La Física del Telefonito

Jose Raúl Martínez Afanador - 2200797 *
Marian Lamar Rivera Ordóñez - 2211702
Miguel Fernando Becerra Rodríguez - 2201888
Sthefania Pinto Basto - 2200803

Universidad Industrial de Santander

Diciembre 4 de 2023

Índice

1.	Introducción	1
	1.1. Planteamiento del Problema	2
	1.2. Justificación	2
	Metodología	9
	2.1. Montaje Experimental	
3.	Simulación	5
4.	El experimento y los resultados	8
	4.1. Análisis de frecuencias individuales	8
	4.2. Análisis calidad de audio	11
5.	Conclusiones y Recomendaciones	14

Resumen

1. Introducción

En la infancia de numerosas personas, un juego cotidiano era el de unir unos vasos mediante cuerdas para crear un teléfono con el que se podía hablar de claramente y alcanzando una cierta

^{*}e-mail: sthefania2200803@correo.uis.edu.co

distancia considerablemente larga. Esto representaba, aunque no muy práctica, una astuta y económica forma de comunicación, por lo que esta investigación tiene como objetivo principal estudiar los fenómenos físicos detrás de este juego de niños. Se aspira a que la comprensión de este fenómeno fomente la curiosidad y estimule la exploración de sistemas de comunicación más elaborados y avanzados, contribuyendo así a la búsqueda de nuevas aplicaciones tecnológicas.

1.1. Planteamiento del Problema

Este estudio tiene como objetivo principal investigar y comprender los fenómenos físicos subyacentes en este juego infantil, con el propósito de mejorar y optimizar la calidad de la comunicación y la distancia alcanzada. Se plantean las siguientes preguntas problemas para guiar la investigación:

- 1. Determinación de Factores que Influyen en la Comunicación a Distancia:
- ¿Cuáles son los factores clave que determinan la distancia máxima alcanzada por un teléfono de vasos?
- ¿Cómo afectan la longitud y el material de la cuerda, así como la tensión aplicada, a la eficiencia de la transmisión del sonido?
- 2. Influencia de la Tensión en la Frecuencia de Transmisión del Sonido:
- ¿La variación en la longitud de la cuerda tiene un impacto significativo en la frecuencia de transmisión del sonido?
- 3. Desarrollo de Mejoras Tecnológicas:
- ¿El uso de materiales específicos en la fabricación de vasos o cuerdas puede optimizar la eficiencia de la transmisión del sonido?

1.2. Justificación

La evolución de la telefonía ha desempeñado un papel crucial en la historia de las comunicaciones humanas. Desde las primeras interacciones mediante telégrafos hasta los sofisticados teléfonos inteligentes contemporáneos, el impulso de superar distancias y establecer conexiones ha catalizado avances tecnológicos significativos. Un ejemplo inicial de este progreso es el primer teléfono, cuyo principio se asemeja al de un dispositivo rudimentario conocido como "teléfono de lata", donde las ondas de sonido se convertían en señales eléctricas transmitidas a través de un cable eléctrico, según lo introducido por Alexander Graham Bell [1].

En consideración de la complejidad e ingenio inherentes a las tecnologías de comunicación contemporáneas, resulta imperativo comprender los principios fundamentales subyacentes a la comunicación. En este contexto, la formulación del problema titulado "La Física del Telefonito" se justifica al aspirar a desarrollar el razonamiento científico asociado con este fenómeno. Dicha competencia es esencial

para aquellos que buscan realizar contribuciones significativas en el ámbito científico y tecnológico, particularmente en el campo de las comunicaciones.

Este planteamiento del problema implica la formulación de preguntas de investigación, desafiando a abordar el fenómeno de manera analítica y aplicando principios físicos en el proceso. La finalidad es responder a estas interrogantes y verificar hipótesis con el propósito de encontrar soluciones al problema planteado.

