

TM.

RA

A.H.A.

## TP2 de Processus Stochastiques

Zinsou Ruffin Adja, Aziel Honore Agossou, Teffery Makonde Libanga, Équipe 3

07 décembre 2020

## Premier cas : modélisation d'un portefeuille

### a. Évaluation de la moyenne théorique de la perte totale actualisée pendant une période de longueur $t$

La perte totale actualisée pour l'ensemble du portefeuille entre  $[0, t]$  a été définie comme suit.

$$L_{\text{totale}}(t) = \sum_{i=1}^{100} L_i(t)$$

Ainsi,

$$E(L_{\text{totale}}(t)) = \sum_{i=1}^{100} E(L_i(t))$$

avec

$$L_i(t) = \sum_{k=1}^{N_i(t)} e^{-\delta S_{i,k}} M_i X_{i,k}$$

Si on suppose que  $\delta = 0$ , alors

$$L_i(t) = \sum_{k=1}^{N_i(t)} M_i X_{i,k}$$

Étant donné que  $(N_i(t)|\Lambda = \lambda_i) \sim \text{Poisson}(\lambda_i * t)$ , c'est-à-dire une variable de Poisson mixte, et que  $X_{i,k} \sim \text{Beta}(\alpha_i, \beta_i)$ ,  $L_i(t)$  est une Poisson composée de moyenne

$$E(L_i(t)) = E(N_i(t)) * E(M_i * X_{i,k})$$

soit,

$$E(L_i(t)) = M_i * E(N_i(t)) * E(X_i)$$

Explicitons chaque facteur du produit à droite de l'égalité.

- $M_i$  est une constante, bien qu'elle soit conditionnelle au groupe de produits dérivés.

$$E(N_i(t)) = E(E(N_i(t)|\Lambda))$$

Or,

$$E(N_i(t)|\Lambda = \lambda_i) = \lambda_i * t$$

donc

$$E(N_i(t)) = E(t * \Lambda)$$

On sait que  $\Lambda \sim \text{Pareto}(\theta_i, \lambda_i)$ .

Par conséquent,

$$E(N_i(t)) = t * \frac{\lambda_i}{\theta_i - 1}, \quad \theta_i > 1$$

Quant à l'espérance de  $X_{i,k}$ , elle vaut

$$E(X_i) = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}$$

En rassemblant le tout, on obtient

$$E(L_i(t)) = M_i * t * \frac{\lambda_i}{\theta_i - 1} * \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}, \quad i = 1 \text{ à } 100$$

Les paramètres  $M_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $\theta_i$ ,  $\alpha_i$ , et  $\beta_i$  sont identiques à l'intérieur des trois groupes de produits dérivés.

Ainsi, dans les groupes 1,2 et 3, on a respectivement,

$$E(L_i(t)) = 1500t * \frac{4}{2-1} * \frac{1}{1+1,5}, \quad i = 1 \text{ à } 35$$

$$E(L_i(t)) = 2500t * \frac{5}{3-1} * \frac{1}{1+2}, \quad i = 36 \text{ à } 60$$

$$E(L_i(t)) = 1000t * \frac{6}{4-1} * \frac{1}{1+2,5}, \quad i = 61 \text{ à } 100$$

On a donc

$$E(L_{\text{totale}}(t)) = 35 * 2400t + 25 * \frac{6250t}{3} + 40 * \frac{4000t}{7}$$

