定理1.3.6:s为整数时,上述定义中引进的Sobolev空间与定义1.3.2引进的Sobolev空间是一致的.

证明:本定理以$H^s\left(R^n\right)$表示上述定义引进的Sobolev空间,以$H^{s,2}\left(R^n\right)$表示定义1.3.2引入的Sobolev空间.

$s=0$时,两者均为$L^2\left(R^n\right)$.

当s为正整数时:$\|u\|_{H^{s,2}}\left(R^n\right)$

$=(\sum_{|a|\leq s}\|D^a u\|^2_{L^2(R^n)})^{1/2}$

$=\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{|a|\leq s}\int_{R^n}\left|\xi^a\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}$

于是由不等式:$c_1\left(1+|\xi|^2\right)^s\leq\sum_{|a|\leq s}|\xi|^{2a}\leq c_2\left(1+|\xi|^2\right)^s$

即得$\|u\|_2$与$\|u\|_{H^{s,2}}\left(R^n\right)$等价.

当s为负整数时,由于:$H_0^{m,2}\left(R^n\right)=H^{m,2}\left(R^n\right)$对任意正整数m成立

记$m=-s$,有:$H^{s,2}\left(R^n\right)=\left(H^{m,2}\left(R^n\right)\right)'$

利用前面已证明的事实:$H^{m,2}\left(R^n\right)=H^m\left(R^n\right)$

我们只需证明$H^s\left(R^n\right)$与$H^{-s}\left(R^n\right)$对偶.

(1)考虑: L^2_k,定义为:$\left(1+t^2\right)^{k/2}g(t)\subset L^2$ 的 g.

内积即为L^2内积.考虑L^2_k中Cauchy列u_ν

$\left(1+t^2\right)^{k/2}u_\nu\longrightarrow v(L^2\left(R^n\right))$

令$u=\left(1+t^2\right)^{-k/2}v$即u $\in L^2_k$.

且:$\left(1+t^2\right)^{k/2}u_\nu\longrightarrow\left(1+t^2\right)^{k/2}u$ 即L^2_k是完备的,则L^2_k是个Hilbert空间.

考虑映射φ:$L^2_k\to L^2: g\longmapsto(1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}g$.

$\int_{R^n}(1+|t|^2)^k(1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}g\bar{h}=\int_{R^n}(1+|t|^2)^k g\overline{(1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}}\bar{h}$

$\langle\varphi g,h\rangle=\langle g,\varphi^* h\rangle$

则φ的共轭映射是从L^2映到L^2_k的共轭空间的(L^2映到L^2_{-k})

而H^k与L^2_k是同构.

(考虑Φ： $H^k\to L^2_k$

$\hat{h}(\xi)\in H^k$,则$(1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}\hat{\hat{h}}\in L^2(R^n)$

$2\pi\ (1+|t|^2)^{\frac{k}{2}}h(-t)\in L^2(R^n)$

$(1+|-t|^2)^{\frac{k}{2}}h(-t)\in L^2(R^n)$得到h(t)$\in L^2(R^n)$

故以傅里叶变换为映射,此映射为同构映射.)

则可证得H^{-k}与H^k互为共轭.

(2)书上证法:若$u\in\left(H^s\left(R^n_x\right)\right)'$

则对一切$\varphi\in H^s\left(R^n_x\right)$有$|\langle u,\varphi\rangle|\leqslant C|\varphi|_{H^s}$

现对任一$h(\xi)\in\mathscr{S}\left(R^n\right)$

令$\varphi = F^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2\right)^{-s/2} h(\xi)\right]$

$\left|\left\langle \hat{u}(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{-s/2}, h(\xi)\right\rangle\right)$

$= |\langle \hat{u}, \hat{\varphi}\rangle| = (2\pi)^n |\langle u, \varphi\rangle|$

$\leqslant C\|\varphi\|_{H^s} = C\|h\|_{L^2}$

由$\mathscr{S}(R^n)$在$L^2(R^n)$中的稠密性可知:

$\hat{u}(\xi)\left(1+|\xi|^2\right)^{-s/2} \in L^2\left(R_\xi^n\right)$

此即$u \in H^{-s}\left(R_\xi^n\right)$,得证.

