基礎数理演習課題 13

21716070 縫嶋慧深

2020 年 8 月 5 日

1

次の関数を微分して下さい。

(1) $f(x) = x^2 + 2^x + log_2 x$

$$f(x) = x^2 + 2^x + \frac{logx}{log2}$$
$$f'(x) = 2x + 2^x log2 + \frac{1}{xlog2}$$

(2) $f(x) = \tan x \sin^{-1} x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin^{-1} x)' \cdot \tan x + \sin^{-1} x \cdot (\tan x)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \tan x + \sin^{-1} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sin^{-1} x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

(3) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$$f(x) = \sin x \cdot \frac{1}{x^2} + (1-\cos x) \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right)$$
$$f'(x) = \frac{x \sin x + 2\cos x - 2}{x^3}$$

(4) $f(x) = \sqrt{2e^x + 1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2e^x+1)'}{2\sqrt{2e^x+1}} \\ &= \frac{e^x}{\sqrt{2e^x+1}} \end{aligned}$$

(5) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{(x^2)'}{\sqrt{1-x^4}} \\ &= -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \end{aligned}$$

(6) $f(x) = e^{2x} \sin 3x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{2x}\right)' \cdot \sin 3x + e^{2x} \cdot (\sin 3x)' \\ &= e^{2x} \left(2 \sin 3x + 3 \cos 3x\right) \end{aligned}$$

(7) $f(x) = x^{\cos x} \quad (x > 0)$

両辺の自然対数をとる

$logf(x) = logx^{\cos x}$

$logf(x) = \cos x logx$

両辺を微分する

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sin x logx + \frac{\cos x}{x}$$

$$f'(x) = x^{\cos x}\left(-\sin x logx + \frac{\cos x}{x}\right)$$

$$= x^{\cos x - 1}\left(-x\sin x logx + \cos x\right)$$

2

次の値を求めて下さい。

(1) $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

(2) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

(3) $\tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

3

次の不定積分を求めて下さい。(積分定数として $C, C_1, C_2, \cdots$ を断らずに用いてよい)

(1)

$$\int \sqrt{x}\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)\, dx \cdots (*)$$

$u = \sqrt{x}$とすると

$$(*) = 2\int (u^4 - u^2 + 1)\, du$$

$$= \frac{2u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} + 2u + C$$

$$= \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 2\sqrt{x} + C$$

$$= \frac{2}{15}\sqrt{x}(3x^2 - 5x + 15) + C$$

(2)

$$\int \frac{1}{x}logx\ dx \cdots (*)$$

$u = logx$ とすると

$$(*) = \int udu$$

$$= \frac{u^2}{2} + C_1$$

$$= \frac{log^2 x}{2} + C_1$$

(3)

$$\int x^2 \sin x\ dx$$
$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\ dx + C_2$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\ dx + C_2$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C_2$$
$$= 2x\sin x + (2-x^2)\cos x + C_2$$

(4)

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\ dx \cdots (*)$$

$u = e^x$とすると

$$(*) = \int \frac{1}{\sqrt{4-u^2}}\ du$$
$$= \int \frac{1}{2\sqrt{1-\dfrac{u^2}{4}}}\ du$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{4}}}\ du \cdots (**)$$

$s = \dfrac{u}{2}$とすると

$$(**) = \int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\ ds$$
$$= \sin^{-1} s + C_3$$
$$= \sin^{-1}\frac{u}{2} + C_3$$
$$= \sin^{-1}\frac{e^x}{2} + C_3$$

(5)

$$\int \sin -1x\ dx$$
$$= x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \cdots (*)$$

$u = 1-x^2$とすると

$$(*) = x\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\ du$$
$$= x\sin^{-1} x + \sqrt{u} + C_4$$
$$= x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C_4$$

(6)

$$\int \frac{x^2+3x}{x^2+3x+2}\ dx$$
$$= \int \left(\frac{2}{x+2} - \frac{2}{x+1} + 1\right)\ dx$$
$$= 2\int \frac{1}{x+2}\ dx - 2\int \frac{1}{x+1}\ dx + \int 1\ dx$$
$$= 2logx + 2 - 2logx + 1 + x + C_5$$

(7)

