$|\alpha|\le m$ $D^\alpha u\in L^p$ $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat u\in L^2$

定理1.3.6:s为整数时,上述定义中引进的Sobolev空间与定义1.3.2引进的Sobolev空间是一致的.

证明:本定理以$H^s(R^n)$表示上述定义引进的Sobolev空间,以$H^{s,2}(R^n)$表示定义1.3.2引入的Sobolev空间.

$H^{m,p}$ $p=2$ H^s

$s=0$时,两者均为$L^2(R^n)$.

当s为正整数时:$\|u\|_{H^{s,2}}(R^n)$

$=\left(\sum_{|a|\le s}\|D^a u\|^2_{L^2(R^n)}\right)^{1/2}$

$=\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{|a|\le s}\int_{R^n}|\xi^a\hat u(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$ $(\hat f,\hat g)=(2\pi)^n(f,g)$ $\widehat{D^\alpha u}=\xi^\alpha\hat u$

于是由不等式:$c_1(1+|\xi|^2)^s\le\sum_{|a|\le s}|\xi|^{2a}\le c_2(1+|\xi|^2)^s$

即得$\|u\|_s$与$\|u\|_{H^{s,2}}(R^n)$等价. $s>0$时, H^s与$H^{s,2}$同构. $H^{-m,2}$

当s为负整数时,由于:$H_0^{m,2}(R^n)=H^{m,2}(R^n)$对任意正整数m成立

记$m=-s$,有:$H^{s,2}(R^n)=(H^{m,2}(R^n))'$

利用前面已证明的事实:$H^{m,2}(R^n)=H^m(R^n)$ $m>0$ $\boxed{H^{m,2}}=\boxed{H^m}$ — $\boxed{H^{-m}}$

s小于0时,我们只需证明$H^s(R^n)$与$H^{-s}(R^n)$对偶.

(1)书上证法:对于s大于0,先定义:$H^{-s}(\mathbf{R}^n)=(H^s(\mathbf{R}^n))'$ $(H^m)'\longleftrightarrow H^{-m}$

记负指数Sobolev空间为$(H^{-s}(\mathbf{R}^n))^*$

$(H^{-s}(\mathbb{R}^n))^*=\left\{f\in S'(\mathbb{R}^n)\,\middle|\,(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat f(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$

设$f\in H^{-s}(\mathbf{R}^n)=(H^s(\mathbb{R}^n))'$,由Riesz表示定理: 存在$\omega\in H^s(\mathbb{R}^n)$使对任意$\phi\in H^s(\mathbf{R}^n)$有: Hilbert $f(x)\le M\|x\|$

$\langle f,\phi\rangle=\langle\phi,\omega\rangle=\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^s\hat\phi(\xi)\hat\omega(\xi)\mathrm{d}\xi$,且$\|f\|_{(H^s)'}=\|\omega\|_{H^s}$

令$v=F^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^s\hat\omega(\xi)\right]$,由于$\omega\in H^s(\mathbb{R}^n)$,

故$(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat\omega(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ $\hat v=(1+|\xi|^2)^s\hat w(\xi)$ $(H^{-s})^*\to(H^s)'$, $v\mapsto f$

则$(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{-s/2}\hat v=(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{s/2}\hat\omega\in L^2(\mathbb{R}^n)$即$v\in(H^{-s}(\mathbb{R}^n))^*$

且有$\langle f,\phi\rangle=\int_{\mathbf{R}^n}\hat\phi(\boldsymbol{\xi})\bar{\hat v}(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=(v,\phi)$

任意$(H^s(R^n))'$对应一个$(H^{-s}(R^n))^*$.

所以有$\|f\|_{(\boldsymbol{H}^s)'}=\|\omega\|_{\boldsymbol{H}^s}=$

$\left(\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat\omega(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right)^{\frac12}$

$=\left(\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{-s}|\hat v(\boldsymbol{\xi})|^2\mathrm{d}\xi\right)^{\frac12}$ 任意$(H^{-s}(R^n))^*$对应一个$(H^s(R^n))'$.

$=\|v\|_{(H^{-s})^*}$

这说明$(H^s(\mathbb{R}^n))'$上任意元素f对应$(H^{-s}(\mathbb{R}^n))^*$上一个元素且两者范数相等.

又容易说明每个$v\in(H^{-s}(\mathbb{R}^n))^*$可生成一个$H^s(\mathbf{R}^n)$上一个线性泛函.

(2) 考虑:L_k^2,定义为:$(1+t^2)^{k/2}g(t)\subset L^2$ 的 g. $(H^s(R^n))'$与$(H^{-s}(R^n))^*$

内积即为L^2内积.考虑L_k^2中Cauchy列u_ν

$(1+t^2)^{k/2}u_\nu\longrightarrow v(L^2(R^n))$ $f:A\to B$ $f^*:B^*\to A^*$ 等距同构.

$L_k^2\longleftrightarrow L_{-k}^2$ 互为共轭 $|f(x)|\le M\|x\|$ ↓ 有界

H^k H^{-k}

令$u=(1+t^2)^{-k/2}\,v$即u $\in L_k^2$.

且:$(1+t^2)^{k/2}\,u_\nu \longrightarrow (1+t^2)^{k/2}\,u$ 即L_k^2是完备的,则L_k^2是个Hilbert空间.

