基礎数理演習課題 6

21716070 縫嶋慧深

2020 年 6 月 16 日

1

次の行列の計算をして下さい。演算が定義されない場合はその旨を答えて下さい。

(1) $$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 20 \\ 17 & 17 \end{pmatrix}$$

(4) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \\ -2 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

(5) $$\begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

(6) $$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

2

次の実 3 次元数ベクトルに対し、(1) $\sim$ (3) を求めて下さい。

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ また、$\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}, \vec{c} = \vec{OC}$ とする。

(1) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 + (-2) + 8 = 14$$

(2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ のなす平行六面体の体積

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 + (-2) + (-4) = 2$$

(3) $\triangle ABC$ の面積

$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{AB}|^2|\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$ より、

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$|\vec{AB}| = \sqrt{0 + 1 + 9} = \sqrt{10}$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$|\vec{AC}| = \sqrt{0 + 1 + 4} = \sqrt{5}$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 + (-1) + 6 = 5$$

$S = \frac{1}{2}\sqrt{10 \times 5 - 25} = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$

3

次の正方行列の逆行列を求めて下さい。持たない場合はその判定もして下さい。

(1) $A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$detA = 35 - 36 = -1$

$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$

$detA = 36 - 36 = 0$

$\therefore A$ は逆行列を持たない。

(4) $A = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -2 \\ 1 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$

$detA = 6 - (-2) = 8$

$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 2 \\ -1 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$detA = 6 + 20 + 16 - 60 - (-2) - (-16) = 0$

$\therefore A$ は逆行列を持たない。

(6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$detA = 4 + 6 + 4 - 4 - 8 - 3 = -1$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} E_n & B \end{array} \right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(7) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_n & B \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4

次の連立一次方程式を解いて下さい。持たない場合はその判定もして下さい。ただし、$l = 0$

(1) $\begin{cases} x + y = -1 \\ 3x + 4y = 4 \\ 5x + 6y = 0 \end{cases}$

拡大係数行列を簡約化する。

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

拡大係数行列の階数は 3、係数行列の階数は 2 なので、両者は一致せず、解を持たない。

(2) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -3x - 2y = -2 \\ 6x - 2z = 7 \end{cases}$

拡大係数行列を簡約化する。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & 7 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$
\longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)
$$

連立方程式に戻すと、$\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 3 \\ -x + z + 2w = -1 \\ 3x - y - 5z - 9w = 2 \end{cases}$

拡大係数行列を簡約化する。

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -9 & 2 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & -7 & -14 & -21 & -7 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

連立方程式に戻すと、$\begin{cases} x - z - 2w = 1 \\ y + 2z + 3w = 1 \end{cases}$

z, w を $s, t \in \mathbb{R}$ とおくと、$\begin{cases} x = s + 2w + 1 \\ y = 2s + 3w + 1 \\ z = s \\ w = t \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R})$

$[+\alpha]$

問題 4(2) の連立方程式を一般の整数 l に対して解いて下さい。

$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -3x - 2y + lz = -2 \\ 6x + ly - 2z = 7 \end{cases}$

拡大係数行列を簡約化する。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & l & -2 \\ 6 & l & -2 & 7 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & l-3 & 1 \\ 0 & l-6 & 4 & 1 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -l+2 & 0 \\ 0 & 1 & l-3 & 1 \\ 0 & 0 & -l^2+9l-14 & -l+5 \end{array}\right)$$

$$\longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -l+2 & 0 \\ 0 & 1 & l-3 & 1 \\ 0 & 0 & l^2-9l+14 & l-5 \end{array}\right)$$

連立方程式に戻すと、$\begin{cases} x+(-l+2)z=0 \\ y+(l-3)z=1 \\ (l^2-9l+14)z=l-5 \end{cases}$

● $l=2,7$ の時 $\begin{cases} x+(-l+2)z=0 \\ y+(l-3)z=1 \\ 0=l-5 \end{cases}$

拡大係数行列の階数は 3、係数行列の階数は 2 となるので、両者は一致せず、解を持たない。

● $l \neq 2,7$ の時 $\begin{cases} x-lz+2z=0 \\ y+lz-3z=1 \\ l^2z-9lz+14z=l-5 \end{cases}$

$x-lz+2z=0$ を l について解くと、

$lz=x+2z$

$l=\frac{x}{z}+2$