在偏微分方程经典理论中,我们需在$\boldsymbol{C}^2(\Omega)\cap\boldsymbol{C}^{\mathbf{0}}(\bar{\Omega})$中寻找解.
引进广义函数空间后我们可以把要求降低,那么到底在什么广义函数空间中研究合适呢?
在数学物理方程课程中我们需要研究薄膜平衡问题,将问题转化为求:
$J[u]=\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\left(u_x^2+u_y^2\right)-uf\right]dxdy$的最小值.
为推广解的概念,我们可以把使上述泛函取到最小值的元素视为原始物理问题的解,从其表达式来看,只要u及其导数平方可积,他就有意义.
Sobolev space:
定义1.3.1:设$\Omega\subset R^n$是一给定区域,对$m\geqslant 0$,$1\leqslant p\leqslant\infty$定义Sobolev空间$H^{m,p}(\Omega)$为满足条件$D^\alpha u\in L^p(\Omega)$ $(|\alpha|\leqslant m)$ 的广义函数u全体构成的集合,并装备以范数: $\|u\|_{H^{m,p}}(\Omega)=\left(\sum_{|a|<m}\|D^a u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p}$
$\|u\|_{H^{m,\infty}}(\Omega)=\max_{|a|<m}\|D^a u\|_{L^\infty(\Omega)}$ 特别当$p=2$时,记$H^{m,2}(\Omega)$为$H^m(\Omega)$
这时可引进内积$(u,v)_m=\sum_{|a|<m}\left(D^a u,D^a v\right)_{L^2(\Omega)}$ 他们分别时满足内积和范数的几个要求.
多重指标在微分符号D中的意义是:$D^\alpha:=D_1^{\alpha_1}\cdot D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}$其中$D_i^j:=\partial^j/\partial x_i^j$
次方的重指标意义:$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$
其中$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$
定义1.2.2:使广义函数T取零值的最大开集的余集,称为广义函数的支集,记为suppK.
例1:δ函数的支集是原点0.
例2:将在Ω上几乎处处为0的函数视为广义函数,其支集是空集.
定义1.2.3:若$\mathscr{D}'(\Omega)$中广义函数列$\{T_k\}$对任一$\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ 均成立$\langle T_k,\varphi\rangle\to 0\quad(k\to\infty)$则称 T_k弱收敛于0.若T_k-T弱收敛于0,则称T_k弱收敛于T,记为$T_k\to T$.
定义1.2.5:设T是$\mathscr{D}'(\Omega)$广义函数,定义T关于x_k的偏导数$\frac{\partial T}{\partial x_k}$ 为下式决定的广义函数:
$\left\langle\frac{\partial T}{\partial x_k},\varphi\right\rangle=-\left\langle T,\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right\rangle,\quad\forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ (2.6)
即$\frac{\partial T}{\partial x_k}$是$\mathscr{D}'(\Omega)$广义函数,称为T关于$x_k$的广义导数或导数. 类似可以定义高阶导数:对于重指标α,定义 $\langle\partial^\alpha T,\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle T,\partial^\alpha\varphi\rangle\quad\forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$.
关于广义导数的两个性质: (1):广义函数任意阶导数成立. (2):广义函数的导数与求导次序无关: 对任意$\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ $\left\langle\frac{\partial^2 T}{\partial x_i\partial x_k},\quad\varphi\right\rangle$
$=\left\langle T,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial x_i}\right\rangle$
$=\left\langle T,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k}\right\rangle$