考虑映射φ:$L_k^2 \to L^2 : g \longmapsto (1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}\,g$.

$\int_{R^n}(1+|t|^2)^k(1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}\,g\bar{h}$= $\int_{R^n}(1+|t|^2)^k g\overline{(1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}\,h}$

$\langle \varphi g, h\rangle = \langle g, \varphi^* h\rangle$

则φ的共轭映射是从L^2映到L_k^2的共轭空间的(L^2映到L_{-k}^2)

而H^k与L_k^2是同构.

(考虑Φ :　$H^k \to L_k^2$　　　　$H^k \to L_k^2$

$\hat{h}(\xi)\in H^k$,则$(1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}\,\hat{\hat{h}} \in L^2(R^n)$

$2\pi\ (1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}\,h(-t)\in L^2(R^n)$　　　　$\hat{h} \mapsto h$

$(1+|-t|^2)^{\frac{k}{2}}\,h(-t)\in L^2(R^n)$得到h(t)$\in L_k^2(R^n)$

故以傅里叶变换为映射,此映射为同构映射.)

则可证得H^{-k}与H^k互为共轭.

(3)在考虑椭圆型偏微分方程时:考虑求二阶导:

当$u\in H^1$时

$\int_{R^n}(1+|t|^2)^{-1}\left|t^2\hat{u}(t)\right|^2dt$　$\frac{d^2u}{dx^2}=f$　$\int_{R^n}(1+|t|^2)^{-s}|t^m\hat{u}(t)|^2dt$

$=\int_{R^n}\frac{|t|^4}{1+|t|^2}|\hat{u}(t)|^2dt$

$\leqslant \int_{R^n}(1+|t|^2)\,|\hat{u}(t)|^2dt$ ← H^{-1}　$=\int_{R^n}\frac{|t|^{2m}}{(1+|t|^2)^s}|\hat{u}(t)|^2dt$

得到$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\in H^{-1}$

同理有若$u\in H^{m-s}(R^n)$则:　$\leq \int_{R^n}(1+|t|^2)^{m-s}|\hat{u}(t)|^2dt$

$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\in H^{-s}$.

定理1.4.3:设γ是$\mathcal{C}^\infty(\bar{R}_+^n)$函数$\varphi(x_1,\cdots,x_n)$到边界 $x_n=0$上的边界值的映射,则它可连续地扩张到整个$H^1(R_+^n)$上,且$\gamma(H^1(R_+^n))\subset H^{1/2}(R^{n-1})$.

证明:设$u\in H^1(R_+^n)$,则存在$\mathcal{C}^\infty(\bar{R}_+^n)$中具有紧支集的函数列$\{u_v\}$使

$u_v\to u\,(H^1(R_+^n))$.　→ $\int_{R^n} e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_{n-1}\xi_{n-1})}u(x)dx_1\cdots dx_{n-1}$

以$\hat{u}_v(\xi',x_n)$记$u_v(x)$关于$(x_1,\cdots,x_{n-1})$的傅里叶变换.

$\int_0^{+\infty}\frac{\partial\hat{u}_v}{\partial x_n}(\xi',x_n)\,\hat{u}_v(\xi',x_n)\,dx_n$=-$(\hat{u}_v(\xi',0))^2$-$\int_0^{+\infty}\frac{\partial\hat{u}_n}{\partial x_n}(\xi',x_n)\,\hat{u}_v(\xi',x_n)\,dx_n$ ←

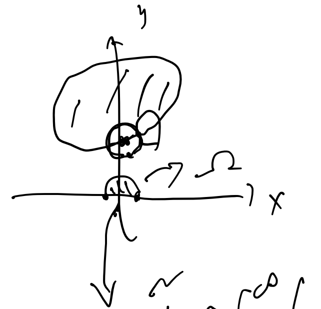
$|\hat{u}_v(\xi',0)|^2=-2\,\mathrm{Re}\int_0^{+\infty}\frac{\partial\hat{u}_v}{\partial x_n}(\xi',x_n)\,\widehat{u}_v(\bar{\xi'},x_n)$ ←

两边乘以$(1+|\xi'|^2)^{1/2}$并关于ξ'在R^{n-1}上积分.　$(|\xi_1'|^2+\cdots+|\xi_{n-1}'|^2)$

$\|\gamma u_v\|_{H^{1/2}}^2(R_{x'}^{n-1})\leq$

2Re$\left(\int_{R_{\xi'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial\hat{u}_v}{\partial x_n}(\xi',x_n)\right|^2dx_nd\xi'\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{R_{\xi'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}(1+|\xi'|^2)\,|\hat{u}_v(\xi',x_n)|^2\,dx_nd\xi'\right)^{\frac{1}{2}}$ ←

$\leq$ C $(\int_{R_{x'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial u_v}{\partial x_n}(x',x_n)\right|^2dx_ndx'\ +\ \int_{R_{x'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}|u_v(x',x_n)|^2\,dx_ndx'\ +$



$\tilde{u}\in C_c^\infty(\Omega)$

$\begin{cases} X = x \\ Y = y-\varphi(x)\end{cases}$

$y=\varphi(x)$

$K\subset\bigcup O_i$, $\{\varphi_i\}$, $\varphi_i\in C_c^\infty(O_i)$

$\sum_{i=1}^k \varphi_i = 1$

$u=\sum_{i=1}^k u\varphi_i$　$u\varphi_i=u_i\in C_c^\infty(O_i)$

迹 作变及延拓.

