จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย	ชื่อ ธีรภัทร จันทรมณี
คณะวิศวกรรมศาสตร์	เลขประจำตัว 6430177021
ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์	หมายเลขเครื่อง ______
2110-263 DIGITAL COMPUTER LOGIC LAB I	วันที่ 26 ธ.ค. 2565

2. ตารางความจริงและวงจรตรรกะ

วัตถุประสงค์

1. เพื่อให้นิสิตสามารถสร้างตารางความจริงได้
2. เพื่อให้นิสิตสามารถเขียนสมการบูลลีนจากตารางความจริงได้
3. เพื่อให้นิสิตสามารถสร้างวงจรเชิงตรรกะจากสมการบูลลีนได้

บทนำ

ตารางความจริง คือ ตารางที่มีอินพุททั้งหมดให้ค่าครบทุกค่า และแต่ละค่าของอินพุทจะให้ค่าเอาท์พุทเป็นอย่างไร เช่น

A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

เป็นตารางความจริงที่มีอินพุท 2 ค่า คือ A และ B มีเอาท์พุท 1 ค่า คือ Output การเขียนตารางความจริง จะต้องใส่ค่าของอินพุทให้ครบทุกค่า ซึ่งในตัวอย่างนี้มีเพียง 2 อินพุท จึงให้ค่าอินพุทได้ทั้งหมด 4 ค่า คือ 00 , 01 , 10 , 11 การเขียนค่าลงตารางนั้นจะต้องใส่ให้เรียงกันไปตามลำดับ (เพื่อให้เป็นมาตรฐานเดียวกัน) ส่วนค่าเอาท์พุทที่จะใส่ลงไปนั้นเป็นค่าที่จะเกิดขึ้นจริงๆตามค่าของอินพุทนั้นๆ

ในกรณีที่มีอินพุทมากกว่า 2 ค่า ก็ใช้หลักการเดียวกัน เพียงแต่จำนวนค่าอินพุททั้งหมดแตกต่างกัน เช่น ถ้ามีอินพุท 3 ค่า จะมีจำนวนคาอินพุททั้งหมด 8 ค่า ดังนี้คือ 000 , 001 , 010 , 011 , 100 , 101 , 110 , 111

สมการบูลลีน ถูกศึกษาเป็นครั้งแรกโดย George Boole เป็นสมการทางคณิตศาสตร์ ที่ใช้ช่วยในการออกแบบวงจรตรรกะและคอมพิวเตอร์ สามารถเขียนได้ 2 รูปแบบคือ

- Canonical sum-of-products (Minterm)
- Canonical Product-of-sum (Maxterm)

เพื่อให้การอธิบายง่ายขึ้น ขอให้ดูตัวอย่างตารางสมมุติข้างล่าง

x_1	x_2	x_3	Minterm	Maxterm	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	$m_0 = x'_1x'_2x'_3$	$M_0 = x_1 + x_2 + x_3$	0
0	0	1	$m_1 = x'_1x'_2x_3$	$M_0 = x_1 + x_2 + x'_3$	0
0	1	0	$m_2 = x'_1x_2x'_3$	$M_0 = x_1 + x'_2 + x_3$	1
0	1	1	$m_3 = x'_1x_2x_3$	$M_0 = x_1 + x'_2 + x'_3$	1
1	0	0	$m_4 = x_1x'_2x'_3$	$M_0 = x'_1 + x_2 + x_3$	1
1	0	1	$m_5 = x_1x'_2x_3$	$M_0 = x'_1 + x_2 + x'_3$	0
1	1	0	$m_6 = x_1x_2x'_3$	$M_0 = x'_1 + x'_2 + x_3$	0
1	1	1	$m_7 = x_1x_2x_3$	$M_0 = x'_1 + x'_2 + x'_3$	1

