Thm 1.1.1 ∀紧集 $K\subset\Omega$，必可找到一 $C_c^\infty(\Omega)$ 函数它在 K 上 $\equiv 1$.

（截断函数）

定义1.1.3:若$\{\varphi_v\}$是一个$C_c^\infty(\Omega)$函数列满足以下条件:
(1)supp $\varphi_v$含于一个共同紧集$K\subset\Omega$中.
(2)对任意重指标$\alpha$,在上述紧集内:$\sup_K|\partial^\alpha\varphi_v|\to 0$
则称$\varphi_v\to 0\,(C_c^\infty(\Omega))$

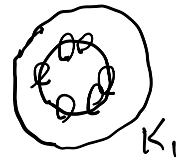
$u_\varepsilon=\int_{R^n}u(x-y)\alpha_\varepsilon(y)dy$

定理1.1.2：若 $u(x)$ 是 $R^n$ 中局部可积函数，当$\varepsilon\to 0$，若$u(x)\in C^0(R^n)$，则对于任一紧集 $K\subset R^n$，$u_\varepsilon$在$K$上一致收敛于$u(x)$ ;若$u(x)\in C_c^\infty$，则 $u_\varepsilon\to u\,(C_c^\infty(R^n))$;若$u\in L^p(R^n)$,则$u_\varepsilon\to u\,(L^p(R^n))$.

证明：（1）若$u(x)\in C^0(R^n)$，由于$\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(y)dy=1$可得：
$u_\varepsilon(x)-u(x)=\int_{R^n}(u(x-y)-u(x))\alpha_\varepsilon(y)dy.$ K中，$x\in K$，$|y|<\varepsilon$，$|x-y|$ 就是
当$x$属于某紧集$K$时，由于$\alpha_\varepsilon(y)$的支集在球$|y|\leqslant\varepsilon$中，故x与x-y落在紧集K1中,这里的$K1$是把以$K$中任一点为圆心$\varepsilon$为半径的球都包含在里面的紧集.

以K中任一点为圆心，$\varepsilon$为半径.

利用$u(x)$在紧集$K1$上的一致连续性可知:
对任意$\delta>0$,在$\varepsilon$充分小时有 $\varepsilon\to 0$
$\max_{x\in K}|u_\varepsilon(x)-u(x)|\leq\int_{R^n}|u(x-y)-u(x)|\alpha_\varepsilon(y)dy\leq$
$\max_{x,x-y\in K_1}|u(x-y)-u(x)|\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(y)dy\leq\delta\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(y)dy=\delta.$
所以当$\varepsilon\to 0$时,在$K$上$u_\varepsilon(x)$一致收敛于$u(x)$.




$\varepsilon\to$

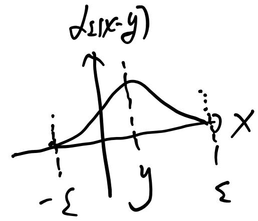
(2)若$u(x)\in C_c^\infty$,记suppu=K,则当$\varepsilon\leq 1$时: $suppu_\varepsilon\subset K_1$ 又由(1),在$K$上$u_\varepsilon(x)$一致收敛于$u(x)$，又对任意重指标$\beta$ $|\partial_x u(x-y)|<g(y)$
$(\partial^\beta u_\varepsilon)(x)=\partial^\beta\int_{R^n}u(x-y)\alpha_\varepsilon(y)dy$

$\boxed{\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(x-y)u(y)dy}$

由控制收敛定理才能交换求导顺序.
$=\int_{R^n}(\partial_x^\beta u)(x-y)\alpha_\varepsilon(y)dy$
可知在K上,$\partial^\beta u_\varepsilon$一致收敛于$\partial^\beta u$,
于是$u_\varepsilon\to u\,(C_c^\infty(R^n))$

$|\partial^\beta u_\varepsilon-\partial^\beta u|$
$\leq\int|\partial_x^\beta u(x-y)-\partial_x^\beta u(x)|\cdot\alpha_\varepsilon(y)dy$

要 $|\partial_x\alpha_\varepsilon(x-y)|<g(y)$，对所有 $x$




影响

(3)若$u\in L^p(R^n)$,我们先找一个紧支集的连续函数$v$（由实变函数中结论),使它满足$\|u-v\|_{L^p}<\frac{\delta}{3}$ 由三角不等式有:
$\|u_\varepsilon-u\|_{L^p}\leq\|u_\varepsilon-v_\varepsilon\|_{L^p}+\|v_\varepsilon-v\|_{L^p}+\|u-v\|_{L^p}$ (1.9)

