0.3
0.1
0.2

ระบบสมการเชิงเส้น

System of linear esuations

$2x+3y=4$

$x-y=3 \Rightarrow x=3+y$

1) การดำเนินการตามแถว & หลัก ตามหลักมูลฐาน

การดำเนินการตามแถว (row op.)

1. การสลับที่ระหว่าง i & j
2. การนำค่าคงตัว ที่ $\neq 0$ คูณ แถว i
3. การนำค่าคงตัวที่ $\neq 0$ คูณ แถว i แล้วนำไปบวก แถว j

หลัก (column op.)

สลับหลัก i & j คูณ หลักที่ i

คูณหลักที่ i

① $R_i \leftrightarrow R_j$, $C_i \leftrightarrow C_j$

② kR_i , kC_i

③ $kR_i + R_j \rightarrow R_j$, $kC_i + C_j \rightarrow C_j$

$R_j \leftarrow R_j + kR_i$, $C_j \leftarrow C_j + kC_i$

Ex

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \end{array}$$

จาก A 1) $R_2 \leftrightarrow R_3$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 7 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = B$

จาก A 2) $C_1 \leftrightarrow C_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 3 \end{bmatrix} = C$

จาก A 3) $2R_1$, $5R_3$ $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 0 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 \end{bmatrix} = D$

จาก D 4) $R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1$ $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 8 & 8 & 21 \\ 35 & 30 & 15 \end{bmatrix} = E$

$0+2(4)$ $4+2(2)$ $1+2(10)$

2) สมมูลตามแถว, หลัก ($\sim$)

$A \sim C$

D ทำแล้วได้ E $\quad D \, r \, E \qquad A \, c \, C$

A ทำแล้วได้ D $\quad A \, r \, D$

A กับ E สมมูล $\quad A \, r \, E$

สมมูลตาม แถว

I_4 $\quad A \sim C$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

รูปแบบปกติ (normal Form)

แบบบัญญัติ สำหรับการสมมูล (Canonical form for equivalence)

↳ การดำเนินการเชิงธาตุมูล $[r \leq m \ \& \ r \leq n]$

Ex

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -8 & -8 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -8 & -8 & 1 \end{bmatrix}$ $C_1 \leftrightarrow C_3$

=?

A สมมูลกับ C

Ex

$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{2}R_1$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{2} \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

ห้ามคูณตัวจะเปลี่ยน

$R_2 \leftarrow R_2 + (-5)R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 + (-3)R_1$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & -\frac{11}{2} \\ 0 & -3 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$

$-\frac{1}{4}R_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{8} \\ 0 & -3 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$

$R_1 \leftarrow R_1 + (-1)R_2$, $R_2 \leftarrow R_2 + 3R_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{8} \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$

$\frac{8}{5}R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{8} \\ 0 & 1 & \frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R_1 \leftarrow R_1 + (-\frac{9}{8})R_3$, $R_2 \leftarrow R_2 + (-\frac{11}{8})R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์มูลฐาน (I_n)

$$I_n \,,\; I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + (-2)R_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2$$

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} = R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$B = E_{10}E_9E_8 \ldots E_1 A$$

เมทริกซ์เอกฐาน (Singular matrix)

↳ $\det = 0$

- ทุกเมทริกซ์มูลฐาน ไม่เป็นเมทริกซ์เอกฐาน
- A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส

  A จะเป็นเมทริกซ์ ไม่เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ A สมมูลตามแถว (หลัก) กับ I_n
- ให้ A, B เป็นเมทริกซ์อันดับ $m \times n$

  A จะสมมูลกับ B ก็ต่อเมื่อ $B = PAQ$, PQ เป็นเมทริกซ์ ไม่เอกฐาน
- A, B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส อันดับ n

  $AB = BA = I_n$

  จะได้ว่า A เป็นเมทริกซ์ผกผันของ B เขียนแทนด้วย $A = B^{-1}$ | B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A เขียนแทนด้วย $B = A^{-1}$

$$[A : I_n] \sim [I_n : A^{-1}]$$

เมทริกซ์แต่งเติม

Ex $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

sol^{n} $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$R_1 \leftrightarrow R_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$R_2 \leftarrow R_2 + (-2)R_1$
$R_3 \leftarrow R_3 + (-3)R_1$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$

ตามแถว!!! ทำแค่แถวนั้ว

$R_3 \leftarrow R_3 + (-1)R_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$

$-\frac{1}{3}R_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$

$R_1 \leftarrow R_1 + (-1)R_3$
$R_2 \leftarrow R_2 + (-1)R_3$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ex $B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$R_2 \leftarrow R_2 + (-1)R_1$
$R_3 \leftarrow R_3 + (-5)R_1$ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$-\frac{1}{4}R_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$R_3 \leftarrow R_3 + 12R_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & -3 & 1 \end{array}\right]$

B เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

09/08

แรงก์ของเมทริกซ์ (Rank of a matrix)

จำนวนเต็มบวก r ที่มีค่าสูงสุด ซึ่งเมทริกซ์ย่อยขนาด r ของ A มีดีเทอร์มิแนนต์ ไม่เท่ากับ 0

Ex $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 2(10) + 7 + 3(-9) = 0$$

พิจารณา $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} = 8 + 1 = 9 \neq 0$

✓ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

rank(A) = 2

✓ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

✓ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

$A \sim B$

* เมทริกซ์ที่สมมูลกัน จะมีแรงค์เท่ากัน

Ex จงหา Rank(A) เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sol$^{\underline{n}}$

$$A \underset{R_4 \leftrightarrow R_1}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{-1R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad |A| = 0$$

$$\underset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$R \leftarrow R_1 + R_2$

$R_3 \leftarrow R_3 + (-4)R_2$

$R_4 \leftarrow R_4 + (-1)R_2$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{-\frac{1}{12}R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftarrow R_1 + (-3)R_3$

$R_2 \leftarrow R_2 + (-3)R_3$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & I_3 & & \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rank(A) = 3

① $C_4 \leftarrow C_4 + \left(-\frac{1}{2}\right)C_1$

② $C_4 \leftarrow C_4 + \left(-\frac{1}{2}\right)C_2$

③ $C_4 \leftarrow C_4 + \frac{1}{6}C_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank(A) = 3

ระบบสมการเชิงเส้น

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} m \text{ สมการ} \\ n \text{ ตัวแปร} \end{array}$$

b_i ค่าคงที่ (ด้านขวามือ)

a_{ij} สัมประสิทธิ์ ของระบบสมการ

x_i ตัวแปรไม่ทราบค่า

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} 3 \text{ สมการ} \\ 3 \text{ ตัวแปร} \end{array}$$

ถ้า $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ ทำให้ระบบสมการเป็นจริง

แล้ว $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

Ex $\quad 2x_1 + 3x_2 = 4$

$\quad 4x_1 + 6x_2 = 5$

$2 \times ①$; $4x_1 + 6x_2 = 8$ — ③

③ - ② $\quad 0 = 3$ ระบบมีความขัดแย้ง

ไม่จริง

ระบบสมการเชิงเส้นไม่มีผลเฉลย

Noted : ถ้า $b_i = 0$ ทุก $i = 1, \dots, m$ จะเรียกว่า ระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์
ระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ไม่มีความขัดแย้ง จะเรียกผลเฉลยว่า
ผลเฉลยชัด เนื่องจาก $(0, 0, \dots, 0)$ เป็นผลเฉลย

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์

$$Ax = B$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{3n} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$[A : B]$ เมทริกซ์แต่งเติมแล้ว

* ระบบสมการเชิงเส้น $Ax = B$ เป็นระบบที่ไม่มีความขัดแย้ง (มีผลเฉลย)

ก็ต่อเมื่อ $\text{Rank}(A) = \text{Rank}([A : B])$

* $Ax = B$ จะมีผลเฉลยเดียว ก็ต่อเมื่อ $\text{Rank}[A : B]$ = จำนวนตัวแปร $= n$

$Ax = B$

n ตัวแปร

- $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A : B) = r$
  ไม่มีความขัดแย้ง
  มีผลเฉลย
  - $r = n$
    มีผลเฉลยเดียว
  - $r < n$
    มีผลเฉลยจำนวนอนันต์
- $\text{Rank}(A) < \text{Rank}[A : B]$
  มีความขัดแย้ง

Ex พิจารณาระบบสมการ $Ax = B$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$$
$$4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 6$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$n = 3, n = 2$

Rank A, $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_3 \leftarrow R_3 + (-\frac{1}{2})R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Rank A $= 2$

Rank[A:B], $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right] \quad R_3 \leftarrow R_3 + (-\frac{1}{2})R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9/2 \end{array}\right]$

Rank[A:B] $= 3$

$2 = \text{Rank}(A) \neq \text{Rank}[A:B] = 3$

ระบบมีความขัดแย้ง

Ex $2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$

$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16$

Sol$^{\underline{n}}$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 10 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{array}\right] \overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 16 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_3 \leftarrow R_3 + (-2)R_1}{\overset{R_2 \leftarrow R_2 + (-3)R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 16 \\ 0 & -7 & -8 & -38 \\ 0 & -5 & -2 & -16 \end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{7}R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{38}{7} \\ 0 & -5 & -2 & -16 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_3 \leftarrow R_3 + 5R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{38}{7} \\ 0 & 0 & \frac{26}{7} & \frac{78}{7} \end{array}\right]$$

$$\overset{\frac{7}{26}R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 16 \\ 0 & 1 & 8/7 & \frac{38}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16$

