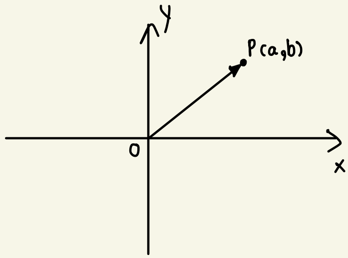
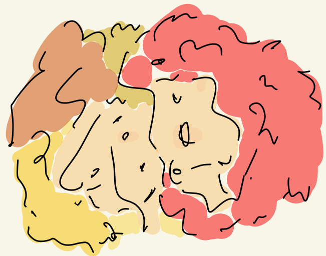
30/06

0.3
0.1
0.2

Vector



$\vec{OP} = a\bar{i} + b\bar{j} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

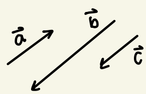


Def : ______________

① $\bar{a} \parallel \bar{b}$ $\rightleftarrows$, $\rightrightarrows$, $\nearrow\nearrow$

② $\bar{a} \parallel \bar{b}$; $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$
↓
เวกเตอร์ 0

$\vec{a} = m\vec{b}$ $m > 0$	$\vec{a} = k\vec{c}$ $k < 0$



③ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) มีขนาด 1 หน่วย

- $\vec{a} \rightarrow |\vec{a}|$ ขนาดของ $\bar{a}$

→ $\pm \dfrac{1}{|\bar{a}|} \bar{a}$ ⇒ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางขนาน กับ $\bar{a}$

④ ผลบวกเชิงเส้น

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ linear combination

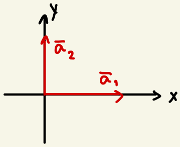
$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} + c\vec{z}$

- $\bar{a} = k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + k_3\bar{a}_3 + \dots + k_n\bar{a}_n$

5) อิสระเชิงเส้น (linearly independant) ไม่เกี่ยวกันเลยย

$k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + \dots + k_n\bar{a}_n = 0$

ก็ต่อเมื่อ $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_n = 0$



Ex $k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 = 0$

พิสูจน์

$k_1\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\quad \bar{a}_1 \neq 0$, $\bar{a}_2 \neq 0$

$\begin{bmatrix}k_1 a\\k_2 b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$k_1 a = 0$	$k_2 b = 0$
$a \neq 0$	$b \neq 0$
$\Rightarrow k_1 = 0$	$\Rightarrow k_2 = 0$

6) ถ้า $\bar{a} \neq 0$, $\bar{b} \neq 0$ $\bar{a}$ ไม่ขนานกับ $\bar{b}$ แล้ว $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ถ้าแล้ว

$\begin{bmatrix} p \rightarrow q \\ p \leftrightarrow q \end{bmatrix}$

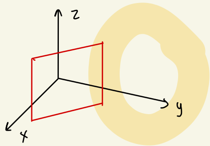
T → F ≡ F กรณีเดียว

T → T ≡ T เท่านั้น

อารมณ์แบบ i, j, k

อิสระ ไม่เกี่ยวข้อง

7) เวกเตอร์ร่วมระนาบเดียวกัน (coplaner) 3 เวกเตอร์

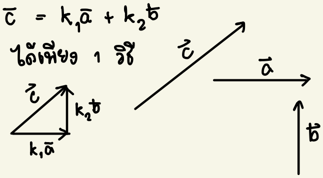


8) $\bar{a} \neq 0$, $\bar{b} \neq 0$ $\bar{a}$ ไม่ขนานกับ $\bar{b}$

ถ้า $\bar{c}$ เป็นเวกเตอร์ที่อยู่บนระนาบเดียวกัน $\bar{a}$, $\bar{b}$

$\bar{c} = k_1\bar{a} + k_2\bar{b}$

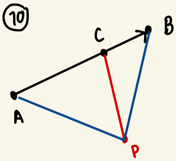
ได้เพียง 1 วิธี



9) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ 0 และไม่ร่วมระนาบเดียวกัน

และไม่มีเวกเตอร์คู่ขนาน จะได้ว่า $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

