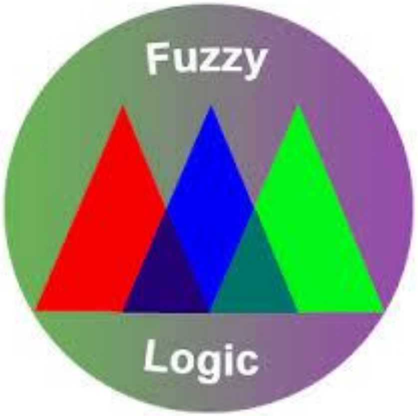
Modelos de Inteligencia Artificial

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

:: U2 ::

Lógica difusa

Diseño de Sistemas Expertos



Curso 2023-24

Tabla de contenidos

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

Lógica difusa

Tabla de contenidos

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

Lógica difusa

Tabla de contenidos

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

Lógica difusa

Sesión 1

1. Lógica booleana vs difusa

Lógica binaria (o booleana)

- desarrollada por George Boole en el siglo XIX.
- <u>Principio</u>: las proposiciones se pueden reducir a dos **estados** (o variables) lógicos (**verdadero (1)** y **falso (0)**) junto a los **operadores** que permiten manejar esos valores (**AND, OR** y **NOT**)
- **Algebra de Boole**: reglas y propiedades para operar con expresiones booleanas.
- **Tablas de verdad**: resultados de operaciones booleanas

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$
V	V	V	V	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	F

1. Lógica booleana vs difusa

Lógica difusa

Siglo XIX

Siglo XX

- **Jan Lukasiewicz** propone una alternativa sistemática a la lógica bivaluada de Aristóteles, la lógica trivaluada.

- **Max Black** define en 1937 el primer conjunto difuso mediante una curva que recogía la frecuencia con la que se pasaba de un estado a su opuesto.

- En 1965 **Lotfi Asker Zadeh**, basado en las ideas de Black, crea la 'lógica difusa', que combina los conceptos de la **lógica clásica** y de los **conjuntos** de Jan Lukasiewicz mediante la definición de grados de pertenencia.

1. Lógica booleana vs difusa

- La **lógica difusa** se basa en un razonamiento afín a la aproximación a la percepción humana: no todo es blanco o negro, sino que el pensamiento humano contempla diversos "grises".

- En Inteligencia artificial, la lógica difusa se utiliza para la resolución de una variedad de problemas, principalmente los relacionados con el control de **procesos industriales complejos** y **sistemas de decisión en general.**

1. Lógica booleana vs difusa

- **Áreas de aplicación tecnológica de la lógica difusa**
  - control de dosificación en plantas de aguas residuales
  - control de robots en inspección de túneles
  - control de temperatura en máquinas de fabricación de plásticos
  - climatización y automatización de edificios
  - sistemas de cálculo financiero, riesgos, ...
  - ...

1. Lógica booleana vs difusa

RETO2

Cálculo del riesgo en pólizas

1. Lógica booleana vs difusa

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

RETO2

Cálculo del riesgo en pólizas

¿Se concede una poliza si existe un riesgo del **60,2785%**?

1. Lógica booleana vs difusa

Una afirmación puede ser ...

Lógica binaria (clásica)	
Verdadero	**1**
Falso	**0**

condición veracidad $\in \{0,1\}$

1. Lógica booleana vs difusa

Una afirmación puede ser …

Lógica binaria (clásica)	
Verdadero	**1**
Falso	**0**

Lógica difusa	
Parcialmente verdadero	**0.7**
Parcialmente falso	**0.1**

condición veracidad ∈ {0,1}

condición veracidad ∈ {0.0,1.0}

1. Lógica booleana vs difusa

Ejemplo

¿Cómo de mojada está la ropa que hemos tendido?

0 (seca) **1** (mojada)

1. Lógica booleana vs difusa

Ejemplo

¿Cómo de mojada está la ropa que hemos tendido?

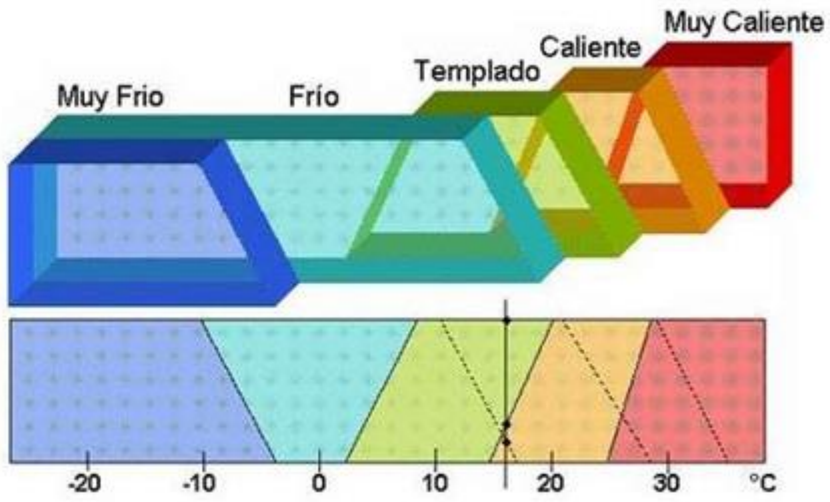
0 (seca) **1** (mojada)

0 (seca) **0.5** **1** (mojada)

0.25 (algo mojada) **0.75** (bastante mojada)

1. Lógica booleana vs difusa

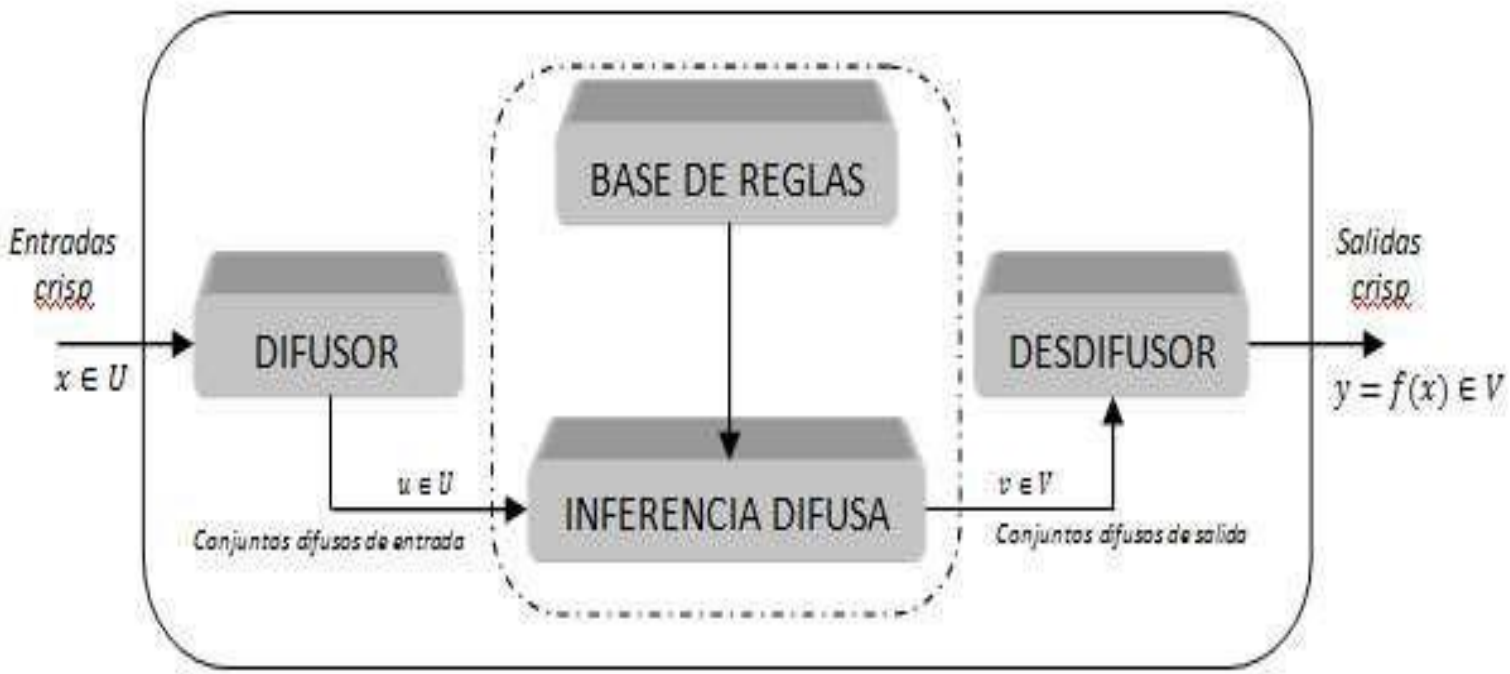
- La lógica difusa analiza los métodos y principios de razonamiento a partir de proposiciones imprecisas que relacionan magnitudes y valores lingüísticos y cualitativos modelados por conjuntos difusos.



1. Lógica booleana vs difusa

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

Objetivo :: modelado de sistemas difusos …



… por ejemplo como sistemas expertos

2. Nociones sobre conjuntos

… pero antes de "meternos en harina" cabe hacer alguna aclaración sobre qué son los conjuntos y cómo manejarse con ellos …

2. Nociones sobre conjuntos

- Un conjunto es una colección de cosas, generalmente números.

Ejemplo: **{5, 7, 11}** es un conjunto.

- Se puede definir un conjunto describiendo lo que hay en él.

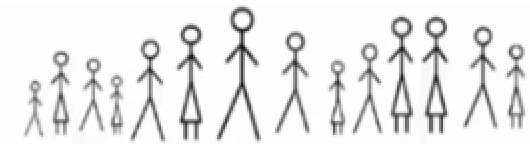
Dice **"el conjunto de todas las x, tal que la x es mayor que 0"**.

