基礎数理演習課題 5

21716070 縫嶋慧深

2020 年 6 月 8 日

1

次の連立一次方程式の解を求めて下さい。解を持たない場合はその判定もして下さい。

(1) $$\begin{cases} x+4y=5 \\ -5x+6y=-2 \\ 2x+9y=9 \end{cases}$$

拡大係数行列を簡約化する。

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ -5 & 6 & -2 \\ 2 & 9 & 9 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 26 & 23 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 49 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 49 \end{array}\right)$$
$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

拡大係数行列の階数は 3、係数行列の階数は 2 なので、両者は一致せず、解を持たない。

(2) $$\begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ -3x+2y+z=2 \end{cases}$$

拡大係数行列を簡約化する。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \end{array}\right)$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

連立方程式に戻すと、$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$

主成分を左辺に残し、残りを右辺に移行する。$\begin{cases} x = z \\ y = z + 1 \end{cases}$

z を $s \in \mathbb{R}$ とおくと、$\begin{cases} x = s \\ y = s + 1 \quad (s \in \mathbb{R}) \\ z = s \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x + 2y - 9z = 4 \\ x - 2y + 5z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$

拡大係数行列を簡約化する。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -9 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -10 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -10 & 1 \\ 0 & -5 & 15 & -1 \\ 0 & -7 & 21 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -10 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & -7 & 21 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -10 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 21 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

拡大係数行列の階数は 3、係数行列の階数は 2 なので、両者は一致せず、解を持たない。

2

次の行列の階数を求めて下さい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & -5 \\ -1 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & -5 \\ -1 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -3 & 12 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 1 & -4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{12}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行列 A の階数は 3

3

次の行列の逆行列を求めて下さい。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} E_n & B \end{array} \right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} E_n & B \end{array} \right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$