TP1_IARD2

Ruffin Adja,Teffery Makondé

26 March 2022

Question 1

a) Calcul de $\widehat{\lambda}$, l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre d'une loi exponentielle

La densité d'une variable aléatoire X d'une loi expontentielle de paramètre λ est:

$$f_X(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \ , \ \lambda > 0$$

En appliquant le logarithme de part et d'autre de l'égalité, on a:

$$ln(f_X(x, \lambda)) = ln(\lambda) - \lambda x$$

La dérivée par rapport à λ nous donne:

$$\frac{\partial ln((f_X(x, \lambda))}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} - x$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \partial ln((f_X(x, \lambda))}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \partial ln((f_X(x_i, \lambda))}{\partial \lambda} = 0$$

$$\implies \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\implies \widehat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\widehat{\lambda} = 0.0064725$$

b) Calcul de la valeur théorique et de la valeur empirique de la prime stop-loss pour les valeurs suivantes du déductible : 10, 15, 20, 25, 30

On sait que:

$$E(max(X-d,0)) = E(X) - E(min(X,d))$$

$$E(max(X-d,0)) = \frac{1}{\lambda} - \int_0^d \lambda x e^{-\lambda x} dx - \int_d^\infty d\lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$E(max(X-d,0)) = \frac{1}{\lambda} - \int_0^d \lambda x e^{-\lambda x} dx - \int_d^\infty d\lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$E(max(X-d,0)) = \frac{1}{\lambda} - (-de^{-\lambda d} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda d} + \frac{1}{\lambda}) - (de^{-\lambda d})$$

$$E(max(X-d,0)) = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda d}$$

En ce qui concerne la valeur empirique, $E_{emp}(max(X-d,0))$

$$E_{emp}(max(X-d,0)) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n min(x_i,d)}{n}$$

Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous:

déductible	Prime théorique	Prime Estimée
10	144.8167539	144.5
15	140.2051515	139.5
20	135.7404027	134.5
25	131.4178312	129.5
30	127.2329094	124.5

Selon les résultats obtenus, on peut voir qu'il n'y a pas un gros écart entre la prime théorique et la prime estimée. De plus, on voit que plus grand est le déductible et moins la prime est élevée, donc il y a une plus grande prise en charge en cas de sinistre de la part de l'assuré.

c) Calcul de la valeur théorique et de la valeur empirique de la perte limitée pour les valeurs suivantes de la limite supérieure : 200, 210, 220, 230, 240

si PL est la perte limitée, alors

$$PL = E(min(X,u))$$

On a déja montré que la perte limitée théorique est :

$$E_{th}(min(X,u)) = \int_0^u \lambda x e^{-\lambda x} dx + \int_u^\infty d\lambda e^{-\lambda x} dx$$

soit,

$$E_{th}(min(X,u)) = (-ue^{-\lambda u} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda u} + \frac{1}{\lambda}) + (ue^{-\lambda u})$$

d'où

$$E_{th}(min(X,u)) = \frac{1}{\widehat{\lambda}} - \frac{1}{\widehat{\lambda}}e^{-\widehat{\lambda} u}$$

La perte limitée calculée de façon empirique peut, quant à elle, s'écrire comme suit:

$$E_{em}(min(X,u)) = \frac{\sum_{i=1}^n min(x_i,u)}{n}$$

Les valeurs des pertes limitées sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Limite supérieure	Perte limitée théorique	Perte limitée empirique
200	112.1615476	138.05
210	114.8150987	139.55
220	117.3023392	141.05
230	119.6336927	142.2
240	121.8189291	142.7

On voit que les pertes limitées estimées sont nettement supérieures aux pertes théoriques.

d) Calcul de la prime stop-loss à partir de la simulation des observations d'une loi exponentielle de paramètre $\widehat{\lambda}$

Les valeurs des primes stop-loss par déductible sont présentées dans le tableau ci-dessous. Les primes dans la dernière colonne sont calculées à partir de la simulation d'un échantillon de 100.000 observations.

d	Prime théorique en a)	Prime Estimée en a)	Prime Estimée en d)
10	144.8167539	144.5	145.1597818
15	140.2051515	139.5	140.5477548
20	135.7404027	134.5	136.0861756
25	131.4178312	129.5	131.7678112
30	127.2329094	124.5	127.5841198