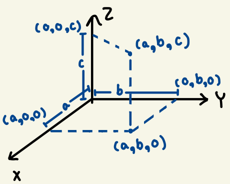
10)



$\overline{PC} = (1-m)\overline{PA} + m\overline{PB}$

$0 < m < 1$

เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ



xy

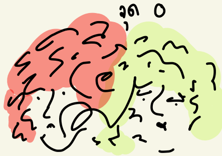
zy

xy ตัดกับ zy = y

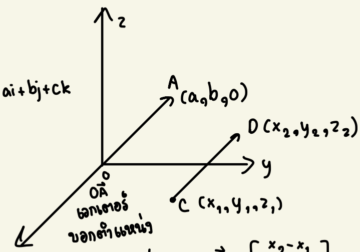
xy ตัดกับ xz = x

xz ตัดกับ yz = z

จุด 0

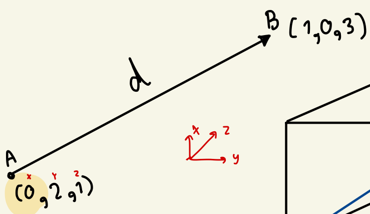


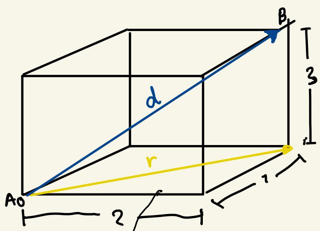
$u = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = ai + bj + ck$



$\vec{u} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$

$\bar{i}$	unit vector direction	+x	เริ่ม	0	ปลาย	(1,0,0)
$\bar{j}$	~ ____________ ~	+y	~	0	~	(0,1,0)
$\bar{k}$	~ ____________ ~	+z	~	0	~	(0,0,1)





$1^2 + 2^2 + 2^2$

$1 + 4 + 4$

$r^2 = 2^2 + 1^2$

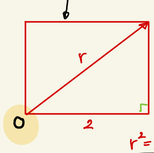
$r = \sqrt{2^2 + 1^2}$

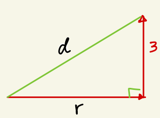
- - - - - - - -

$d^2 = r^2 + 2^2$

$= 2^2 + 1^2 + 3^2 = 4 + 1 + 9 = 14$

$d = \sqrt{14}$





$r^2 = 2^2 + 1^2$

$d^2 = r^2 + 3^2$

$d^2 = (2^2 + 1^2) + 3^2$

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = |\overline{AB}|}$$

5107

ทฤษฎีบท

$\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$

$\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$

m สเกลาร์
↳ ความชัน

1) $\bar{a} = \bar{0} \iff a_1 = a_2 = a_3 = 0$

2) $\bar{a} = \bar{b} \iff a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$

3) $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_1 \pm b_1)\bar{i} + (a_2 \pm b_2)\bar{j} + (a_3 \pm b_3)\bar{k}$

4) $m\bar{a} = ma_1\bar{i} + ma_2\bar{j} + ma_3\bar{k}$

Ex จงหาเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด $P(2,1,-7)$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกัน
↳ เวกเตอร์ที่เกิดที่จุดกำเนิด

solⁿ

$\overline{OP} = 2\bar{i} + \bar{j} - 7\bar{k}$

หาขนาด → $\sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2 + (-7-0)^2} = |\overline{OP}|$

$\sqrt{2^2 + 1^2 + (-7)^2} = |\overline{OP}|$

$\sqrt{54} = |\overline{OP}|$

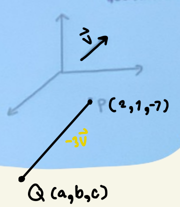
$3\sqrt{6} = |\overline{OP}|$

$\frac{1}{|\overline{OP}|}\overline{OP} = \frac{1}{3\sqrt{6}}(2\bar{i} + \bar{j} - 7\bar{k})$

$= \frac{\sqrt{6}}{9}\bar{i} + \frac{\sqrt{6}}{18}\bar{j} - \frac{7\sqrt{6}}{18}\bar{k}$