Finalement,

$$E(L_{\text{totale}}(t)) = 158.940,4762 * t$$

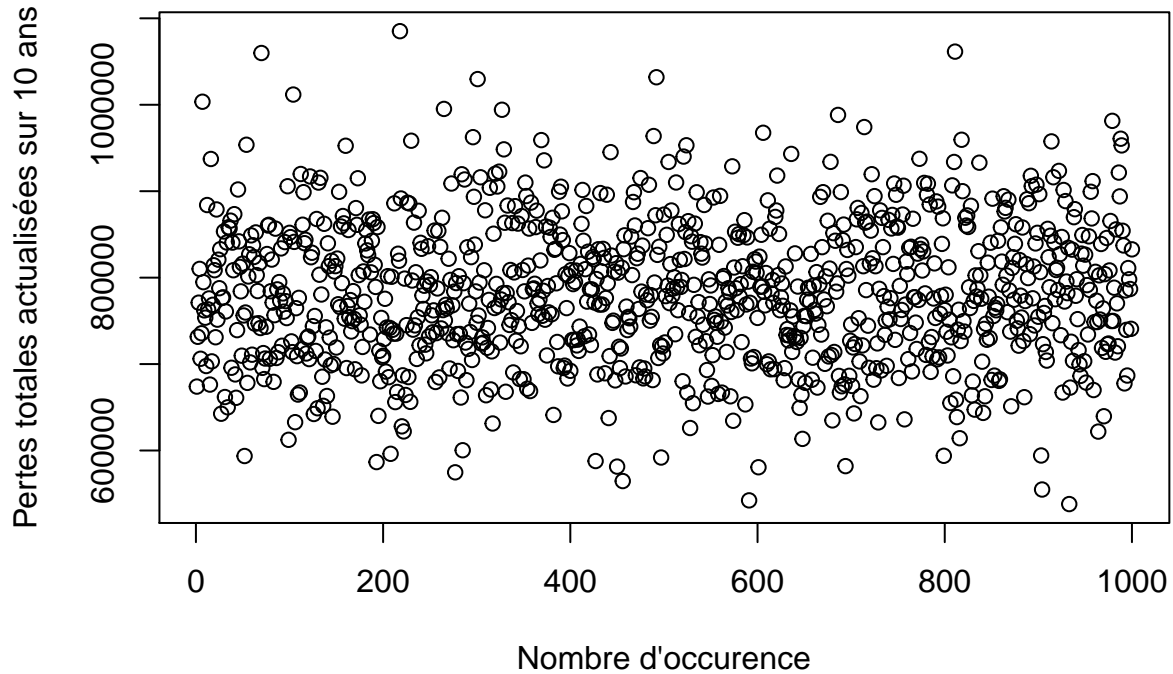
**b. Simulation et évaluation de la distribution de la perte totale actualisée sur 10 ans. Le nombre de perte,  $N(t)$ , est un processus de Poisson.**

La démarche suivie pour la simulation des pertes totales actualisées est décrite dans les lignes qui suivent. \* simuler 35 fréquences  $N(10)$  pour les produits dérivés du premier groupe (35 produits dérivés), \* pour chaque fréquence simulée, calculer la somme des pertes actualisées, \* reprendre les deux premières étapes pour les 25 produits dérivés du deuxième groupe, et pour

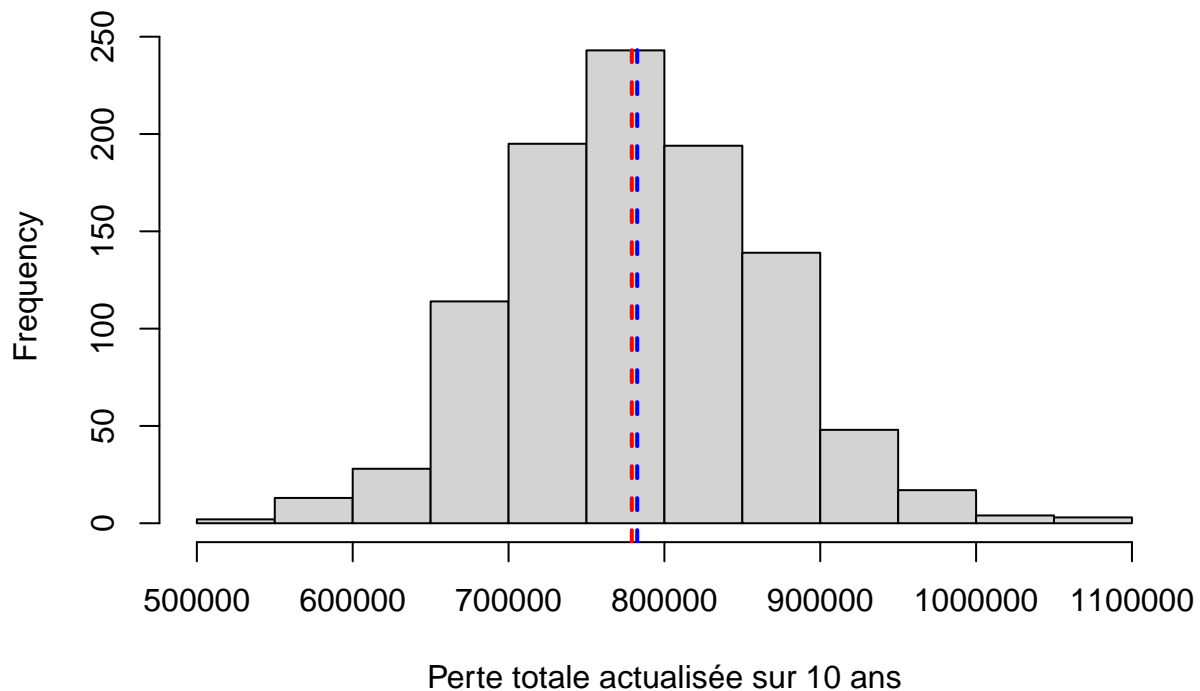
les 40 produits dérivés du troisième groupe, \* calculer la perte totale actualisée en sommant les 100 pertes actualisées obtenues pour l'ensemble des produits dérivés.