γu_v 在 $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ Cauchy.

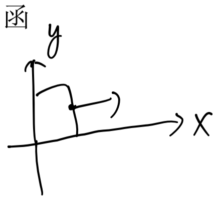
完备

$\sum_{i=1}^{n-1} \int_{R_{x'}^{n-1}} \int_0^{+\infty} \left|\frac{\partial u_v'}{\partial x_i}\left(x', x_n\right)\right|^2 d x_n d x'$)
$= \mathrm{C}\left\|u_v\right\|_{H^1\left(R_{+}^n\right)}^2$
由于$u_v \rightarrow u\left(H^1\left(R_{+}^n\right)\right)$可知$\gamma u_v$在$H^{1/2}\left(R^{n-1}\right)$中是一个柯西列,由其完备性知有极限$\gamma v$,并称之为u在边界$x_n=0$上的迹.
R^n的情形:$u \in C_c^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$时,$\hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{x}_n\right)$表示u关于$\boldsymbol{x}'$的Fourier变换,$\left|\hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}', 0\right)\right|^2= -\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_n}\left|\hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}', x_n\right)\right|^2 \mathrm{~d} x_n$
两边乘以$\left(1+\left|\xi'\right|^2\right)^{m-1}$且对$\boldsymbol{\xi}'$积分:

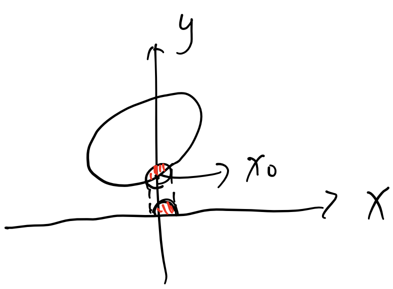
$\boxed{\|\gamma u\|_{H^{m-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq 2\|u\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)}}$

$\left\|u\left(\boldsymbol{x}', 0\right)\right\|_{\boldsymbol{H}^{m-1/2}\left(\mathbf{R}^{n-1}\right)}$
$=\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\left(1+\left|\boldsymbol{\xi}'\right|^2\right)^{m-1/2}\left|\hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}', 0\right)\right|^2 \mathrm{~d} \boldsymbol{\xi}'$
$=-\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\left(1+\left|\boldsymbol{\xi}'\right|^2\right)^{m-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_n}\left|\hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}', x_n\right)\right|^2 \mathrm{~d} \boldsymbol{x}_n \mathrm{~d} \boldsymbol{\xi}'$
$\leqslant 2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{\infty}\left(1+\left|\boldsymbol{\xi}'\right|^2\right)^{m/2}\left|\hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{x}_n\right)\right|\left(1+\left|\boldsymbol{\xi}'\right|^2\right)^{m/2-1/2}\left|\frac{\partial \hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{x}_n\right)}{\partial x_n}\right| \mathrm{d} x_n \mathrm{~d} \boldsymbol{\xi}'$
$\leqslant 2\left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \int_0^{\infty}\left(1+\left|\xi'\right|^2\right)^m\left|\hat{u}\left(\xi', x_n\right)\right|^2 \mathrm{~d} x_n \mathrm{~d} \xi'\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{\infty}\left(1+\left|\boldsymbol{\xi}'\right|^2\right)^{m-1}\left|\frac{\partial \hat{u}\left(\boldsymbol{\xi}', x_n\right)}{\partial x_n}\right|^2 \mathrm{~d} x_n \mathrm{~d} \boldsymbol{\xi}'\right)^{1/2}$
$=2\left(\int_0^{\infty}\left\|u\left(\cdot, x_n\right)\right\|_{H^m\left(\mathbf{R}^{n-1}\right)} \mathrm{d} x_n\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\infty}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(\cdot, x_n\right)\right\|_{H^{m-1}\left(\mathbf{R}^{n-1}\right)}^2 \mathrm{~d} \boldsymbol{x}_n\right)^{\frac{1}{2}}$
$\leqslant 2\|u\|_{H^m\left(\mathbf{R}^n\right)}\|u\|_{H^m\left(\mathbf{R}^n\right)}=2\|u\|_{H^m\left(\mathbf{R}^n\right)}^2$
注:对于边界$\partial \Omega$,若它为C^{∞}光滑,则存在开集组$\left\{O_i\right\}$,$1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}$,使$U O_i \supset \partial \Omega$,且在每个$O_i$中可引入$C^{\infty}$变换将$\partial \Omega \cap O_i$展平为$R^{n-1}$中一部分$\omega_i$.于是如果u是定义在$\partial \Omega$上的函数,利用从属于$\left\{O_i\right\}$的单位分解$\left\{\eta_i\right\}$,(在$\partial \Omega$上$\sum \eta_i=1$,$\operatorname{supp} \eta_i \subset O_i$,$\eta_i \in C_c^{\infty}\left(O_i\right)$),可以将u改写为$\sum \eta_i u=\sum u_i$.今若每个$u_i$变换导出的函数$\tilde{u}_i$属于$H^s\left(\omega_i\right)$,就称$u \in H^s(\partial \Omega)$.将$\sum_{i=1}^N\left\|\tilde{u}_i\right\|_{H^s}\left(\omega_i\right)$作为u的$H^s(\partial \Omega)$范数.(这里的展平操作可取如下变换:$x_n=\varphi\left(x_1, \cdots, x_{n-1}\right)$,$\left\{\begin{array}{l}y_i=x_i \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ y_n=x_n-\varphi\left(x_1, \cdots, x_{n-1}\right)\end{array}\right.$,此变换将$U_i \cap \partial \Omega$变换到$y_n=0$上.)
定理1.4.4:(一般的迹定理)设Ω是具有光滑边界的有界区域,$s>\frac{1}{2}+k$
$u \in H^s(\Omega)$,则可定义u在$\partial \Omega$上的迹$\gamma_0 u, \gamma_1 u, \cdots, \gamma_k u$,
其中$\gamma_i(0 \leqslant j \leqslant k)$是$H^s(\Omega)$到$H^{s-1/2-j}(\partial \Omega)$的线性连续映照, 且对于$C^{\infty}\left(\bar{R}_{+}^n\right)$函数u,$\gamma_i u$就是$\frac{\partial^i u}{\partial v^i}$在边界上的取值,这里$\frac{\partial}{\partial v}$是对$\Omega$的外法向求导.

