定义1.2.2:使广义函数T取零值的最大开集的余集,称为广义函数的支集,记为suppK.

$\langle f, g \rangle = \int f g \, dx$

例1:δ函数的支集是原点0.

例2:将在Ω上几乎处处为0的函数视为广义函数,其支集是空集.

定义1.2.3:若$\mathscr{D}'(\Omega)$中广义函数列$\{T_k\}$对任一$\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ 均成立$\langle T_k, \varphi \rangle \to 0 \quad (k \to \infty)$则称 T_k弱收敛于0.若$T_k - T$弱收敛于0,则称T_k弱收敛于T,记为$T_k \to T$.

定义1.2.5:设T是$\mathscr{D}'(\Omega)$广义函数,定义T关于x_k的偏导数$\frac{\partial T}{\partial x_k}$ 为下式决定的广义函数:

$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ (2.6)

由于从$\varphi_v \to 0 \, (C_c^\infty(\Omega))$ 可推出$\frac{\partial \varphi_v}{\partial x_k} \to 0 \, (C_c^\infty(\Omega))$

所以(2.6)确实定义了一个$C_c^\infty(\Omega)$上的广义函数. 即$\frac{\partial T}{\partial x_k}$是$\mathscr{D}'(\Omega)$广义函数,称为T关于$x_k$的广义导数或导数. 类似可以定义高阶导数:对于重指标α,定义 $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

关于广义导数的两个性质: (1):广义函数任意阶导数成立. (2):广义函数的导数与求导次序无关: 对任意$\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ $\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k}, \quad \varphi \right\rangle$

$= \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} \right\rangle$

$= \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \right\rangle$

$= \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_i}, \varphi \right\rangle$

广义函数的Fourier变换若$f \in \mathscr{S}(R^n)$,则定义f的Fourier变换:

$(Ff)(\xi) = \int_{R^\pi} e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx$其中: $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$. $(Ff)(\xi)$也常记为$\hat{f}(\xi)$.

若$g \in \mathscr{S}(R^n)$,还可定义g的Fourier逆变换为: $(F^{-1}g)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{ix\cdot\xi} g(x) dx$.

我们有如下事实:

(1)若$f \in \mathscr{S}(R^n)$,则$\hat{x_i f}(\xi) = -D_i \hat{f}(\xi)$, $\widehat{D_i f}(\xi) = \xi_i \hat{f}(\xi)$,

$\int x_i f(x) e^{-ix\xi} dx$

这里$D_i = \frac{1}{i}\partial_i$ (D_j, ∂_j)

$= i \partial_j \hat{f}(\xi)$

(2)若$f, g \in \mathscr{S}(R^n)$,则: $\langle \hat{f}, g \rangle = \langle f, \hat{g} \rangle$由此又可得出关于$L^2(R^n)$内积成立: $(f, g) = (2\pi)^{-n}(\hat{f}, \hat{g})$

$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle f, \hat{\hat{g}} \rangle$

原因是经过两次傅里叶变换后:

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt e^{-j\theta\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\theta+t)\omega} d\omega dt = 2\pi x(-\theta)$

Sobolev space: 定义1.3.1:设$\Omega \subset R^n$是一给定区域,对$m \geqslant 0$,$1 \leqslant p \leqslant \infty$定义Sobolev空间 $H^{m,p}(\Omega)$为满足条件$D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ $(|\alpha| \leqslant m)$ 的广义函

数u全体构成的集合,并装备以范数: $\|u\|_{H^{m,p}}(\Omega) = \left(\sum_{|a|<m} \|D^a u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p}$

$\|u\|_{H^{m,\infty}}(\Omega) = \max_{|a|<m} \|D^a u\|_{L^\infty(\Omega)}$ 特别当$p=2$时,记$H^{m,2}(\Omega)$为$H^m(\Omega)$

这时可引进内积$(u,v)_m = \sum_{|a|<m} (D^a u, D^a v)_{L^2(\Omega)}$ 他们分别时满足内积和范数的几个要求的. 在以后的讨论中,我们一般只要求所讨论的区域Ω有界,且边界$\partial\Omega$为C^∞光滑.这里C^∞光滑的定义是对任意$x \in \partial\Omega$,存在x的邻域U,使$U \cap \partial\Omega$可用$x_i = \varphi(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n)$表示, 其中$1 \leqslant i \leqslant n$,且$\varphi$是$C^\infty$函数.显然,当区域$\Omega$有界时边界$\partial\Omega$是紧集,我们的假定即等价于在每个 $U_i(1 \leqslant i \leqslant N)$中,$\partial\Omega \cap U_i$可以用$C^\infty$显函数表示.

定理1.3.1:$H^{m,p}(\Omega)$是Banach空间,$H^m(\Omega)$是Hilbert空间.

证明:只需证明$H^{m,p}(\Omega)$是完备的.以m=1为例:

令$\{w_v\}$是$H^{1,p}(\Omega)$中一列柯西列,

则$\{w_v\}$与$\left\{\frac{\partial w_v}{\partial x_j}\right\}$都是$L^p(\Omega)$中的柯西列.

从而有极限w与$w^{(j)}$.