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x+\theta\Delta x)$

由于对任意$L^p$函数f(x)成立:
$\|f_\varepsilon\|_{L^p}=\left(\int_{R^n}|f_\varepsilon|^p dx\right)^{1/p}=\left\{\int_{R^n}\left|\int_{R^n}f(x-y)\alpha_\varepsilon(y)dy\right|^p dx\right\}^{1/p}$

$\|u_\varepsilon-v_\varepsilon\|$

将$\alpha_\varepsilon(y)$拆成$\alpha_\varepsilon^{1/p+1/q}(y)$. 由Cauchy-Schwarz不等式:
$\leq\left\{\int_{R^n}\left(\int_{R^n}|f(x-y)|^p a_\varepsilon(y)dy\right)^{p/p}\times\left(\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(y)dy\right)^{p/q}dx\right\}^{1/p}$
$=\left\{\int_{R^n}\int_{R^n}|f(x-y)|^p\alpha_\varepsilon(y)dydx\right\}^{1/p}$
$=\left\{\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(y)\int_{R^*}|f(x-y)|^p dxdy\right\}^{1/p}$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\boxed{\left|\int_{R^n}f(x-y)\alpha_\varepsilon(y)dy\right|^p\leq\left(\int_{R^n}^{1}f(x-y)^p\alpha_\varepsilon(y)dy\right)^{p/p}\left(\int_{R^n}\alpha_\varepsilon(y)\right)^{p/q}}$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$

直接证

$\|f_\varepsilon\|_{L^p}\leq\|f\|_{L^p}$ $\quad$ $\|u_\varepsilon-v_\varepsilon\|_{L^p}\leq\|u-v\|_{L^p}$

$=\|f\|_{L^p}$ （其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$）.

$u_\varepsilon$ 可用 $v_\varepsilon$ 逼近.

因此有$\|u_\varepsilon-v_\varepsilon\|_{L^p}\le\|u-v\|_{L^p}<\frac{\delta}{3}$.

又由于v是具有紧支集的连续函数,所以$v_\varepsilon$一致收敛于v,因此当$\varepsilon$充分小时:

$\|v_\varepsilon-v\|_{L^p}<\frac{\delta}{3}$

于是由(1.9)$\|u_\varepsilon-u\|_{L^p}<\delta$ 这就得到了

$u_\varepsilon\to u\left(L^p\left(R^n\right)\right)$

注:若定理区域改成一般区域Ω,相应定理依然成立. 若 $u(x)$ 是 Ω 中局部可积函数，当

$\varepsilon\to0$，若$u(x)\in C^0\left(\Omega\right)$，则对于任一紧集

$K\subset\Omega$，$u_\varepsilon$在$K$上一致收敛于$u(x)$；

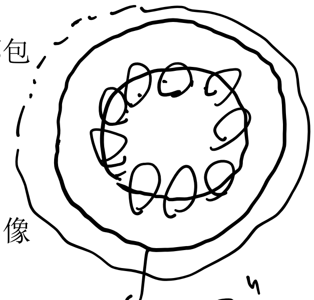
若$u(x)\in C_c^\infty$，则 $u_\varepsilon\to u\left(C_c^\infty\left(\Omega\right)\right)$;

若$u\in L^p\left(\Omega\right)$,则$u_\varepsilon\to u\left(L^p\left(\Omega\right)\right)$.

$C_c^\infty$ $L^p$

证明:先讨论$u\in C^0(\Omega)$情形,由于此时闭集于紧集等价,故Ω内任一闭区域K到Ω边界必有一最小距离d,

当$\varepsilon\to0$时,仍然可以找到一个$K1$是把以$K$中任一点为圆心$\varepsilon$为半径的球都包含在里面的紧集.



K1 $R^n$

这时考虑式子: $C^0$

$u_\varepsilon(x)-u(x)=\boxed{\int_\Omega(u(x-y)-u(x))\alpha_\varepsilon(y)dy}$ $K\subset\Omega$

之后证明过程与$R^n$相同. 至于后两者情形,只需将u(x)在Ω外做零延拓,再像上述定理中一样证明即可.