$u_x \cos(\vec{n}, x) + u_y \cos(\vec{n}, y)$

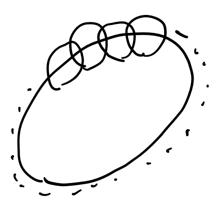


延拓:
定理:我们想证明:任意$H^m(\Omega)$函数必可以延拓成一个$H^m\left(R^n\right)$函数.
证明:首先指出,若对任意开集$\Omega \subset\subset \Omega_1$能将u延拓成$H^m\left(\Omega_1\right)$函数,则u必能延拓成$H^m\left(R^n\right)$函数.事实上,将延拓成的$H^m\left(\Omega_1\right)$函数记为$u_1$,并做函数$\eta \in$



边界 $y = f(x_0)$

作变换: $\left\{\begin{array}{l} X = x \\ Y = y - f(x) \end{array}\right.$



$C_c^\infty(\Omega_1)$,使它在Ω上等于1.那么ηu_1的零延拓就是u在R^n上的延拓.并且显然有$\eta u_1 \in H^m(R^n)$.所以只要能将$H^m(\Omega)$函数保持$H^m(\Omega)$性质向外延拓一点点,就能将u保持H^m性质延拓到R^n上.

固定$x^0 \in \partial U$,首先假设∂U在x^0附件平坦,位于平面$\{x_n = 0\}$.

我们有一个开球B,以x^0为圆心,以r为半径,我们有:

$$\begin{cases} B^+ := B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \bar{U} \\ B^- := B \cap \{x_n \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n - U \end{cases}$$

我们这样定义:

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{if } x \in B^+ \\ -3u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) + 4u\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}\right) & \text{if } x \in B^- \end{cases}$$

这叫做从B^+到B^-的高阶反射.

又有:$u^- := \bar{u}|_{B^-}, u^+ := \bar{u}|_{B^+}$

首先有:$u^-_{x_n} = u^+_{x_n}$ 在 $\{x_n = 0\}$上

(因为:$\frac{\partial u^-}{\partial x_n}(x) = 3\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) - 2\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}\right)$)

又因为在$\{x_n = 0\}$上有:$u^+ = u^-$,所以就又有:

$u^-_{x_i}\big|_{\{x_n=0\}} = u^+_{x_i} | \{x_n = 0\}$,$(i = 1, \ldots, n-1)$

故又有:$D^\alpha u^-|_{\{x_n=0\}} = D^\alpha u^+|_{\{x_n=0\}}$.

我们容易得到以下不等式:$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(B^+)}$

考虑边界不是平坦的,我们可以找到一个C^1映射$\mathbf{\Phi}$以及它的逆:$\mathbf{\Psi}$,其中$\mathbf{\Phi}$把边界拉直了.

将边界拉直的过程:

球与区域的交集:$U \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) | x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$

沿着∂U定义外法向量:$\nu = (\nu^1, \ldots, \nu^n)$

$u \in C^1(\bar{U})$,我们称$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nu \cdot Du$是u关于外法向量得导数.

我们考虑以下变换:$\begin{cases} y_i = x_i =: \Phi^i(x) \\ y_n = x_n - \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1}) =: \Phi^n(x) \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n-1)$

写作$y = \mathbf{\Phi}(x)$.

相应的:$\begin{cases} x_i = y_i =: \Psi^i(y) \\ x_n = y_n + \gamma(y_1, \ldots, y_n) =: \Psi^n(y) \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n-1)$

写作:$x = \Psi(y)$

于是就有:$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Psi}^{-1}$

映射$x \mapsto \Phi(x) = y$将x^0附近的边界区域拉直.

设$y = \Phi(x), x = \Psi(y), u'(y) := u(\Psi(y))$.

在拉直边界后的新区域内找一个球B:我们将u'从B^+延拓到B,得到函数$\bar{u}'$.($\bar{u}'$是C^1的.