$x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{38}{7}$

$x_3 = 3$

$x_2 + \frac{8}{7}(3) = \frac{38}{7}$

$x_2 = 2$

$x_1 + 3(2) + 3(3) = 16$

$x_1 = 1$

$(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$ #

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \#$$

วิธีเกาส์ชอดอง
(Gauss - Jordom)

Ex
$$\begin{aligned} 6x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ -12x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -8 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Sol^{n}
$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -12 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[A:B] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & -1 & 4 \\ -12 & 2 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \underset{\sim}{\tfrac{1}{6}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/6 & -1/6 & 2/3 \\ -12 & 2 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_3 \leftarrow R_3 + (-5)R_1}{\overset{R_2 \leftarrow R_2 + (12)R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/6 & -1/6 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/6 & -1/6 & 2/3 \\ 0 & 11/6 & -1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{6/11 R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/6 & -1/6 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/11 & 2/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{1}{6}x_2 - \tfrac{1}{6}x_3 &= \tfrac{2}{3} \\ x_2 - \tfrac{1}{11}x_3 &= \tfrac{2}{11} \end{aligned}$$

ให้ $x_3 = t$ จะได้ว่า

$$x_1 - \tfrac{1}{6}x_2 - \tfrac{1}{6}t = \tfrac{2}{3}$$
$$x_2 - \tfrac{1}{11}t = \tfrac{2}{11}$$
$$\boxed{x_2 = \tfrac{1}{11}t + \tfrac{2}{11}}$$

จะได้ $x_1 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{11}(t+2)\right) - \frac{1}{6}t = \frac{2}{3}$

$$x_1 = \frac{1}{66}(t+2) + \frac{1}{6}t + \frac{2}{3}$$
$$= \frac{t+2+11t+44}{66}$$
$$= \frac{12t+44}{66} = \frac{6t+23}{33}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{6t+23}{33}, \frac{t+2}{11}, t\right)$$

3 ตัวแปร 2 สมการ $\Rightarrow t$

5 〃 3 สมการ $\Rightarrow s, t$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 11$$

$$x_1 - x_3 - 2x_4 = -6$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -11 \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$6x - y - z = 4$$
$$-12x + 2y + 2z = -8$$
$$5x + y - z = 3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & -1 & 4 \\ -12 & 2 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - R_3 \left[\begin{array}{ccc|c} \overset{1}{\cancel{6-5}} & \overset{-2}{\cancel{-1-1}} & \overset{0}{\cancel{-1-(-1)}} & \overset{1}{\cancel{4-3}} \\ -12 & 2 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftarrow R_2 + 12R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ \overset{0}{\cancel{-12+12}} & \overset{-22}{2+\cancel{(-24)}} & \overset{2}{2+0} & \overset{4}{-8+12} \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 5R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -22 & 2 & 4 \\ \underset{0}{\cancel{5-5}} & \underset{11}{1-\cancel{(-10)}} & \underset{-1}{-1\cancel{+0}} & \underset{-2}{3\cancel{-5}} \end{array}\right]$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + \frac{R_2}{2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -22 & 2 & 4 \\ 0+0 & \underset{0}{11+\cancel{\left(\frac{-22}{2}\right)}} & \underset{0}{\cancel{-1+\frac{2}{2}}} & \underset{0}{\cancel{-2+\frac{4}{2}}} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -22 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x - 2y = 1$$
$$-22y + 2z = 4$$
$$-22y + 2t = 4$$
$$y = \frac{4-2t}{-22} = \frac{-2+t}{11}$$
$$x + \frac{4-2t}{11} = 1 \quad ; \quad x = \frac{7+2t}{11}$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{7+2t}{11}, \frac{-2+t}{11}, t\right)$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$
$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_3$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2-1 & 1-3 & 4-3 & 16-16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3-3 & 2-(-6) & 1-3 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{array}\right]$$

$x - \cancel{2y}^{-4} + \cancel{z}^{3} = 0 \rightarrow x = 1$

$8y - \cancel{2z}^{-6} = 10 \rightarrow y = 2$

$z = 3$

$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 10 \\ 0 & 5 & 2 & 16 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow R_3 - \frac{5}{8}R_2$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 10 \\ 0 & 5-\left(\frac{5}{\cancel{8}}\right)\cancel{8} & 2-\left(\frac{5}{\cancel{8}_{4}}\right)(-\cancel{2}) & 16-\left(\frac{5}{\cancel{8}_{4}}\right)(\cancel{10}^{5}) \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & \frac{\cancel{13}^{1}}{\cancel{4}} & \frac{\cancel{39}^{3}}{\cancel{4}} \end{array}\right]$$

$\frac{2(4)+5}{4}$ $\qquad$ $\frac{64-25}{4} = \frac{39}{4}$