再介绍两个基本空间,一类是$C^\infty(\Omega)$,一类是$\mathscr{S}\left(R^n\right)$ $C^\infty(\Omega)$是Ω上所有无限次可微函数的集合,其中极限关系为: 速降

若$\{\varphi_\nu\}$是$C^\infty(\Omega)$中函数列,且对任一紧集$K\subset\Omega$,任一重指标$\alpha$成立:

$\sup_K|\partial^a\varphi_\nu|\to0$,

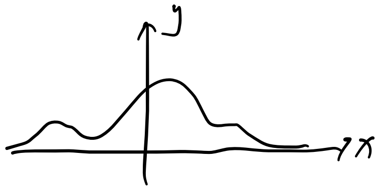
则称$\varphi_v\to0\left(C^\infty(\Omega)\right)$. 定义1.1.4:若函数$\varphi\in C^\infty\left(R^n\right)$,且对所有正整数k以及任意重指标$\alpha$成立:

$\to G(x)$

$\lim_{|x|\to\infty}\left|(1+|x|^2)^k\,\partial^\alpha\varphi(x)\right|=0(1.11)$

则称$\varphi$是$R^n$上的速降函数,记为$\varphi\in\mathscr{S}\left(R^n\right)$ 条件(1.11)等价于对所有正整数k以及任意重指标$\alpha$成立:

$\sup_{x\in R^n}\left|(1+|x|^2)^k\,\partial^a\varphi(x)\right|<\infty$





速降函数空间中的极限关系定义如下:

若对所有正整数k以及任意重指标$\alpha$成立:

$\sup_{x\in R^n}\left|(1+|x|^2)^k\,\partial^\alpha\varphi_\nu(x)\right|\to0$



$$\begin{cases} |x|>M, & |G(x)|<\varepsilon \\ |x|\le M, & |u(x)|<N \end{cases}$$

$\varphi\in C_c^\infty(R^n)$, $|\partial^\alpha\varphi|\to0$

$\lim\limits_{|x|\to\infty}$

$\therefore\ C_c^\infty(R^n) \subset \mathscr{S}(R^n)$

$\mathscr{E}'(\Omega) \subset \mathscr{S}'(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$

就称$\varphi_v \to 0\,(\mathscr{S}\,((R^n))$

则显然我们有如下包含关系: $\boxed{C_c^\infty(R^n)} \subset \mathscr{S}\,(R^n) \subset C^\infty(R^n)$

定义1.1.5:称$C_c^\infty(\Omega)$上的线性连续泛函为$\mathscr{D}'(\Omega)$广义函数,

称$C^\infty(\Omega)$上的线性连续泛函为$\mathscr{E}'(\Omega)$广义函数,

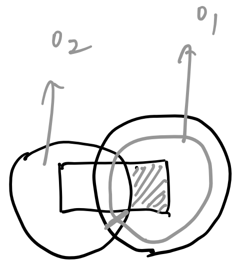
称$\mathscr{S}\,(R^n)$上的线性连续泛函为$\mathscr{S}'\,(R^n)$.

对于广义函数来说,一般不说它在某点的取值,以$\delta(x)$为例,它在零点的取值是没有意义的,但是在任一开集上的值(或称它在任一子集上的限制) 确是有确切意义的.

若$T \in \mathscr{D}'(\Omega)$,$\Omega_1 \subset \Omega$,则对一切 $\varphi \subset C_c^\infty(\Omega_1)$,

$\langle T, \varphi\rangle$是$C_c^\infty(\Omega_1)$上的线性连续泛函, 这样从T又诱导出一个$\mathscr{D}'(\Omega_1)$广义函数, 它可以记为$T|_{\Omega_1}$,在不产生混淆时也可简单定义为T.

定义1.2.1:若有一广义函数$T \in \mathscr{D}'(\Omega)$,对任一函数$\varphi \in C_c^\infty(\Omega_1)$ $\quad(\Omega_1 \subset \Omega)$ 成立:$\langle T, \varphi\rangle = 0$(2.1)则称T在$\Omega_1$中为0. 若广义函数T1,T2在$\Omega_1$中使T1-T2为0,则称T1与T2在$\Omega_1$中相等.