Les valeurs simulées à partir du logiciel R nous ont permis d'avoir les graphiques ci-après qui montrent la distribution de la perte totale actualisée sur 10 ans.

**Graphique 1. Nuage des pertes totales actualisées**



**Graphique 2. Histogramme des pertes totales actualisées sur 10 ans**



Sur le premier graphique, on peut noter une forte concentration des pertes totales actualisées entre 700.000\$ et 900.000\$. Quant au deuxième graphique, il indique que la distribution est symétrique car les pertes totales actualisées moyennes (tracé en bleu) et la médiane (tracé en rouge) sont presque confondues. En effet, la perte moyenne est égale à  $7.8254388 \times 10^5$  et la médiane vaut :  $7.7906799 \times 10^5$ . L'écart-type des pertes est égal à  $8.1757281 \times 10^4$ . Ainsi, nous avons 95% de chance que la perte totale actualisée se situe dans l'intervalle

$$[6.2230256 \times 10^5, 9.4278521 \times 10^5]$$

Les approximations de la  $VaR(1 - \alpha)$  et de la  $TVaR(1 - \alpha)$  de la perte totale aux seuils  $\alpha = 10\%, 5\%$  et  $1\%$  sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Seuil	VaR	TVaR
10%	$8.8821907 \times 10^5$	$9.2864105 \times 10^5$
5%	$9.1499627 \times 10^5$	$9.5663099 \times 10^5$
1%	$9.814609 \times 10^5$	$1.0260915 \times 10^6$

Selon ce tableau, 10% des pertes totales actualisées sont supérieures à  $8.8821907 \times 10^5$ , 5% de ces pertes sont au dessus de  $9.1499627 \times 10^5$ , et 1% des pertes sont plus grandes que  $9.814609 \times 10^5$ . La moyenne des 10% des pertes les plus élevées est égale à  $9.2864105 \times 10^5$ , alors que les moyennes des 5% et des 1% des pertes les plus élevées sont respectivement,  $9.5663099 \times 10^5$ , et  $1.0260915 \times 10^6$ .

### c. Simulation et évaluation de la distribution de la perte totale actualisée sur 10 ans. Le nombre de perte, $N(t)$ , est un processus de renouvellement

On fait l'hypothèse ici que  $T_{i,k} \sim Gamma(\theta_i, \lambda_i)$ . Ainsi, la distribution du nombre de perte par produit dérivé,  $N(t)$ , peut s'écrire comme suit:

$$P(N(t) = n) = \sum_{k=n\theta_i}^{(n+1)\theta_i-1} \frac{(\lambda_i t)^k e^{-(\lambda_i t)}}{k!}$$

L'utilisation de la fonction de répartition inverse de cette distribution pour simuler la fréquence des pertes est fastidieuse. Nous allons utiliser le fait que le nombre de pertes dans l'intervalle  $[0, t]$  a la distribution de  $N(t)$  lorsque le temps entre deux renouvellement est une variable aléatoire de distribution  $Gamma(\theta_i, \lambda_i)$ . Concrètement, nous générons des variables  $Gamma(\theta_i, \lambda_i)$ ,