2. Nociones sobre conjuntos

Símbolo	Significado	Ejemplo
$\{\}$	**Conjunto**: una colección de elementos	$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{3, 4, 5\}$
$A \cup B$	**Unión**: en A o B (o ambos)	$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$A \cap B$	**Intersección**: tanto en A como en B	$A \cap B = \{3, 4\}$
$A \subseteq B$	**Subconjunto**: cada elemento de A está en B.	$\{3, 4, 5\} \subseteq B$
$A \subset B$	**Subconjunto propio**: cada elemento de A está en B, pero B tiene más elementos.	$\{3, 5\} \subset B$
$A \not\subset B$	**No es un subconjunto**: A no es un subconjunto de B	$\{1, 6\} \not\subset B$
$A \supseteq B$	**Superconjunto**: A tiene los mismos elementos que B, o más	$\{1, 2, 3\} \supseteq \{1, 2, 3\}$
$A \supset B$	**Superconjunto propio**: A tiene elementos de B y más	$\{1, 2, 3, 4\} \supset \{1, 2, 3\}$
$A \not\supset B$	**No es un superconjunto**: A no es un superconjunto de B	$\{1, 2, 6\} \not\supset \{1, 9\}$
A^c	**Complemento**: elementos que no están en A	$B^c = \{1, 2, 6, 7\}$ cuando $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A - B$	**Diferencia**: en A pero no en B	$\{1, 2, 3, 4\} - \{3, 4\} = \{1, 2\}$
$a \in A$	**Elemento de**: *a* está en A	$3 \in \{1, 2, 3, 4\}$
$b \notin A$	**No elemento de**: *b* no está en A	$6 \notin \{1, 2, 3, 4\}$

3. Conjuntos clásicos vs difusos

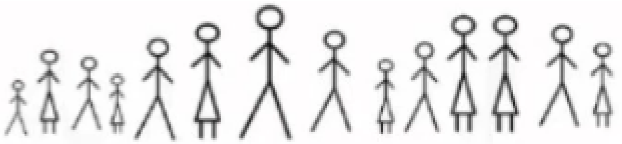
Ejemplo: Clasificación de personas en 2 conjuntos según se **estatura**



Una persona sólo puede pertenecer a un conjunto

3. Conjuntos clásicos vs difusos

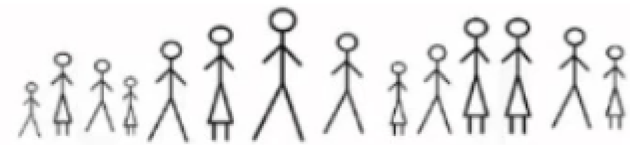
Ejemplo: Clasificación de personas en 2 conjuntos según se **estatura**



Una persona puede pertenecer a **más de un** conjunto … en diferente grado

3. Conjuntos clásicos vs difusos

> Universo de discurso (todos los elementos) ⇨

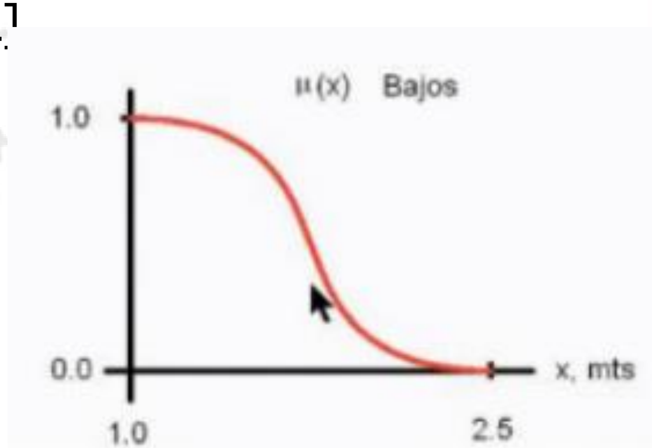


Por ejemplo, X € [1.5, 2.0] metros

> Función de membresía

Dominio = Universo de discurso, x € X

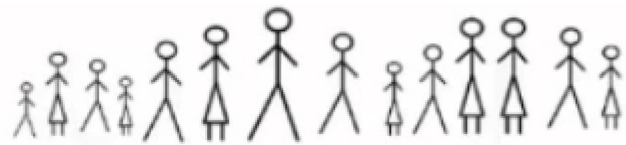
Imagen ⟶ μ € [0,1]



3. Conjuntos clásicos vs difusos

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

> Universo de discurso (todos los elementos) ⇨



Por ejemplo, X € [1.5, 2.0] metros

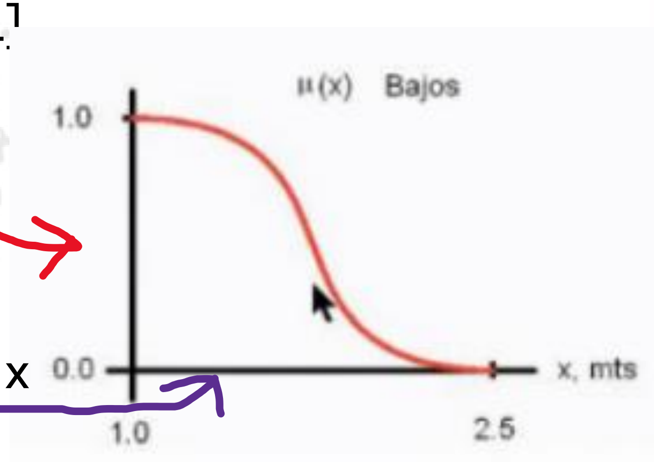
> Función de membresía

Dominio = Universo de discurso, x € X

Imagen ⟶ μ € [0,1]

Eje Y

Eje X



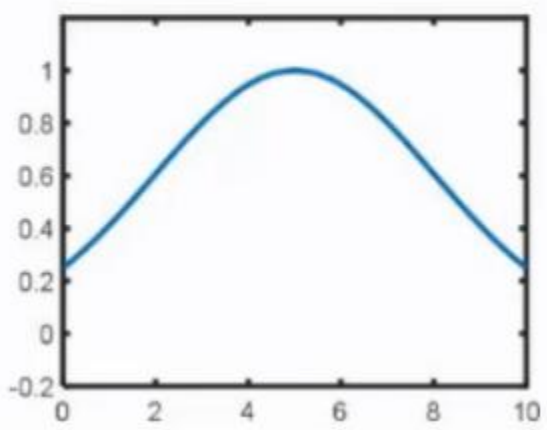
3. Conjuntos clásicos vs difusos

- **Existen 2 formas de definir conjuntos difusos**

Continuos

$$A = \left\{ \int \frac{\mu(x)}{x} \right\}$$

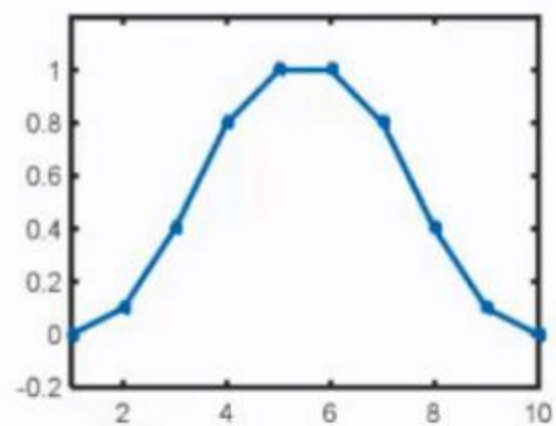
$$A = \left\{ \int_0^{10} \frac{exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{3}\right)^2\right]}{x} \right\}$$



Discretos

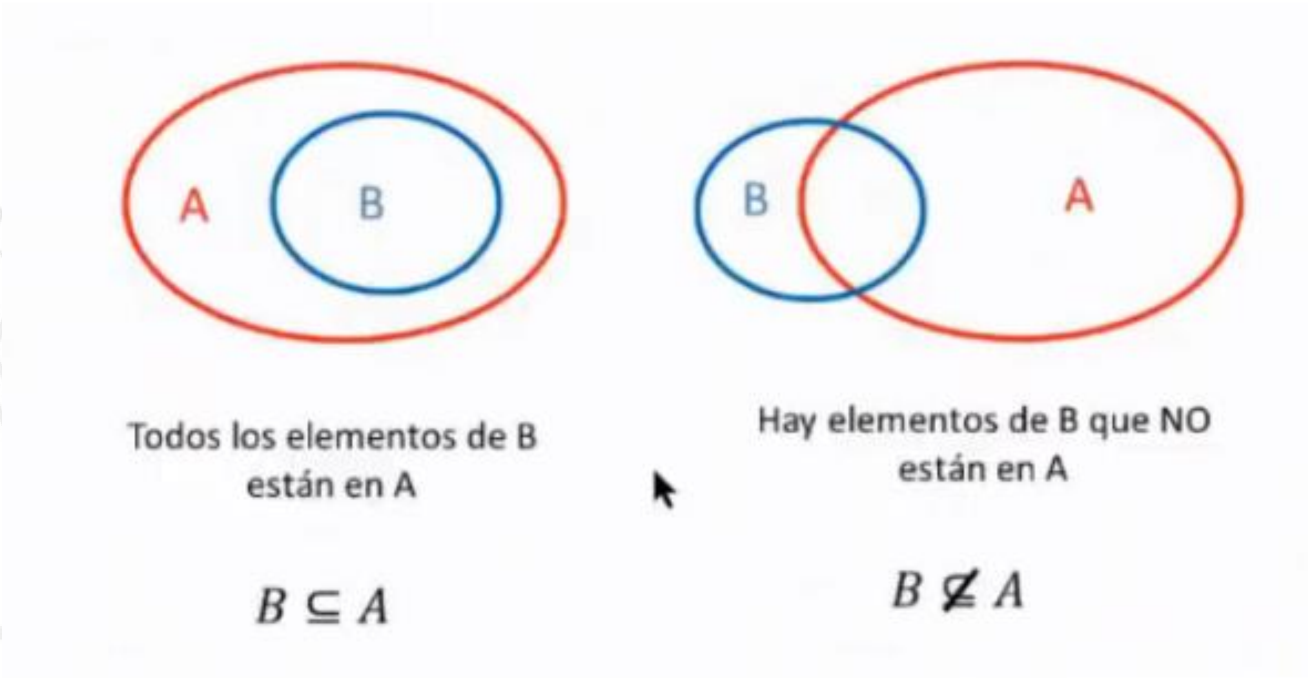
$$A = \left\{ \sum \frac{\mu(x)}{x} \right\}$$

$$A = \left\{ \frac{0}{1} + \frac{0.1}{2} + \frac{0.4}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{0.8}{7} + \frac{0.4}{8} + \frac{0.1}{9} + \frac{0}{10} \right\}$$