(3)在考虑椭圆型偏微分方程时:考虑求二阶导:

当$u \in H^1$时

$\int_{R^n}\left(1+|t|^2\right)^{-1}\left|t^2\hat{u}(t)\right|^2 dt$

$= \int_{R^n}\frac{|t|^4}{1+|t|^2}|\hat{u}(t)|^2 dt$

$\leqslant \int_{R^n}\left(1+|t|^2\right)|\hat{u}(t)|^2 dt$

得到$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in H^{-1}$

同理有若$u \in H^{m-s}(R^n)$则:

$\frac{\partial^m u}{\partial x^m} \in H^{-s}$.

定理1.4.3:设γ是$\mathcal{C}^\infty\left(\bar{R}_+^n\right)$函数$\varphi(x_1,\cdots,x_n)$到边界 $x_n=0$上的边界值的映射,则它可连续地扩张到整个$H^1\left(R_+^n\right)$上,且$\gamma\left(H^1\left(R_+^n\right)\right) \subset H^{1/2}\left(R^{n-1}\right)$.

证明:设$u \in H^1\left(R_+^n\right)$,则存在$\mathcal{C}^\infty\left(\bar{R}_+^n\right)$中具有紧支集的函数列$\{u_v\}$使

$u_v \to u\left(H^1\left(R_+^n\right)\right)$.

以$\hat{u}_v(\xi', x_n)$记$u_v(x)$关于$(x_1,\cdots,x_{n-1})$的傅里叶变换.

$\int_0^{+\infty}\frac{\partial\hat{u}_v}{\partial x_n}(\xi',x_n)\,\widehat{u}_v(\xi',x_n)\,dx_n$=-$(\hat{u}_v(\xi',0))^2$-$\int_0^{+\infty}\frac{\partial\hat{u}_n}{\partial x_n}(\xi',x_n)\,\hat{u}_v(\xi',x_n)\,dx_n$

$|\hat{u}_v(\xi',0)|^2 = -2\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}\frac{\partial\hat{u}_v}{\partial x_n}(\xi',x_n)\ \widehat{u}_v(\bar{\xi'},x_n)$

两边乘以$\left(1+|\xi'|^2\right)^{1/2}$并关于$\xi'$在$R^{n-1}$上积分.

$\|\gamma u_v\|_{H^{1/2}}^2\left(R_{x'}^{n-1}\right) \leq$

$2\mathrm{Re}\left(\int_{R_{\xi'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial\hat{u}_v}{\partial x_n}(\xi',x_n)\right|^2 dx_n d\xi'\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{R_{\xi'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left(1+|\xi'|^2\right)|\hat{u}_v(\xi',x_n)|^2 dx_n d\xi'\right)^{\frac{1}{2}}$

$\leq$ C $(\int_{R_{x'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial u_v}{\partial x_n}(x',x_n)\right|^2 dx_n dx' + \int_{R_{x'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}|u_v(x',x_n)|^2 dx_n dx' +$

$\sum_{i=1}^{n-1}\int_{R_{x'}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial u_v'}{\partial x_i}(x',x_n)\right|^2 dx_n dx')$

$=$ C $\|u_v\|_{H^1\left(R_{x'}^n\right)}^2$

由于$u_v \to u\left(H^1\left(R_+^n\right)\right)$可知$\gamma u_v$在$H^{1/2}\left(R^{n-1}\right)$中是一个柯西列,由其完备性知有极限$\gamma v$,并称之为u在边界$x_n=0$上的迹.