$\frac{1}{3\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{18}$

Ex ให้ $P(2,1,-7)$ และ $\vec{v} = -\bar{i} + 2\bar{j} - 5\bar{k}$ จงหาพิกัดของจุด Q ที่ทำให้ $\overline{PQ} = -3\vec{v}$



$-3\vec{v} = \overline{PQ}$

$-3\vec{v} = (a-2)\bar{i} + (b-1)\bar{j} + (c-(-7))\bar{k}$

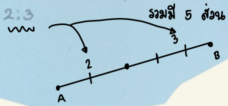
$-3(-\bar{i} + 2\bar{j} - 5\bar{k}) = (a-2)\bar{i} + (b-1)\bar{j} + (c+7)\bar{k}$

$3\bar{i} - 6\bar{j} - 5\bar{k} = (a-2)\bar{i} + (b-1)\bar{j} + (c+7)\bar{k}$

$a = 5,\ b = -5,\ c = 8$

$Q(5,-5,8)$ **Ans**

<u>Ex</u> จงหาพิกัดของจุด C ที่แบ่งส่วนของเส้นตรง จากจุด A(2,2,4) ไปยังจุด B(3,5,15) ด้วยอัตราส่วน 2:3



$\overline{AC} = \frac{2}{5}\overline{AB} \rightarrow (a-2)\bar{i} + (b-2)\bar{j} + (c-4)\bar{k} = \frac{2}{5}\overline{AB}$

$\overline{AB} = (3-2)\bar{i} + (5-2)\bar{j} + (15-4)\bar{k}$

$= \bar{i} + 3\bar{j} + 11\bar{k}$

จะได้ว่า

$(a-2)\bar{i} + (b-2)j + (c-4)\bar{k} = \frac{2}{5}(\bar{i} + 3\bar{j} + 11\bar{k})$

$(a-2)\bar{i} + (b-2)j + (c-4)\bar{k} = \frac{2\bar{i}}{5} + \frac{6\bar{j}}{5} + \frac{22\bar{k}}{5}$

$a-2 = \frac{2}{5}$, $b-2 = \frac{6}{5}$, $c-4 = \frac{22}{5}$

$a = \frac{12}{5}$, $b = \frac{16}{5}$, $c = \frac{42}{5}$

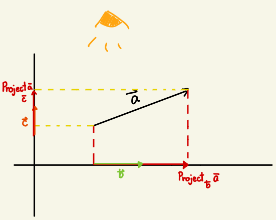
Projection Scalar products

Vector Dot Products

cosθ

ใช้หามุม $\theta = \cos^{-1}\left[\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right]$

$\perp = 0$



Project$_{\vec{c}}\vec{a}$

$\vec{a}$

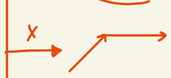
$\vec{c}$

$\vec{b}$

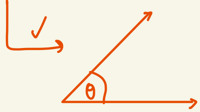
Project$_{\vec{b}}\vec{a}$

<u>บทนิยาม</u> $\bar{a}$, $\bar{b}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ และมีจุดเริ่มต้นเดียวกัน จะเรียกมุม θ ที่มีค่า 0 ถึง π (ตามเข็มหรือทวนเข็มนาฬิกาก็ได้) เป็นมุมระหว่าง $\bar{a}$ และ $\bar{b}$

ไม่ใช่เวกเตอร์ หาง ต่อ หัว



X



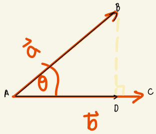
✓

θ

ถ้า $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

จะได้ว่า $\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a} = |\overline{AD}|$

$= |\vec{a}|\cos\theta$



$\vec{a}$

θ

A

B

C

D

$\vec{b}$

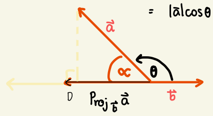
ถ้า $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$

จะได้ว่า $\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a} = -|\overline{AD}|$

$= -|\vec{a}|\cos(\pi-\theta)$

$= -|\vec{a}|\cos(-\theta)$

$= |\vec{a}|\cos\theta$



$\vec{a}$

α

θ

D

$\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a}$

$\vec{b}$

Note

$$Proj_{\bar{b}}(\bar{a}+\bar{c}) = Proj_{\bar{b}}\bar{a} + Proj_{\bar{b}}\bar{c}$$

