基礎数理演習課題 4

21716070 縫嶋慧深

2020 年 6 月 28 日

0

次の行列の関係式について以下をそれぞれ求めて下さい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) x_1, y_1, z_1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\times(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad (x_1, y_1, z_1) = (1, 0, 1)$$

(2) x_2, y_2, z_2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\times(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad (x_2, y_2, z_2) = (0, 1, \tfrac{1}{2})$$

(3) x_3, y_3, z_3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\times(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad (x_3, y_3, z_3) = (0, 0, -\tfrac{1}{2})$$

1

次の連立一次方程式の解を、行列の基本変形を用いて求めて下さい。

(1) $\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = -1 \\ -2x - y = 2 \end{cases}$

拡大係数行列を簡約化する。

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\times\frac{1}{4}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+R_1\times 2]{R_2-R_1\times 3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\times 2]{R_2\times(-4)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_2]{R_1-R_2\times\frac{3}{4}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

連立方程式に戻すと、$\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} -2x + y + z = 2 \\ x - 2y + z = 2 \\ x + y - 2z = -4 \end{cases}$

拡大係数行列を簡約化する。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\times -\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\times(-\frac{2}{3})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_2\times\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

連立方程式に戻すと、$\begin{cases} x - z = -2 \\ y - z = -2 \end{cases}$

主成分を左辺に残し、残りを右辺に移行する。$\begin{cases} x = z - 2 \\ y = z - 2 \end{cases}$

z を $s \in \mathbb{R}$ とおくと、$\begin{cases} x = s - 2 \\ y = s - 2 \quad (s \in \mathbb{R}) \\ z = s \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x - y + z + w = 1 \\ 2x - 2y - z + 2w = -1 \\ 3x - 3y + z + 3w = 1 \end{cases}$

拡大係数行列を簡約化する。

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\times(-\frac{1}{2})]{R_2\times(-\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3-R_2]{R_1-R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

連立方程式に戻すと、$\begin{cases} x - y + w = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

主成分 x, z を左辺に残し、残りを右辺に移行する。$\begin{cases} x = y - w \\ z = 1 \end{cases}$

y, w をそれぞれ $s, t \in \mathbb{R}$ とおくと、
$$\begin{cases} x = s - t \\ y = s \\ z = 1 \\ w = t \end{cases} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$