$$T_{i,k} \sim Gamma(\theta_i, \lambda_i)$$

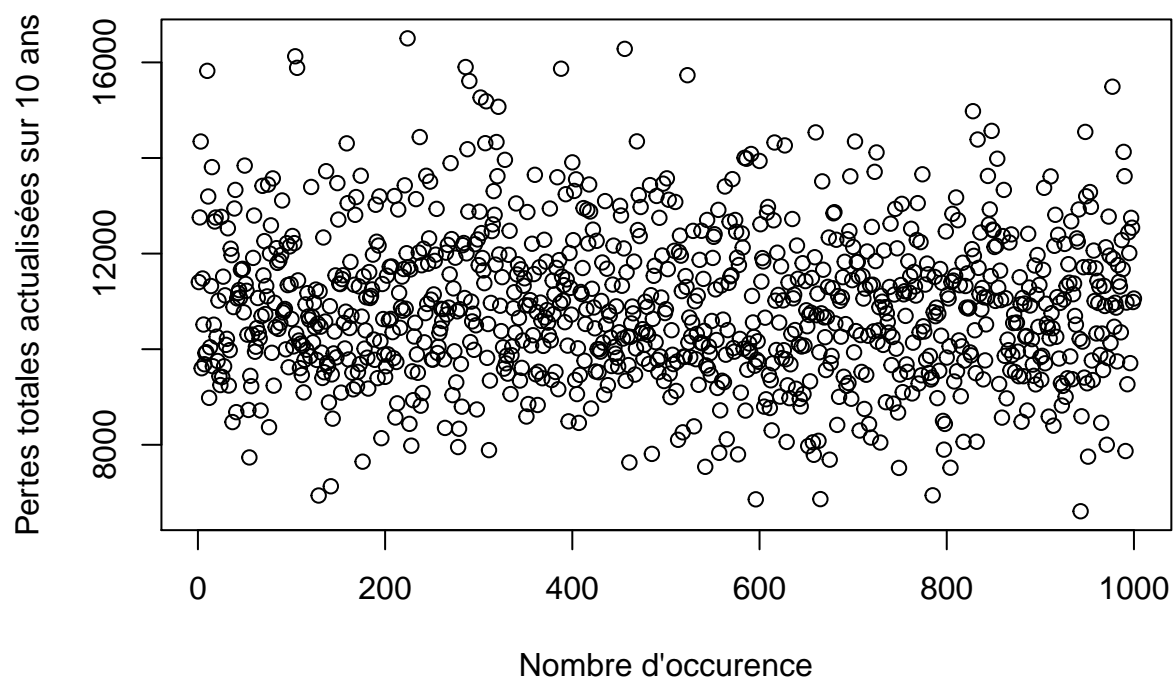
puis, nous définissons

$$N_i(t) = \max(j : T_{i,1} + T_{i,2} + T_{i,3} + \dots T_{i,j} \leq t)$$

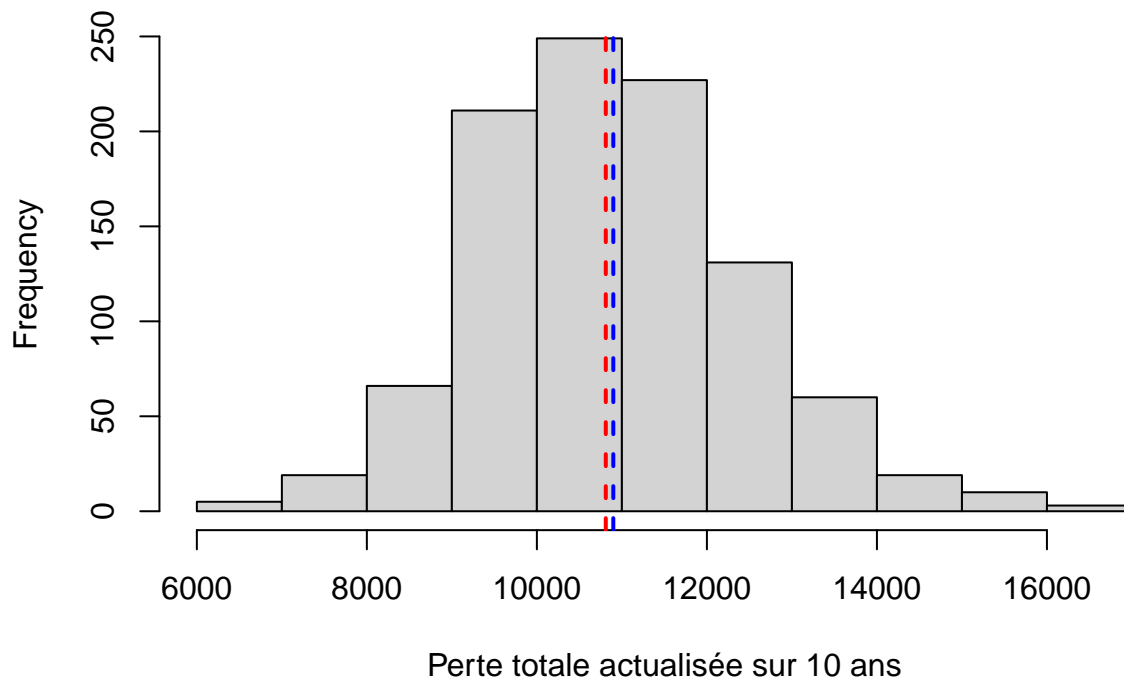
La démarche suivie pour la simulation des pertes totales actualisées est identique à celle décrite à la question b.