บทนิยาม ให้ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ เป็นเวกเตอร์ผลคูณเชิงสเกลาร์ ของ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ เขียนแทนด้วย $\bar{a}\cdot\bar{b}$ นั้นคือ

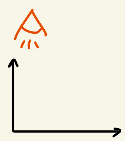
$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \begin{cases} |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta & \text{ถ้า } \bar{a}\neq\bar{0} \text{ และ } \bar{b}\neq\bar{0} \\ 0 & \text{ถ้า } \bar{a}=0 \text{ หรือ } \bar{b}=0 \end{cases}$$

เมื่อ $0 \le \theta \le \pi$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{a}, \bar{b}$

Note

$\bar{a}, \bar{b}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

1. $\bar{a}\cdot\bar{b} > 0 \iff 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
2. $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$
3. $\bar{a}\cdot\bar{b} < 0 \iff \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$
4. $\bar{i}\cdot\bar{i} = 1 = \bar{j}\cdot\bar{j} = \bar{k}\cdot\bar{k}$
5. $\bar{i}\cdot\bar{j} = 0 = \bar{j}\cdot\bar{k} = \bar{k}\cdot\bar{i}$



ทฤษฎีบท $\bar{a}, \bar{b}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

จะได้ $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\,Proj_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\,Proj_{\bar{b}}\bar{a}$

$[\,|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta\,]$

ทฤษฎีบท $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ เป็นเวกเตอร์และ m เป็นสเกลาร์

1. $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$
2. $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}$
3. $\bar{a}\cdot(m\bar{b}) = m(\bar{a}\cdot\bar{b}) = (m\bar{a})\cdot\bar{b}$
4. $\bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}|^2 \rightarrow \cos 0 = 1$

ถ้า $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$

แล้ว $\bar{a}\cdot\bar{b} = (a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k})\cdot(b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k})$

$\bar{i}\cdot\bar{j} = 0 = \bar{j}\cdot\bar{k} = \bar{k}\cdot\bar{i}$

$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Ex $\bar{a} = 5\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$ และ $\bar{b} = -\bar{i} - 2\bar{j} + 7\bar{k}$

① $\bar{a} \cdot \bar{b} = (5)(-1) + (-1)(-2) + (2)(7)$

$= -5 + 2 + 14 = 11$

② $Proj_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\theta$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{b}| Proj_{\bar{b}}\bar{a}$

$Proj_{\bar{b}}\bar{a} = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$

$Proj_{\bar{b}}\bar{a} = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$

$= \dfrac{11}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 7^2}} = \dfrac{11}{\sqrt{54}} = \dfrac{11}{3\sqrt{6}}$

③ จาก $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|a||b|}$

$\theta = \cos^{-1}\left[\dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|a||b|}\right]$

$\theta = \cos^{-1}\left[\dfrac{11}{\sqrt{30} \cdot 3\sqrt{6}}\right] = \cos^{-1}\left[\dfrac{11}{3\sqrt{180}}\right]$ #

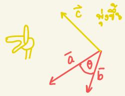
7/07

Vector Cross Products

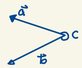
ตั้งฉากกันให้ cross

บทนิยาม ให้ $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$
ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ เขียนแทนด้วย $\bar{a} \times \bar{b}$
$\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq 0$, θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{a}$ และ $\bar{b}$

ถ้าให้ $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, $\bar{c} \perp \bar{a}$ และ $\bar{c} \perp \bar{b}$



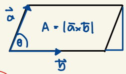
กฎมือขวา



ถ้าให้ $\bar{a} = \bar{0}$ หรือ $\bar{b} = \bar{0}$ แล้ว $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$

$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta$

$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{b} \times \bar{a}|$



พิสูจน์

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta$$
$$= \sqrt{|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2}$$

, $0 \leq \theta \leq 180^\circ$
$0 \leq \theta \leq \pi$

$\cos\theta = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$
$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2}{(|\bar{a}||\bar{b}|)^2}}$$
$$= \frac{1}{|\bar{a}||\bar{b}|}\sqrt{|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2}$$