我们有不等式:$\|\bar{u}'\|_{W^{1,p}(B)} \leq C\,\|u'\|_{W^{1,p}(B+)}$.

令$W := \Psi(B)$,我们回到坐标x,我们得到u到W中的延拓,且又有不等式:

$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$成立.

又因为∂U是紧的,故有有限个边界上的点$x_i^0 \in \partial U$,开集W_i以及在u在各个W_i上的延拓$\bar{u}_i$.

令$\Gamma \subset U_{i=1}^N W_i$并取$W_0 \subset\subset U$所以$U \subset U_{i=0}^N W_i$.

令$\{\zeta_i\}_{i=0}^N$是它的一个单位分解,我们令:

$\bar{u} := \sum_{i=0}^N \zeta_i \bar{u}_i$其中$\bar{u}_0 = u$.

所以我们就可以将函数往外延拓一点点,则得证.

迹定理:假设U是开集,有界,边界∂U是C^1的,则存在一个有界线性算子:

$T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U)$满足:

(1)若$u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$,$Tu = u|_{\partial U}$.

(2)对于每个$u \in W^{1,p}(U)$,$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$,

其中C仅取决于p和U.

证明:首先假设$u \in C^1(\bar{U})$,固定$x^0 \in \partial U$,首先假设∂U在x^0附件平坦,位于平面$\{x_n = 0\}$.

我们有一个开球B,以x^0为圆心,以r为半径,与开球$\hat{B}$,以x^0为圆心,以r/2为半径.

又之前定理:可以找到一个$\zeta \in C_c^\infty(B)$,$\zeta \equiv 1$在$\hat{B}$上.

Γ是在$\hat{B}$内部分的∂U.

$x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x_n = 0\}$

于是我们有以下不等式:

$\int_\Gamma |u|^p dx' \leq \int_{\{x_n=0\}} \zeta |u|^p dx' = -\int_{B+} (\zeta|u|^p)_{x_n} dx$

$= -\int_{B+} |u|^p \zeta_{x_n} + p|u|^{p-1}(\operatorname{sgn} u) u_{x_n} \zeta dx$

我们使用Young不等式:

$$\int_{B+} \underbrace{p|u|^{p-1}(\operatorname{sgn} u) u_{x_n} \zeta}_{*} dx \qquad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

$$* \leq \frac{\left(|u|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1}} + \frac{|p \zeta u_{x_n}|^p}{p}$$

$$\leq \frac{p-1}{p} |u|^p + p^{p-1} |\zeta u_{x_n}|^p$$

5

$$\text{故总式} \leq C_1 \int_{B+} |u|^p dx + C_2 \int_{B+} |u_{x_n}|^p dx$$

$$\leq C \int |u|^p + |Du|^p dx$$

即为$H^{1,p}(U)$范数.

$\le C\int_{B^+}|u|^p+|Du|^p dx$

若$x^0\in\partial U$,但∂U在x^0附近不是平坦的,可以用之前的方法将边界展平.

运用平坦情况下的不等式估计与变量变换:

$\int_\Gamma|u|^p dS\le C\int_U|u|^p+|Du|^p dx$

然后对边界用有限覆盖定理:在边界上有有限个点$x_i^0\in\partial U$与$\Gamma_i\subset\partial U(i=1,\ldots,N)$使$\partial U=\bigcup_{i=1}^N\Gamma_i$

有不等式:$\|u\|_{L^p(\Gamma_i)}\le C\|u\|_{W^{1,p}(U)}\quad(i=1,\ldots,N)$

因此若我们定义:$Tu:=u|_{\partial U}$,就有:

$\|Tu\|_{L^p(\partial U)}\le C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$,其中的C不取决于u.

迹零定理:设U有界且∂U是C^1的,$u\in W^{1,p}(U)$则$u\in W_0^{1,p}(U)$等价于$Tu=0$在∂U上.

证明:假设在∂U上$Tu=0$.

用单位分解定理与展平技巧:我们可以设$u\in W^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$,u在$\overline{\mathbb{R}}_+^n$中有紧支集,

在$\partial\mathbb{R}_+^n=\mathbb{R}^{n-1}$上$Tu=0$.

且存在$u_m\in C^1\left(\overline{\mathbb{R}}_+^n\right)$,$u_m\to u(W^{1,p}\left(\mathbb{R}_+^n\right))$

$Tu_m=u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}}\to 0(L^p\left(\mathbb{R}^{n-1}\right))$

现在若$x'\in\mathbb{R}^{n-1},x_n\ge 0$,

我们有:$|u_m(x',x_n)|\le|u_m(x',0)|+\int_0^{x_n}|u_{m,x_n}(x',t)|dt$

由于x^p在$x>0$时是凸的,由Jensen不等式:

$$\left(\frac12 a+\frac12 b\right)^p\le\frac12 a^p+\frac12 b^p\Rightarrow(a+b)^p\le 2^{p-1}a^p+2^{p-1}b^p$$

Holder: $$\int_0^{x_n}|\varphi_{x_n}(x',t)|dt\le\left(\int_0^{x_n}1^{\frac{p}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_0^{x_n}|\varphi_{x_n}(x',t)|^p dt\right)^{\frac1p}$$

$$\left(\varphi(x',0)+\int_0^{x_n}|\varphi_{x_n}(x',t)|dt\right)^p$$

$$\le 2^{p-1}|\varphi(x',0)|^p+2^{p-1}\left(\int_0^{x_n}|\varphi_{x_n}(x',t)|dt\right)^p$$

将上述不等式代入

$\leq 2^{p-1}|\varphi(x',0)|^p + 2^{p-1}\ x_n^{p-1}\int_0^{x_n}|\varphi_{x_n}(x',t)|^p dt$

于是有下列不等式.