$= \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_i}, \varphi \right\rangle$
广义函数的Fourier变换
若$f \in \mathscr{S}(R^n)$,则定义f的Fourier变换:
$(Ff)(\xi) = \int_{R^\pi} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$其中: $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$. $(Ff)(\xi)$也常记为$\hat{f}(\xi)$.
若$g \in \mathscr{S}(R^n)$,还可定义g的Fourier逆变换为: $(F^{-1}g)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} e^{ix\cdot\xi} g(x)dx$.
我们有如下事实:
(1)若$f \in \mathscr{S}(R^n)$,则$\hat{x_i} f(\xi) = -D_i\hat{f}(\xi)$, $\widehat{D_i f}(\xi) = \xi_i\hat{f}(\xi)$,
这里$D_i = \frac{1}{i}\partial_i$.
(2)若$f, g \in \mathscr{S}(R^n)$,则: $\langle \hat{f}, g\rangle = \langle f, \hat{g}\rangle$由此又可得出关于$L^2(R^n)$内积成立:
$(f, g) = (2\pi)^{-n}(\hat{f}, \hat{g})$
原因是经过傅里叶变换后做共轭再做傅里叶变换后:
$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\bar{t})e^{i\omega t}dte^{-i\theta\omega}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{x(t)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\theta-t)\omega}d\omega dt = 2\pi x(\bar{\theta})$
所以$\int_{R^n} f\hat{\bar{\hat{g}}}d\xi = \int_{R^n} \hat{f}\bar{\hat{g}}d\xi = 2\pi\int_{R^n} f\bar{g}dx$
在以后的讨论中,我们一般只要求所讨论的区域Ω有界,且边界$\partial\Omega$为C^∞光滑.这里C^∞光滑的定义是对任意$x \in \partial\Omega$,存在x的邻域U,使$U \cap \partial\Omega$可用
$x_i = \varphi(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n)$表示, 其中$1 \leqslant i \leqslant n$,且$\varphi$是$C^\infty$函数.显然,当区域$\Omega$有界时边界$\partial\Omega$是紧集,我们的假定即等价于在每个 $U_i(1 \leqslant i \leqslant N)$中,$\partial\Omega \cap U_i$可以用$C^\infty$显函数表示.
定理1.3.1:$H^{m,p}(\Omega)$是Banach空间,$H^m(\Omega)$是Hilbert空间.
证明:只需证明$H^{m,p}(\Omega)$是完备的.以m=1为例:
令$\{w_v\}$是$H^{1,p}(\Omega)$中一列柯西列,
则$\{w_v\}$与$\left\{\frac{\partial w_v}{\partial x_j}\right\}$都是$L^p(\Omega)$中的柯西列.
从而有极限w与$w^{(j)}$.
由$w_v \to w\,(L^p(\Omega))$可推得$w_v \to w(\mathscr{D}'(\Omega))$. (因为$C_c^\infty(R^n) \subset \mathscr{S}(R^n) \subset L^p(\Omega)$)
则又有:$\frac{\partial w_v}{\partial x_i} \to \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad (\mathscr{D}'(\Omega))$
而$\frac{\partial w_v}{\partial x_i} \to w^{(i)}\,(L^p(\Omega))$
故$\frac{\partial w}{\partial x_i} = w^{(i)}$
且有$w \in H^{1,p}(\Omega)$与$w_v \to w\,(H^{1,p}(\Omega))$
根据$H^{m,p}(\Omega)$的定义我们有如下性质:
(1)$H^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$
(2)若$m_1 \geqslant m_2 \geqslant 0$,则$H^{m_1,p}(\Omega) \subset H^{m_2,p}(\Omega)$;

又若$p_1 \geqslant p_2 \geqslant 1$,则$H^{m,p_1}(\Omega) \subset H^{m,p_2}(\Omega)$($\Omega$为有限区域.)

(3)若$u \in H^{m,p}(\Omega)$,$|\beta| \leqslant m$,则

$D^\beta u \in H^{m-|\beta|,p}(\Omega)$

(4)若$\tau : \Omega_x \to \omega_y$是一个$C^\infty$变换,其逆变换$\tau^{-1}$也属于$C^\infty$,且两个变换的Jacobi行列式在$\bar{\Omega}_x$与$\bar{\omega} y$上都有界,$u \in H^{m,p}\left(\Omega_x\right)$. 则u(x)经变换$\tau$所导出的函数$v(y) = u\left(\tau^{-1}(y)\right)$属于$H^{m,p}\left(\omega_y\right)$.

证明:$v(y) = u\left(\tau^{-1}(y)\right)$

$= u\left(y_1\left(x_1 \cdots x_n\right), \cdots y_n\left(x_1 \cdots x_n\right)\right)$

$\int \ldots \int_{\omega_y} v\left(y_1 \cdots y_n\right) dy_1 \cdot dy_n$

$=\int \cdots \int_{\Omega_X} u\left(y_1\left(x_1 \cdots x_n\right), \cdots, y_n\left(x_1 \cdots x_n\right)\right) \mathrm{J} dx_1 \cdots dx_n$

由于雅可比行列式J有界,所以若u$\in H^{m,p}\left(\Omega_x\right)$,则v$\in H^{m,p}\left(\omega_y\right)$.

定义1.3.2:$H_0^{m,p}(\Omega)$是$C_c^\infty(\Omega)$在$H^{m,p}(\Omega)$中的闭包.

这时,$u \in H_0^{m,p}(\Omega)$等价于存在$u_v \in C_c^\infty(\Omega)$使得

$u_v \to u(H^{m,p}(\Omega))$

事实上$H^{m \cdot p}\left(R^n\right) = H_0^{m,p}(R^n)$

因为若考虑任一$u \in H^{m,p}(R^n)$,存在$\zeta\left(\frac{|x|}{v}\right) u$逼近u.