เราสามารถเขียนสมการบูลลีนทั้งสองแบบได้ดังนี้

- เขียนในรูปแบบของ Canonical sum-of-products ให้เลือกเฉพาะ $f(x_1,x_2,x_3)$ ที่เป็น 1 นำมาเขียน Product term และ OR กัน ก็จะได้ดังนี้

  $f(x_1,x_2,x_3) = x'_1x_2x'_3 + x'_1x_2x_3 + x_1x'_2x'_3 + x_1x_2x_3$ ________________________(1)

  แต่ละนิพจน์เรียกว่า minterm ดังนั้นอาจเขียนสมการใหม่ได้เป็น

  $f(x_1,x_2,x_3) = m_2 + m_3 + m_4 + m_7$

  หรืออาจเขียนย่ออีกอย่างได้เป็น

  $f(x_1,x_2,x_3) = \sum m(2,3,4,7)$

- เขียนในรูปแบบของ Canonical product-of-sums ให้เลือกเฉพาะ $f(x_1,x_2,x_3)$ ที่เป็น 0 นำมาเขียน Sum term และ AND กัน ก็จะได้ดังนี้

  $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x'_3)(x'_1 + x_2 + x'_3)(x'_1 + x'_2 + x_3)$ ____(2)

  แต่ละนิพจน์เรียกว่า maxterm ดังนั้นอาจเขียนสมการใหม่ได้เป็น

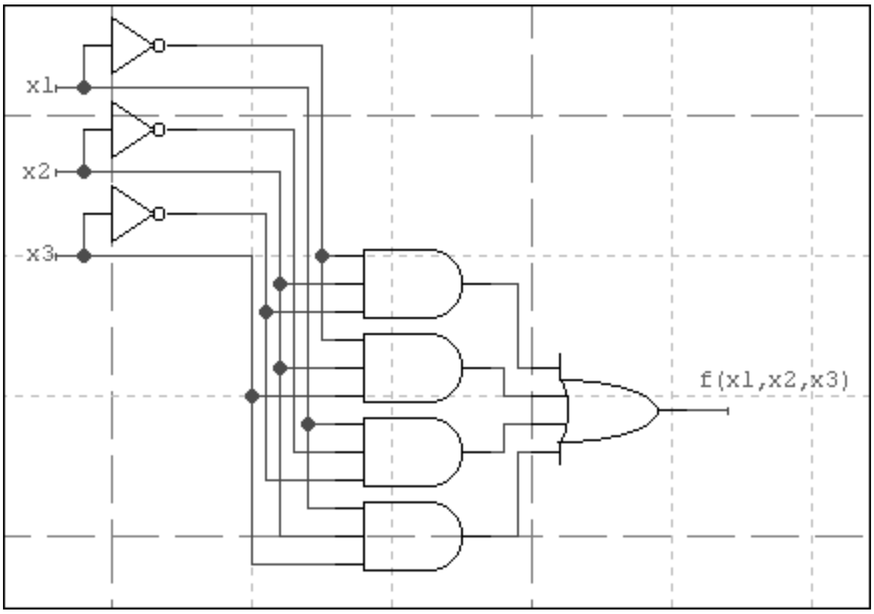
  $f(x_1,x_2,x_3) = M_0 \bullet M_1 \bullet M_5 \bullet M_6$