En resumen, el desarrollo de este problema no solo busca avanzar en las habilidades y capacidades necesarias para llevar a cabo experimentos y observaciones, abordando así el problema de manera efectiva para obtener resultados y conclusiones. También tiene como objetivo estimular la curiosidad para comprender otros sistemas que facilitan una comunicación mejorada, explorando nuevas aplicaciones tecnológicas en este proceso.

2. Metodología

Para el desarrollo de la propuesta, se plantea la siguiente metodología. Se Determinaron los parámetros que más influyen en el fenómeno y como estos se iban a variar, se escogieron para el material del vaso, el papel y también el uso de una lata (metal). Para el tipo de cuerda se analizó el Fique y el cordón. Teniendo en cuenta el parámetro del diámetro de la cuerda, para el cordón se emplearon dos diámetros distintos de 3mm y 5mm.

Se tomaron datos desde los 300[Hz] hasta los 6000[Hz] juntos con los dispositivos que las generen, siendo estos dos aplicativos móviles, la primera un generador de frecuencia y la segunda un osciloscopio. Posteriormente, se procedió al diseño de un montaje experimental que permita modificar los parámetros establecidos en la primera etapa.

2.1. Montaje Experimental

Procedimiento para construir el telefónito:

- 2 latas. (En nuestro caso en específico se emplearon vasos de papel y latas (metal), donde las latas deben tener un extremo abierto y un extremo cerrado)
- 1 trozo de hilo. (En nuestro caso se decidió el uso del fique y el cordón, para el cordón se emplearon dos diámetros diferentes, buscando analizar el impacto del grosor en el resultado de las frecuencias.)

En la construcción usual de un telefónito se suelen usar "sujetadores. esto con el propósito de evitar que la cuerda pase por los agujeros de las latas o vasos, sin embargo, evitando el análisis del contacto con un tercer tipo de materia, solo se sujetaron con un nudo en la base de la lata.

Procedimiento para construir el Montaje:

Para iniciar el proceso, se procede a crear un pequeño orificio en el centro del fondo de una lata. Este orificio puede ser perforado o taladrado y debe poseer dimensiones suficientes para permitir el paso de una cuerda. Se introduce un extremo de la cuerda a través del orificio de la lata, y se anuda en el interior de la misma con el propósito de evitar que la cuerda sea retirada hacia atrás a través del orificio.

Para poner en funcionamiento el teléfono de lata, es necesario sujetar la lata en dos extremos y alejarlas mutuamente hasta que la cuerda se encuentre en tensión. Es fundamental mantener la tensión en la cuerda durante la utilización del dispositivo telefónico, ya que su eficacia se ve comprometida si la cuerda se halla laxa. Para mantener la cuerda del telefonito tensionado, sin la intervención humana, se procede a realizar un montaje que también nos permita calcular la tensión que se encuentra la cuerda.



Figura 1: Imagen del montaje experimental

Para esto se utilizan dos dispositivos de soporte; el primero permanece estacionario junto a la lata, mientras que el segundo está posicionado sobre una base móvil. Esto se lleva a cabo con la finalidad de implementar un juego de poleas conectado al segundo soporte, al cual se añade un peso con el objetivo de generar tensión en la cuerda que conecta ambas latas. De esta manera, se logra tensionar la cuerda de manera precisa, y se es posible registrar la magnitud de esta tensión.

Con la disposición de este arreglo experimental, que se procede a utilizar dos dispositivos móviles, se distingue la presencia de un generador de frecuencias en uno de ellos y la incorporación de una aplicación de osciloscopio en el segundo dispositivo. En este procedimiento, se atiende meticulosamente a la ubicación del micrófono y el altavoz de los dispositivos móviles. Posteriormente, se lleva a cabo la toma de datos de frecuencia.

Toma de datos experimentales

Se tomaron datos de los siguientes sistemas:

				Material: Vaso de Papel	
			Distancia d [m]	Fique	Cordón
	Material: Vaso de Lata			[mm]	3 [mm]
Distancia	Cordón				
d [m]	Diámetro 1	Diámetro 2	2,00 [m]	~	✓
	3 [mm]	5 [mm]			
			1,00 [m]	Х	
2,00 [m]	✓	✓		Х	✓
				X	
(a) Membrana Estática			(b) N	Iembrana Vibra	ando

Figura 2: Sistemas a los cuales se le tomaron datos.