于是又有:$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u_m(x',x_n)|^p dx' \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u_m(x',0)|^p dx'\ + x_n^{p-1}\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|Du_m(x',t)|^p dx'dt\right)$

令$m\to\infty$有$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u(x',x_n)|^p dx' \leq Cx_n^{p-1}\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|Du|^p dx'dt$

令$\zeta\in C^\infty(\mathbb{R}_+)$是满足在[0,1]上$\zeta\equiv 1$,在$\mathbb{R}-[0,2]$上$\zeta\equiv 0$,$0\leq\zeta\leq 1$.

又有以下定义:$\begin{cases}\zeta_m(x) := \zeta(mx_n) \quad (x\in\mathbb{R}_+^n)\\ w_m := u(x)(1-\zeta_m)\end{cases}$

于是有:$\begin{cases} w_{m,x_n} = u_{x_n}(1-\zeta_m) - mu\zeta' \\ D_{x'}w_m = D_{x'}u(1-\zeta_m)\end{cases}$

因此:$\int_{\mathbb{R}_+^n}|Dw_m - Du|^p dx \leq C\int_{\mathbb{R}_+^n}|\zeta_m|^p|Du|^p dx + Cm^p\int_0^{2/m}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u|^p dx'dt$

$=: A+B$

$m\to\infty$时$A\to 0$

又由:$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u(x',x_n)|^p dx' \leq Cx_n^{p-1}\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|Du|^p dx'dt$

估计B:$B\leq Cm^p\left(\int_0^{2/m}t^{p-1}dt\right)\left(\int_0^{2/m}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|Du|^p dx'dx_n\right)$

$\leq C\int_0^{2/m}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|Du|^p dx'dx_n \to 0$

所以$Dw_m\to Du(L^p(\mathbb{R}_+^n))$

又因为$w_m\to u(w_m\to u)$

所以$w_m\to u(H^{1,p}(\mathbb{R}_+^n))$

将W_m磨光:若$\operatorname{supp} f\subset\Omega$,$f*\alpha_\varepsilon \triangleq f_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$

定理1.4.7:(广义函数的Green公式)设$u\in H^1(\Omega)$,Ω是上述区域,则

$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}dx = \int_{\partial\Omega}u\cos(n,x_i)ds$

又当$u\in H^2(\Omega)$且$a_{ij}(x)\in C^\infty(\bar\Omega)$时:

$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dx = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial v}ds$

其中$\frac{\partial}{\partial v} = \sum_j\left(\sum_i a_{ij}\cos(n,x_i)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$

椭圆型偏微分方程:

在$\mathbf{\Omega}$上讨论如下椭圆型偏微分方程边值问题:

$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$ =f

$u|\partial\Omega = 0$

a_{ij}, b_i, c为$C^\infty(\bar\Omega)$实函数,且满足$a_{ij} = a_{ji}$

以及椭圆型条件:$\sum_{i=1}^\infty a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha\sum_{i=1}^n\xi_i^2$

又有u在边界上取零值的要求,故应当在$H_0^1(\Omega)$中考虑问题的解.

这个例子说明考虑Dirichlet边值问题时在$H^1(\Omega)$中考虑问题合适,问题转化为当$f\in H^{-1}(\Omega)$时寻找$H_0^1(\Omega)$函数u使得:

按广义函数意义满足Lu=f.

边界条件还可以改成非齐次的,如:$u|\partial_{\Omega}=g$

若在边界定义的函数g可延拓成$H^1(\Omega)$函数,我们仍然用g记它.则非齐次边值问题化为:

$$\begin{cases} L\bar{u}=f-Lg \\ \bar{u}|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

由于$H^1(\Omega)$函数在边界上的迹是$H^{1/2}$函数,为使$\partial\Omega$上的函数g延拓成一个$H^1(\Omega)$函数.

g必须是$H^{1/2}(\partial\Omega)$函数.

若方程讨论的是Neumann问题,边界条件应该改成$\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega}=0$ 这里:$\frac{\partial}{\partial \nu}=\sum_j\left(\sum_i a_{ij}\cos\left(n,x_i\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$

若仅在$H^1(\Omega)$中讨论,则$\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega}=0$无确切意义.

利用Green公式对问题进行变化:

若$u\in H^2(\Omega)$,$v\in H^1(\Omega)$.利用green公式可得:

想证明:$-\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+(c(x))\,u\right)\bar{v}dx$

$=\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^n\left(-b_i+\sum_{j=1}^n\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{v}-\mathrm{cu\bar{v}}\,dx-\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\cdot v\right)_{L^2}(\partial_\Omega)$

由于$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{v}+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\bar{v}$

$=\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{v}\right)_{x_j}$

再利用Green公式:当$u\in H^2(\Omega)$且$a_{ij}(x)\in C^\infty(\bar{\Omega})$时:

$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\mathrm{dx}=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu}ds$

其中: $\frac{\partial}{\partial \nu}=\sum_j\left(\sum_i a_{ij}\cos\left(n,x_i\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$

得到$(-Lu,v)_{L^2(\Omega)}=a(u,v)-\left(\frac{\partial u}{\partial \nu},v\right)_{L^2(\partial_\Omega)}$

其中a(u,v)是个u,v的双线性形式.