3. Conjuntos clásicos vs difusos

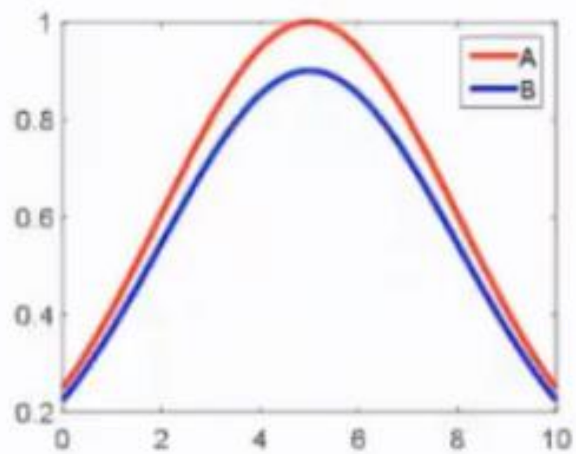
- Propiedades de conjuntos clásicos (pertenencia)



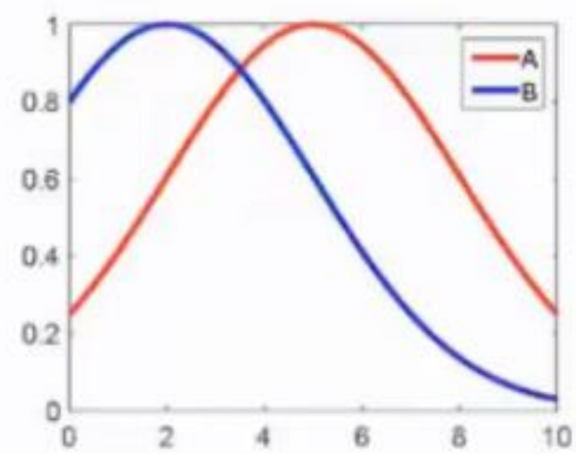
3. Conjuntos clásicos vs difusos

- **Propiedades de conjuntos clásicos vs difusos (pertenencia)**

$$B \subseteq A \quad \leftrightarrow \quad \mu_B(x) \leq \mu_A(x) \text{ para } \forall x \in X$$



$B \subseteq A$



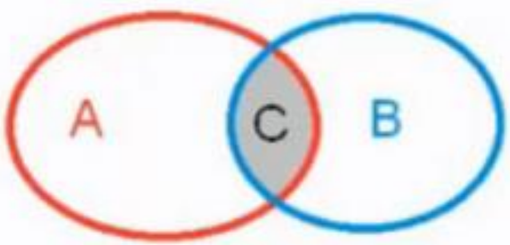
$B \nsubseteq A$

... tanto los valores de los conjuntos (eje x) como los de pertenencia (eje y) son representables gráficamente

3. Conjuntos clásicos vs difusos

- **Propiedades de conjuntos clásicos vs difusos (intersección)**

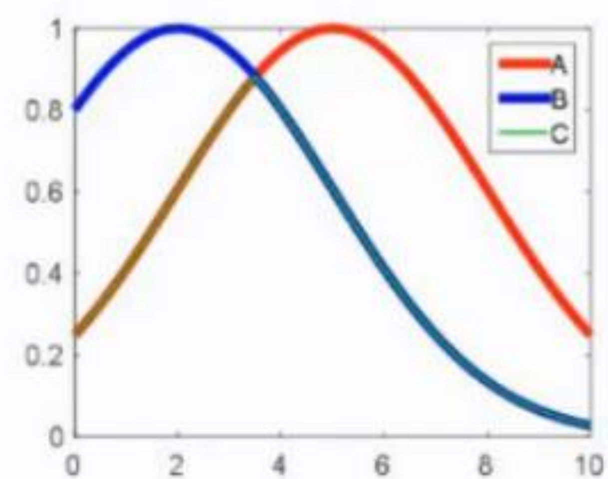
$C = A \cap B$



Todos los elementos que estén en A y B.

$C = A \cap B$ si y solo si

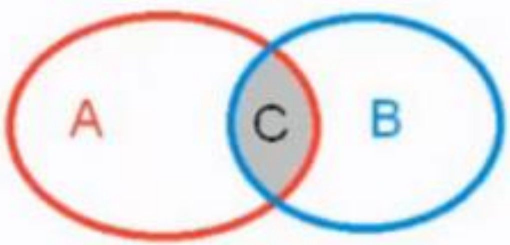
$$\mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \text{ para } \forall x \in X$$



3. Conjuntos clásicos vs difusos

- Propiedades de conjuntos clásicos vs difusos (intersección)

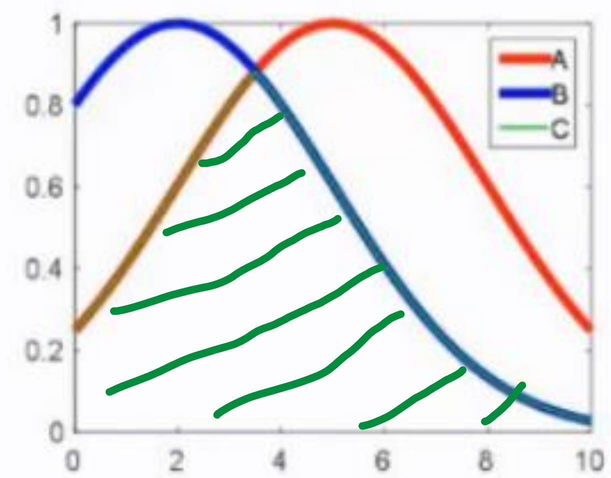
$C = A \cap B$



Todos los elementos que estén en A y B.

$C = A \cap B$ si y solo si

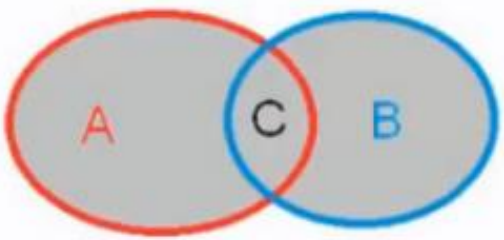
$\mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$ para $\forall x \in X$



3. Conjuntos clásicos vs difusos

- **Propiedades de conjuntos clásicos vs difusos (unión)**

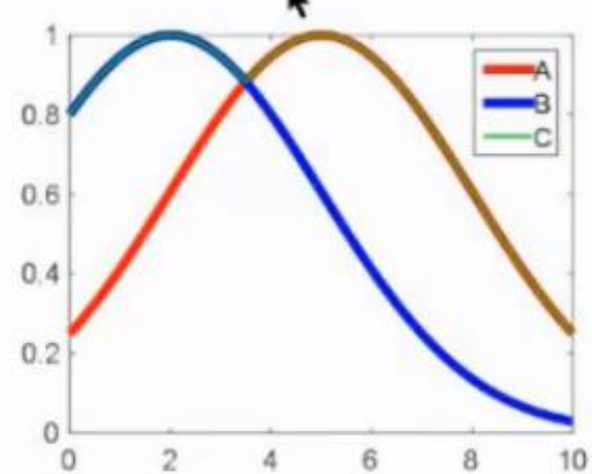
$C = A \cup B$



Todos los elementos que estén en A ó en B.

$C = A \cup B$ si y solo si

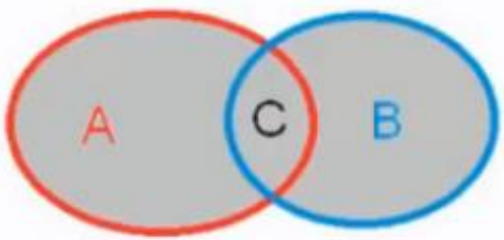
$\mu_C(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$ para $\forall x \in X$



3. Conjuntos clásicos vs difusos

- Propiedades de conjuntos clásicos vs difusos (unión)

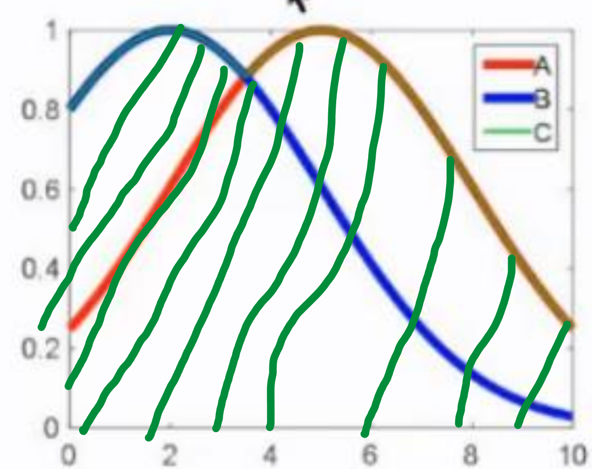
$C = A \cup B$



Todos los elementos que estén en A ó en B.

$C = A \cup B$ si y solo si

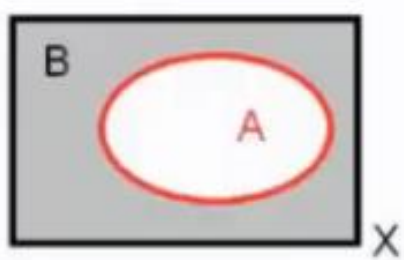
$$\mu_C(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \text{ para } \forall x \in X$$



3. Conjuntos clásicos vs difusos

- Propiedades de conjuntos clásicos vs difusos (complemento)

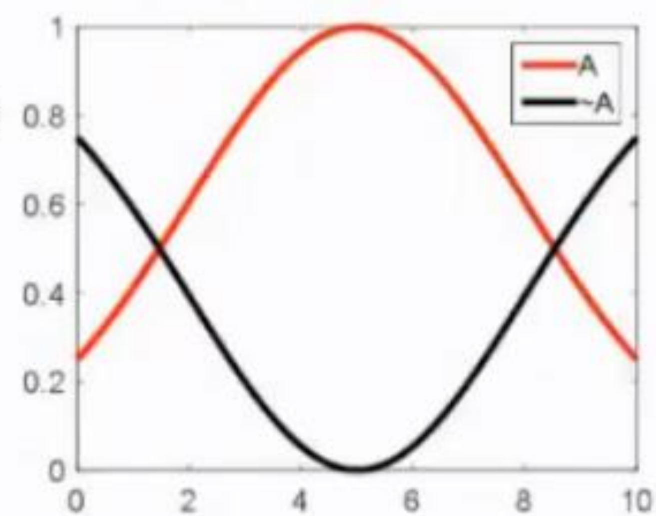
$\bar{A}$



Todos los elementos que estén en X, pero NO en A

$\bar{A}$

$$\mu_{\sim A}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \text{para} \quad \forall x \in X$$