Posteriormente, se realizará un análisis de frecuencias del sonido que pasa por el teléfono de lata, esto con el objetivo de examinar cómo el sistema afecta las diferentes frecuencias de la señal de entrada.

3. Simulación

El objetivo de la simulación era determinar la frecuencia de salida generada por los vasos conectados en función de la frecuencia de entrada. Con ese objetivo se conoce que la parte del vaso, que es la encargada de recibir frecuencias y luego emitirlas, es la base de la cual se sostiene la cuerda, como se ve en la figura (3).

Las ondas de sonido que entrar hacen vibrar la base, como está conectada con la cuerda tensionada. La base moviéndose jala la cuerda, la cual jala a la otra base, haciendo que comience a vibrar de una forma similar que la base receptora y, por tanto, emitirá sonido con frecuencia parecido a la base receptora, que es lo que escuchamos.

Para simular como es el movimiento de la base hemos usado las ecuaciones que describen el movimiento vibratorio de una membrana circular [?].

Definiendo que el eje Y es aquel por el que las partes de la membrana vibran(ver figura 10b) y el plano XZ como aquel que se encuentra la membrana en el caso en reposo(ver figura 8a).



Figura 3: La base del vaso

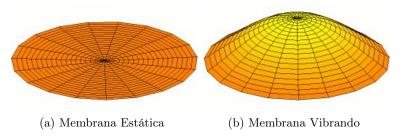


Figura 4

Le ecuación que rige el movimiento es la ecuación de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \mathbf{\Psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Psi}}{\partial \theta^2} + k^2 \mathbf{\Psi} = 0. \tag{1}$$

Donde la solución para el eje Y viene por

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Psi}e^{iwt}.\tag{2}$$

Como la membrana está fija en sus bordes por las otras partes del vaso. Obteniendo una condición de frontera $y(a, \theta, t) = 0$, donde a es el radio de la membrana. Como hay una cuerda sujeta en el centro de la base, para incluir su efecto agregamos un término de fuerza en la ecuación de Helmholtz.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{\Psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{\Psi}}{\partial \theta^2} + k^2 \mathbf{\Psi} - \mathbf{m}g\delta(r=0) = 0$$
 (3)

Por el montaje experimental realizado, donde tensionábamos la cuerda usando un contrapeso 1, identificamos con seguridad cual es el valor de la tensión de la cuerda, la aceleración de la gravedad por el peso; esto explica el término $\mathbf{m}g\delta(r=0)$. El delta con coordenadas radiales, quiere decir que éste término solo aplica para el punto central de la membrana.

En búsqueda de la solución de la ecuación diferencial se empleo el método de separación de variables.

$$\Psi = \mathbf{R}(r)\mathbf{\Theta}(\theta) \tag{4}$$

Resultando en

$$\frac{r^2}{R}\left(\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + k^2 r^2 = -\mathbf{m}g - \frac{1}{\Theta}\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}$$
 (5)

Obteniendo la siguientes E.D. de 1 variable

$$c = -\frac{1}{\Theta} \frac{\mathrm{d}^2 \Theta}{\mathrm{d}\theta^2} = \mathbf{m}g \delta(r = 0) + a \tag{6}$$

$$a = \frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = -\mathbf{m}g\delta(r = 0) - c$$
 (7)

Solucionando la ecuación diferencial para Θ

$$\Theta(\theta) = \cos(\sqrt{c}\theta + \gamma_m) \tag{8}$$

Para que la función sea sueva y uno a uno, asignamos que \sqrt{c} tome valores enteros.

Solucionando la ecuación diferencial para R.

$$R(r) = AJ_m(kr) \tag{9}$$

 $J_m(kr)$ son la funciones de Bessel de primer tipo de grado m.