Le tableau est construit à partir de la simulation d'un échantillon de 500.000 observations.

d	Prime théorique en a)	Prime Estimée en a)	Prime Estimée en d)
10	144.8167539	144.5	144.5426388
15	140.2051515	139.5	139.9293954
20	135.7404027	134.5	135.4616415
25	131.4178312	129.5	131.1360218
30	127.2329094	124.5	126.9469954

Le tableau est construit à partir de la simulation d'un échantillon de 1.000.000 observations.

d	Prime théorique en a)	Prime Estimée en a)	Prime Estimée en d)
10	144.8167539	144.5	144.8681906
15	140.2051515	139.5	140.2575965
20	135.7404027	134.5	135.7927095
25	131.4178312	129.5	131.4689592
30	127.2329094	124.5	127.2840679

On remarque la valeur de la prime stop-loss calculée de façon empirique se rapproche de sa valeur analytique lorsque le nombre de simulation augmente.Alors la précision d'une tarification est dépendante du nombre d'observations car elle permet un meilleur ajustement.

Question 2

a) Calcul de $\widehat{\lambda}$, l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre d'une loi exponentielle dans le cas où les données sont groupées.

On recherche ici la valeur du paramètre $\widehat{\lambda}$ qui maximise la vraisemblance. Les données étant groupées, la vraisemblance est définie comme suit:

$$L(\widehat{\lambda}) = \prod_{i=1}^{n} [F(c_j) - F(c_{j-1})]^{n_i}$$

On peut la réécrire en appliquant le logarithme à chaque membre de l'égalité:

$$l(\widehat{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} n_i log([F(c_j) - F(c_{j-1})])$$

En appliquant une méthode numérique, on obtient:

$$\widehat{\lambda} = 0.0013924$$

b) Estimation de la prime stop-loss pour les données groupées et pour les valeurs suivantes du déductible: 25, 30, 35, 40, 45.

Connaissant la valeur du paramètre, on peut maintenant estimer la prime stop-loss comme suit:

$$E(max(X - d, 0)) = \frac{1}{\widehat{\lambda}} e^{-\widehat{\lambda} d}$$

La prime stop-loss par déductible est présentée dans le tableau ci-dessous.

d	Prime stop-loss
10	693.6221137
15	688.8099379
20	684.0311477
25	679.2855116
30	674.5727995

On peut faire la même observation que pour la question 1, c'est que la prime diminue si le déductible augmente car il y a une plus grande prise en charge du risque par l'assuré. Alors pour l'assureur, le déductible permet de lutter contre l'antisélection.

c) Estimation de la perte limitée pour les données sont groupées et pour les valeurs suivantes de la limite supérieure: 2000, 2500, 3000, 3500, 4000.

La perte limitée est obtenue par la formule ci-après:

$$E_{th}(min(X, u)) = \frac{1}{\widehat{\lambda}} - \frac{1}{\widehat{\lambda}} e^{-\widehat{\lambda} u}$$

La perte limitée par limite supérieure est présentée dans le tableau ci-dessous.

