基礎数理演習課題 10

21716070 縫嶋慧深

2020 年 7 月 14 日

0

次の関数を 2 次導関数まで求め、極値を求めて下さい。また、変曲点を求めて下さい。

(1)

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$
$$f'(x) = \frac{e^x - x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$
$$f''(x) = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{-2+x}{e^x}$$
$$f'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1-x}{e^x} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow\; x \leq 1$$
$$f''(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-2+x}{e^x} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow\; x \geq 2$$

$$\begin{cases} \text{極大値}: f(1) = \frac{1}{e} \\ \text{極小値}: \text{なし変曲点}: \left(2,\ \dfrac{x}{e^x}\right) \end{cases}$$

(2)

$$f(x) = x^5 - 5x^4$$
$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 = 5x^3(x-4)$$
$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3)$$
$$f'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 5x^3(x-4) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow\; x \leq 0, 4 \leq x$$
$$f''(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 20x^2(x-3) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow\; x \geq 3$$

$$\begin{cases} \text{極大値}: f(0) = 0 \\ \text{極小値}: f(4) = -256 \\ \text{変曲点}: (3, -162) \end{cases}$$

1

次の不定積分を求めて下さい。(積分定数として $C, C_1, C_2, \cdots$ を断らずに用いてよい)

(1)

$$\int (-\sin x - \cos x)dx$$
$$= \cos x - \sin x + C$$

(2)

$$\int (4 + x^4 + 4^x)dx$$
$$= 4x + \frac{x^5}{5} + \frac{4^x}{log4} + C_1$$

(3)

$$\int (x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}} + x^{-\frac{3}{2}})dx$$
$$= \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + 3x^{\frac{1}{3}} - 2x^{(-\frac{1}{2})} + C_2$$
$$= \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + 3\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C_2$$

(4)

$$\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$$
$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 2\sqrt{x} + C_3$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x}(x+3) + C_3$$

(5)

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$
$$= logx - \frac{1}{x} + \tan^{-1} x + C_4$$

2

次の定積分を求めて下さい。

(1)

$$\int_0^2 (6x^2 - 6x + 6)dx$$
$$= \left[2x^3 - 3x^2 + 6x\right]_0^2$$
$$= (16 - 12 + 12) - 0 = 16$$

(2)

$$\int_1^2 (2^x - x^2)dx$$
$$= \left[\frac{2^x}{log2} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2$$
$$= \left(\frac{4}{log2} - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{2}{log2} - \frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{2}{log2} - \frac{7}{3}$$

(3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$
$$= [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= 1 - 0 = 0$$

(4)

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$
$$= \left[\sin^{-1} x\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

3

$x = -1$ と $x = 1$ の間でグラフ $y = e^x - 1$ と x 軸 に挟まれた領域の (通常の) 面積を求めて下さい。

$$\int (e^x - 1)dx = e^x - x + C$$
$$e^x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$$
$$S = \int_{-1}^{1} (e^x - 1)dx = -\int_{-1}^{0} (e^x - 1)dx + \int_0^1 (e^x - 1)dx$$
$$= -\left[e^x - x\right]_{-1}^{0} + \left[e^x - x\right]_0^1$$
$$= -(1 - (e^{-1} + 1)) + ((e - 1) - 1)$$
$$= e + \frac{1}{e} - 2$$