Al utilizar el método de separación de variables obtenemos la relación

$$m = \sqrt{\mathbf{m}g\delta(r=0) - c} \tag{10}$$

La solución de y dada por 2 queda entonces.

$$\mathbf{y}_{mn}(r,\theta,t) = A_{mn}J_m(k_{mn}r)\cos(\sqrt{c}\theta + \gamma_m)\cos(\omega_{mn}t + \phi_{mn}). \tag{11}$$

Donde, $K_{mn} = \frac{j_{mn}}{a}$.

Recordando que a es el radio de la membrana y j_{mn} son los valores numéricos que al evaluarlos en la función de Bessel de primer tipo y grado m, esta da cero.

y $\omega_{mn} = k_{mn}\mathbf{c}$. Se define \mathbf{c} como la velocidad a la que se propagan las ondas de vibración transversal en la membrana, este valor depende del tipo de material.

Una conclusión física viene de la mano de la ecuación 10. Se definió que \sqrt{c} toma valores enteros, por lo tanto, c por m se limita hasta que valores que cumplan $c < \mathbf{m}g\delta(r=0)$, ya que para valores mañores la raíz da imaginaria. Se puede interpretar que al haber una cuerda que empuja la membrana, uno de los dos valores de los modos normales $(m \ y \ n)$ se ve limitado hasta cierto valor. Siendo el valor m que define el número de nodos radiales.

Se calculo una simulación para la solución $\mathbf{y}_{mn}(r,\theta,t)$. Tomando c=1.

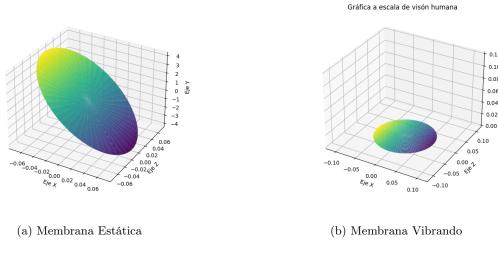


Figura 5

De este modo se observa que al pasar del tiempo la manera de vibrar de la base del vaso es la pequeña oscilación de dos lóbulos uno en la derecha y otro en la izquierda que están desfasados.

Podemos encontrar una relación con la frecuencias naturales através de.

$$f_{mn} = \frac{j_{mn}c}{2\pi a} \tag{12}$$

Se considera que el vaso al recibir una frecuencia proveniente de una voz. Este recibirá tan sonido y comenzará a moverse según éste. Por lo que, con la frecuencias naturales halladas ya tendríamos una forma de conocer cuando el vaso transmite de mejor manera un sonido.

4. El experimento y los resultados

4.1. Análisis de frecuencias individuales

Con el fin de obtener los mejores parámetros que reproduzcan una buena calidad de audio emitido, en términos de frecuencias, se realizó un análisis bastante amplio en el rango de frecuencias desde 300 hasta 6000 Hz. A continuación se presentan los resultados obtenidos para vasos de papel y latas con diferentes distancias de cuerdas.

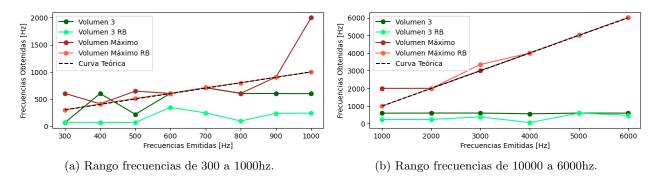


Figura 6: Lata con cordón a distancia 1.92 m.

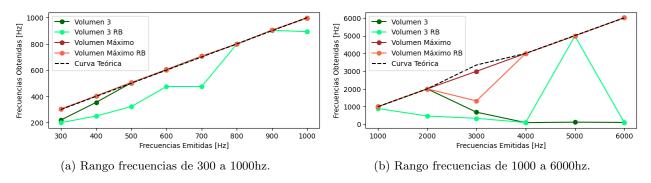


Figura 7: Vaso con cordón a distancia 1.92 m.