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2}\ dx$$
$$= \int \left(-\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x}\right)\ dx$$
$$= -\int \frac{1}{x+1}\ dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\ dx + \int \frac{1}{x}\ dx$$
$$= logx - log(x+1) + \frac{1}{x+1} + C_6$$

(8)

$$\int \frac{12}{x^3+8}\ dx$$
$$= 12\int \frac{1}{x^3+8}\ dx$$
$$= 12\int \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}\ dx$$
$$= 12\int \left(\frac{4-x}{12(x^2-2x+4)} + \frac{1}{12(x+2)}\right)\ dx$$
$$= \int \frac{4-x}{x^2-2x+4}\ dx + \int \frac{1}{x+2}\ dx$$
$$= -\frac{1}{2}log(x^2-2x+4) + log(x+2) + \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C_7$$

4

次の定積分を求めて下さい。

(1)

$$\int_0^{1-e} \frac{1}{x-1}\,dx$$
$$= -\int_{1-e}^{0} \frac{1}{x-1}\,dx \cdots (*)$$

$u = x-1$ とすると

$$(*) = -\int_{-e}^{-1} \frac{1}{u}\,du$$
$$= [-log u]_{-e}^{-1}$$
$$= -log(-1) + log(-e)$$
$$= 1$$

(2)

$$\int_0^1 x^2 e^{x^3}\ dx \cdots (*)$$

$u = x^3$とすると

$$(*) = \frac{1}{3}\int_0^1 e^u\ du$$
$$= \left[\frac{e^u}{3}\right]_0^1$$
$$= \frac{e-1}{3}$$

(3)

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,log x\ dx$$
$$= \left[2\sqrt{x}\ log x\right]_1^4 - 2\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$= 4log4 - 2\left[2\sqrt{x}\right]_1^4$$
$$= 4log4 - 4$$

(4)

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx \cdots (*)$$

$u = x+1$ とすると

$$(*) = \int_0^2 \frac{1}{u^2+4}\,du$$
$$= \int_0^2 \frac{1}{4\left(\dfrac{u^2}{4}+1\right)}\,du$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{\dfrac{u^2}{4}+1}\,du$$

$s = \dfrac{u}{2}$とすると

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{s^2+1}\,ds$$
$$= \frac{1}{2}\left[\tan^{-1} s\right]_0^1$$
$$= \frac{\pi}{8}$$

5

関数 $f(x) = x^4 - 4x^3$ に対して、次の問いに答えて下さい。

(1)　2 次導関数まで求め、極限と変曲点を求めて下さい。

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) \\
&f''(x) = 12x(x-2) \\
&f'(x) \geq 0 \ \Leftrightarrow \ 4x^2(x-3) \geq 0 \\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow \ x = 0, 3 \leq x \\
&f''(x) \geq 0 \ \Leftrightarrow \ 12x(x-2) \geq 0 \\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow \ 0 \leq x \leq 2
\end{aligned}
$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		0		-16		-27	

$$
\begin{cases}
\text{極大値：なし} \\
\text{極小値：} f(3) = -27 \\
\text{変曲点：} (0,\ 0),\ (2,\ -16)
\end{cases}
$$

(2)　直線 $x - 2$ と $x = 2$ 間でグラフ $y = f(x)$ と x 軸 に挟まれた領域の面積を求めて下さい。

$$
\begin{aligned}
&\int x^4 - 4x^3 \ dx = \frac{x^5}{5} - x^4 + C \\
&\frac{x^5}{5} - x^4 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0 \\
&S = \int_{-2}^{2} \left(\frac{x^5}{5} - x^4 \right) dx \\
&\quad = \frac{1}{5} \int_{-2} 2x^5 \ dx - \int_{-2} 2x^4 \ dx \\
&\quad = \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-2}^{2} \\
&\quad = -\frac{64}{5}
\end{aligned}
$$

6

次の関数の 3 次までのマクローリン多項式を求めて下さい。

$$f(x) = \tan^{-1} x$$

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \tan^{-1} x \\
&f(x) = \tan^{-1} x \ \rightarrow \ f(0) = 0 \\
&f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \ \rightarrow \ f'(0) = 1 \\
&f''(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \ \rightarrow \ f''(0) = 0 \\
&f'''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3} \ \rightarrow \ f'''(0) = -2 \\
&\qquad \therefore \ P_n(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3} = x - \frac{x^3}{3}
\end{aligned}
$$