Les graphiques de la distribution de la perte totale actualisée sur 10 ans pour l'ensemble du portefeuille ont été simulées à l'aide de R.

**Graphique 3. Nuage des pertes totales actualisées**



**Graphique 4. Histogramme des pertes totales actualisées sur 10 ans**



Un constat évident que l'on peut faire à lecture des graphiques est celui de la faiblesse des pertes totales actualisées sur 10 ans. Ainsi, sur le premier graphique, on peut noter que la forte concentration des pertes totales actualisées est désormais entre 9.000\$ et 11.000\$. De même, sur le second graphique, bien que la distribution soit toujours symétrique, les valeurs moyenne et la médiane ont chuté, respectivement, à  $1.0898921 \times 10^4$ , et  $1.0810633 \times 10^4$ . L'écart-type des pertes est égal à 1558.5524383, et l'intervalle de confiance au seuil de 95% pour la perte totale moyenne est

$$[7844.2143703, 1.3953628 \times 10^4]$$



L'explication de la faiblesse des pertes totales actualisées sur 10, dans le cas courant, tire son origine de la distribution du nombre de perte sur 10 ans, étant donné que les caractéristiques de la sévérité n'ont pas changé. En effet, le nombre moyen de perte par groupe de produits dérivés a fortement baissé, comme on peut le voir dans le tableau ci-dessous.

$E(N(10))$	<i>Hypothèses question a</i>	<i>Hypothèses question b</i>
<i>Groupe 1</i>	40	0.0372029
<i>Groupe 2</i>	25	$7.7266636 \times 10^{-4}$
<i>Groupe 3</i>	20	$1.4103082 \times 10^{-5}$

Les approximations de la  $VaR(1 - \alpha)$  et de la  $TVaR(1 - \alpha)$  de la perte totale aux seuils  $\alpha = 10\%, 5\%$  et  $1\%$  sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Seuil	VaR	TVaR
10%	$1.2935701 \times 10^4$	$1.3877338 \times 10^4$
5%	$1.3614975 \times 10^4$	$1.4501824 \times 10^4$
1%	$1.5267373 \times 10^4$	$1.5922763 \times 10^4$

Selon ce tableau, 10% des pertes totales actualisées sont supérieures à  $1.2935701 \times 10^4$ , 5% de ces pertes sont au dessus de  $1.3614975 \times 10^4$ , et 1% des pertes sont plus grandes que  $1.5267373 \times 10^4$ . La moyenne des 10% des pertes les plus élevées est égale à  $1.3877338 \times 10^4$ , alors que les moyennes des 5% et des 1% des pertes les plus élevées sont, respectivement,  $1.4501824 \times 10^4$ , et  $1.5922763 \times 10^4$ . Comme on peut le constater, ces valeurs sont également bien inférieures à celles obtenues précédemment.

## Deuxième cas : calcul d'options et temps d'attente

### a. Approximation du prix de l'option européenne avec les prix d'exercice de K1 et K2

Le prix de l'option européenne est égale à la valeur actualisée à  $t = 0$  du gain réalisé au temps  $T$ .

$$Prix_{option} = \max(0, S_T - K) * e^{-\delta * T}$$

où  $S_T$  et  $K$  sont respectivement la valeur de l'action au temps  $T$  et le prix d'exercice de l'option.

De façon empirique,

$$Prix_{option} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\max(0, S_i - K) * e^{-\delta * T})$$

Nous devons donc simuler 1000 observations indépendantes et identiquement distribuées de  $Prix_{option}$ , puis en calculer la moyenne.

Notons que

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma Z(t)}$$

et que les valeurs simulées de  $S_t$  sont obtenues comme suit:

- simuler  $Y \sim N(0, 1)$
- poser  $Z(t) = \sqrt{t}Y$ ,
- poser  $S_t = S_0 * e^{\mu t + \sigma Z(t)}$

Le calcul du prix des options par simulation (à l'aide de R) donne les résultats présentés dans le tableaux suivant.