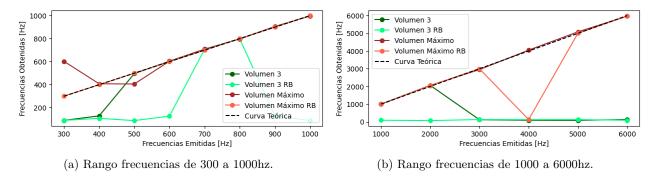


Figura 8: Papel con cordón a distancia 1 m.

Con esta primera visualización de resultados se puede destacar los datos obtenidos para un volumen mínimo etiquetado con el número 3 ya que fue el generado por el nivel 3 de volumen permitido por el dispositivo (iPhone SE). Note que también se puede despreciar de manera general los datos de volumen máximo para todas las configuraciones. Esto es porque, en todas las gráficas

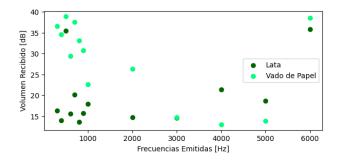


Figura 9: Comparación de diferentes tipos de vasos con la cordón para la misma distancia 1.92 m.

se obtiene con estos datos la misma curva teórica por lo que el error introducido por las condiciones ambientales es despreciable y, cómo las curvas de ruido blanco también superan la presión de las curvas de menor volumen, el efecto producido por el sistema se vuelve también despreciable de modo que se obtiene una buena detección aún si no se tuviese en cuenta el sistema, es decir, es un sistema equivalente a dos personas hablando a la distancia de separación de la cuerda.

Para comprender mejor la importancia de los hallazgos anteriores, se realizó una comparación más detallada de la amplitud de la onda recibida en términos de decibeles. Para esta parte se tuvo en cuenta de primera mano el posible ruido inducido por las condiciones ambientales de modo que al obtener valores de decibelios en diferentes zonas del cuarto, se obtuvo un nivel de referencia de ajuste promediando estos valores de mapeo del cuarto y luego restándolos a los valores obtenidos durante las pruebas.

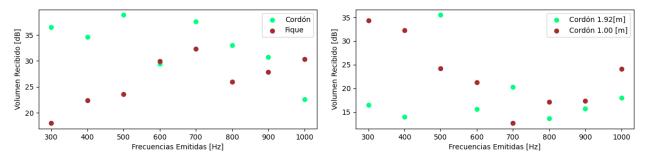
Por otra parte, una recopilación de datos sobre los decibelios máximos que puede generar una persona fue necesario para que las pruebas a nivel de volumen de nivel 3 tuviesen sentido y no fuesen un dato escogido al azar, dañando las medidas tomadas. En estos datos, para diferentes personas se recopilaron en tres conversaciones diferentes, cada una con un nivel de entonación diferente. Esto debido a la no homogeneidad del nivel vocal de la población. Los resultados se encuentran en la tabla 1 donde se puede notar que el rango de promedio de una persona data entre los 26.98 y 42.84. Estos datos son consistentes con la literatura. [2]

Ahora bien, para las respectivas confrontaciones entre parámetros se tuvieron en cuenta uno fijo y otro variable de modo que las comparaciones tuviesen sentido. Estos parámetros fueron el material de vaso y el tipo de cuerda. Note que en la gráfica 9 predomina el efecto generado al usar un vaso de papel. Por lo que, a modo de torneo, se enfrenta con el mismo vaso de papel, el efecto producido por un cordón y el fique. De esta comparación en la figura 10a el mejor volumen se obtiene para el uso de cordón.

Finalmente sin conclusiones concluyentes debido principalmente a la falta de datos para obtener resultados estadísticos confiables por la sensibilidad en el osciloscopio, en la figura 10 solo se puede decir que es bastante comparable el uso de una cuerda de 1,92 [m] con respecto a la cuerda de 1,00 [m] siendo esta última la más predominante.