这里的$\zeta(t)$为$t < 1$时等于1而$t > 2$时等于0的C^∞函数.则$\zeta\left(\frac{|x|}{v}\right) u = u_v \in C_c^\infty(R^n) \to u$（$H^{m,p}(R^n)$）

但Ω有界时$H_0^{m,p}(\Omega)$是$H^{m,p}(\Omega)$的真子空间.

例如设$\Omega = (a, b)$,考虑常数函数u=1,易得矛盾.

定义1.3.3:对正整数m,$1 \leqslant p < \infty$,将$H_0^{m,p}(\Omega)$的对偶空间$(H_0^{m,p}(\Omega))'$视作$\mathscr{D}'(\Omega)$的子空间,称为$H^{-m,p'}(\Omega)$,其中$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

说明:由于$C_c^\infty(\Omega)$在$H_0^{m,p}(\Omega)$中稠密,所以$(H_0^{m,p}(\Omega))'$可视为$\mathscr{D}'(\Omega)$的子空间.其次$(H_0^m(\Omega))'$中的元素如何表示?

给出内积:$(u, v) := \int_U DuDv + uvdx$.

由在Hilbert空间中的Riesz表示定理:任意一个$(H_0^m(\Omega))'$上的泛函F可用:

$(H_0^m(\Omega))$中函数v,对任意u$\epsilon(H_0^m(\Omega))$函数,以m=1为例子:

F(u)=$\int_U DuDv + uvdx$

在$H^{-m,p'}(\Omega)$中可引进范数$\|u\|_{H^{-m,p'}(\Omega)} = \sup_{v \in H_0^{m,p}(\Omega)} \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|v\| H_0^{m,p}(\Omega)}$.

一般具有实指数的Sobolev空间,设s是一个实数,记$H^s\left(R^n\right)$是满足:

$\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \hat{u}(\xi) \in L^2\left(R^n\right)$的所有广义函数$u \in \mathscr{S}'\left(R^n\right)$所组成的空间($C_c^\infty\left(R^n\right) \subset \mathscr{S}\left(R^n\right) \subset L^p \subset \mathscr{S}'\left(R^n\right)$),装备着内积

$(u, v)_s = \int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)^s \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi$.

$H^s(R^n)$中范数为:

$\int_{R^n}((1+|t|^2)^s)|\hat{u}(t)|^2dt$

定理1.3.5:对每个实数s,$H^s(R^n)$是一个Hilbert空间,且$C_c^\infty(R^n)$在$H^s(R^n)$中稠密.

证明:若$\{u_j\}$是$H^s(R^n)$中的柯西列.则$\left\{(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}_j(\xi)\right\}$是$L^2(R^n)$中的柯西列.由$L^2$空间的完备性可知$\left\{(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}_j(\xi)\right\}$在$L^2$中收敛于$\hat{v}(\xi)$.

再令u为$(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{v}(\xi)$的Fourier逆变换,于是有:

$\hat{u}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{v}(\xi)$

就得到$u_j\to u\left(H^s(R^n)\right)$

为证$C_c^\infty(R^n)$在$H^s(R^n)$中的稠密性,只需证明:$\mathscr{S}(R^n)$在$H^s(R^n)$中稠密.

今若$u\in H^s(R_x^n)$,因为$\mathscr{S}\left(R_\xi^n\right)$在$L^2\left(R_\xi^n\right)$中稠密.

故对给定$\varepsilon>0$,存在$h(\xi)\in\mathscr{S}\left(R_\xi^n\right)$使:

$\left\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)-h(\xi)\right\|_{L^2}<\varepsilon$

由于$(1+|\xi|^2)^{-s/2}h(\xi)$仍然$\subset\mathscr{S}\left(R_\xi^n\right)$

令$\boldsymbol{\varphi}$为$(1+|\xi|^2)^{-s/2}h(\xi)$的Fourier逆变换,它属于$\mathscr{S}(R_x^n)$

从而:$\|u-\varphi\|_s<\varepsilon$

就得到$\mathscr{S}(R^n)$在$H^s(R^n)$中的稠密性.

定理1.3.6:s为整数时,上述定义中引进的Sobolev空间与定义1.3.2引进的Sobolev空间是一致的.

证明:本定理以$H^s(R^n)$表示上述定义引进的Sobolev空间,以$H^{s,2}(R^n)$表示定义1.3.2引入的Sobolev空间.