注:对于边界$\partial\Omega$,若它为C^∞光滑,则存在开集组$\{O_i\}$,1 $\leqslant i \leqslant$ N,使$UO_i \supset$

$\partial\Omega$,且在每个O_i中可引入C^∞变换将$\partial\Omega\cap O_i$展平为R^{n-1}中一部分ω_i.于是如果u是定义在$\partial\Omega$上的函数,利用从属于$\{O_i\}$的单位分解$\{\eta_i\}$,(在$\partial\Omega$上$\sum\eta_i=1$,$\operatorname{supp}\eta_i\subset O_i$,$\eta_i\in C_c^\infty(O_i)$),可以将u改写为$\sum\eta_i u=\sum u_i$.今若每个$u_i$变换导出的函数$\tilde{u}_i$属于$H^s(\omega_i)$,就称$u\in H^s(\partial\Omega)$.将$\sum_{i=1}^N\|\tilde{u}_i\|_{H^s(\omega_i)}$作为u的$H^s(\partial\Omega)$范数.(这里的展品操作可取如下变换:$x_n=\varphi(x_1,\cdots,x_{n-1})$,$\left\{\begin{array}{ll}y_i=x_i & 1\leqslant i\leqslant n-1\\ y_n=x_n-\varphi(x_1,\cdots,x_{n-1})\end{array}\right.$,此变换将$U_i\cap\partial\Omega$变换到$y_n=0$上.)

定理1.4.4:(一般的迹定理)设Ω是具有光滑边界的有界区域,$s>\frac{1}{2}+k$

$u\in H^s(\Omega)$,则可定义u在$\partial\Omega$上的迹$\gamma_0 u,\gamma_1 u,\cdots,\gamma_k u$,

其中$\gamma_i(0\leqslant j\leqslant k)$是$H^s(\Omega)$到$H^{s-1/2-j}(\partial\Omega)$的线性连续映照, 且对于$C^\infty\left(\bar{R}_+^n\right)$函数u,$\gamma_i u$就是$\frac{\partial^i u}{\partial v^i}$在边界上的取值,这里$\frac{\partial}{\partial v}$是对$\Omega$的外法向求导.

定理1.4.7:(广义函数的Green公式)设$u\in H^1(\Omega)$,Ω是上述区域,则

$\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}dx=\int_{\partial\Omega}u\cos(n,x_i)\,ds$

又当$u\in H^2(\Omega)$且$a_{ij}(x)\in C^\infty(\bar{\Omega})$时:

$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dx=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial v}ds$

其中$\frac{\partial}{\partial v}=\sum_j\left(\sum_i a_{ij}\cos(n,x_i)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$

椭圆型偏微分方程:

在$\mathbf{\Omega}$上讨论如下椭圆型偏微分方程边值问题:

$Lu=\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=$f

$u|\partial\Omega=0$

a_{ij},b_i,c为$C^\infty(\bar{\Omega})$实函数,且满足$a_{ij}=a_{ji}$

以及椭圆型条件:$\sum_{i=1}^\infty a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\alpha\sum_{i=1}^n\xi_i^2$

又有u在边界上取零值的要求,故应当在$H_0^1(\Omega)$中考虑问题的解.

这个例子说明考虑Dirichlet边值问题时在$H^1(\Omega)$中考虑问题合适,问题转化为当$f\in H^{-1}(\Omega)$时寻找$H_0^1(\Omega)$函数u使得:

按广义函数意义满足Lu=f.

边界条件还可以改成非齐次的,如:$u|\partial_\Omega=g$

若在边界定义的函数g可延拓成$H^1(\Omega)$函数,我们仍然用g记它.则非齐次边值问题化为:

$\left\{\begin{array}{l}L\bar{u}=f-Lg\\ \bar{u}|_{\partial\Omega}=0\end{array}\right.$

由于$H^1(\Omega)$函数在边界上的迹是$H^{1/2}$函数,为使$\partial\Omega$上的函数g延拓成一个$H^1(\Omega)$函数.

g必须是$H^{1/2}(\partial\Omega)$函数.

若方程讨论的是Neumann问题,边界条件应该改成$\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega} = 0$ 这里:$\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_j \left(\sum_i a_{ij}\cos(n,x_i)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$

若仅在$H^1(\Omega)$中讨论,则$\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega} = 0$无确切意义.