Prueba	Cordón 1.92 [m]		Cordón 1.00 [m]	Promedio
Trueba	Vaso de Papel	Lata	Vaso de Papel	[dB]
Conversación 1	27.53	24.46	28.96	26.98
Conversación 2	30.86	28.59	33.56	31.03
Conversación 3	46.53	39.56	42.43	42.84

Cuadro 1: Decibeles promedio de diferentes personas en diferentes niveles de volumen.



(a) Mismo vaso papel para distancia 1.92m, diferente cuerda (b) Mismo vaso papel diferentes distancias, para cordón

Figura 10: Comparaciones entre los resultados para diferentes parámetros.

4.2. Análisis calidad de audio

En la segunda parte del trabajo se tenía como objetivo estudiar la calidad de audio, esto se logró colocando un audio de entrada de un vaso y grabando y analizando el sonido que se percibía en el vaso que se encontraba en el otro extremo. Para esto se escogió como audio de estudio una parte de una clase de la doctora Tatiana Erukhimova ¹ y se decidió realizar el análisis con el mismo tipo de vasos, a la misma distancia, cambiando solamente el material de la cuerda que unía los vasos, utilizando fique y cordón. Además, para verificar como cambia la calidad del audio dependiendo del volumen de audio de entrada, para cada tipo cuerda el audio fue emitido a tres volúmenes diferentes.

Con los audios recolectados, primero se procedió a editarlos y recortalos para que tuvieran la misma duración que el audio original. Utilizando python, el código se encuenta en el Github, a los audios grabados se les quitó todo posible ruido de fondo, esto mediante la grabación de sonido del entorno a la hora de grabar, por lo que fue para limpiar los audios solo fue necesario restarle las amplitudes a estos audios. Posteriormente, para una mejor manipulación computacional, los audios grabados y el audio original fueron convertidos en un array. Estos arrays debían tener la misma longitud para poder ser comparados, por lo que en algunas ocasiones fue necesario quitarles reducir el tamaño de los arrays. De esta manera, en las gráficas (11), (12) y (13) podemos ver las gráficas de amplitudes de señales versus tiempo para el caso de cuerda de cordón para los tres volúmenes respectivamente; de manera similar, en las gráficas (14), (15) y (16) se pueden ver las gráficas de amplitud de señal versus tiempo para el caso de cuerda fique a los tres volúmenes.

¹https://www.youtube.com/shorts/jhwvCKrUq9U

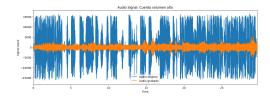


Figura 11: Amplitud vs Tiempo con cordón y volumen alto.

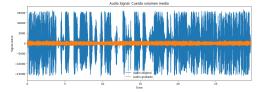


Figura 12: Amplitud vs Tiempo con cordón y volumen medio.

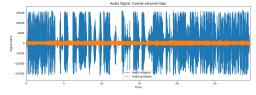


Figura 13: Amplitud vs Tiempo con cordón y volumen bajo.

Finalmente, para poder comparar las señales se encontró las métricas de el error cuadrático medio (MSE) y el índice de similitud estructural (SSI) entre el audio original y los audios grabados para cada volúmen. El error cuadrático medio (MSE) es una medida que calcula la magnitud promedio de los errores al cuadrado entre los valores reales y los valores predichos, en este caso se realiza mediante los valores de los arrays. En este contexto de señales de audio, el MSE cuantifica la discrepancia media entre las amplitudes de dos señales, proporcionando una medida de la calidad de la coincidencia entre ellas. Por otro lado, el índice de similitud estructural (SSI) es una métrica que evalúa la similitud estructural entre dos imágenes o señales. En este contexto de señales de audio, el SSI mide cómo se conserva la estructura, la luminancia y la crominancia entre las señales, a mayor valor de SSI, las señales tendrán pierden la estructura. Estos dos valores, MSE y SSI, se encontraron utilizando diferentes librerias de python, entre esas sklearn_metrics y skimage_metrics. De esta manera, en la tabla (2) y (3) se encuentran los valores encontrados para dichas métricas para el cordón y fique respectivamente, y para cada volumen.