<i>Option</i>	<i>Prix</i>
<i>Options européennes</i>	
<i>option1(T1, K1)</i>	3.2356637
<i>option2(T1, K2)</i>	0.9759353
<i>option3(T2, K1)</i>	10.046857
<i>option4(T2, K2)</i>	5.3867246
<i>Option exotique</i>	
<i>option(T1, K1, T2, K2)</i>	8.6223882

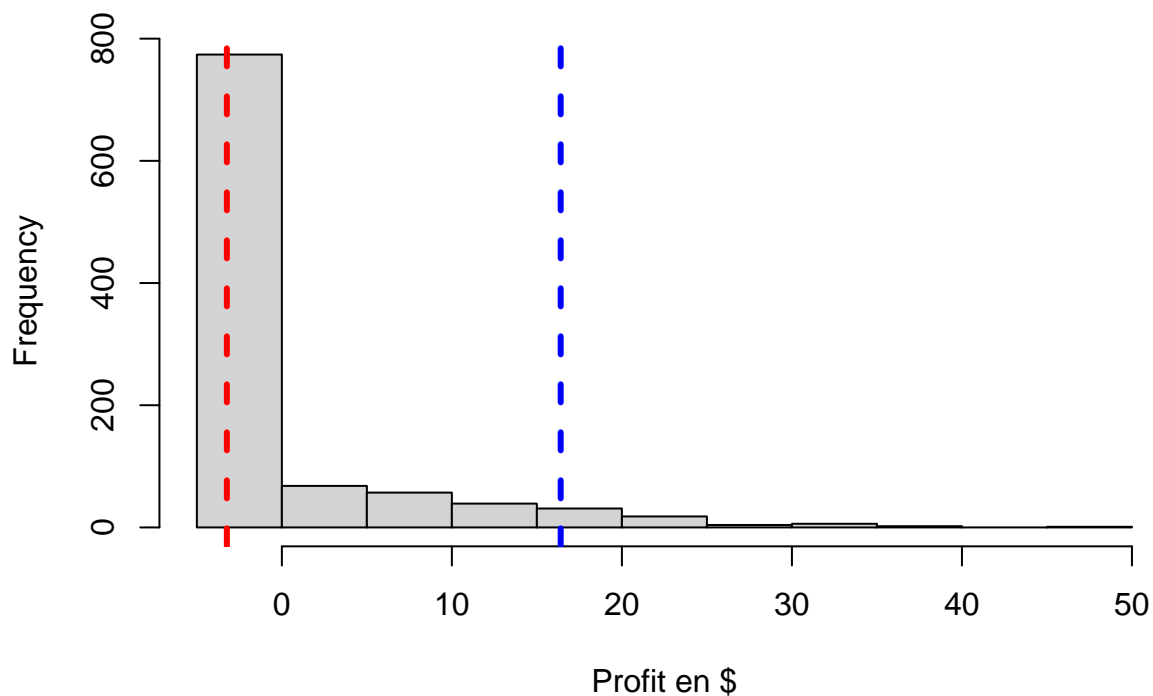
## b. VaR(95) et Var(5) du profit lié à la première option européenne et à l'option exotique

Les profits moyens et les valeurs à risque pour l'option1(T1,K1) et l'option exotique sont récapitulés dans le tableau suivant.