$s=0$时,两者均为$L^2(R^n)$.

当s为正整数时:$\|u\|_{H^{s,2}}(R^n)$

$=(\sum_{|a|\le s}\|D^a u\|^2_{L^2(R^n)})^{1/2}$

$=\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{|a|\le s}\int_{R^n}\left|\xi^a\hat{u}(\xi)\right|^2d\xi\right)^{1/2}$

于是由不等式:$c_1\left(1+|\xi|^2\right)^s\le\sum_{|a|\le s}|\xi|^{2a}\le c_2\left(1+|\xi|^2\right)^s$

即得$\|u\|_2$与$\|u\|_{H^{s,2}}(R^n)$等价.

当s为负整数时,由于:$H_0^{m,2}(R^n)=H^{m,2}(R^n)$对任意正整数m成立

记$m=-s$,有:$H^{s,2}(R^n)=\left(H^{m,2}(R^n)\right)'$

利用前面已证明的事实:$H^{m,2}(R^n)=H^m(R^n)$

我们只需证明$H^s(R^n)$与$H^{-s}(R^n)$对偶.

(1)考虑: L_k^2,定义为:$\left(1+t^2\right)^{k/2}g(t)\subset L^2$ 的 g.

内积即为L^2内积.考虑L_k^2中Cauchy列u_ν

$(1+t^2)^{k/2}\,u_\nu \longrightarrow v(L^2(R^n))$
令$u=(1+t^2)^{-k/2}\,v$即u $\in L_k^2$.
且:$(1+t^2)^{k/2}\,u_\nu \longrightarrow (1+t^2)^{k/2}\,u$ 即L_k^2是完备的,则L_k^2是个Hilbert空间.
考虑映射φ:$L_k^2 \to L^2 : g \longmapsto (1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}\,g$.
$\int_{R^n}(1+|t|^2)^k(1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}\,g\bar{h} = \int_{R^n}(1+|t|^2)^k g\overline{(1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}\,h}$
$\langle \varphi g, h\rangle = \langle g, \varphi^* h\rangle$
则φ的共轭映射是从L^2映到L_k^2的共轭空间的(L^2映到L_{-k}^2)
而H^k与L_k^2是同构.
(考虑Φ : $H^k \to L_k^2$
$\hat{h}(\xi) \in H^k$,则$(1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}\,\hat{\hat{h}} \in L^2(R^n)$
$2\pi\ (1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}\,h(-t) \in L^2(R^n)$
$(1+|-t|^2)^{\frac{k}{2}}\,h(-t) \in L^2(R^n)$得到h(t)$\in L^2(R^n)$
故以傅里叶变换为映射,此映射为同构映射.)
则可证得H^{-k}与H^k互为共轭.
(2)书上证法:若$u \in (H^s\,(R_x^n))'$
则对一切$\varphi \in H^s\,(R_x^n)$有$|\langle u,\varphi\rangle| \leqslant C|\varphi|_{H^s}$
现对任一$h(\xi) \in \mathscr{S}\,(R^n)$
令$\varphi = F^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{-s/2}\,h(\xi)\right]$
$\left|\left\langle \hat{u}(\xi)\,(1+|\xi|^2)^{-s/2}, h(\xi)\right\rangle\right)$
$= |\langle \hat{u},\hat{\varphi}\rangle| = (2\pi)^n|\langle u,\varphi\rangle|$
$\leqslant C\|\varphi\|_{H^s} = C\|h\|_{L^2}$
由$\mathscr{S}(R^n)$在$L^2(R^n)$中的稠密性可知:
$\hat{u}(\xi)\,(1+|\xi|^2)^{-s/2} \in L^2\left(R_\xi^n\right)$
此即$u \in H^{-s}\left(R_\xi^n\right)$,得证.
(3)在考虑椭圆型偏微分方程时:考虑求二阶导:
当$u \in H^1$时
$\int_{R^n}\left(1+|t|^2\right)^{-1}\left|t^2\hat{u}(t)\right|^2 dt$
$= \int_{R^n}\frac{|t|^4}{1+|t|^2}|\hat{u}(t)|^2 dt$
$\leqslant \int_{R^n}\left(1+|t|^2\right)|\hat{u}(t)|^2 dt$
得到$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in H^{-1}$
同理有若$u \in H^{m-s}\,(R^n)$则:
$\frac{\partial^m u}{\partial x^m} \in H^{-s}$.
定理1.4.3:设γ是$\mathcal{C}^\infty\left(\bar{R}_+^n\right)$函数$\varphi\,(x_1,\cdots,x_n)$到边界 $x_n=0$上的边界值的映

射

则它可连续地扩张到整个$H^1\left(R_+^n\right)$上,且$\gamma\left(H^1\left(R_+^n\right)\right)\subset H^{1/2}\left(R^{n-1}\right)$.