3. Conjuntos clásicos vs difusos

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

- **Resumen: propiedades de conjuntos clásicos**

	Unión	Intersección
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identidad	$A \cup \emptyset = A$ $A \cup X = X$	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap X = A$
Transitiva	Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$	
Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Complementariedad	$A \cup \bar{A} = X$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
Leyes de DeMorgan	$\overline{A \cup B} = \bar{B} \cap \bar{A}$	$\overline{A \cap B} = \bar{B} \cup \bar{A}$
Involutiva	$\bar{\bar{A}} = A$	

3. Conjuntos clásicos vs difusos

- **Resumen: propiedades de conjuntos difusos**

Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
	$\max(\mu_A, \mu_B) = \max(\mu_B, \mu_A)$	$\min(\mu_A, \mu_B) = \min(\mu_B, \mu_A)$

Asociativa

$A \cup (B \cup C) \rightarrow$

$$\max(\mu_A, \max(\mu_B, \mu_C)) = \max(\mu_A, \mu_B, \mu_C) = \max(\max(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$$

$\rightarrow (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) \rightarrow$

$$\min(\mu_A, \min(\mu_B, \mu_C)) = \min(\mu_A, \mu_B, \mu_C) = \min(\min(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$$

3. Conjuntos clásicos vs difusos

- Resumen: propiedades de conjuntos difusos

Identidad	$A \cup \emptyset = A$	$\max(\mu_A, 0) = \mu_A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$\min(\mu_A, 0) = 0$
	$A \cup X = X$	$\max(\mu_A, 1) = 1$	$A \cap X = A$	$\min(\mu_A, 1) = \mu_A$
Transitiva	Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$			
o	Si $\mu_A \leq \mu_B$ y $\mu_B \leq \mu_C$ entonces $\mu_A \leq \mu_C$			
Idempotencia	$A \cup A = A$		$A \cap A = A$	
	$\max(\mu_A, \mu_A) = \mu_A$		$\min(\mu_A, \mu_A) = \mu_A$	
Involutiva	$\bar{\bar{A}} = A$			
	$\mu_{\bar{\bar{A}}} = 1 - \mu_{\bar{A}} = 1 - (1 - \mu_A) = \mu_A$			

3. Conjuntos clásicos vs difusos

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

- **Resumen: propiedades de conjuntos difusos**

$$\overline{A \cup B} = \bar{B} \cap \bar{A}$$

$$1 - \max(\mu_A, \mu_B) = \min(1 - \mu_A, 1 - \mu_B)$$

Si $\mu_A = \mu_B$ $\quad 1 - \mu_A = 1 - \mu_A$

Si $\mu_A > \mu_B$ $\quad 1 - \mu_A = 1 - \mu_A$

Si $\mu_A < \mu_B$ $\quad 1 - \mu_B = 1 - \mu_B$

$$\overline{A \cap B} = \bar{B} \cup \bar{A}$$

$$1 - \min(\mu_A, \mu_B) = \max(1 - \mu_A, 1 - \mu_B)$$

Si $\mu_A = \mu_B$ $\quad 1 - \mu_A = 1 - \mu_A$

Si $\mu_A > \mu_B$ $\quad 1 - \mu_B = 1 - \mu_B$

Si $\mu_A < \mu_B$ $\quad 1 - \mu_A = 1 - \mu_A$

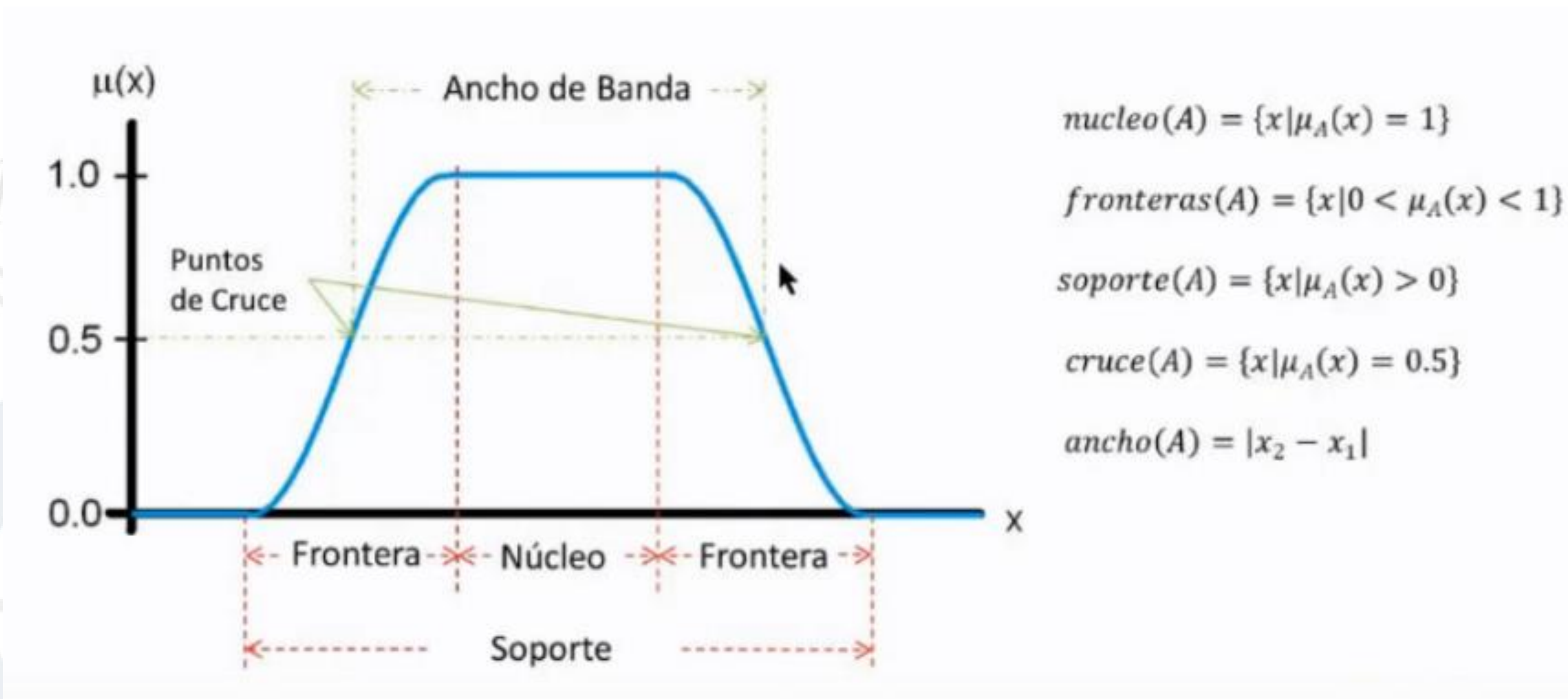
3. Conjuntos clásicos vs difusos

Práctica 1 :: Operaciones con conjuntos difusos

- Entra en moodle y descarga el documento "**Práctica 1 :: Operaciones conjuntos difusos"** en el que se propone representar mediante código Python las propiedades vistas