利用Green公式对问题进行变化:

若$u \in H^2(\Omega)$,$v \in H^1(\Omega)$.利用green公式可得:

想证明:$-\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + (c(x))\,u\right)\bar{v}dx$

$=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \left(-b_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{v} - \mathrm{cu}\bar{\mathrm{v}}\,dx - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\cdot v\right)_{L^2}(\partial_\Omega)$

由于$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{v} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\bar{v}$

$=\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{v}\right)_{x_j}$

再利用Green公式:当$u \in H^2(\Omega)$且$a_{ij}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$时:

$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\mathrm{dx} = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu}ds$

其中: $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_j \left(\sum_i a_{ij}\cos(n,x_i)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$

得到$(-Lu,v)_{L^2(\Omega)} = a(u,v) - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu},v\right)_{L^2(\partial_\Omega)}$

其中a(u,v)是个u,v的双线性形式.

则Neumann问题化为:$a(u,v) = -(f,v)_{L^2(\Omega)}$.

推知:若$u \in H^2(\Omega)$对每一个$v \in H^1(\Omega)$,满足$a(u,v) = -(f,v)_{L^2(\Omega)}$.

则可推得满足Neumann问题.又注意到这个式子对于$u \in H^1(\Omega)$也是有意义的.显然,$u \in H^2(\Omega)$时这样定义的Neumann问题解在边界$\partial\Omega$上导数$\partial\nu$按广义函数迹的意义满足边界条件.

Garding不等式:

定理2.2.1:设Ω, L如前所定义,则存在正常数C_1, C_2,使对一切$C_c^\infty(\Omega)$函数u成立:

$\mathrm{Re}(-Lu,u)_{L^2(\Omega)} \geqslant C_1\|u\|_1^2 - C_2\|u\|^2$

证明:利用Green公式:

$(-Lu,u)_{L^2(\Omega)} = a(u,u) - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu},u\right)_{L^2(\Omega)}$

$=a(u,u)$

根据双线性形式:a(u,u)= $a(u,u) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} - b_i\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{u} - c|u|^2\right]dx$

$\geq\int_\Omega \left[\alpha \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} - b_i\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{u} - c|u|^2\right]dx$

$\geq\alpha\|\operatorname{grad} u\|^2 - C'\|\operatorname{grad} u\|\|u\| - C''\|u\|^2$

又利用不等式:$2ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon}b^2$.

$2\,\|\operatorname{grad} u\|\|u\| \leqslant \frac{\alpha}{2C'}\|\operatorname{grad} u\|^2 + \frac{2C'}{\alpha}\|u\|^2$ 从而:$\mathrm{Re}(-Lu,u)_{L^2(\Omega)} = a(u,u) \geqslant \frac{\alpha}{2}\|gradu\|^2 - \left(\frac{2\left(C'\right)^2}{a} + C''\right)\|u\|^2$