证明:设$u\in H^1\left(R_+^n\right)$,则存在$\mathcal{C}^\infty\left(\bar{R}_+^n\right)$中具有紧支集的函数列$\{u_v\}$使

$u_v\to u\left(H^1\left(R_+^n\right)\right)$.

以$\hat{u}_v\left(\xi',x_n\right)$记$u_v(x)$关于$(x_1,\cdots,x_{n-1})$的傅里叶变换.

$\int_0^{+\infty}\frac{\partial\hat{u}_v}{\partial x_n}\left(\xi',x_n\right)\hat{u}_v\left(\xi',x_n\right)dx_n$=-$(\hat{u}_v\left(\xi',0\right))^2$-$\int_0^{+\infty}\frac{\partial\hat{u}_n}{\partial x_n}\left(\xi',x_n\right)\hat{u}_v\left(\xi',x_n\right)dx_n$

$\left|\hat{u}_v\left(\xi',0\right)\right|^2=-2\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}\frac{\partial\hat{u}_v}{\partial x_n}\left(\xi',x_n\right)\widehat{u}_v\left(\bar{\xi'},x_n\right)$

两边乘以$\left(1+|\xi'|^2\right)^{1/2}$并关于$\xi'$在$R^{n-1}$上积分.

$\|\gamma u_v\|_{H^{1/2}}^2\left(R_{x'}^{n-1}\right)\leq$

$2\mathrm{Re}\left(\int_{R_{\xi'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial\hat{u}_v}{\partial x_n}\left(\xi',x_n\right)\right|^2dx_nd\xi'\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{R_{\xi'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left(1+|\xi'|^2\right)\left|\hat{u}_v\left(\xi',x_n\right)\right|^2dx_nd\xi'\right)^{\frac{1}{2}}$

$\leq$ C $(\int_{R_{x'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial u_v}{\partial x_n}\left(x',x_n\right)\right|^2dx_ndx' + \int_{R_{x'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|u_v\left(x',x_n\right)\right|^2dx_ndx' +$

$\sum_{i=1}^{n-1}\int_{R_{x'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial u_v'}{\partial x_i}\left(x',x_n\right)\right|^2dx_ndx')$

$=$ C $\|u_v\|_{H^1\left(R_{x'}^n\right)}^2$

由于$u_v\to u\left(H^1\left(R_+^n\right)\right)$可知$\gamma u_v$在$H^{1/2}\left(R^{n-1}\right)$中是一个柯西列,由其完备性知有极限$\gamma v$,并称之为u在边界$x_n=0$上的迹.

注:对于边界$\partial\Omega$,若它为C^∞光滑,则存在开集组$\{O_i\}$,$1\leqslant i\leqslant$ N,使$UO_i\supset\partial\Omega$,且在每个$O_i$中可引入$C^\infty$变换将$\partial\Omega\cap O_i$展平为中一部分$\omega_i$.于是如果u是定义在$\partial\Omega$上的函数,利用从属于$\{O_i\}$的单位分解$\{\eta_i\}$,(在$\partial\Omega$上$\sum\eta_i=1$,$\operatorname{supp}\eta_i\subset O_i$,$\eta_i\in C_c^\infty\left(O_i\right)$),可以将u改写为$\sum\eta_iu=\sum u_i$.今若每个$u_i$变换导出的函数$\tilde{u}_i$属于$H^s\left(\omega_i\right)$,就称$u\in H^s(\partial\Omega)$.将$\sum_{i=1}^N\|\tilde{u}_i\|_{H^s}\left(\omega_i\right)$作为u的$H^s(\partial\Omega)$范数.(这里的展品操作可取如下变换:$x_n=\varphi\left(x_1,\cdots,x_{n-1}\right)$,$\left\{\begin{array}{l}y_i=x_i\quad 1\leqslant i\leqslant n-1\\ y_n=x_n-\varphi\left(x_1,\cdots,x_{n-1}\right)\end{array}\right.$,此变换将$U_i\cap\partial\Omega$变换到$y_n=0$上.)