ทฤษฎีบท

① $\bar{a} \neq 0$, $\bar{b} \neq 0$ ถ้า $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \iff \bar{a}$ ขนานกับ $\bar{b}$

② $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{0} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k}$

③ $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$, $\bar{i} \times \bar{j} = -(\bar{j} \times \bar{i})$

④ $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) + (\bar{a} \times \bar{c})$

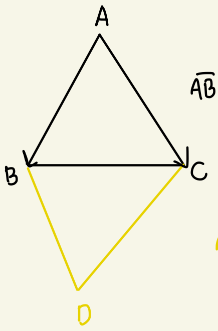
⑤ $m(\bar{a} \times \bar{b}) = (m\bar{a}) \times (\bar{b}) = \bar{a} \times (m\bar{b})$

เวกเตอร์ x เวกเตอร์

⑥ $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\bar{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\bar{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\bar{k}$$
$$= \det\begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Ex ให้ $A(2,2,4)$, $B(3,4,-7)$, $C(4,-1,-4)$



$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

ABCD ได้ สี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC} = 2-6+88$$
$$= 84$$

พท. $\Delta ABC = \frac{1}{2}\times|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$\overrightarrow{AB} = \bar{i}+2\bar{j}-11\bar{k}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{126}$

$\overrightarrow{AC} = 2\bar{i}-3\bar{j}-8\bar{k}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{77}$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$
$$= \sqrt{(126)(77)-(84)^2}$$
$$= \frac{21}{2}\sqrt{6}$$ ตร.หน่วย

$\overrightarrow{AB} = \bar{i}+2\bar{j}-11\bar{k}$

$\overrightarrow{AC} = 2\bar{i}-3\bar{j}-8\bar{k}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -11 \\ 2 & -3 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= -49\bar{i}-14\bar{j}-7\bar{k}$$

$$|\overline{AB}\times\overline{AC}| = \sqrt{(-49)^2+(-14)^2+(-7)^2}$$

ตำแหน่ง(−)

$$= 21\sqrt{6}$$

$m\,\Delta = \frac{1}{2}(21\sqrt{6}) = \frac{21}{2}\sqrt{6}$ หน่วย^2

ผลคูณสามชั้น (Triple products)

$\bar{a}\times\bar{b}\times\bar{c}$ ← ผลคูณเชิงเวกเตอร์สามชั้น

$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$ ← ผลคูณเชิงสเกลาร์สามชั้น

$* \; \bar{a} = a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k}$

$\bar{b} = b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k}$

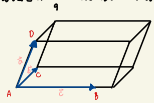
$\bar{c} = c_1\bar{i}+c_2\bar{j}+c_3\bar{k}$

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) = \bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{a})$$

$|\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})|$ = ปริมาตรของรูปทรง □ ด้านขนาน ที่มี $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ เป็นด้านขอบที่มีจุดเริ่มต้นเดียวกัน

ถ้า $|\overrightarrow{AB}\cdot(\overline{AC}\times\overline{AD})| = 0$ จะได้ A, B, C, D อยู่บนระนาบเดียวกัน



a, b, c

1) $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b}-(\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c}$

2) $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} = (\bar{c}\cdot\bar{a})\bar{b}-(\bar{c}\cdot\bar{b})a$

ชื่อ-สกุล จิรพัชร ศิริสุวรรณ รหัสประจำตัว 653040441-7 Sec.

ใบงานที่ 1

เวกเตอร์

---

1. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด P เมื่อกำหนดจุด P ให้ดังต่อไปนี้

1.1) P(-3,4,5)

1.2) P(-2,2,-1)

1.1 $P(-3,4,5) = -3\bar{i}+4\bar{j}+5\bar{k}$

$\frac{1}{|\overline{OP}|}\cdot\overrightarrow{OP}$ } $|\overline{OP}| = \sqrt{(-3-0)^2+(4-0)^2+(5-0)^2}$

$= \sqrt{50}$

$= 5\sqrt{2}$

$\frac{1}{|\overline{OP}|}\cdot\overrightarrow{OP} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(-3\bar{i}+4\bar{j}+5\bar{k})$