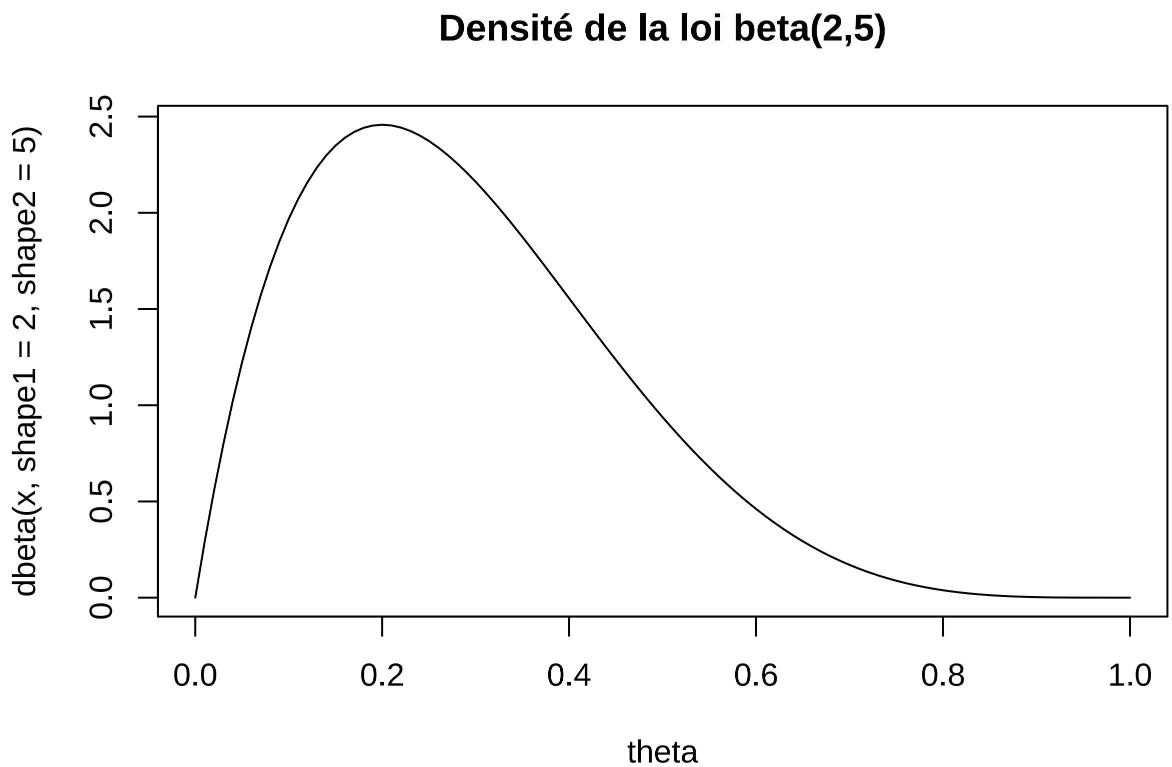
Limite supérieure	Perte limitée théorique
2000	673.8484917
2500	696.0876661
3000	707.1734402
3500	712.6994722
4000	715.4540863

On voit que malgré des limites assez élevées, les pertes n'atteignent pas la moitié des limites fixées par les contrats.

Question 3

a) Distribution beta(a=2;b=5)

Le paramètre à estimer suit une loi beta(a=2; b=5) dont la courbe de densité est présentée ci-dessous.



Le mode est la valeur M pour laquelle la densité est maximale. On le calcule comme suit:

Le mode est $M_1 = \frac{a-1}{a+b-2} = \frac{2-1}{2+5-2} = \frac{1}{5}$.

La moyenne est $E_1(X) = \frac{a}{a+b} = \frac{2}{7}$.

La moyenne et le mode sont relativement proches, bien que la moyenne soit légèrèment plus élevée que le mode.

b) La distribution a posteriori

$$\pi_{(\Theta|X)}(\theta|x) = \frac{f_{X(x,\theta)}\pi(\theta)}{\int_0^1 f_{X(x,\theta)}\pi(\theta)d\theta}$$

où

$$f_{X(x,\theta)} = \frac{(x+r-1)!}{(r-1)! * (x-r)!} * \theta^r * (1-\theta)^x$$

$$f_{X(x,\theta)} = \frac{(5+2-1)!}{(2-1)! * (5-2)!} * \theta^2 * (1-\theta)^5$$

$$f_{X(x,\theta)} = 120 * \theta^2 * (1-\theta)^5$$

et

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)*\Gamma(b)} * \theta^{a-1} * (1-\theta)^{b-1}$$
$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(2)*\Gamma(5)} * \theta^{2-1} * (1-\theta)^{5-1}$$
$$\pi(\theta) = 30 * \theta * (1-\theta)^4$$