定理2.2.2:对于椭圆算子L,存在常数C与Λ,使当$\mathrm{Re}\,\lambda > \Lambda$时:
对一切$C_c^\infty(\Omega)$函数u成立:
$\|-Lu+\lambda u\|_{-1} \geqslant C\|u\|_1$
证明:由定理2.2.1:$\mathrm{Re}(-Lu,u)_{L^2(\Omega)} \geqslant C_1\|u\|_1^2 - C_2\|u\|^2$
取$\Lambda = C_2$,在$\mathrm{Re}\,\lambda > \Lambda$时:
$\mathrm{Re}(-Lu+\lambda u,u)_{L^2(\Omega)} \geqslant C_1\|u\|_1^2$
由Sobolev空间性质:
$\left|(-Lu+\lambda u,u)_{L^2(\Omega)}\right| \leqslant \|(L-\lambda)u\|_{-1}\|u\|_1$
即证毕.
定理2.2.3:对于椭圆算子L,当m >0时,存在常数$C_1^{(m)}$与$C_2^{(m)}$使对一切$C_c^\infty(\Omega)$u成立:
$\mathrm{Re}(-Lu,u)_m \geqslant C_1^{(m)}\|u\|_{m+1}^2 - C_2^{(m)}\|u\|^2$(从而对$H_0^{m+1}(\Omega)$也成立.)
又存在正常数$C^{(m)}$与$\Lambda^{(m)}$使对一切$\mathrm{Re}\,\lambda >\Lambda^{(m)}$成立:
$\|-Lu+\lambda u\|_{m-1} \geqslant C^{(m)}\|u\|_{m+1}$
证明:就m=1的情形证明:
由Garding不等式: $\mathrm{Re}\left[-L\left(\partial_j u\right),\partial_j u\right] \geqslant C_1\left\|\partial_j u\right\|_1^2 - C_2\left\|\partial_j u\right\|^2$ (对任意$j=1,\cdots,n$成立.)
其中:$L\left(\partial_j u\right) = \partial_j Lu - \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_j}\partial_{ik}^2 u - \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_j}\partial_i u - \frac{\partial c}{\partial x_j}u$
又因为$(\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_j}\partial_{ik}^2 u + \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_j}\partial_i u + \frac{\partial c}{\partial x_j}u$,$\partial_j u) \leq C\|u\|_2\|u\|_1$
故$\mathrm{Re}\left(-\partial_j Lu,\partial_j u\right) \geqslant \mathrm{Re}\left[-L\left(\partial_j u\right),\partial_j u\right] - C\|u\|_2\|u\|_1$
将所有$(-\partial_j Lu,\partial_j u)$关于j作和再加上$(-Lu,u)$
又由$\mathrm{Re}(-Lu,u)_{L^2(\Omega)} \geqslant C_1\|u\|_1^2 - C_2\|u\|^2$.
得:$\mathrm{Re}\left(-Lu,u\right)_1 \geqslant \sum_{j=1}^n \mathrm{Re}\left(-L\left(\partial_j u\right),\partial_j u\right) - C'\|u\|_2\|u\|_1 - C_2\|u\|^2$
$\geqslant C_1\sum_{j=1}^n \left\|\partial_j u\right\|_1^2 - C_2\|u\|_1^2 - C'\|u\|_2\|u\|_1 - C_2\|u\|^2$
$\geqslant \frac{C_1}{2}\|u\|_2^2 - C_3\left(\|u\|_1^2 + \|u\|^2\right)$
因为:$\|u\|_1^2 = \sum_{j=1}^n\left(\partial_j u,\partial_j u\right)$+$(u,u)$ $= \left(\left(1-\Sigma\partial_j^2\right)u,u\right)$$\leqslant \|u\|_2\|u\|$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2C_3}\|u\|_2^2 + \frac{C_3}{2\varepsilon}\|u\|^2$
证明的第一部分完成.
若取$\Lambda^{(1)}$=$C_2^{(1)}$,那么$\forall u\in C_c^\infty(\Omega)$,对任意$\lambda$,$\mathrm{Re}\,\lambda > \Lambda^{(1)}$有
$\mathrm{Re}\left(-Lu+\lambda u,u\right)_1 \geqslant C_1^{(1)}\|u\|_2^2$
左端分部积分:$\mathrm{Re}(-Lu+\lambda u,\left(I-\sum_{j=1}^n\partial_j^2\right)u\Big)$
$\leqslant \|(L-\lambda)u\|\|u\|_2$
再带回原不等式可得m=1的情形:

定理2.2.4:对于以前给定的Ω与椭圆的算子L,存在常数Λ,使$\operatorname{Re}\lambda > \Lambda$时,方程$(-L+\lambda)u=f$对任一 $f\in H^{-1}(\Omega)$存在唯一$H_0^1(\Omega)$解.

证明:当Λ充分大时,$\operatorname{Re}\lambda > \Lambda$时, $\|-Lu+\lambda u\|_{-1} \geqslant C\|u\|_1$.对一切$H_0^1(\Omega)$函数u均成立.