$C_c^{\varphi}(\Omega) \subset \varphi(\Omega) \subset L^{p}(\Omega)$

由$w_v \to w\,(L^p(\Omega))$可推得$w_v \to w(\mathscr{D}'(\Omega))$.

则又有:$\frac{\partial w_v}{\partial x_i} \to \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad (\mathscr{D}'(\Omega))$

$\langle W_v - W, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = -\langle \frac{\partial (W_v - W)}{\partial x_i}, \varphi \rangle$

而$\frac{\partial w_v}{\partial x_i} \to w^{(i)}\,(L^p(\Omega))$

故$\frac{\partial w}{\partial x_i} = w^{(i)}$

且有$w \in H^{1,p}(\Omega)$与$w_v \to w\,(H^{1,p}(\Omega))$

$\|W_v - W\| + \sum_i \|\frac{\partial}{\partial x_j}(W_v - W)\|$

根据$H^{m,p}(\Omega)$的定义我们有如下性质:

(1)$H^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$

(2)若$m_1 \geqslant m_2 \geqslant 0$,则$H^{m_1,p}(\Omega) \subset H^{m_2,p}(\Omega)$;

又若$p_1 \geqslant p_2 \geqslant 1$,则$H^{m,p_1}(\Omega) \subset H^{m,p_2}(\Omega)$($\Omega$为有限区域.)

$L^{p_1}(\Omega) \subset L^{p_2}(\Omega)$

(3)若$u \in H^{m,p}(\Omega)$,$|\beta| \leqslant m$,则

$D^\beta u \in H^{m-|\beta|,p}(\Omega)$

(4)若$\tau: \Omega_x \to \omega_y$是一个$C^\infty$变换,其逆变换$\tau^{-1}$也属于$C^\infty$,且两个变换的Jacobi行列式在$\bar{\Omega}_x$与$\bar{\omega}y$上都有界,$u \in H^{m,p}(\Omega_x)$. 则u(x)经变换$\tau$所导出的函数$v(y) = u(\tau^{-1}(y))$属于$H^{m,p}(\omega_y)$.

证明:$v(y) = u(\tau^{-1}(y))$

$= u(y_1(x_1 \cdots x_n), \cdots\cdot y_n(x_1 \cdots x_n))$

$\int \ldots \int_{\omega_y} v(y_1 \cdots y_n)\, dy_1 \cdot dy_n$

$= \int \cdots \int_{\Omega_X} u(y_1(x_1 \cdots x_n), \cdots, y_n(x_1 \cdots x_n))\mathrm{J} dx_1 \cdots dx_n$

由于雅可比行列式J有界,所以若u$\in H^{m,p}(\Omega_x)$,则v$\in H^{m,p}(\omega_y)$.

定义1.3.2:$H_0^{m,p}(\Omega)$是$C_c^\infty(\Omega)$在$H^{m,p}(\Omega)$中的闭包.

这时,$u \in H_0^{m,p}(\Omega)$等价于存在$u_m \in C_c^\infty(\Omega)$使得
$u_m \to u(H^{m,p}(\Omega))$
事实上$H^{m\cdot p}(R^n) = H_0^{m,p}(R^n)$
因为若考虑任一$u \in H^{m,p}(R^n)$,存在$\zeta\left(\frac{|x|}{m}\right)u$逼近u.
这里的$\zeta(t)$为$t < 1$时等于1而$t > 2$时等于0的C^∞函数.则$\zeta\left(\frac{|x|}{m}\right)u = u_m \in C_c^\infty(R^n) \to u$($H^{m,p}(R^n)$)

$u \in H^{m.p}(\Omega)$但$u \notin C_c^\infty(\Omega)$

但Ω有界时$H_0^{m,p}(\Omega)$是$H^{m,p}(\Omega)$的真子空间.
例如设$\Omega = (a,b)$,考虑常数函数u=1,易得矛盾.
定义1.3.3:对正整数m,$1 \leqslant p < \infty$,将$H_0^{m,p}(\Omega)$的对偶空间$(H_0^{m,p}(\Omega))'$视作$\mathscr{D}'(\Omega)$的子空间,称为$H^{-m,p'}(\Omega)$,其中$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
说明:由于$C_c^\infty(\Omega)$在$H_0^{m,p}(\Omega)$中稠密,所以$(H_0^{m,p}(\Omega))'$可视为$\mathscr{D}'(\Omega)$的子空间.其次$(H_0^m(\Omega))'$中的元素如何表示?

$H_0^m(\Omega)$是Hilbert空间.

给出内积:$(u,v) := \int_U DuDv + uvdx$.
由在Hilbert空间中的Riesz表示定理:任意一个$(H_0^m(\Omega))'$上的泛函F可用:
$(H_0^m(\Omega))$中函数v,对任意u$\epsilon(H_0^m(\Omega))$函数,以m=1为例子:

$\exists v \in H_0^m(\Omega)$

F(u)=$\int_U DuDv + uvdx$ $\quad \forall u \in H_0^m(\Omega)$

$(\Omega = R^n)$

在$H^{-m,p'}(\Omega)$中可引进范数$\|u\|_{H^{-m,p'}(\Omega)} = \sup_{v \in H_0^{m,p}(\Omega)} \frac{|\langle u,v\rangle|}{\|v\|H_0^{m,p}(\Omega)}$.