定理1.4.4:(一般的迹定理)设Ω是具有光滑边界的有界区域,$s>\frac{1}{2}+k$

$u\in H^s(\Omega)$,则可定义u在$\partial\Omega$上的迹$\gamma_0u,\gamma_1u,\cdots,\gamma_ku$,

其中$\gamma_i(0\leqslant j\leqslant k)$是$H^s(\Omega)$到$H^{s-1/2-j}(\partial\Omega)$的线性连续映照,且对于$C^\infty\left(\bar{R}_+^n\right)$函数u,$\gamma_iu$就是$\frac{\partial^iu}{\partial v^i}$在边界上的取值,这里$\frac{\partial}{\partial v}$是对$\Omega$的外法向求导.

定理1.4.7:(广义函数的Green公式)设$u\in H^1(\Omega)$,Ω是上述区域,则

$\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}dx=\int_{\partial\Omega}u\cos\left(n,x_i\right)ds$

又当$u\in H^2(\Omega)$且$a_{ij}(x)\in C^\infty(\bar{\Omega})$时:

$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dx=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial v}ds$

其中$\frac{\partial}{\partial v}=\sum_j\left(\sum_ia_{ij}\cos\left(n,x_i\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$

椭圆型偏微分方程:

在$\mathbf{\Omega}$上讨论如下椭圆型偏微分方程边值问题:

$Lu=\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x) u$ =f

$u|\partial\Omega=0$

a_{ij}, b_i, c为$C^{\infty}(\bar{\Omega})$实函数,且满足$a_{ij}=a_{ji}$

以及椭圆型条件:$\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$

又有u在边界上取零值的要求,故应当在$H_0^1(\Omega)$中考虑问题的解.

这个例子说明考虑Dirichlet边值问题时在$H^1(\Omega)$中考虑问题合适,问题转化为当$f \in H^{-1}(\Omega)$时寻找$H_0^1(\Omega)$函数u使得:

按广义函数意义满足Lu=f.

边界条件还可以改成非齐次的,如:$u|\partial_{\Omega}=g$

若在边界定义的函数g可延拓成$H^1(\Omega)$函数,我们仍然用g记它.则非齐次边值问题化为:

$$\begin{cases} L\bar{u}=f-Lg \\ \bar{u}|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

由于$H^1(\Omega)$函数在边界上的迹是$H^{1/2}$函数,为使$\partial\Omega$上的函数g延拓成一个$H^1(\Omega)$函数.

g必须是$H^{1/2}(\partial\Omega)$函数.

若方程讨论的是Neumann问题,边界条件应该改成$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}=0$ 这里:$\frac{\partial}{\partial \nu}=\sum_j \left(\sum_i a_{ij} \cos(n, x_i)\right) \frac{\partial}{\partial x_j}$

若仅在$H^1(\Omega)$中讨论,则$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}=0$无确切意义.

利用Green公式对问题进行变化:

若$u \in H^2(\Omega)$,$v \in H^1(\Omega)$.利用green公式可得:

想证明:$-\int_{\Omega}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}+(c(x)) u\right) \bar{v} dx$

$=\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}\left(-b_i+\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right) \frac{\partial u}{\partial x_i} \bar{v}-\mathrm{cu\bar{v}}\, dx-\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v\right)_{L^2}(\partial_{\Omega})$

由于$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \bar{v}+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \bar{v}$

$=\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \bar{v}\right)_{x_j}$

再利用Green公式:当$u \in H^2(\Omega)$且$a_{ij}(x) \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$时:

$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$ dx=$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$

其中: $\frac{\partial}{\partial \nu}=\sum_j \left(\sum_i a_{ij} \cos(n, x_i)\right) \frac{\partial}{\partial x_j}$

得到$(-Lu, v)_{L^2(\Omega)}=a(u, v)-\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, v\right)_{L^2(\partial_{\Omega})}$

其中a(u,v)是个u,v的双线性形式.

则Neumann问题化为:$a(u, v)=-(f, v)_{L^2(\Omega)}$.

推知:若$u \in H^2(\Omega)$对每一个$v \in H^1(\Omega)$,满足$a(u,v) = -(f,v)_{L^2(\Omega)}$.
则可推得满足Neumann问题.又注意到这个式子对于$u \in H^1(\Omega)$也是有意义的.显然,$u \in H^2(\Omega)$时这样定义的Neumann问题解在边界$\partial\Omega$上导数$\partial\nu$按广义函数迹的意义满足边界条件.

