

Travail pratique

ACT-2009 - Processus Stochastiques – Automne 2020

Le présent travail pratique se fait en équipe de trois et doit être remis sur le site du cours (format électronique signé par chaque membre de l'équipe) avant le 17 novembre 2020 à 16h30. Un travail remis en retard se verra automatiquement accorder la note de 0. Le travail vaut pour 15% de la note finale. Un rapport complet doit être fait avec tableaux et/ou graphiques lorsque demandé dans l'énoncé du travail. Le code et/ou le programme utilisé doit être placé en annexe et/ou en pièce jointe de la version électronique du travail pratique. Deux séries de rendements vous sont fournies pour effectuer ce travail, la première étant celle associée au plus petit nombre.

Numéro 1 (20 points)

On considère un modèle de « Regime-Switching » tel que présenté par Mary Hardy, « *A Regime-Switching Model of Long-Term Stock Returns* » (2001). Pour les besoins de ce travail pratique, la lecture des quatre premières pages de ce papier est conseillée. Un résumé de ce modèle avec quelques interprétations et quelques descriptions techniques est également disponible sur le site du cours. Ce type de modèle, sans nécessairement être un standard « universel », est assez utilisé dans la pratique actuarielle.

Pour une série de rendements mensuels spécifique d'un indice boursier (1^{ère} série), on vous demande de trouver les estimateurs d'un modèle de Regime-Switching appliqué à votre série de données mensuelles (pour toute la période, i.e. 1970-2013) pour un modèle avec 2 états et pour un modèle avec 3 états. On s'attend donc à avoir les estimateurs des probabilités de transition ainsi que les estimateurs des paramètres des lois normales conditionnelles aux états du processus (moyenne et écart-type ou variance conditionnelles). Vous devez expliquer en détails comment ces paramètres sont estimés ; autrement dit, si vous vous référez à une méthode connue, à un solveur et/ou à un programme informatique pour arriver à vos fins, toute la démarche doit être détaillée. Finalement, on vous demande d'interpréter vos résultats et vos estimateurs des paramètres et de choisir le meilleur des deux modèles (2 ou 3 états) avec la justification de votre choix.

Numéro 2 (20 points)

On considère maintenant les deux indices boursiers fournis conjointement. On définit encore la même matrice de probabilités de transition, mais le processus, ou plutôt les états définis par la chaîne de Markov, seront maintenant conjoints aux deux indices. Autrement dit, lorsqu'un des processus associé à un des indices est dans l'état 1, l'autre l'est aussi, et lorsque l'un est dans l'état 2, l'autre l'est également, etc. En reprenant le modèle du numéro 2 avec deux états, ce nouveau modèle implique donc l'estimation d'une seule matrice de probabilités de transition, mais les lois normales à modéliser sont maintenant multivariées (deux dimensions pour deux indices boursiers) et impliquent des paramètres supplémentaires à estimer au niveau des corrélations ou des covariances entre les deux indices boursiers. Ainsi, bien que les états soient conjoints aux deux processus, les distributions conditionnelles (moyennes et écart-types) peuvent différer d'un indice boursier à un autre.

Les paramètres à estimer, pour ce modèle sont donc ceux de la matrice de transition, soit :

$$\begin{matrix} P_{1,1} & P_{1,2} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \end{matrix}$$

Ainsi que les paramètres reliés aux distributions conditionnelles du premier indice (A) et du deuxième indice (B), soit :

$$\begin{matrix} \mu_{1,A}, \mu_{2,A}, \sigma_{1,A}^2, \sigma_{2,A}^2 \\ \mu_{1,B}, \mu_{2,B}, \sigma_{1,B}^2, \sigma_{2,B}^2 \end{matrix}$$

Et finalement les paramètres des corrélations conditionnelles entre les indices :

$$\rho_{1,AB}, \rho_{2,AB}$$

À noter qu'il est possible de modéliser les covariances $\sigma_{1,AB}, \sigma_{2,AB}$ directement sans utiliser les corrélations $\rho_{1,AB}, \rho_{2,AB}$, au choix. *→ Fortement déconseillé!*

Une interprétation simple de ce type de modèle serait qu'avec la mondialisation et l'ouverture des marchés financiers depuis les dernières décennies, les cycles économiques ne sont pas locaux, mais plutôt mondiaux. Autrement dit, quand ça va mal, ça va mal partout, et quand ça va bien, ça va bien partout en même temps, dans des proportions légèrement différentes cependant.

Estimer les paramètres de ce modèle conjoint aux deux indices boursiers pour la période 1970-2013. Tracer des graphiques des probabilités de se retrouver dans chacun des états. Répondre aux questions suivantes en vous référant à vos résultats : en supposant que les marchés boursiers suivent réellement un modèle Regime-Switching multivarié, comment décririez-vous l'évolution de ces marchés depuis 1970, à la lumière de vos résultats? Quels paramètres vous permettent de modéliser la dépendance entre vos deux indices boursiers et comment? Finalement, devrions-nous supposer que le paramètre de corrélation est identique pour tous les états, c'est-à-dire serait-il juste de postuler comme simplification que $\rho_{1,AB} = \rho_{2,AB}$ en se référant aux tests AIC et BIC? Justifier vos réponses.

Numéro 3 (20 points)

2

En conservant le modèle à deux états du numéro 1, simuler 1000 fois le rendement mensuel des deux indices boursiers sur 20 ans (donc, une simulation de 1000 scénarios, chaque scénario comportant 240 mois distincts pour un total de 240 000 rendements mensuels simulés par indice boursier). Vous devrez par la suite annualiser vos résultats pour ainsi conserver 1000 simulations de 20 ans chacune, chaque année de rendement étant calculée avec les 12 mois de rendements mensuels qui la composent.

Tracer des histogrammes des rendements mensuels et annuels simulés et comparez-les aux histogrammes des rendements de la période historique de référence. Commentez l'efficacité du modèle : est-ce qu'il réplique bien la moyenne, la médiane, les quartiles, les queues de distribution, les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement ainsi que les corrélations de la période historique de référence sous ces deux fréquences? Sinon, quels paramètres du modèle devraient être modifiés pour répliquer correctement chacune de ces statistiques?

Note : pour comparer deux séries entre elles dans un même histogramme, l'une des deux séries peut apparaître sous forme de courbe.

Numéro 4 (15 points)

Quantifier la valeur ajoutée du rebalancement mensuel et annuel avec vos deux indices boursiers sur 20 ans à l'aide de la simulation du numéro précédent. Autrement dit, comparer deux cas, le premier dans lequel des montants égaux sont investis dans chaque indice boursier au temps 0 sans aucun rebalancement de portefeuille (on laisse aller les actifs chacun de son côté, on ne vend rien et on n'achète rien) et le deuxième dans lequel on cherche à rebalancer le portefeuille de façon à toujours avoir des parts égales dans chacun des indices boursiers (on vend et on achète des parts de chacun des indices pour conserver une proportion 50/50 à chaque mois ou à chaque année). Qu'en est-il des valeurs extrêmes avec ou sans rebalancement lorsqu'on regarde le rendement cumulé sur 20 ans (par exemple, le 1^{er} et le 99^{ème} percentile)?