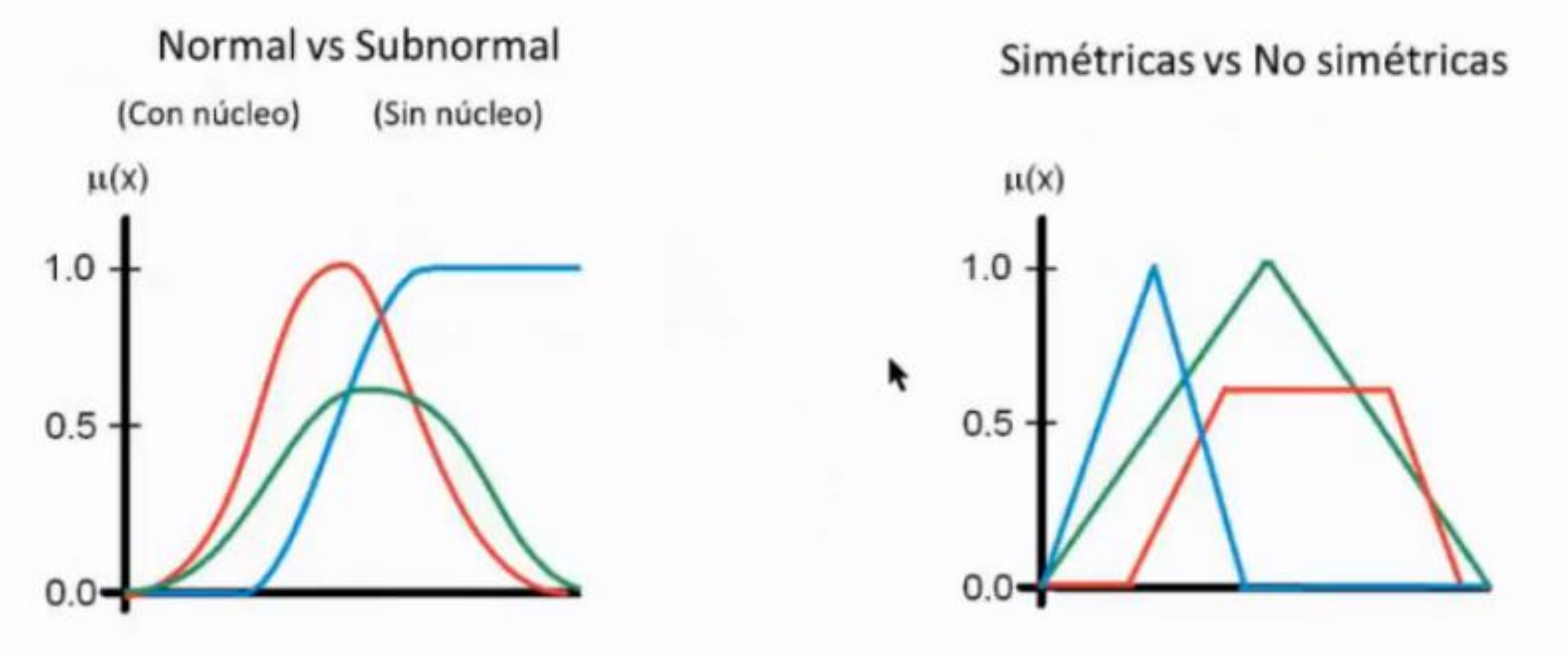
4. Funciones de membresía

- Características de las funciones de membresía



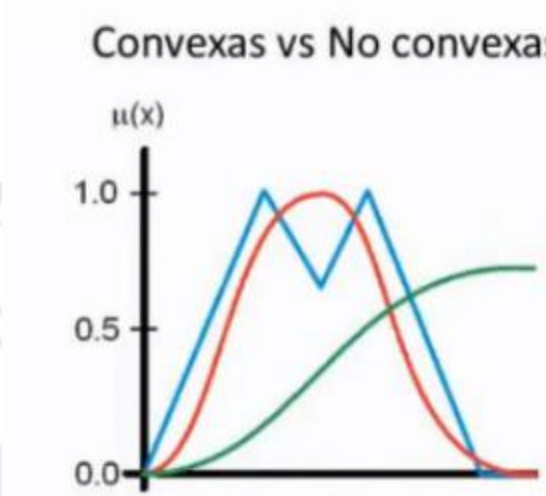
4. Funciones de membresía

- Tipos de funciones de membresía

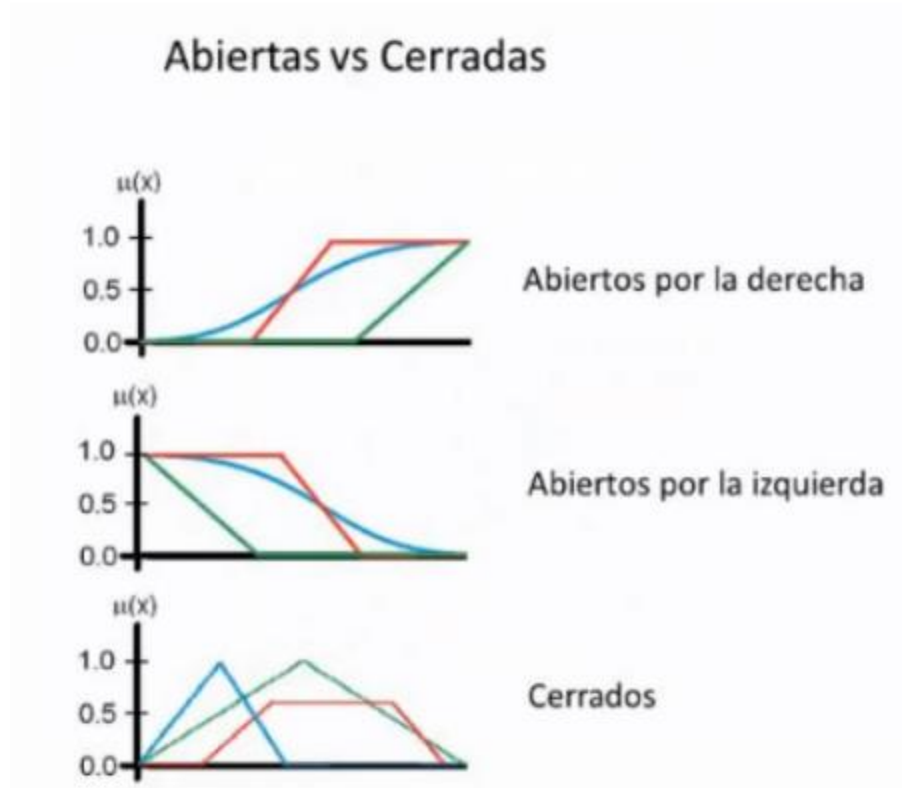


4. Funciones de membresía

- Tipos de funciones de membresía

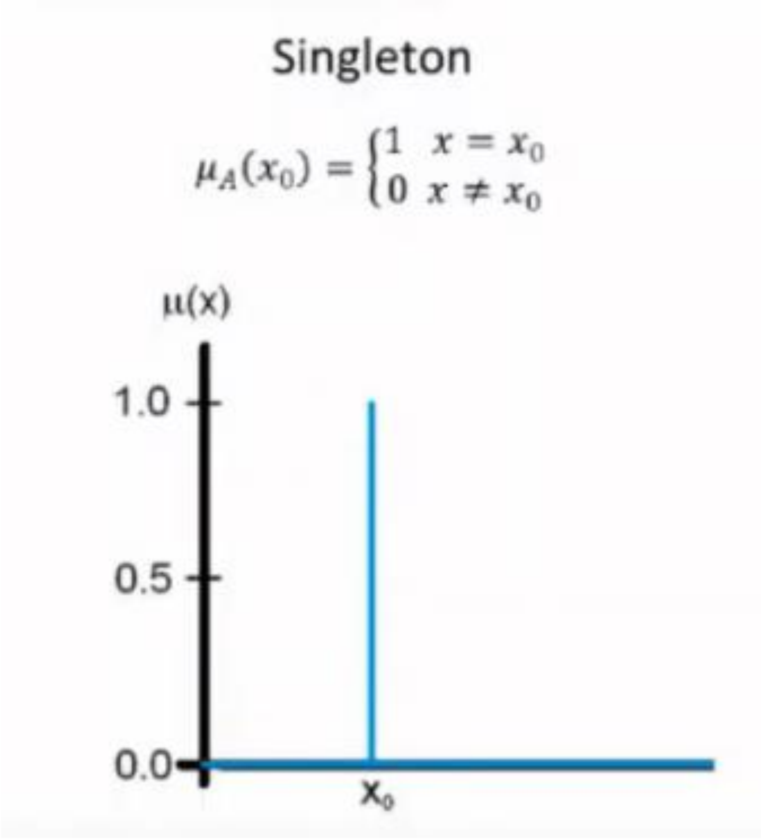


$$\mu_A(x_1\lambda + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$
$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1]$$



4. Funciones de membresía

- Funciones de membresía distintivas



4. Funciones de membresía

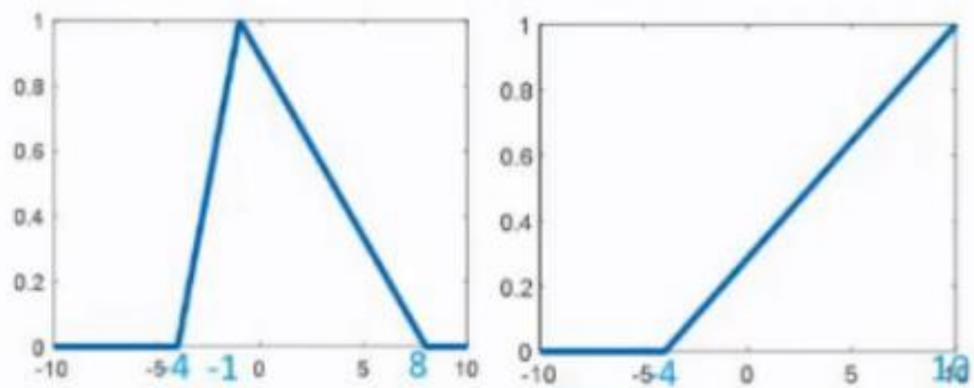
- Funciones de membresía distintivas (con derivadas discontinuas)

Triangular

$$f(x;a,b,c) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 0 & x \geq c \end{cases}$$

$a \leq b \leq c$

y = trimf(x,[a b c])



4. Funciones de membresía

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

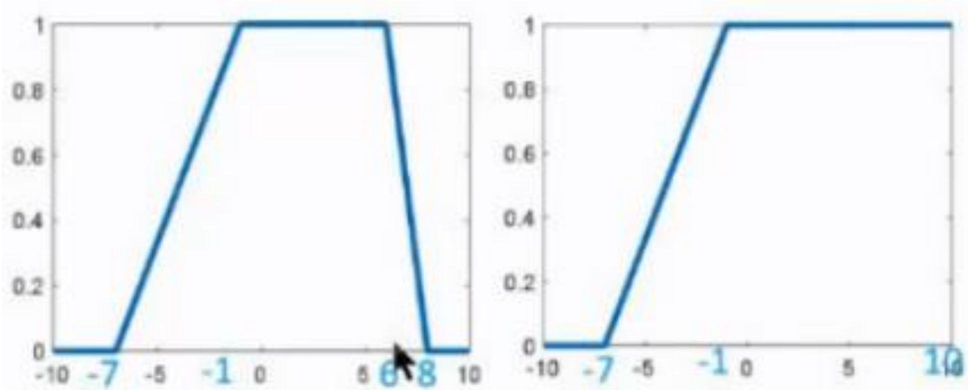
- Funciones de membresía distintivas (con derivadas discontinuas)

Trapezoidal

$$f(x;a,b,c,d) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c} & c \le x \le d \\ 0 & x \ge d \end{cases}$$

$a \le b \le c \le d$

y = trapmf(x,[a b c d])



4. Funciones de membresía

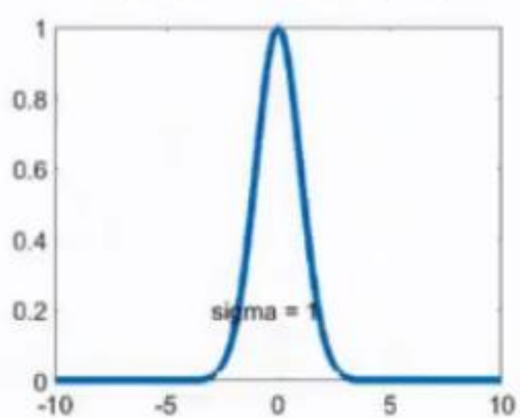
- Funciones de membresía distintivas (con derivadas continuas y semi-cerradas)

Gaussiana

$$f(x;\sigma,x_0) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2}$$

σ determina el ancho
x_0 fija el centro

y = gaussmf(x,[sig x0])

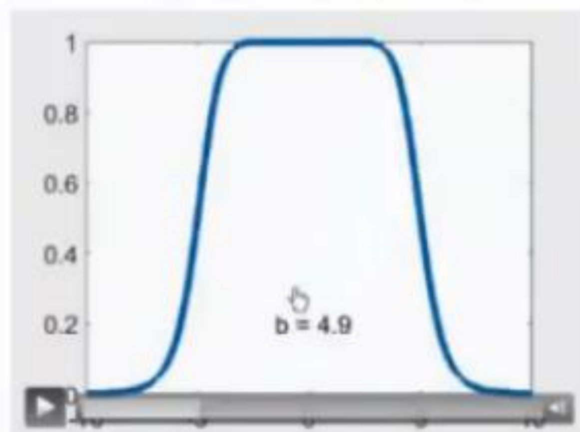


Campana Generalizada

$$f(x;a,b,x_0) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-x_0}{a}\right|^{2b}}$$

a determina el ancho
b determina la pendiente
x_0 fija el centro

y = gbellmf(x,[a b x0])



4. Funciones de membresía

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

- Funciones de membresía distintivas (con derivada continua y abierta)

Sigmoidal

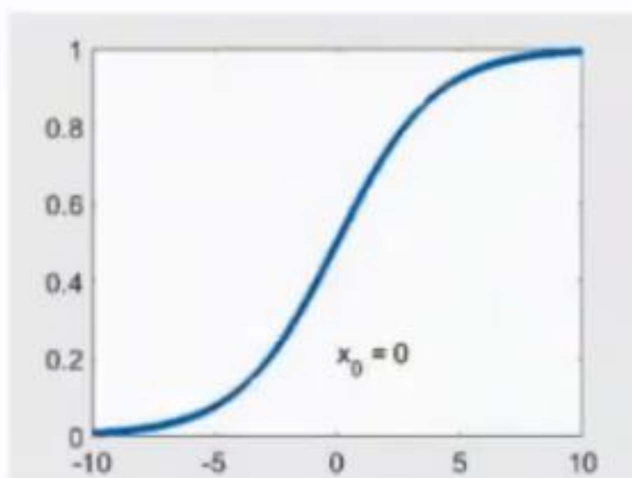
$$f(x; a, x_0) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-x_0)}}$$

a determina la pendiente

x_0 fija el punto de cruce

y = sigmf(x,[a x0])

Si $a > 0$, abre a la derecha
Si $a < 0$, abre a la izquierda



3. Conjuntos clásicos vs difusos

Práctica 2 :: Funciones de membresía

- Entra en moodle y descarga el *notebook* **"Práctica 2 :: Funciones de membresía"** en el que se propone representar añadir el código Python necesario para representar algunas de las funciones de membresía anteriores.