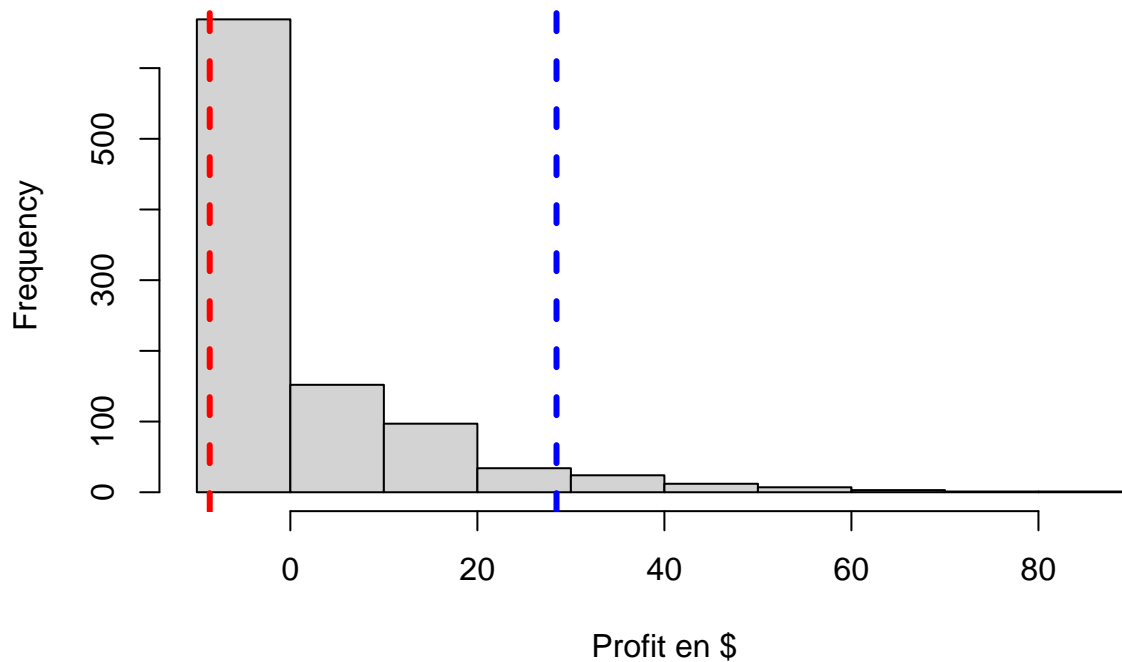
<i>Option</i>	<i>Profit moyen</i>	<i>VaR(95%)</i>	<i>VaR(5%)</i>
<i>Option européenne</i>			
<i>option1(T1, K1)</i>	$1.7636587 \times 10^{-16}$	16.4007297	-3.2356637
<i>Option exotique</i>			
<i>option(T1, K1, T2, K2)</i>	$2.1629573 \times 10^{-16}$	28.4628883	-8.6223882

Les histogrammes des profits sont construits à partir des données simulées

**Graphique 5.Histogramme des profits sur l'option européenne 1**



**Graphique 6. Histogramme des profits sur l'option exotique**



**c. Valeur théorique du paramètre  $\alpha$  de manière que le processus de la valeur de l'action suive une Martingale**

Pour que le processus soit une martingale, il faut que  $E(S_t|S_{t-1}) = S_{t-1}$ .

Ce qui suppose que

$$E(\mu + \sigma Z'(1) + \sum_{N(t-1)}^{N(t)} X_i) = 0$$

Ce qui implique que

$$\mu + \frac{\lambda\alpha}{2} = 0$$

ou encore

$$\alpha = \frac{-2\mu}{\lambda}$$

soit,

$$\alpha = \frac{-2 * 0,07}{0,1} = -1,4$$

**d. Valeur théorique du paramètre  $\alpha$  de manière que le processus de la valeur de l'action suit une sous-Martingale de rendement annuel espéré de  $e^\mu - 1$**

Ici, on veut

$$E(S_t|S_{t-1}) = S_{t-1}e^\mu$$

or

$$E(S_t|S_{t-1}) = E(S_{t-1}e^{\mu+\sigma Z'(1)+\sum_{N(t-1)}^{N(t)} X_i}|S_{t-1})$$

$$E(S_t|S_{t-1}) = S_{t-1}E(e^{\mu+\sigma Z'(1)+\sum_{N(t-1)}^{N(t)} X_i})$$

Étant donné l'indépendance de  $\mu + \sigma Z'(1)$  et  $\sum_{N(t-1)}^{N(t)} X_i$ , on peut écrire ce qui suit

$$E(e^{\mu+\sigma Z'(1)+\sum_{N(t-1)}^{N(t)} X_i}) = E(e^{\mu+\sigma Z'(1)}) * E(e^{\sum_{N(t-1)}^{N(t)} X_i})$$

On sait que  $K = \mu + \sigma Z'(1) \sim N(\mu, \sigma)$ , donc  $E(e^{\mu+\sigma Z'(1)}) = M_K(1)$ , où  $M_K(u)$  est la fonction génératrice des moments de  $K$ .

Par conséquent,

$$M_K(1) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

De même,  $E(e^{\sum_{N(t-1)}^{N(t)} X_i}) = M_{S(t)}(1)$ , où  $M_{S(t)}(u)$  est la fonction génératrice de  $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ .

Donc

$$M_{S(t)}(1) = e^{\lambda(\frac{e^\alpha - 1}{\alpha}) - 1}$$

Ainsi,

$$E(S_t|S_{t-1}) = S_{t-1} * e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} * e^{\lambda(\frac{e^\alpha - 1}{\alpha}) - 1}$$

Pour que

$$E(S_t|S_{t-1}) = S_{t-1}e^\mu$$

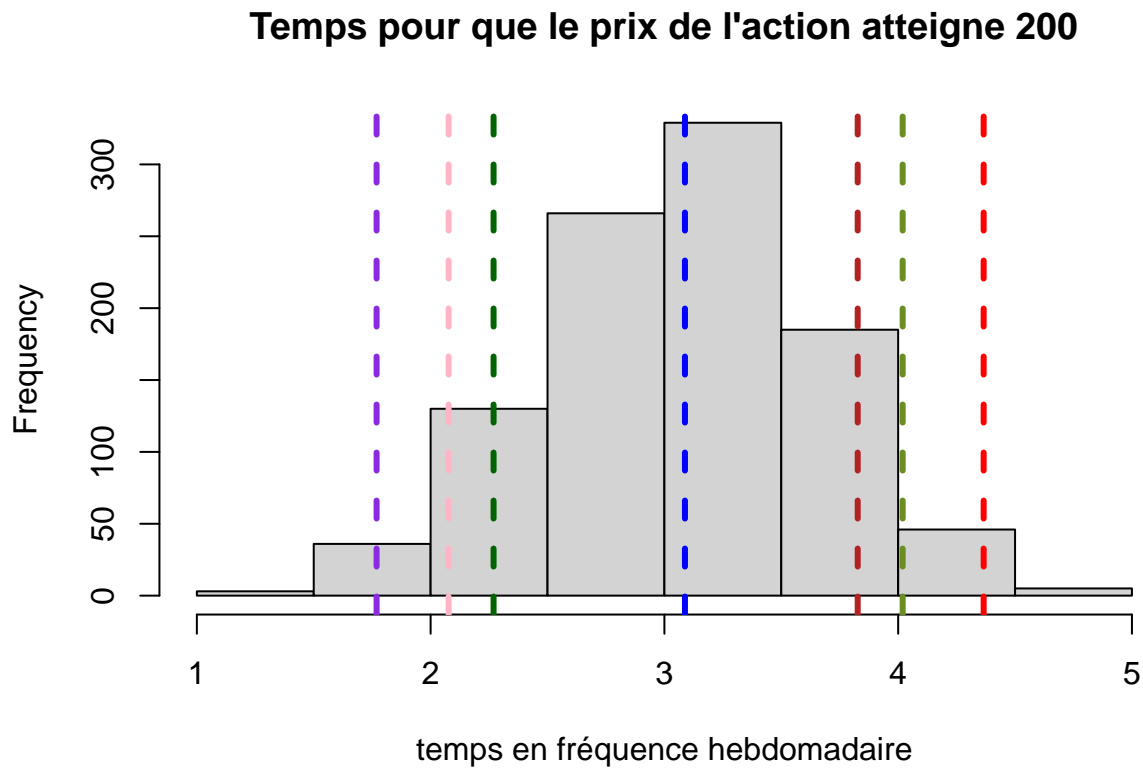
il faut que

$$\frac{\sigma^2}{2} * \lambda(\frac{e^\alpha - 1}{\alpha} - 1) = 0$$

Avec  $\sigma = 0,14$ ,  $\lambda = 0,1$ , on trouve la valeur recherchée de  $\alpha$ ,

$$\alpha = -0.2099832$$

d. Simulation de 1000 scénarios du temps nécessaire avant que l'action augmente de 100% de valeur



Les principales caractéristiques de la distribution du temps nécessaire pour que la valeur de l'action atteigne 200 sont résumées dans le tableau ci-dessous.

<i>Caractéristiques du temps nécessaire pour atteindre 200</i>	<i>Valeur</i>
<i>Moyenne</i>	3.0879808
<i>Écart type</i>	0.5840327
<i>1er centile</i>	1.7688462
<i>5e centile</i>	2.0769231
<i>10e centile</i>	2.2692308
<i>90e centile</i>	3.8269231
<i>95e centile</i>	4.0192308
<i>99e centile</i>	4.3655769

En moyenne, le prix de l'action passe de 100 à 200 en 3.0879808 fréquence hebdomadaire, ce qui correspond à 160.575 semaines.

## Bibliographie

- Rakhshan, A., Pishro-Nik, H., Introduction to Probability. Chapter 13. [https://www.probabilitycourse.com/chapter13/Chapter\\_13.pdf](https://www.probabilitycourse.com/chapter13/Chapter_13.pdf)
- Goulet, V., (2020), Méthodes numériques en actuariat avec R — Simulation stochastique