于是当$-Lu+\lambda u=0$时,必有u=0,于是可得解的唯一性.

为证明存在性,作椭圆算子的形式共轭算子L^*:

$L^*v=\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(a_{ij}v)-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(b_iv)+cv$

则L^*与L有共同的二阶项,也满足椭圆型条件.

可适当改变上面的C,Λ,使$\operatorname{Re}\lambda>\Lambda$时:

$\|(-L^*+\lambda)v\|_{-1}\geqslant C\|v\|_1$对一切$v\in C_c^\infty(\Omega)$成立.

于是$f\in H^{-1}(\Omega)$时,对$\operatorname{Re}\lambda>\Lambda$时:

$|(f,v)|\leqslant ||f||_{-1}||v||_1\leqslant C\,\|(-L^*+\lambda)v\|_{-1}$

算子$-L^*+\lambda$将$C_c^\infty(\Omega)$映到中的线性子集B中,B可表示为:

$\{w\in H^{-1}(\Omega), w=(-L^*+\lambda)v, v\in C_c^\infty(\Omega)\}$

在B上定义一个线性泛函,在B上定义一个线性泛函:$l_f(w)=\Big(f,\quad(-L^*+\lambda)^{-1}w\Big)=(f,v)$

由$|(f,v)|\leqslant ||f||_{-1}||v||_1\leqslant C\,\|(-L^*+\lambda)v\|_{-1}$,知$l_f(w)$ 是线性连续泛函.由Hahn-Banach定理,将此泛函扩张到$H^{-1}(\Omega)$全空间.

Hahn-Banach定理中的p(x)该如何找?

先给出几个定义:对于线性空间X中的子集S:

称S是凸的如果:任意$x,y\in S, 0<a<1$,有$ax+(1-a)y\in S$

称S是均衡的,若对任意$x\in S, |a|\leqslant 1$必有$ax\in S$

称S是吸收的,若对任意$x\in X$必定存在a>0使$\frac{1}{a}x\in S$

Minkowski泛函:设S为X的吸收凸子集,称X上的泛函:

$p_s(z)=\inf\left\{a|\frac{1}{a}x\in S, a>0\right\}$为S的Minkowski泛函.

一个定理:若S是线性空间X的吸收凸子集,则S的Minkowski泛函满足:

$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y), \forall x,y\in X, p(ax)=ap(x), \forall a\geqslant 0, x\in X$

利用表示定理:可以找到一个元素$u\in(H^{-1}(\Omega))'=H_0^1(\Omega)$使$(f,v)=l_f(w)=(u,w)$.

即:$(f,v)=(u,(-L^*+\lambda)v)=(-Lu+\lambda u,v),\quad \forall v\in C_c^\infty(\Omega)$.

从而u是$-Lu+\lambda u=f$的$H_0^1(\Omega)$解.

延拓:

定理:我们想证明:任意$H^m(\Omega)$函数必可以延拓成一个$H^m\left(R^n\right)$函数.

证明:首先指出,若对任意开集$\Omega \subset\subset \Omega_1$能将u延拓成$H^m\left(\Omega_1\right)$函数,则u必能延拓成$H^m\left(R^n\right)$函数.事实上,将延拓成的$H^m\left(\Omega_1\right)$函数记为$u_1$,并做函数$\eta \in C_c^\infty\left(\Omega_1\right)$,使它在$\Omega$上等于1.那么$\eta u_1$的零延拓就是u在$R^n$上的延拓.并且显然有$\eta u_1 \in H^m\left(R^n\right)$.所以只要能将$H^m(\Omega)$函数保持$H^m(\Omega)$性质向外延拓一点点,就能将u保持$H^m$性质延拓到$R^n$上.利用局部化技术,可将问题化为对$H^m\left(R_+^n\right)$的讨论.即要证明,若u属于$H^m\left(R_+^n\right)$,u的支集紧于$\bar{R}_+^n$,则u可延拓成$H^m\left(R^n\right)$.