Ainsi,

$$\pi_{(\Theta|X)}(\theta|x) = k * 120 * \theta^2 * (1-\theta)^5 * 30 * \theta * (1-\theta)^4$$

devient

$$\pi_{(\Theta|X)}(\theta|x) = 3600k * \theta^3 * (1-\theta)^9$$

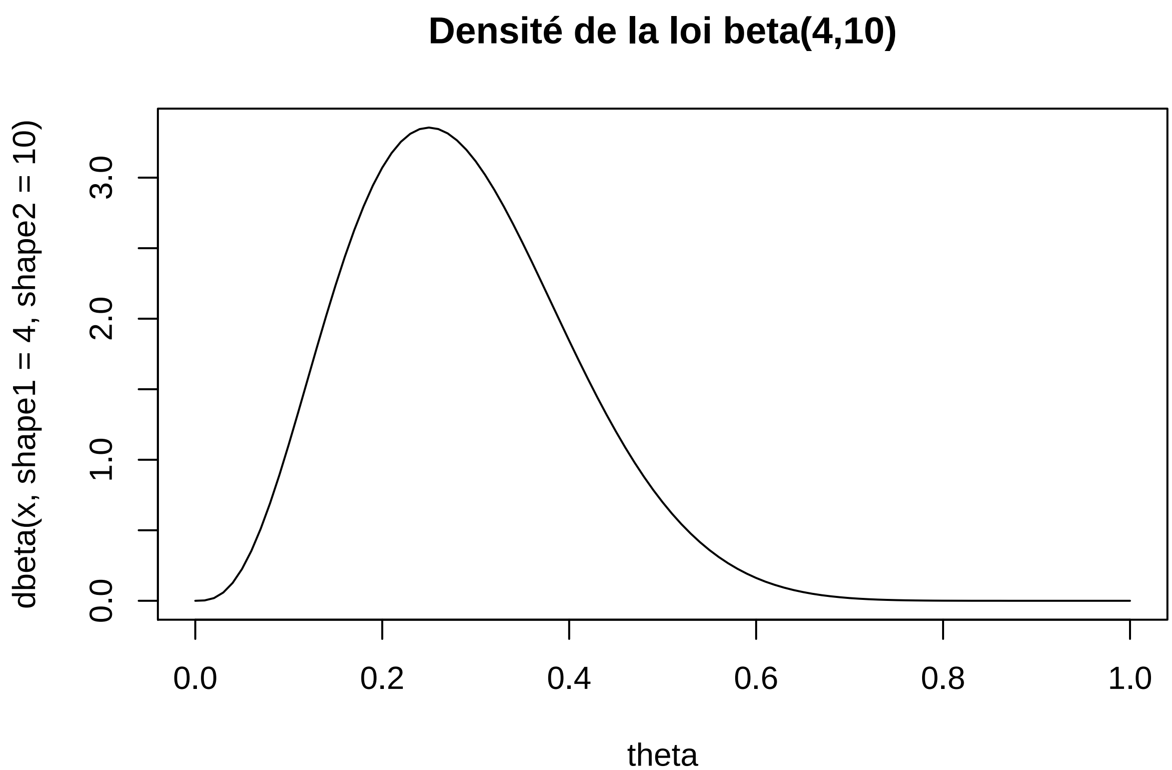
Si $k = \frac{143}{180}$, alors

$$\pi_{(\Theta|X)}(\theta|x) = 2860 * \theta^3 * (1-\theta)^9$$

ou encore

$$\pi_{(\Theta|X)}(\theta|x) = \frac{\Gamma(14)}{\Gamma(4)*\Gamma(10)} * \theta^3 * (1-\theta)^9$$

Ce qui est la densité d'une loi beta(a=4,b=10) représentée ci-dessous:



Le mode de la distribution a posteriori est $M_2 = \frac{1}{4}$ et sa moyenne est $E_2(X) = \frac{2}{7}$.

Le mode de la loi a posteriori est supérieur à celui de la loi a priori ($M_2 > M_1$).

La moyenne de la distribution a posteriori est identique à celle de la distribution a priori.

L'estimateur de Bayes de θ, est $\widehat{\theta} = \frac{2}{7}$. C'est la moyenne de la distribution a posteriori.

c) Calcul de l'estimateur de Bayes par simulation

Selon la taille de l'échantillon simulé, m, la valeur de l'estimateur de Bayes présentée dans le tableau ci-après.

m	Estimateur de Bayes
10.000	0.2865199
500.00	0.2850659
500.000	0.2856144
1000.000	0.2857861

On peut noter que l'estimation s'affine avec l'augmentation de la taille de l'échantillon. En effet, lorsque la taille de l'échantillon augmente, la valeur de l'estimateur se rapporche de $\frac{2}{7}$, sa valeur théorique.De plus, l'effet de la distribution a priori s'estompe à mesure que les observations sont prises en compte.