则Neumann问题化为:$a(u,v)=-(f,v)_{L^2(\Omega)}$.

推知:若$u\in H^2(\Omega)$对每一个$v\in H^1(\Omega)$,满足$a(u,v)=-(f,v)_{L^2(\Omega)}$.

则可推得满足Neumann问题.又注意到这个式子对于$u\in H^1(\Omega)$也是有意义的.显然,$u\in H^2(\Omega)$时这样定义的Neumann问题解在边界$\partial\Omega$上导数$\partial\nu$按广义函数迹的意义满足边界条件.

Garding不等式:

定理2.2.1:设Ω,L如前所定义,则存在正常数C_1,C_2,使对一切$C_c^\infty(\Omega)$函数u成立:

$\mathrm{Re}(-Lu,u)_{L^2(\Omega)}\geqslant C_1\|u\|_1^2-C_2\|u\|^2$

证明:利用Green公式:

$(-Lu,u)_{L^2(\Omega)}=a(u,u)-\left(\frac{\partial u}{\partial \nu},u\right)_{L^2(\Omega)}$

$=a(u,u)$

根据双线性形式:a(u,u)= $a(u,u)=\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar u}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}-b_i\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar u-c|u|^2\right]dx$

$\geq\int_\Omega\left[\alpha\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2+\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}-b_i\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar u-c|u|^2\right]dx$

$\geq\alpha\|\operatorname{grad}u\|^2-C'\|\operatorname{grad}u\|\|u\|-C''\|u\|^2$

又利用不等式:$2ab\leqslant\varepsilon a^2+\frac{1}{\varepsilon}b^2$.

$2\ \|\operatorname{grad}u\|\|u\|\leqslant\frac{\alpha}{2C'}\|\operatorname{grad}u\|^2+\frac{2C'}{\alpha}\|u\|^2$ 从而:$\operatorname{Re}(-Lu,u)_{L^2(\Omega)}=a(u,u)\geqslant$ $\frac{\alpha}{2}\|gradu\|^2-\left(\frac{2\left(C'\right)^2}{a}+C''\right)\|u\|^2$

定理2.2.2:对于椭圆算子L,存在常数C与Λ,使当$\operatorname{Re}\lambda>\Lambda$时:

对一切$C_c^\infty(\Omega)$函数u成立:

$\|-Lu+\lambda u\|_{-1}\geqslant C\|u\|_1$

证明:由定理2.2.1:$\operatorname{Re}(-Lu,u)_{L^2(\Omega)}\geqslant C_1\|u\|_1^2-C_2\|u\|^2$

取$\Lambda=C_2$,在$\operatorname{Re}\lambda>\Lambda$时:

$\operatorname{Re}(-Lu+\lambda u,u)_{L^2(\Omega)}\geqslant C_1\|u\|_1^2$

由Sobolev空间性质:

$\left|(-Lu+\lambda u,u)_{L^2(\Omega)}\right|\leqslant\|(L-\lambda)u\|_{-1}\|u\|_1$

即证毕.

定理2.2.3:对于椭圆算子L,当m >0时,存在常数$C_1^{(m)}$与$C_2^{(m)}$使对一切$C_c^\infty(\Omega)$u成立:

$\operatorname{Re}(-Lu,u)_m\geqslant C_1^{(m)}\|u\|_{m+1}^2-C_2^{(m)}\|u\|^2$(从而对$H_0^{m+1}(\Omega)$也成立.)

又存在正常数$C^{(m)}$与$\Lambda^{(m)}$使对一切$\operatorname{Re}\lambda>\Lambda^{(m)}$成立:

$\|-Lu+\lambda u\|_{m-1}\geqslant C^{(m)}\|u\|_{m+1}$

证明:就m=1的情形证明:

由Garding不等式: $\operatorname{Re}\left[-L\left(\partial_j u\right),\partial_j u\right]\geqslant C_1\left\|\partial_j u\right\|_1^2-C_2\left\|\partial_j u\right\|^2$ (对任意$j=1,\cdots,n$成立.)

其中:$L\left(\partial_j u\right)=\partial_j Lu-\sum_{i,k=1}^n\frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_j}\partial_{ik}^2u-\sum_{i=1}^n\frac{\partial b_i}{\partial x_j}\partial_i u-\frac{\partial c}{\partial x_j}u$

又因为$(\sum_{i,k=1}^n\frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_j}\partial_{ik}^2u+\sum_{i=1}^n\frac{\partial b_i}{\partial x_j}\partial_i u+\frac{\partial c}{\partial x_j}u,\partial_j u)\leq C\|u\|_2\|u\|_1$

故$\operatorname{Re}\left(-\partial_j Lu,\partial_j u\right)\geqslant\operatorname{Re}\left[-L\left(\partial_j u\right),\partial_j u\right]-C\|u\|_2\|u\|_1$

将所有$(-\partial_j Lu,\partial_j u)$关于j作和再加上$(-Lu,u)$

又由$\operatorname{Re}(-Lu,u)_{L^2(\Omega)}\geqslant C_1\|u\|_1^2-C_2\|u\|^2$.

