边界$x_n=0$上的迹.

定理1.4.4:(一般的迹定理)设$\Omega$是具有光滑边界的有界区域,$s>\frac{1}{2}+k$

$u \in H^s(\Omega)$,则可定义u在$\partial\Omega$上的迹$\gamma_0 u,\gamma_1 u,\cdots,\gamma_k u$,

其中$\gamma_i(0 \leqslant j \leqslant k)$是$H^s(\Omega)$到$H^{s-1/2-j}(\partial\Omega)$的线性连续映照, 且对于$C^\infty\left(\bar{R}_+^n\right)$函数u,$\gamma_i u$就是$\frac{\partial^i u}{\partial v^i}$在边界上的取值,这里$\frac{\partial}{\partial v}$是对$\Omega$的外法向求导.

定理1.4.7:(广义函数的Green公式)设$u \in H^1(\Omega)$,$\Omega$是上述区域,则

$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} dx=\int_{\partial\Omega} u\cos\left(n,x_i\right) ds$

又当$u \in H^2(\Omega)$且$a_{ij}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$时:

$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) dx=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial v} ds$

其中$\frac{\partial}{\partial v}=\sum_j\left(\sum_i a_{ij}\cos\left(n,x_i\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$

椭圆型偏微分方程:

在$\boldsymbol{\Omega}$上讨论如下椭圆型偏微分方程边值问题:

$Lu=\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=$f

$u|\partial\Omega=0$

$a_{ij},b_i,c$为$C^\infty(\bar{\Omega})$实函数,且满足$a_{ij}=a_{ji}$

以及椭圆型条件:$\sum_{i=1}^\infty a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha\sum_{i=1}^n \xi_i^2$

在偏微分方程经典理论中,我们需在$\boldsymbol{C}^2(\Omega) \cap \boldsymbol{C}^{\mathbf{0}}(\bar{\Omega})$中寻找解.

引进广义函数空间后我们可以把要求降低,那么到底在什么广义函数空间中

研究合适呢？

在数学物理方程课程中我们需要研究薄膜平衡问题,将问题转发为求:

$J[u]=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}\left(u_x^2+u_y^2\right)-uf\right]dxdy$的最小值.

为推广解的概念,我们可以把使上述泛函取到最小值的元素视为原始物理问题的解,从其表达式来看,只要u及其导数平方可积,他就有意义.

又有u在边界上取零值的要求,故应当在$H_0^1(\Omega)$中考虑问题的解.

这个例子说明考虑Dirichlet边值问题时在$H^1(\Omega)$中考虑问题合适,问题转化为当$f\in H^{-1}(\Omega)$时寻找$H_0^1(\Omega)$函数u使得:

按广义函数意义满足Lu=f.

边界条件还可以改成非齐次的,如:$u|\partial_\Omega=g$

若在边界定义的函数g可延拓成$H^1(\Omega)$函数,我们仍然用g记它.则非齐次边值问题化为:

$$\begin{cases} L\bar{u}=f-Lg \\ \bar{u}|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

由于$H^1(\Omega)$函数在边界上的迹是$H^{1/2}$函数,为使$\partial\Omega$上的函数g延拓成一个$H^1(\Omega)$函数.

g必须是$H^{1/2}(\partial\Omega)$函数.

若方程讨论的是Neumann问题,边界条件应该改成$\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}=0$ 这里:$\frac{\partial}{\partial\nu}=\sum_j\left(\sum_i a_{ij}\cos\left(n,x_i\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$

若仅在$H^1(\Omega)$中讨论,则$\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}=0$无确切意义.

利用Green公式对问题进行变化:

若$u\in H^2(\Omega)$,$v\in H^1(\Omega)$.利用green公式可得:

$(-Lu,v)_{L^2(\Omega)}=a(u,v)-\left(\frac{\partial u}{\partial\nu},v\right)_{L^2(\partial_\Omega)}$

其中a(u,v)是个u,v的双线性形式.

则Neumann问题化为:$a(u,v)=-(f,v)_{L^2(\Omega)}$.

推知:若$u\in H^2(\Omega)$对每一个$v\in H^1(\Omega)$,满足$a(u,v)=-(f,v)_{L^2(\Omega)}$.

则可推得满足Neumann问题.又注意到这个式子对于$u\in H^1(\Omega)$也是有意义的.显然,$u\in H^2(\Omega)$时这样定义的Neumann问题解在边界$\partial\Omega$上导数$\partial\nu$按广义函数迹的意义满足边界条件.

Garding不等式:

定理2.2.1:设$\Omega,L$如前所定义,则存在正常数$C_1,C_2$,使对一切$C_c^\infty(\Omega)$函数u成立:

$\mathrm{Re}(-Lu,u)_{L^2(\Omega)}\geqslant C_1\|u\|_1^2-C_2\|u\|^2$

证明:利用Green公式:

$$\int_\Omega -\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u\right)\bar{v}\,dx$$

$$=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{v}-c(x)u\bar{v}\,dx$$

$$a(u,v)=\int \sum^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^n\left(-b_i+\sum\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{v}-cu\bar{v}]\,dx$$

$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1} \int \partial x_i \partial x_j \quad \sum_{i=1} \quad \sum_{j=1} \partial x_j$

利用Green公式即可.

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} \bar{v}\, dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cos(n, x_i) \right) \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

$(-Lu, u)_{L^2(Q)} = a(u,u) - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, u\right)_{L^2(\Omega)}$

$=a(u,u)$

根据双线性形式:a(u,u)= $a(u,u) = \int_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} - b_i\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{u} - c|u|^2\right]dx$

$\geq \int_{\Omega}\left[\alpha \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} - b_i\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{u} - c|u|^2\right]dx$

$ge\alpha \|\operatorname{grad} u\|^2 - C'\|\operatorname{grad} u\|\|u\| - C''\|u\|^2$

又利用不等式:$2ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon}b^2$.

$2\|\operatorname{grad} u\|\|u\| \leqslant \frac{\alpha}{2C'}\|\operatorname{grad} u\|^2 + \frac{2C'}{\alpha}\|u\|^2$ 从而:$\operatorname{Re}(-Lu,u)_{L^2(\Omega)} = a(u,u) \geqslant \frac{\alpha}{2}\|g\operatorname{rad} u\|^2 - \left(\frac{2\left(C'\right)^2}{a} + C''\right)\|u\|^2$

定理2.2.2:对于椭圆算子L,存在常数C与$\Lambda$,使当$\operatorname{Re}\lambda > \Lambda$时:

对一切$C_c^{\infty}(\Omega)$函数u成立:

$\|-Lu + \lambda u\|_{-1} \geqslant C\|u\|_1$

证明:由定理2.2.1:$\operatorname{Re}(-Lu,u)_{L^2(\Omega)} \geqslant C_1\|u\|_1^2 - C_2\|u\|^2$

取$\Lambda = C_2$,在$\operatorname{Re}\lambda > \Lambda$时:

$\operatorname{Re}(-Lu + \lambda u, u)_{L^2(\Omega)} \geqslant C_1\|u\|_1^2$

由Sobolev空间性质:

$\left|(-Lu + \lambda u, u)_{L^2(\Omega)}\right| \leqslant \|(L-\lambda)u\|_{-1}\|u\|_1$

即证毕.