定理1.2.2:(单位分解定理)若在$R^n$中有开集组$\{O_i\}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$覆盖紧集K,则可找到如下函数族

$\{\varphi_i\}$ 其中$\varphi_i \geq 0$,$\varphi_i \in C_c^\infty(O_i)$, 且在K上$\sum_{i=1}^k \varphi_i \equiv 1$.

证明:因为开集$O_1$覆盖了$K\backslash \bigcup_{i=2}^k O_i$, 故$\delta_1 = d\left(\partial O_1, K\backslash \bigcup_{i=2}^k O_i\right) > 0$,

于是我们可以将$O_1$缩小为:$O_1' = \left\{x \in O_1, \operatorname{dist}(x, \partial O_1) > \frac{\delta_1}{2}\right\}$,

则$O_1'$与$O_2, \cdots, O_k$一起构成对K的覆盖.类似的,可以逐个缩小$O_2, \cdots, O_k$, 使$O_1', O_2', \cdots, O_k'$构成K的覆盖.

由定理1.1.1,在每个$O_i$中都存在函数$\psi_i(x)$,使$\psi_i \in C_c^\infty(O_i)$,

且在$O_i'$上$\psi_i = 1$.由于$K \subset \bigcup_{i=1}^k O_i'$,

故$\sum_{i=1}^k \psi_i$ 在K上恒大于0.令$\varphi_i(x) = \psi_i(x) / \sum_{i=1}^k \psi_i(x)$ 即得所需的分解

$1 = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x)$.

定义1.2.2:使广义函数T取零值的最大开集的余集,称为广义函数的支集,记为suppK.

例1:$\delta$函数的支集是原点0.

例2:将在$\Omega$上几乎处处为0的函数视为广义函数,其支集是空集.

定义1.2.3:若$\mathscr{D}'(\Omega)$中广义函数列$\{T_k\}$对任一$\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ 均成立$\langle T_k, \varphi\rangle \to 0 \quad k \to \infty$则称 $T_k$弱收敛于0.若$T_k - T$弱收敛于0,则称$T_k$弱收敛于T,记为$T_k \to$

$T$.

定义1.2.5:设T是$\mathscr{D}'(\Omega)$广义函数,定义T关于$x_k$的偏导数$\frac{\partial T}{\partial x_k}$ 为下式决定的广义函数:

$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ (2.6)

由于从$\varphi_v \to 0\,(C_c^{\infty}(\Omega))$ 可推出$\frac{\partial \varphi_v}{\partial x_k} \to 0\,(C_c^{\infty}(\Omega))$

所以(2.6)确实定义了一个$C_c^{\infty}(\Omega)$上的广义函数. 即$\frac{\partial T}{\partial x_k}$是$\mathscr{D}'(\Omega)$广义函数,称为T关于$x_k$的广义导数或导数. 类似可以定义高阶导数:对于重指标$\alpha$,定义$\langle \partial^{\alpha} T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^{\alpha} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$. 关于广义导数的两个性质: (1):广义函数任意阶导数成立. (2):广义函数的导数与求导次序无关: 对任意$\varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ $\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k}, \quad \varphi \right\rangle$

为什么考虑$f \in \mathscr{S}(R^n)$的fourier变换?

$= \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} \right\rangle$

$= \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \right\rangle$

$= \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_i}, \varphi \right\rangle$

$(x^{\alpha} \partial^{\beta} f)^{\wedge} = (-1)^{|\alpha|} (i)^{|\beta|-|\alpha|} \partial^{\alpha} (\xi^{\beta} \hat{f})$, 而$x^{\alpha} \partial^{\beta} f \in L^1(R^n)$, 故$\partial^{\alpha}(\xi^{\beta} \hat{f})$有界$\Leftrightarrow \hat{f} \in \mathscr{S}$

广义函数的Fourier变换若$f \in \mathscr{S}\,(R^n)$,则定义$f$的Fourier变换: $(Ff)(\xi) = \int_{R^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx$其中: $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \cdots + x_n \xi_n$. $(Ff)(\xi)$也常记为$\hat{f}(\xi)$.

若$g \in \mathscr{S}\,(R^n)$,还可定义g的Fourier逆变换为: $(F^{-1} g)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{ix\cdot\xi} g(x) dx$.

我们有如下事实:

(1)若$f \in \mathscr{S}\,(R^n)$,则$\hat{x_i f}(\xi) = -D_i \hat{f}(\xi)$, $\widehat{D_i f}(\xi) = \xi_i \hat{f}(\xi)$,

这里$D_i = \frac{1}{i} \partial_i$.