Tabla de contenidos

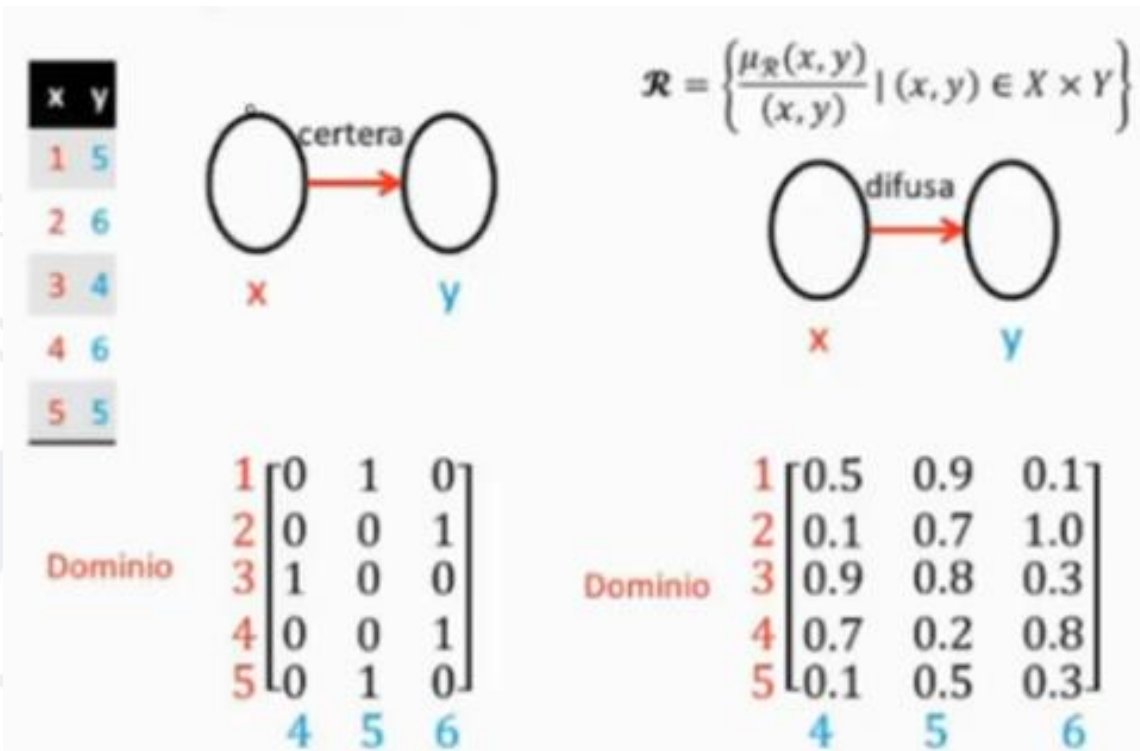
Lógica difusa

1. Lógica binaria vs lógica difusa
2. Nociones básicas sobre conjuntos
3. Conjuntos clásicos vs difusos
4. Funciones de membresía
5. Relaciones difusas
6. Razonamiento aproximado
7. Diseño de un sistema de control difuso

Sesión 2

5. Relaciones difusas

- Matrices de representación de relaciones <u>certeras</u> vs <u>difusas</u>



$$\begin{array}{c|ccc} & & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 4 & 5 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & & & \\ 1 & 0.5 & 0.9 & 0.1 \\ 2 & 0.1 & 0.7 & 1.0 \\ 3 & 0.9 & 0.8 & 0.3 \\ 4 & 0.7 & 0.2 & 0.8 \\ 5 & 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ \hline & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

Operaciones de **R**:

- unión
- intersección
- complemento
- subconjunto
- ...

5. Relaciones difusas

- De entre todas las operaciones que relacionan conjuntos difusos nos interesan especialmente 2:

    1. **producto cartesiano** (se expresa de la forma **A x B**)
    2. **composición** (se expresa de la forma **A o B**)

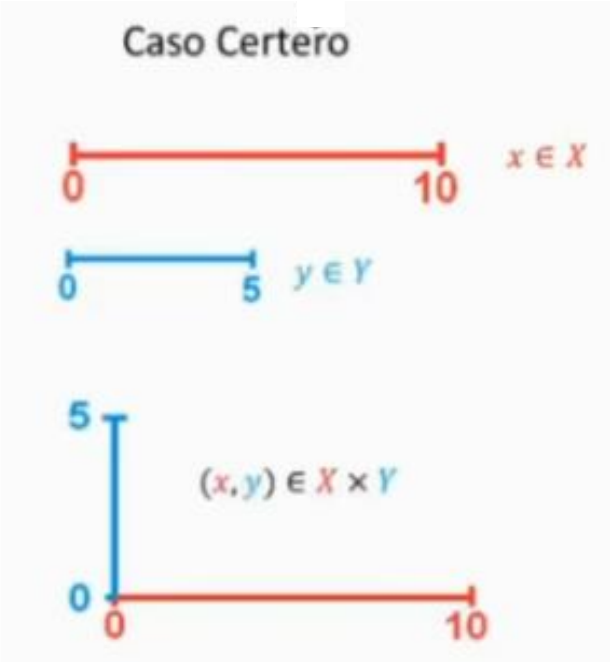
- **Motivo**: ¡estas 2 operaciones son útiles en el diseño de sistemas de control difuso!

5. Relaciones difusas

- Representación de la relación como **producto cartesiano**

Ejemplo:

En el caso de conjuntos clásicos, el producto cartesiano se representaría mediante dos ejes para 'x' e 'y'



El plano x-y son todos los posibles pares entre X y Y (es decir, aquellos en cuya matriz tienen valor '1')

5. Relaciones difusas

- Representación de la relación como **producto cartesiano**

Ejemplo 1:
Representamos la relación de dos conjuntos que relacionan velocidad y gravedad de un accidente en la conducción de un vehículo …

A = alta velocidad
B = gravedad del accidente

… mediante una matriz resultante de calcular el producto cartesiano entre sus elementos

Caso Difuso

$$\mu_{A\times B}(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

$$A = \left\{\frac{0}{0} + \frac{0.1}{40} + \frac{0.5}{80} + \frac{0.8}{100} + \frac{1}{120} + \frac{1}{140}\right\}$$ Alta Velocidad

$$B = \left\{\frac{0.8}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{0.9}{3} + \frac{1}{4}\right\}$$ Gravedad del Accidente

$$R = A \times B = \begin{array}{c} 0 \\ 40 \\ 80 \\ 100 \\ 120 \\ 140 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 0.9 & 1 \\ 0.8 & 0.8 & 0.9 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array}$$

5. Relaciones difusas

- **Ejemplo 2**

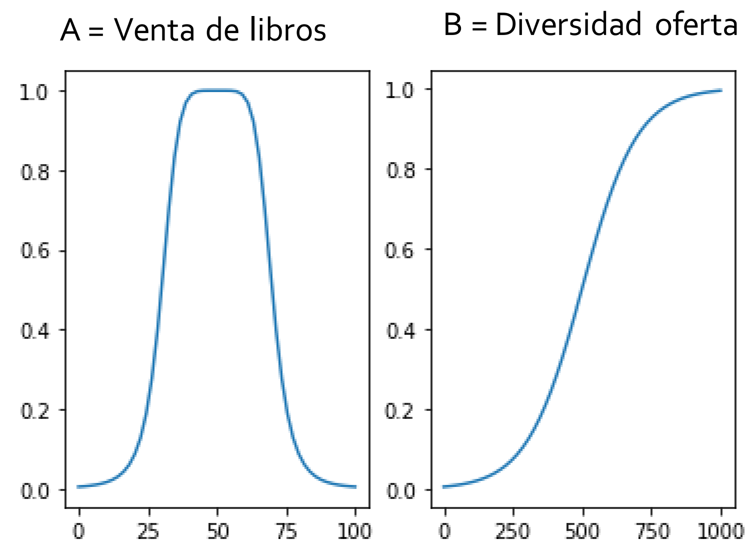
  Aplicación del producto cartesiano a los siguientes 2 conjuntos difusos en el contexto de una librería