Garding不等式:

定理2.2.1:设Ω, L如前所定义,则存在正常数C_1, C_2,使对一切$C_c^\infty(\Omega)$函数u成立:

$\operatorname{Re}(-Lu,u)_{L^2(\Omega)} \geqslant C_1\|u\|_1^2 - C_2\|u\|^2$

证明:利用Green公式:

$(-Lu,u)_{L^2(\Omega)} = a(u,u) - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, u\right)_{L^2(\Omega)}$

$=a(u,u)$

根据双线性形式:a(u,u)= $a(u,u) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} - b_i\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{u} - c|u|^2\right]dx$

$\geq \int_\Omega \left[\alpha\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} - b_i\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{u} - c|u|^2\right]dx$

$\geq \alpha\|\operatorname{grad} u\|^2 - C'\|\operatorname{grad} u\|\|u\| - C''\|u\|^2$

又利用不等式:$2ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon}b^2$.

$2\|\operatorname{grad} u\|\|u\| \leqslant \frac{\alpha}{2C'}\|\operatorname{grad} u\|^2 + \frac{2C'}{\alpha}\|u\|^2$ 从而:$\operatorname{Re}(-Lu,u)_{L^2(\Omega)} = a(u,u) \geqslant \frac{\alpha}{2}\|g\operatorname{rad} u\|^2 - \left(\frac{2\left(C'\right)^2}{a} + C''\right)\|u\|^2$

定理2.2.2:对于椭圆算子L,存在常数C与Λ,使当$\operatorname{Re}\lambda > \Lambda$时:

对一切$C_c^\infty(\Omega)$函数u成立:

$\|-Lu+\lambda u\|_{-1} \geqslant C\|u\|_1$

证明:由定理2.2.1:$\operatorname{Re}(-Lu,u)_{L^2(\Omega)} \geqslant C_1\|u\|_1^2 - C_2\|u\|^2$

取$\Lambda = C_2$,在$\operatorname{Re}\lambda > \Lambda$时:

$\operatorname{Re}(-Lu+\lambda u,u)_{L^2(\Omega)} \geqslant C_1\|u\|_1^2$

由Sobolev空间性质:

$\left|(-Lu+\lambda u,u)_{L^2(\Omega)}\right| \leqslant \|(L-\lambda)u\|_{-1}\|u\|_1$

即证毕.

定理2.2.3:对于椭圆算子L,当m >0时,存在常数$C_1^{(m)}$与$C_2^{(m)}$使对一切$C_c^\infty(\Omega)$u成立:

$\operatorname{Re}(-Lu,u)_m \geqslant C_1^{(m)}\|u\|_{m+1}^2 - C_2^{(m)}\|u\|^2$(从而对$H_0^{m+1}(\Omega)$也成立.)

又存在正常数$C^{(m)}$与$\Lambda^{(m)}$使对一切$\operatorname{Re}\lambda >\Lambda^{(m)}$成立:

$\|-Lu+\lambda u\|_{m-1} \geqslant C^{(m)}\|u\|_{m+1}$

证明:就m=1的情形证明:

由Garding不等式: $\operatorname{Re}\left[-L\left(\partial_j u\right), \partial_j u\right] \geqslant C_1\left\|\partial_j u\right\|_1^2-C_2\left\|\partial_j u\right\|^2$ (对任意$j=1, \cdots, n$成立.)

其中:$L\left(\partial_j u\right)=\partial_j L u-\sum_{i, k=1}^n \frac{\partial a_{i, k}}{\partial x_j} \partial_{i k}^2 u-\sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \partial_i u-\frac{\partial c}{\partial x_j} u$

又因为$(\sum_{i, k=1}^n \frac{\partial a_{i, k}}{\partial x_j} \partial_{i k}^2 u+\sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \partial_i u+\frac{\partial c}{\partial x_j} u, \partial_j u) \leq C\|u\|_2\|u\|_1$

故$\operatorname{Re}\left(-\partial_j L u, \partial_j u\right) \geqslant \operatorname{Re}\left[-L\left(\partial_j u\right), \partial_j u\right]-C\|u\|_2\|u\|_1$

将所有$(-\partial_j L u, \partial_j u)$关于j作和再加上$(-L u, u)$

又由$\operatorname{Re}(-L u, u)_{L^2(\Omega)} \geqslant C_1\|u\|_1^2-C_2\|u\|^2$.

得:$\operatorname{Re}(-L u, u)_1 \geqslant \sum_{j=1}^n \operatorname{Re}\left(-L\left(\partial_j u\right), \partial_j u\right)-C^{\prime}\|u\|_2\|u\|_1-C_2\|u\|^2$

$\geqslant C_1 \sum_{j=1}^n\left\|\partial_j u\right\|_1^2-n C_2\|u\|_1^2-C^{\prime}\|u\|_2\|u\|_1-C_2\|u\|^2$

$\geqslant \frac{C_1}{2}\|u\|_2^2-C_3\left(\|u\|_1^2+\|u\|^2\right)$

因为:$\|u\|_1^2=\sum_{j=1}^n\left(\partial_j u, \partial_j u\right)+(u, u)=\left(\left(1-\Sigma \partial_j^2\right) u, u\right) \leqslant\|u\|_2\|u\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2 C_3}\|u\|_2^2+\frac{C_3}{2 \varepsilon}\|u\|^2$

证明的第一部分完成.