$= \frac{-3\bar{i}}{5\sqrt{2}} + \frac{4\bar{j}}{5\sqrt{2}} + \frac{5\bar{k}}{5\sqrt{2}}$

$= \frac{-3\sqrt{2}\bar{i}}{10} + \frac{2\sqrt{2}\bar{j}}{5} + \frac{\sqrt{2}\bar{k}}{2}$

1.2 $P(-2,2,-1) \Rightarrow -2\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$

$\frac{1}{|\overline{OP}|}\cdot\overrightarrow{OP}$ } $|\overline{OP}| = \sqrt{(-2-0)^2+(2-0)^2+(-1-0)^2}$

$= \sqrt{9} = 3$

$\frac{1}{|\overline{OP}|}\cdot\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(-2\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k})$

$= \frac{-2\bar{i}}{3} + \frac{2\bar{j}}{3} - \frac{\bar{k}}{3}$

2. กำหนดให้ $P_1 = (3,-1,17)$ และ $P_2 = (8,9,2)$ จงหาจุดซึ่งแบ่งส่วนของเส้นตรง P_1P_2 ด้วยอัตราส่วนดังต่อไปนี้

2.1) 1 ต่อ 1

2.2) 2 ต่อ 3

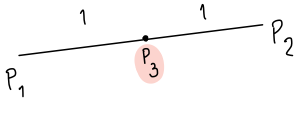
2.3) 4 ต่อ 5

$\overline{P_1P_2} = (8,9,2) - (3,-1,17)$

$= (8-3)\bar{i} + (9-(-1))\bar{j} + (2-17)\bar{k}$

$= 5\bar{i} + 10\bar{j} - 15\bar{k}$

2.1



$\overline{P_1P_3} = \frac{1}{2}\overline{P_1P_2}$

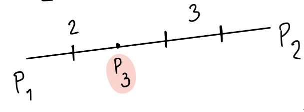
$(a-3)\bar{i}+(b+1)\bar{j}+(c-17)\bar{k} = \frac{1}{2}(5\bar{i}+10\bar{j}-15\bar{k})$

$(a-3)\bar{i}+(b+1)\bar{j}+(c-17)\bar{k} = \frac{5\bar{i}}{2}+5\bar{j}-\frac{15}{2}\bar{k}$

$a-3 = \frac{5}{2}$, $a = \frac{11}{2}$ | $b+1 = 5$, $b = 4$ | $c-17 = -\frac{15}{2}$, $c = \frac{19}{2}$

$P_3 = (\frac{11}{2}, 4, \frac{19}{2})$

2.2



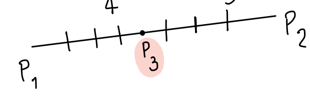
$\overline{P_1P_3} = \frac{2}{5}\overline{P_1P_2}$

$(a-3)\bar{i}+(b+1)\bar{j}+(c-17)\bar{k} = \frac{2}{5}(5\bar{i}+10\bar{j}-15\bar{k})$

$(a-3)\bar{i}+(b+1)\bar{j}+(c-17)\bar{k} = 2\bar{i}+4\bar{j}-6\bar{k}$

$a-3 = 2$, $a = 5$ | $b+1 = 4$, $b = 3$ | $c-17 = -6$, $c = 11$

$P_3 = (5, 3, 11)$



$\overline{P_1P_3} = \frac{4}{9}\overline{P_1P_2}$

$(a-3)\bar{i}+(b+1)\bar{j}+(c-17)\bar{k} = \frac{4}{9}(5\bar{i}+10\bar{j}-15\bar{k})$

$(a-3)\bar{i}+(b+1)\bar{j}+(c-17)\bar{k} = \frac{20\bar{i}}{9}+\frac{40\bar{j}}{9}-\frac{20}{3}\bar{k}$

$a-3 = \frac{20}{9}$, $a = \frac{47}{9}$ | $b+1 = \frac{40}{9}$, $b = \frac{31}{9}$ | $c-17 = \frac{20}{3}$, $c = \frac{71}{3}$