固定$x^0 \in \partial U$,首先假设∂U在x^0附件平坦,位于平面$\{x_n=0\}$.

我们有一个开球B,以x^0为圆心,以r为半径,我们有:

$$\begin{cases} B^+ := B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \bar{U} \\ B^- := B \cap \{x_n \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n - U \end{cases}$$

我们这样定义:

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{if } x \in B^+ \\ -3u\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n\right) + 4u\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}\right) & \text{if } x \in B^- \end{cases}$$

这叫做从B^+到B^-的高阶反射.

又有:$u^- := \left.\bar{u}\right|_{B^-}, u^+ := \left.\bar{u}\right|_{B^+}$

首先有:$u_{x_n}^- = u_{x_n}^+ \quad$ 在 $\{x_n = 0\}$上

(因为:$\frac{\partial u^-}{\partial x_n}(x) = 3\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n\right) - 2\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}\right)$)

又因为在$\{x_n=0\}$上有:$u^+ = u^-$,所以就又有:

$\left.u_{x_i}^-\right|_{\{x_n=0\}} = u_{x_i}^+ | \{x_n = 0\}$,$(i = 1, \ldots, n-1)$

故又有:$\left.D^\alpha u^-\right|_{\{x_n=0\}} = \left.D^\alpha u^+\right|_{\{x_n=0\}}$.

我们容易得到以下不等式:$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(B^+)}$

考虑边界不是平坦的,我们可以找到一个C^1映射$\mathbf{\Phi}$以及它的逆:$\mathbf{\Psi}$,其中$\mathbf{\Phi}$把边界拉直了.

将边界拉直的过程:

球与区域的交集:$U \cap B\left(x^0, r\right) = \{x \in B\left(x^0, r\right) | x_n > \gamma\left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right)\}$

沿着∂U定义外法向量:$\nu = \left(\nu^1, \ldots, \nu^n\right)$

$u \in C^1(\bar{U})$,我们称$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nu \cdot Du$是u关于外法向量得导数.

我们考虑以下变换:$\begin{cases} y_i = x_i =: \Phi^i(x) \\ y_n = x_n - \gamma\left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right) =: \Phi^n(x) \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n-1)$

写作$y = \mathbf{\Phi}(x)$.

相应的:$\begin{cases} x_i = y_i =: \Psi^i(y) \\ x_n = y_n + \gamma(y_1, \ldots, y_n) =: \Psi^n(y) \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n-1)$
写作:$x = \Psi(y)$
于是就有:$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Psi}^{-1}$
映射$x \mapsto \Phi(x) = y$将x^0附近的边界区域拉直.
$y = \Phi(x), x = \Psi(y), u'(y) := u(\Psi(y))$,在拉直后的区域中按上述方法取一个小球B则仍然有估计式:
设$y = \Phi(x), x = \Psi(y), u'(y) := u(\Psi(y))$.
在拉直边界后的新区域内找一个球B:我们将u'从B^+延拓到B,得到函数$\bar{u}'$.($\bar{u}'$是C^1的.
我们有不等式:$\|\bar{u}'\|_{W^{1,p}(B)} \leq C \|u'\|_{W^{1,p}(B^+)}$.
令$W := \Psi(B)$,我们回到坐标x,我们得到u到W中的延拓,且又有不等式:
$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$成立.
又因为∂U是紧的,故有有限个边界上的点$x_i^0 \in \partial U$,开集W_i以及在u在各个W_i上的延拓$\bar{u}_i$.
令$\Gamma \subset U_{i=1}^N W_i$并取$W_0 \subset\subset U$所以$U \subset U_{i=0}^N W_i$.
令$\{\zeta_i\}_{i=0}^N$是它的一个单位分解,我们令:
$\bar{u} := \sum_{i=0}^N \zeta_i \bar{u}_i$其中$\bar{u}_0 = u$.
所以我们就可以将函数往外延拓一点点,则得证.