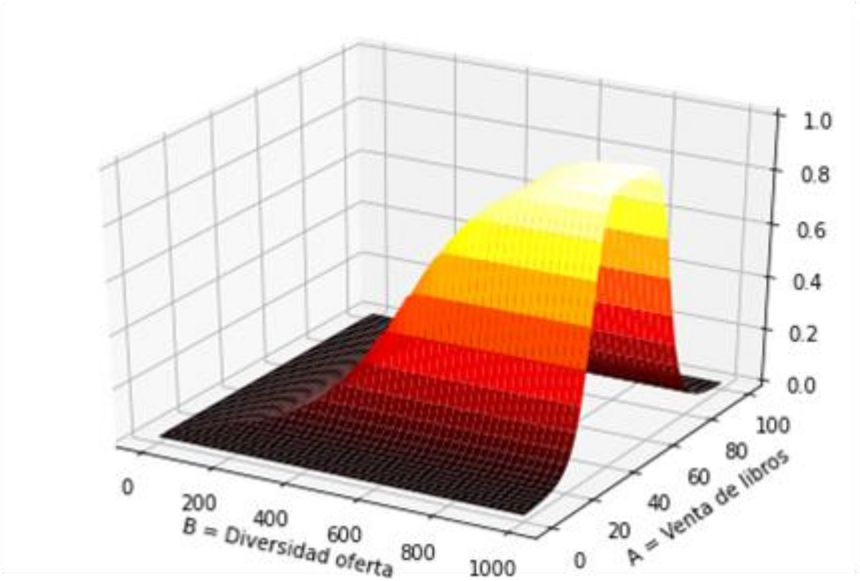
Conjunto	Universo de discurso	Función	Parámetros
A = Venta de libros	x = [1, 100] libros vendidos en cierto mes	Campana generalizada	xo = 50, a= 20, b =3 al fijar xo a 50 decimos que 50 es la venta "habitual" de cierto mes
B = Diversidad oferta	y = [1, 1000] libros ubicados en las estanterías	Sigmoide	yo = 500, a = 0,01 al fijar xo a 50 decimos que 50 es la venta "habitual" de cierto mes

5. Relaciones difusas

- **Ejemplo 2**

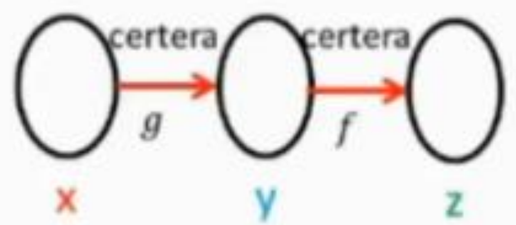
  Aplicación del producto cartesiano a los siguientes 2 conjuntos difusos en el contexto de una librería





5. Relaciones difusas

- Representación de la relación como **composición**



$$z = f(y) = f(g(x)) =: f \circ g(x)$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \vee_y [\mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(y,z)] = \max_y \{\min[\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(y,z)]\}$$

$$R_1 = A \times B = \begin{bmatrix} 0.4 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.5 \\ 0.9 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix} \quad R_2 = B \times C = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0.7 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 1.0 & 0.5 & 02 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.5 \\ 0.9 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0.7 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 1.0 & 0.5 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} \boxed{0.4} & 0.8 & 0.7 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0.5 \\ 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$

5. Relaciones difusas

- **Ejemplo**

  Aplicación de la **composición** a los siguientes 3 conjuntos difusos

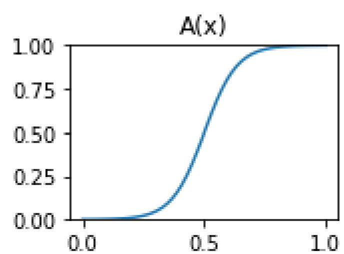
Conjunto	Universo de discurso	Función	Parámetros
A(x)	x = [0, 1]	Sigmoide	xo = 0.5, a =15
B(y)	y = [0, 5]	Sigmoide	xo = 0.5, a =15
A'(x)	x = [0, 1]	Gaussiana	xo = 0.5, a =15

5. Relaciones difusas

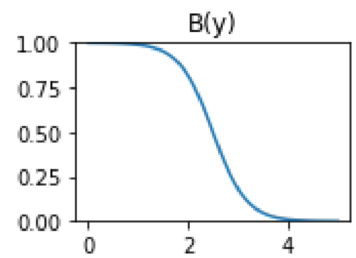
- **Ejemplo**

  Aplicación de la composición a los siguientes 3 conjuntos difusos

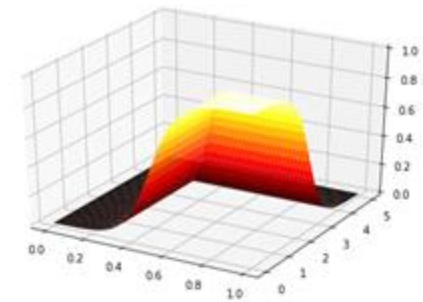
A x B



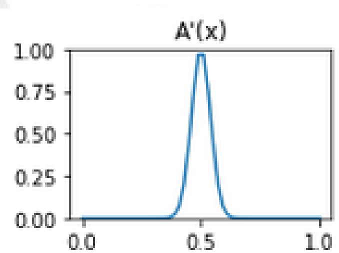
X



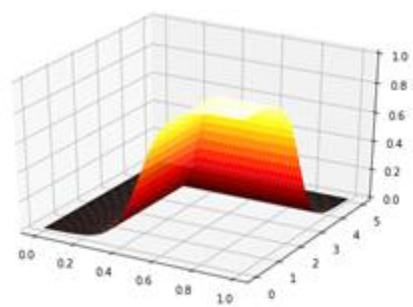
=



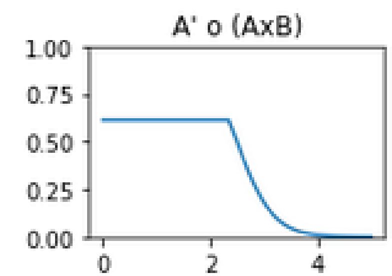
A’ ∘ (A x B)



∘

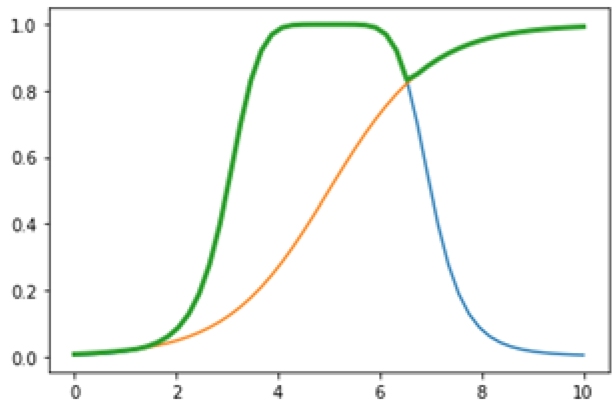


=

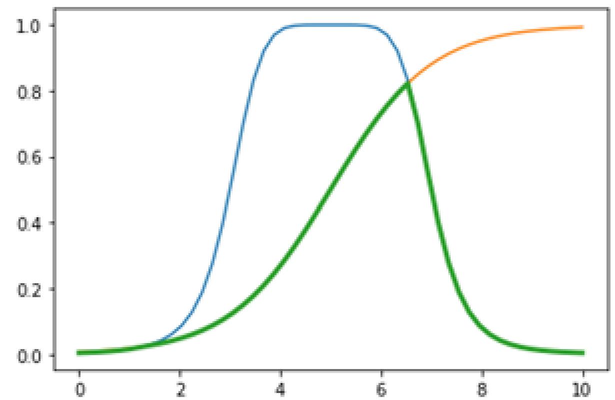


5. Relaciones difusas

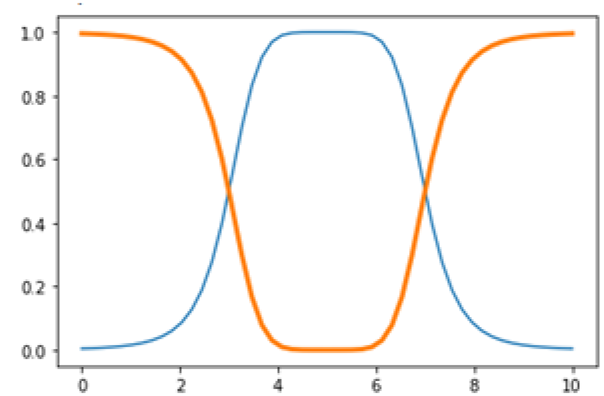
- Otras operaciones



Norma T



Norma S



Complemento

6. Razonamiento aproximado

¿Qué es el razonamiento aproximado?

- un modo de pensamiento que permite a través del lenguaje afrontar la resolución matemática de problemas con una lógica difusa
- concepto clave: **variable lingüística**

6. Razonamiento aproximado

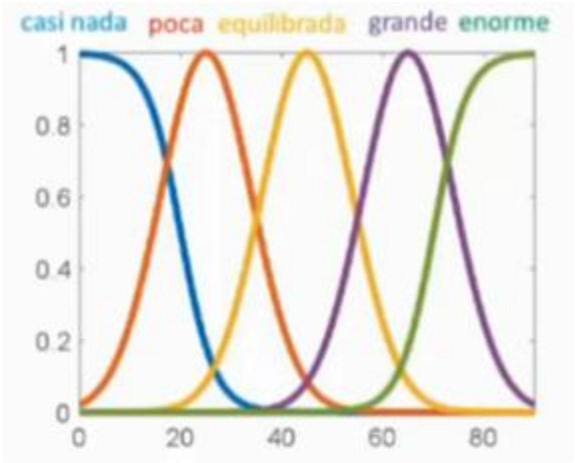
Variable lingüística → (x, X, T, M)

- **x** sería el nombre de la variable
- **X** es el universo de discurso
- **T** son los valores lingüísticos que acepta la variable
- **M** es la regla semántica (función) que asocia cada término lingüístico con su significado

6. Razonamiento aproximado

Ejemplo :: mundo del fútbol

- **x** = posesión del balón de un equipo
- **X** = [0, 90 minutos]
- **T** = [casi nada, poca, equilibrada, grande, enorme]
  - M(casi nada) = sigm(x; -0.3, 20)
  - M(poca) = gaussmf(x; 9, 25)
  - M(equilibrada) = gaussmf(x; 9, 45)
  - M(grande) = gaussmf(x; 9, 65)
  - M(enorme) = sigm(x; -0.3, 70)



6. Razonamiento aproximado

Reglas difusas Si-entonces

- En sistemas difusos relacionamos unas variables con otras con reglas difusas del tipo …

"si x es A, entonces y es B"

… donde …

… **x** e **y** son variables lingüísticas

… **A** y **B** son valores lingüísticos

- **Ejemplo:**
  - "si la posesión del balón es grande, entonces el estilo de juego es ofensivo"

6. Razonamiento aproximado

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

Reglas difusas Si-entonces

- **"si x es A, entonces y es B"**

  … donde …

  … **x** e **y** son variables lingüísticas

  … **A** y **B** son valores lingüísticos

- **Ejemplo:**

  variable x ⇩ **variable y** ⇩

  - "si la posesión del balón es grande, entonces el estilo de juego es ofensivo"

6. Razonamiento aproximado

Reglas difusas Si-entonces

- **"si x es A, entonces y es B"**

  ... donde ...