$P_3 = (\frac{47}{9}, \frac{31}{9}, \frac{71}{3})$

3. จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ และจงหา $\mathrm{Proj}_{\bar{b}}\bar{a}$ ของข้อต่อไปนี้

3.1) $\bar{a} = \bar{\imath} + 3\bar{\jmath} - 2\bar{k}$ และ $\bar{b} = 2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} - \bar{k}$

$$a \cdot b = |a||b| \cos\theta$$

$$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{a \cdot b}{|a||b|}\right]$$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{16}{\sqrt{14}\sqrt{21}}\right]$$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{16}{7\sqrt{6}}\right]$$

$$\theta_{ab} \approx 21.07^{\circ} \ *$$

$$\mathrm{Proj}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$$

$$= \frac{16}{\sqrt{21}} \ *$$

$$a \cdot b = (1)(2) + (3)(4) + (-2)(-1)$$

$$= 2 + 12 + 2$$

$$= 16$$

$$|a| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{14}$$

$$|b| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{21}$$

4. กำหนดให้ $A = (3,-1,2), B = (1,-1,-3)$ และ $C = (4,-3,1)$

4.1) จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับรูปสามเหลี่ยม ABC

4.2) จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 10\bar{i} - 7\bar{j} + 4\bar{k} \ *$$

$$= 100 + 49 + 16$$

$$= 165$$

4.2) $\vec{AB} = (1-3)\bar{i} + (-1+1)\bar{j} + (-3-2)\bar{k}$

$$= -2\bar{i} - 5\bar{k}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

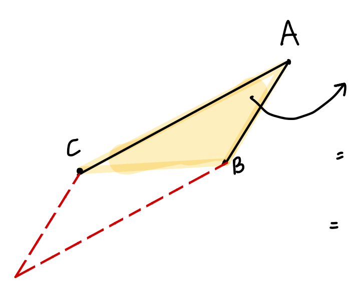
$$\vec{AC} = (4-3)\bar{i} + (-3+1)\bar{j} + (1-2)\bar{k}$$

$$= \bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$AB \cdot AC = (-2)(1) + (0)(-2) + (-5)(-1)$$

$$= -2 + 0 + 5 = 3$$



$$\frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|AB|^2|AC|^2 - (AB \cdot AC)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{29 \times 6 - 9}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{165} = 6\sqrt{21}$$

$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}$

$$\vec{V} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$$

5. จงแสดงว่าเวกเตอร์ $\bar{\mathrm{v}}$ ใดๆ จะสอดคล้องเอกลักษณ์

$$\bar{\imath} \times (\bar{v} \times \bar{\imath}) + \bar{\jmath} \times (\bar{v} \times \bar{\jmath}) + \bar{k} \times (\bar{v} \times \bar{k}) = 2\bar{v}$$

$$\left[(i \cdot i)\vec{v} - (i \cdot \vec{v})i\right] + \left[(j \cdot j)\vec{v} - (j \cdot \vec{v})j\right] + \left[(k \cdot k)\vec{v} - (k \cdot \vec{v})k\right] = 2\vec{V}$$

$$\left[\vec{V} - (i \cdot \vec{V})i\right] + \left[\vec{V} - (j \cdot \vec{V})j\right] + \left[\vec{V} - (k \cdot \vec{V})k\right] = 2\vec{V}$$

$$3\vec{V} - \left[\underbrace{(i \cdot \vec{V})i + (j \cdot \vec{V})j + (k \cdot V)\bar{k}}\right] = 2\vec{V}$$

$$\left[i \cdot (a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k})\right]i + \left[j \cdot (a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k})\right]j$$

$$+ \left[k \cdot (a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k})\right]k$$

$$= (a_1 + 0 + 0)\bar{i} + (0 + a_2 + 0)\bar{j} + (0 + 0 + a_3)\bar{k}$$

$$= a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$$

$$3\vec{V} - \left[\underbrace{a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}}\right] = 2\vec{V}$$

$$3\vec{V} - \vec{V} = 2\vec{V}$$

$$2\vec{V} = 2\vec{V}$$