(2)若$f, g \in \mathscr{S}\,(R^n)$,则: $\langle \hat{f}, g \rangle = \langle f, \hat{g} \rangle$由此又可得出关于$L^2(R^n)$内积成立: $(f, g) = (2\pi)^{-n} (\hat{f}, \hat{g})$

原因是经过两次傅里叶变换后:

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt e^{-j\theta\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\theta+t)\omega} d\omega dt = 2\pi x(-\theta)$

Sobolev space: 定义1.3.1:设$\Omega \subset R^n$是一给定区域,对$m \geqslant 0, 1 \leqslant p \leqslant \infty$定义Sobolev空间 $H^{m,p}(\Omega)$为满足条件$D^{\alpha} u \in L^p(\Omega)$ $(|\alpha| \leqslant m)$ 的广义函数u全体构成的集合,并装备以范数: $\|u\|_{H^{m,p}}(\Omega) = \left( \sum_{|a|<m} \|D^a u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$

$\|u\|_{H^{m,\infty}}(\Omega) = \max_{|a|<m} \|D^a u\|_{L^{\infty}(\Omega)}$ 特别当$p = 2$时,记$H^{m,2}(\Omega)$为$H^m(\Omega)$这时可引进内积$(u, v)_m = \sum_{|a|<m} (D^a u, D^a v)_{L^2(\Omega)}$ 他们分别时满足内积和范数的几个要求的. 在以后的讨论中,我们一般只要求所讨论的区域$\Omega$有界,且边界$\partial\Omega$为$C^{\infty}$光滑.这里$C^{\infty}$光滑的定义是对任意$x \in \partial\Omega$,存在x的邻域U,使$U \cap \partial\Omega$可用$x_i = \varphi(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n)$表示, 其中$1 \leqslant i \leqslant n$,且$\varphi$是$C^{\infty}$函



$\int_{R^n} x_i f(\xi) e^{-x\cdot\xi} dx = -D_i \int_{R^n} f(\xi) e^{-x\cdot\xi} dx$

数.显然,当区域$\Omega$有界时边界$\partial\Omega$是紧集,我们的假定即等价于在每个 $U_i(1 \leqslant i \leqslant N)$中,$\partial\Omega \cap U_i$可以用$C^{\infty}$显函数表示.

根据$H^{m,p}(\Omega)$的定义我们有如下性质:

(1)$H^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$

(2)若$m_1 \geqslant m_2 \geqslant 0$,则$H^{m_1,p}(\Omega) \subset H^{m_2,p}(\Omega)$;

又若$p_1 \geqslant p_2 \geqslant 1$,则$H^{m,p_1}(\Omega) \subset H^{m,p_2}(\Omega)$($\Omega$为有限区域.)

(3)若$u \in H^{m,p}(\Omega)$,$|\beta| \leqslant m$,则

$D^{\beta}u \in H^{m-|\beta|,p}(\Omega)$

(4)若$\tau : \Omega_x \to \omega_y$是一个$C^{\infty}$变换,其逆变换$\tau^{-1}$也属于$C^{\infty}$,且两个变换的Jacobi行列式在$\bar{\Omega}_x$与$\bar{\omega}y$上都有界,$u \in H^{m,p}\left(\Omega_x\right)$. 则u(x)经变换$\tau$所导出的函数$v(y) = u\left(\tau^{-1}(y)\right)$属于$H^{m,p}\left(\omega_y\right)$.

证明:$v(y) = u\left(\tau^{-1}(y)\right)$

$= u\left(y_1\left(x_1 \cdots x_n\right), \cdots \cdot y_n\left(x_1 \cdots x_n\right)\right)$

$\int \ldots \int_{\omega_y} v\left(y_1 \cdots y_n\right) dy_1 \cdot dy_n$

$=\int \cdots \int_{\Omega_X} v\left(y_1\left(x_1 \cdots x_2\right), \cdots, y_n\left(x_1 \cdots x_n\right)\right) \mathrm{J} dx_1 \cdots dx_n$

由于雅可比行列式J有界,所以若u$\in H^{m,p}\left(\Omega_x\right)$,则v$\in H^{m,p}\left(\omega_y\right)$.