若取$\Lambda^{(1)}=C_2^{(1)}$,那么$\forall u \in C_c^{\infty}(\Omega)$,对任意$\lambda$,$\operatorname{Re} \lambda>\Lambda^{(1)}$有

$\operatorname{Re}(-L u+\lambda u, u)_1 \geqslant C_1^{(1)}\|u\|_2^2$

左端分部积分:$\operatorname{Re}(-L u+\lambda u,\left(I-\sum_{j=1}^n \partial_j^2\right) u)$

$\leqslant\|(L-\lambda) u\|\|u\|_2$

再带回原不等式可得m=1的情形:

定理2.2.4:对于以前给定的Ω与椭圆的算子L,存在常数Λ,使$\operatorname{Re} \lambda>\Lambda$时,方程$(-L+\lambda) u=f$对任一 $f \in H^{-1}(\Omega)$存在唯一$H_0^1(\Omega)$解.

证明:当Λ充分大时,$\operatorname{Re} \lambda>\Lambda$时, $\|-L u+\lambda u\|_{-1} \geqslant C\|u\|_1$.对一切$H_0^1(\Omega)$函数u均成立.

于是当$-L u+\lambda u=0$时,必有u=0,于是可得解的唯一性.

为证明存在性,作椭圆算子的形式共轭算子L^*:

$L^* v=\sum_{i, j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(a_{i j} v\right)-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_i v\right)+c v$

则L^*与L有共同的二阶项,也满足椭圆型条件.

可适当改变上面的C, Λ,使$\operatorname{Re} \lambda>\Lambda$时:

$\left\|\left(-L^*+\lambda\right) v\right\|_{-1} \geqslant C\|v\|_1$对一切$v \in C_c^{\infty}(\Omega)$成立.

于是$f \in H^{-1}(\Omega)$时,对$\operatorname{Re} \lambda>\Lambda$时:

$|(f, v)| \leqslant||f||_{-1}||v||_1 \leqslant C\left\|\left(-L^*+\lambda\right) v\right\|_{-1}$

算子$-L^*+\lambda$将$C_c^{\infty}(\Omega)$映到中的线性子集B中,B可表示为:

$\left\{w \in H^{-1}(\Omega), w=\left(-L^*+\lambda\right) v, v \in C_c^{\infty}(\Omega)\right\}$

在B上定义一个线性泛函,在B上定义一个线性泛函:$l_f(w)=\left(f, \quad\left(-L^*+\lambda\right)^{-1} w\right)=$

(f, v)

由$|(f, v)| \leqslant ||f||_{-1}||v||_1 \leqslant C\left\|\left(-L^*+\lambda\right) v\right\|_{-1}$,知$l_f(w)$ 是线性连续泛函.由Hahn-Banach定理,将此泛函扩张到$H^{-1}(\Omega)$全空间.

Hahn-Banach定理中的p(x)该如何找?

先给出几个定义:对于线性空间X中的子集S:

称S是凸的如果:任意$x, y \in S, 0<a<1$,有$ax+(1-a)y \in S$

称S是均衡的,若对任意$x \in S, |a| \leqslant 1$必有$ax \in S$

称S是吸收的,若对任意$x \in X$必定存在a>0使$\frac{1}{a}x \in S$

Minkowski泛函:设S为X的吸收凸子集,称X上的泛函:

$p_s(z)=\inf\left\{a | \frac{1}{a}x \in S, a>0\right\}$为S的Minkowski泛函.

一个定理:若S是线性空间X的吸收凸子集,则S的Minkowski泛函满足:

$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y), \forall x, y \in X, p(ax)=ap(x), \forall a \geqslant 0, x \in X$

利用表示定理:可以找到一个元素$u \in \left(H^{-1}(\Omega)\right)'=H_0^1(\Omega)$使$(f, v)=l_f(w)=(u, w)$.

即:$(f, v)=\left(u,\left(-L^*+\lambda\right) v\right)=(-Lu+\lambda u, v), \quad \forall v \in C_c^{\infty}(\Omega)$.

从而u是$-Lu+\lambda u=f$的$H_0^1(\Omega)$解.