得:$\operatorname{Re}\left(-Lu,u\right)_1\geqslant\sum_{j=1}^n\operatorname{Re}\left(-L\left(\partial_j u\right),\partial_j u\right)-C'\|u\|_2\|u\|_1-C_2\|u\|^2$

$\geqslant C_1\sum_{j=1}^n\left\|\partial_j u\right\|_1^2-C_2\|u\|_1^2-C'\|u\|_2\|u\|_1-C_2\|u\|^2$

$\geqslant\frac{C_1}{2}\|u\|_2^2-C_3\left(\|u\|_1^2+\|u\|^2\right)$

因为:$\|u\|_1^2=\sum_{j=1}^{n}\left(\partial_j u,\partial_j u\right)+(u,u)=\left(\left(1-\Sigma\partial_j^2\right)u,u\right)\leqslant\|u\|_2\|u\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2C_3}\|u\|_2^2+\frac{C_3}{2\varepsilon}\|u\|^2$
证明的第一部分完成.
若取$\Lambda^{(1)}$=$C_2^{(1)}$,那么$\forall u\in C_c^{\infty}(\Omega)$,对任意$\lambda$,$\operatorname{Re}\lambda>\Lambda^{(1)}$有
$\operatorname{Re}\left(-Lu+\lambda u,u\right)_1\geqslant C_1^{(1)}\|u\|_2^2$
左端分部积分:$\operatorname{Re}(-Lu+\lambda u,\left(I-\sum_{j=1}^{n}\partial_j^2\right)u\Big)$
$\leqslant\|(L-\lambda)u\|\|u\|_2$
再带回原不等式可得m=1的情形:
定理2.2.4:对于以前给定的Ω与椭圆的算子L,存在常数Λ,使$\operatorname{Re}\lambda>\Lambda$时,方程$(-L+\lambda)u=f$对任一 $f\in H^{-1}(\Omega)$存在唯一$H_0^1(\Omega)$解.
证明:当Λ充分大时,$\operatorname{Re}\lambda>\Lambda$时, $\|-Lu+\lambda u\|_{-1}\geqslant C\|u\|_1$.对一切$H_0^1(\Omega)$函数u均成立.
于是当$-Lu+\lambda u=0$时,必有u=0,于是可得解的唯一性.
为证明存在性,作椭圆算子的形式共轭算子L^*:
$L^*v=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(a_{ij}v\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_i v\right)+cv$
则L^*与L有共同的二阶项,也满足椭圆型条件.
可适当改变上面的C,Λ,使$\operatorname{Re}\lambda>\Lambda$时:
$\|(-L^*+\lambda)v\|_{-1}\geqslant C\|v\|_1$对一切$v\in C_c^{\infty}(\Omega)$成立.
于是$f\in H^{-1}(\Omega)$时,对$\operatorname{Re}\lambda>\Lambda$时:
$|(f,v)|\leqslant||f||_{-1}||v||_1\leqslant C\left\|(-L^*+\lambda)v\right\|_{-1}$
算子$-L^*+\lambda$将$C_c^{\infty}(\Omega)$映到中的线性子集B中,B可表示为:
$\{w\in H^{-1}(\Omega),w=(-L^*+\lambda)v,v\in C_c^{\infty}(\Omega)\}$
在B上定义一个线性泛函,在B上定义一个线性泛函:$l_f(w)=\left(f,\quad(-L^*+\lambda)^{-1}w\right)=(f,v)$
由$|(f,v)|\leqslant||f||_{-1}||v||_1\leqslant C\left\|(-L^*+\lambda)v\right\|_{-1}$,知$l_f(w)$ 是线性连续泛函.由Hahn-Banach定理,将此泛函扩张到$H^{-1}(\Omega)$全空间.
Hahn-Banach定理中的p(x)该如何找?
先给出几个定义:对于线性空间X中的子集S:
称S是凸的如果:任意$x,y\in S,0<a<1$,有$ax+(1-a)y\in S$
称S是均衡的,若对任意$x\in S,|a|\leqslant 1$必有$ax\in S$
称S是吸收的,若对任意$x\in X$必定存在a>0使$\frac{1}{a}x\in S$
Minkowski泛函:设S为X的吸收凸子集,称X上的泛函:
$p_s(z)=\inf\left\{a|\frac{1}{a}x\in S,a>0\right\}$为S的Minkowski泛函.

一个定理:若S是线性空间X的吸收凸子集,则S的Minkowski泛函满足:

$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y), \forall x, y \in X, p(ax)=ap(x), \forall a \geqslant 0, x \in X$

利用表示定理:可以找到一个元素$u \in \left(H^{-1}(\Omega)\right)' = H_0^1(\Omega)$使$(f, v)=l_f(w)=(u, w)$.

即:$(f, v)=(u,\left(-L^{*}+\lambda\right) v)=(-Lu+\lambda u, v), \quad \forall v \in C_c^{\infty}(\Omega)$.

从而u是$-Lu+\lambda u=f$的$H_0^1(\Omega)$解.