Observando la tabla con los valores de MSE y SSI del cordón, podemos verificar que entre mayor sea el volumen, el valor del error cuadrático medio disminuía al igual que el índice de similitud estructural, es decir que, como era de esperarse, hay menor diferencia entre el audio grabado y el original. Lo mismo sucede para el caso del fique, se ve que el menor valor de MSE y mayor de SSI corresponde al audio grabado con mayor volumen. De esta manera un primer resultado que se puede observar es que a medida que el volumen del audio sea mayor en uno de los vasos, el audio que se propaga hasta el otro vaso tendrá una mayor calidad, tendrá una estructura similar al audio

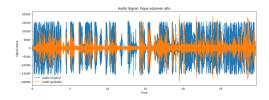


Figura 14: Amplitud vs Tiempo con Fique y volumen alto.

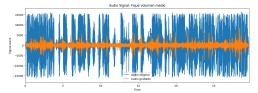


Figura 15: Amplitud vs Tiempo con Fique y volumen medio.

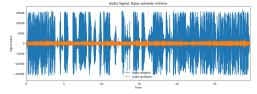


Figura 16: Amplitud vs Tiempo con Figue y volumen bajo.

Cordón				
	MSE	SSI		
Alto	477,4	0,261		
Medio	486,8	0,281		
Bajo	513,2	0,285		

Cuadro 2: Error cuadrático medio e índice de similitud estructural para cordón y vasos plásticos, para tres volúmenes diferentes.

	MSE	SSI
Alto	375,8	0,207
Medio	508,8	0,261
Bajo	531,9	0,290

Cuadro 3: Error cuadrático medio e índice de similitud estructural para fique y vasos plásticos, para tres volúmenes diferentes.

original.

Ahora, comparando entre los dos tipos de cuerda, cordón y fique, podemos ver que en el caso de volumen alto, el fique es el que menor valor de error tiene, siendo este de 375.8, mientras que el del cordón es de 477.4. Por otro lado lo mismo sucede con el índice de similitud, en el caso del fique a

volumen alto, este indice es menor en comparación con el de cordón, donde el de fique es de 0.207 y el de cordón es de 0.261. Por lo que se puede concluir que, en esta parte de analisis de calidad de sonido, el fique transmite mejor el audio que el cordón.

5. Conclusiones y Recomendaciones

- Los resultados resaltan la importancia del volumen con el que se realizan las pruebas en el sistema, ya que proporciona datos significativos para la calidad del audio emitido y la relevancia del sistema usado. Es decir, que tenga sentido su uso para poder explicar el fenómeno y comprobarlo experimentalmente. En este sentido, los datos de volumen máximo no aportan información importante.
- Debido a la sensibilidad de los dispositivos de medición, como el osciloscopio, se observa que el efecto producido por las condiciones ambientales es despreciable a nivel de ruido blanco pero determinante cuando se generan las altas frecuencias haciendo necesario un análisis estadístico de los resultados para evitas resultados poco concluyente como los encontrados en la figura 10.
- Comparando ahora entre las dos variedades de cuerdas, cordón y fique, se observa que en situaciones de volumen elevado, el fique exhibe el menor valor de error, registrado en 375.8, en contraste con el cordón que registra 477.4. Asimismo, se refleja una tendencia similar en el índice de similitud, donde para el fique a un nivel de volumen alto, el índice es inferior en comparación con el cordón, con valores respectivos de 0.207 y 0.261. Por lo tanto, se puede concluir que en esta fase de análisis de la calidad del sonido, el fique demuestra una mejor transmisión del audio en comparación con el cordón.
- La presencia de la cuerda que tira del la base del baso restringe por modos normales de vibración se la memebrana, como la dictamina la ecuación 10.

Referencias

- [1] A.G. Bell. Improvement in telegraphy. U.S. Patent No. 174,465, 1876.
- [2] Julian Chengiun Chen. Elements of human voice. World Scientific, 2016.