Annexes

Programme sous R

```
data<- c(132,149,476,147,135,110,176,107,147,165,135,117,110,111,226,108,102,108,227,102)

n<-length(data)
lambda=20/sum(data)


##Calcul des primes théorique et empirique

prime_stop_loss_th<-numeric(5)
prime_stop_loss_em<-numeric(5)


deductible<- c(10,15,20,25,30)
for (i in 1:5)
{
 prime_stop_loss_th[i]<-(1/lambda)*exp(-lambda*deductible[i])
 prime_stop_loss_em[i] <- sum(data)/n - sum(pmin(data,deductible[i]))/n


}


##Calcul des pertes limitées théorique et empirique

perte_lim_th<-numeric(5)
perte_lim_em<-numeric(5)


limitesup<- c(200,210,220,230,240)
for (i in 1:5)
{
 perte_lim_th[i]<-(1/lambda)*(1-exp(-lambda*limitesup[i]))
 perte_lim_em[i] <- sum(pmin(data,limitesup[i]))/n


}


simul<-rexp(n=100000, rate=lambda)
taille<-length(simul)

simul2<-rexp(n=500000, rate=lambda)
taille2<-length(simul2)

simul3<-rexp(n=1000000, rate=lambda)
taille3<-length(simul3)

##Calcul des primes stop-loss empiriques
```

```r
psl<-numeric(5) #le nom du vecteur est volontairement
##réduit afin de faciliter
##la construction du tableau récapitulatif

psl2<-numeric(5)
psl3<-numeric(5)

ded<- c(10,15,20,25,30)  ##vecteur des déductibles

for (i in 1:5)
{
 psl[i]<-sum(simul)/taille - sum(pmin(simul,ded[i]))/taille
 psl2[i]<-sum(simul2)/taille2 - sum(pmin(simul2,ded[i]))/taille2
 psl3[i]<-sum(simul3)/taille3 - sum(pmin(simul3,ded[i]))/taille3


}


Fx<-function(x, rate) 1-exp(-x*rate)

LogVrg<-function(param)
{
  x<-c(0,25,50,75,100,125,150,200,250,350,500,750,1000,1500,2500,5000,10000,25000,1e+25)

  nobs<-c(5,37,28,31,23,9,22,17,15,17,13,12,3,5,5,3,3,2)

  res<-numeric(length(nobs))

  for(i in 1:18)
  {
    res[i]<-nobs[i]*log(Fx(x[i+1],param)-Fx(x[i],param))
  }
  sum(res)
}
value<-optimize(LogVrg, interval=c(0,0.0015), maximum = TRUE)$objective
lambda2<-optimize(LogVrg, interval=c(0,0.0015), maximum = TRUE)$maximum


##Estimation de la prime stop-loss à partir de la valeur de lambda2

primesl<-numeric(5)
ded2<-numeric(5)

ded2<-c(25,30,35,40,45)

for (i in 1:5)
{
 primesl[i]<-(1/lambda2)*(exp(-lambda2*ded2[i]))

}
```

```r
##Estimation de la perte limitée à partir de la valeur de lambda2

pertel<-numeric(5)
limitesup2<-numeric(5)

limitesup2<-c(2000,2500,3000,3500,4000)

for (i in 1:5)
{
 pertel[i]<-(1/lambda2)*(1-exp(-lambda2*limitesup2[i]))

}

curve(dbeta(x,shape1=2,shape2=5), main="Densité de la loi beta(2,5)",xlab="theta")

curve(dbeta(x,shape1=4,shape2=10), main="Densité de la loi beta(4,10)", xlab="theta")


sim1<-rbeta(10000,4,10)
sim2<-rbeta(50000,4,10)
sim3<-rbeta(500000,4,10)
sim4<-rbeta(1000000,4,10)
```