  หรืออาจเขียนย่ออีกอย่างได้เป็น

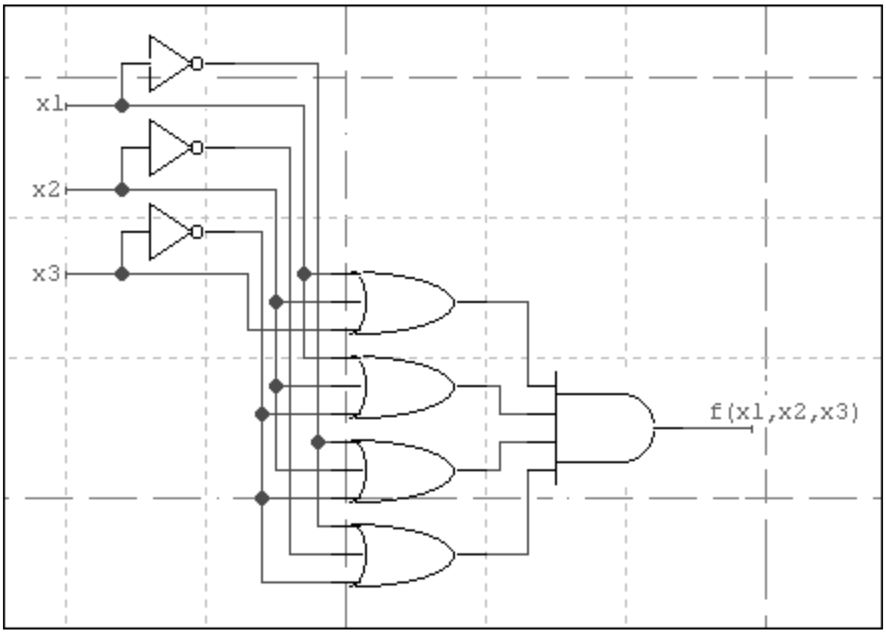
  $f(x_1,x_2,x_3) = \prod M(0,1,5,6)$

การสร้างวงจรตรรกะ จากสมการบูลลีน เราสามารถเขียนวงจรตรรกะได้ โดยใช้เกทพื้นฐาน ได้แก่ AND gate , OR gate และ NOT gate ได้อย่างตรงไปตรงมา

ตัวอย่าง จากสมการที่ 1 นำมาเขียนวงจรจะได้



หรือจะใช้สมการที่ 2 มาเขียนวงจรก็จะได้



การทดลอง

ใช้ Binary Switch เป็นอุปกรณ์ป้อนอินพุท และ Binary Probe เป็นอุปกรณ์เพื่อแสดงผล แต่ละข้อให้สร้างวงจรรวมในหน้าเดียว, ใช้ binary switch เพียง set เดียว และนำ output มาวางเรียงกันเพื่อให้ตรวจสอบผลการทำงานของวงจรง่าย (ข้อแนะนำ:ใช้การตั้งชื่อสัญญาณแทนการลากสายสัญญาณ จะประหยัดเวลาได้มาก)

1. จากตารางของวงจร XOR คือ output ของวงจรจะเป็น 1 เมื่อ input ของวงจรต่างกัน จงเขียนสมการบูลลีนทั้งแบบ Sum-of-products และ Product-of-sums แล้วสร้างวงจรจากสมการทั้งสอง และตรวจสอบการทำงานของวงจร

A	B	Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

SoP = $\bar{A}B + B\bar{A}$

PoS = $(A+B)(\bar{A}+\bar{B})$

2. จงเขียนตารางความจริงของวงจร 1 bit Full Adder ให้สมบูรณ์และเขียนสมการบูลลีนทั้งแบบ Sum-of-products และ Product-of-sums (ไม่ต้อง minimize) แล้วสร้างวงจรจากสมการทั้งสอง โดยมีอินพุทคือ A , B และ Cin และมีเอาท์พุทคือ Sum และ Cout