一般具有实指数的Sobolev空间,设s是一个实数,记$H^s(R^n)$是满足:
$(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(R^n)$的所有广义函数$u \in \mathscr{S}'(R^n)$所组成的空间,装备着内积
$(u,v)_s = \int_{R^n}(1+|\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi$.
$H^s(R^n)$中范数为:
$\int_{R^n}((1+|t|^2)^s)|\hat{u}(t)|^2dt$

定理1.3.6:s为整数时,上述定义中引进的Sobolev空间与定义1.3.2引进的Sobolev空间是一致的.
证明:本定理以$H^s(R^n)$表示上述定义引进的Sobolev空间,以$H^{s,2}(R^n)$表示定义1.3.2引入的Sobolev空间.
$s=0$时,两者均为$L^2(R^n)$.

$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$

当s为正整数时:$\|u\|_{H^{s,2}}(R^n)$
=$(\sum_{|a|\le i}\|D^a u\|_{L^2(R^n)}^2)^{1/2}$
=$\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{|a|\le s}\int_{R^n}|\xi^a\hat{u}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}$
于是由不等式:$c_1(1+|\xi|^2)^s \le \sum_{|a|\le s}|\xi|^{2a} \le c_2(1+|\xi|^2)^s$

$\frac{1}{C}(1+|\xi|^2)^s \le 1+|\xi|^2+\cdots+|\xi|^{2s} \le (1+|\xi|^2)^s$

C是展开式中最大系数

$\Rightarrow$ $\|u\|_2$ 与 $\|u\|_{H^{s,2}}$ 等价.

即得$\|u\|_2$与$\|u\|_{H^{s,2}}\left(R^n\right)$等价.
当s为负整数时,由于:$H_0^{m,2}\left(R^n\right)=H^{m,2}\left(R^n\right)$对任意正整数m成立
记$m=-s$,有:$H^{s,2}\left(R^n\right)=\left(H^{m,2}\left(R^n\right)\right)'$
利用前面已证明的事实:$H^{m,2}\left(R^n\right)=H^m\left(R^n\right)$
我们只需证明$H^s\left(R^n\right)$与$H^{-s}\left(R^n\right)$对偶.

先考虑 $n=1$.

(1)考虑: $\langle g,h\rangle=\int gh\,dx=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\hat{g}\hat{h}dt$
$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\left(1+|t|^2\right)^{\frac{s}{2}}\hat{g}\left(1+|t|^2\right)^{-\frac{s}{2}}\hat{h}dt$
当$g\in H^k$,考虑上述积分式子可知若$h\in H^{-k}$
则$\left(1+|t|^2\right)^{-\frac{k}{2}}\hat{h}\in L^2\left(R^n\right)$
知H^{-k}与H^k互为共轭.
(2)考虑映射φ:$H^k\to L^2:g\longmapsto\left(1+|t|^2\right)^{\frac{k}{2}}\hat{g}$.
则φ的共轭映射是从L^2映到H^k的共轭空间的.
考虑到:$g\longmapsto\left((1+|t|)^2\right)^{\frac{k}{2}}\hat{g}$也是$L^2$映到$H^{-k}$的映射.
则可证得H^{-k}与H^k互为共轭.
(3)书上证法:若$u\in\left(H^s\left(R_x^n\right)\right)'$
则对一切$\varphi\in H^s\left(R_x^n\right)$有$|\langle u,\varphi\rangle|\leqslant C|\varphi|_H^s$
现对任一$h(\xi)\in\mathscr{S}\left(R^n\right)$
令$\varphi=F^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2\right)^{-s/2}h(\xi)\right]$
$\left|\left\langle\hat{u}(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{-s/2},h(\xi)\right\rangle\right)$
$=|\langle\hat{u},\hat{\varphi}\rangle|=(2\pi)^*|\langle u,\varphi\rangle|$
$\leqslant C\|\varphi\|_{H^s}=C\|h\|_{L^2}$
由$\mathscr{S}(R^n)$在$L^2(R^n)$中的稠密性可知:
$\hat{u}(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{-s/2}\in L^2\left(R_\xi^n\right)$
此即$u\in H^{-s}\left(R_\xi^n\right)$,得证.
(3)在考虑椭圆型偏微分方程时:考虑求二阶导:
当$u\in H^1$时
$\int_{R^n}\left(1+|t|^2\right)^{-1}\left|t^2\hat{u}(t)\right|^2dt$
$=\int_{R^n}\frac{|t|^4}{1+|t|^2}|\hat{u}(t)|^2dt$
$\leqslant\int_{R^n}\left(1+|t|^2\right)|\hat{u}(t)|^2dt$
得到$u\in H^{-1}$
同理有若$u\in H^{m-s}\left(R^n\right)$则:
$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\in H^{-s}$.

$u\in H^m\left(R^n\right)$

$\frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}\in H^{m-\beta}\left(R^n\right)$