A	B	Cin	Sum	Cout
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

C_{out}

SoP = $\bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$

PoS = $(A+B+C)(A+B+\bar{C})(A+\bar{B}+C)$
$\cdot(\bar{A}+B+C)$

3. จงเขียนตารางความจริงแล้วออกแบบและสร้างวงจร comparator ที่มี 4 input คือ A, B, C และ D และมี 3 output คือ Z1, Z2 และ Z3 โดยที่ A และ B ประกอบเป็นค่าของเลขจำนวนที่หนึ่ง (N1) และ C และ D ประกอบเป็นค่าของเลขจำนวนที่สอง (N2) เช่น ถ้า AB = 10 เลข N1 ก็มีค่า 10 (เท่ากับ 2 ในฐานสิบ) ค่าของ Z แสดงผลการเปรียบเทียบขนาดเลขทั้งสองจำนวน โดย Z1 เป็น 1 เมื่อ N1 > N2 Z2 เป็น 1 เมื่อ N1 < N2 และ Z3 เป็น 1 เมื่อ N1 = N2 (จะสังเกตว่า ที่ input ใดๆ จะมีค่า Z เป็นหนึ่งเพียงตัวเดียวเท่านั้น) ให้เขียนสมการบูลลีนและสร้างวงจรทั้งแบบ Sum-of-products และ Product-of-sums ด้วย จะ minimize หรือไม่ก็ได้

4. จงเขียนตารางความจริงแล้วออกแบบและสร้างวงจร ที่มี 3 input คือ X0, X1 และ Selector และมี 1 output คือ Z โดยที่ ค่าของ Z ควบคุมโดย input Selector คือ ถ้า input Selector เป็น 0 ค่าของ Z จะเป็น X0 แต่ถ้า input Selector เป็น 1 ค่าของ Z จะเป็น X1 วงจรนี้เรียกว่า Multiplexer เนื่องจากวงจรเลือก 1 input จาก 2 input จะเรียกสั้นๆว่า MUX 2:1 ให้เขียนสมการบูลลีนที่ minimize แล้ว และสร้างวงจรทั้งแบบ Sum-of-products และ Product-of-sums ด้วย

5. จงออกแบบ และ สร้างวงจร MUX 4:1 คือวงจรมี 4 input คือ X0, X1, X2 และ X3 และมี input ที่ใช้ในการเลือก 2 input คือ S1 S0 และ 1 output คือ Z โดยค่าที่ออกมาที่ Z จะเป็น input ใดขึ้นกับค่าของ S1 S0 ตามตาราง

S1	S0	Z
0	0	X0
0	1	X1
1	0	X2
1	1	X3

ข้อแนะนำ ใช้วงจรจากข้อ 4.

3

	A	B	C	D	Z_1	Z_2	Z_3
0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0
2	0	0	1	0	0	1	0
3	0	0	1	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1	0	0
5	0	1	0	1	0	0	1
6	0	1	1	0	0	1	0
7	0	1	1	1	0	1	0
8	1	0	0	0	1	0	0
9	1	0	0	1	1	0	0
10	1	0	1	0	0	0	1
11	1	0	1	1	0	1	0
12	1	1	0	0	1	0	0
13	1	1	0	1	1	0	0
14	1	1	1	0	1	0	0
15	1	1	1	1	0	0	1

Z1 – K map

SoP :

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	0	1
10	1	0	0	0

SoP = $B\bar{C}\bar{D} + \bar{C}AB + A\bar{C}\bar{D} + AB\bar{D}$

PoS :

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	0	1
10	1	0	0	0

PoS = $\bar{A}\bar{B} + \bar{A}D + \bar{B}D + \bar{A}C + \bar{B}C + CD$

Z2 – K map

SoP :

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	0	0	1	0

SoP : $\bar{A}C + \bar{A}\bar{B}D + \bar{B}CD$

PoS :

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	0	0	1	0

PoS = $\bar{C}\bar{D} + B\bar{C} + A\bar{C} + A\bar{D} + AB$

23- K map

SoP :

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	1

SoP : $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + A\bar{B}C\bar{D} + ABCD$

PoS :

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	1

PoS : $\bar{B}D + \bar{A}C + \bar{B}D + A\bar{C}$

4

	X0	X1	S	Z
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

2 - K map

SoP :

AB \ C	0	1
00	0	0
01	0	1
11	1	1
10	1	0

PoS :

AB \ C	0	1
00	0	0
01	0	1
11	1	1
10	1	0

SoP = $BC + A\bar{C}$

PoS = $\bar{A}\bar{C} + \bar{B}C$