  ... **x** e **y** son variables lingüísticas

  ... **A** y **B** son valores lingüísticos

- **Ejemplo:**

  variable x

  T = [casi nada, poca, equilibrada, grande, enorme]

  variable y

  - "si la posesión del balón es grande, entonces el estilo de juego es ofensivo"

  T = [muy defensivo, defensivo, equilibrado, ofensivo, muy ofensivo]

6. Razonamiento aproximado

Ejemplo: Evaluar la regla difusa …

"si estudio mucho, soy un estudiante excelente"

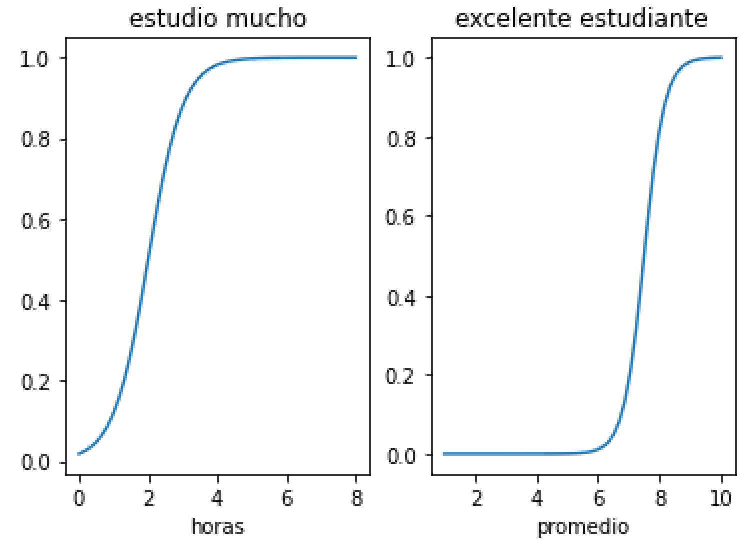
… con los valores lingüísticos …

"estudio mucho" ⟶ μ(A) = sigmf(x,[3,2])

x ∈ [0,8] hrs/día de estudio

"excelente estudiante" ⟶ μ(B) = sigmf(x,[3,8])

x ∈ [0,10] promedio académico



6. Razonamiento aproximado

Modus ponens difuso (método de inferencia)

• Premisa 1 (hecho)	x es A’	A’
• Premisa 2 (regla)	Si x es A, entonces y es B	R = A x B
• **Conclusión**	**y es B’**	**B’ = A’ · R**

6. Razonamiento aproximado

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

Modus ponens difuso (método de inferencia)

• Premisa 1 (hecho)	x es A'	A'
• Premisa 2 (regla)	Si x es A, entonces y es B	R = A x B
• **Conclusión**	**y es B'**	**B' = A' · R**

Ejemplo:

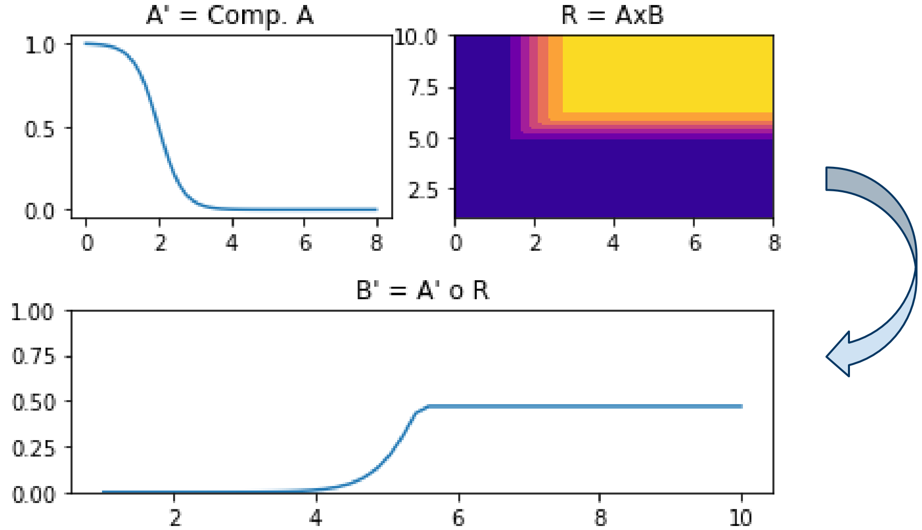
• Premisa 1 (hecho)	"Pedro estudia poco"
• Premisa 2 (regla)	"Si estudio mucho, soy un excelente estudiante"
• **Conclusión**	**?**

6. Razonamiento aproximado

Modus ponens difuso (método de inferencia)

Ejemplo:

- Premisa 1 (hecho) “Pedro estudia poco”
- Premisa 2 (regla) “Si estudio mucho, soy un excelente estudiante”
- **Conclusión** **“Pedro es normal como estudiante”**



6. Razonamiento aproximado

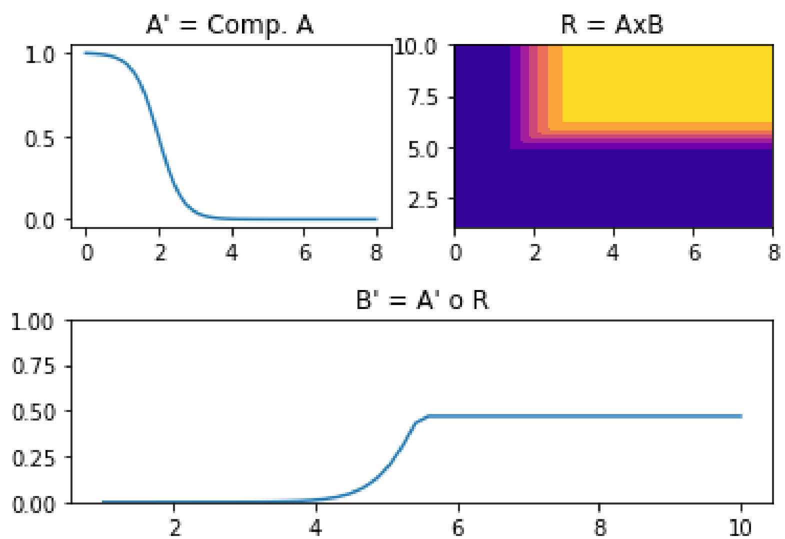
Modus ponens difuso (método de inferencia)

Ejemplo:

- Premisa 1 (hecho) “Pedro estudia poco” 1
- Premisa 2 (regla) “Si estudio mucho, soy un excelente estudiante” 2
- **Conclusión** **“Pedro es muy poco excelente como estudiante”** 3

A′ (“estudiar poco”) es lo contrario de “estudiar mucho” (A)

1



2

3

6. Razonamiento aproximado

Práctica 3 :: Ejercicio modus ponens

- Entra en moodle y descarga el *notebook* “Práctica 3 :: Relaciones difusas / razonamiento aproximado” en el que se propone representar generar el código Python necesario para la aplicación del método de inferencia al caso que se propone.

Tabla de contenidos

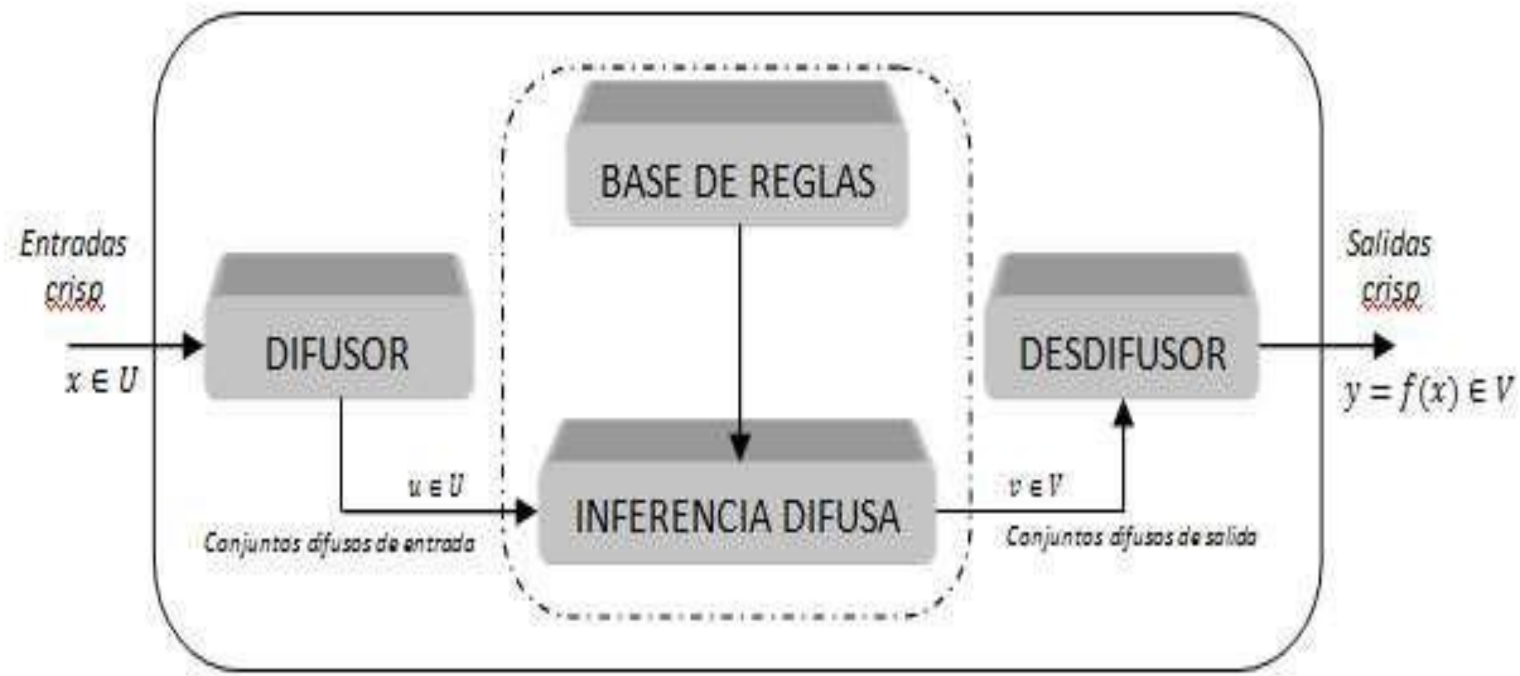
CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

PARTE 2 :: Lógica difusa

Sesión 3

7. Diseño de controles difusos

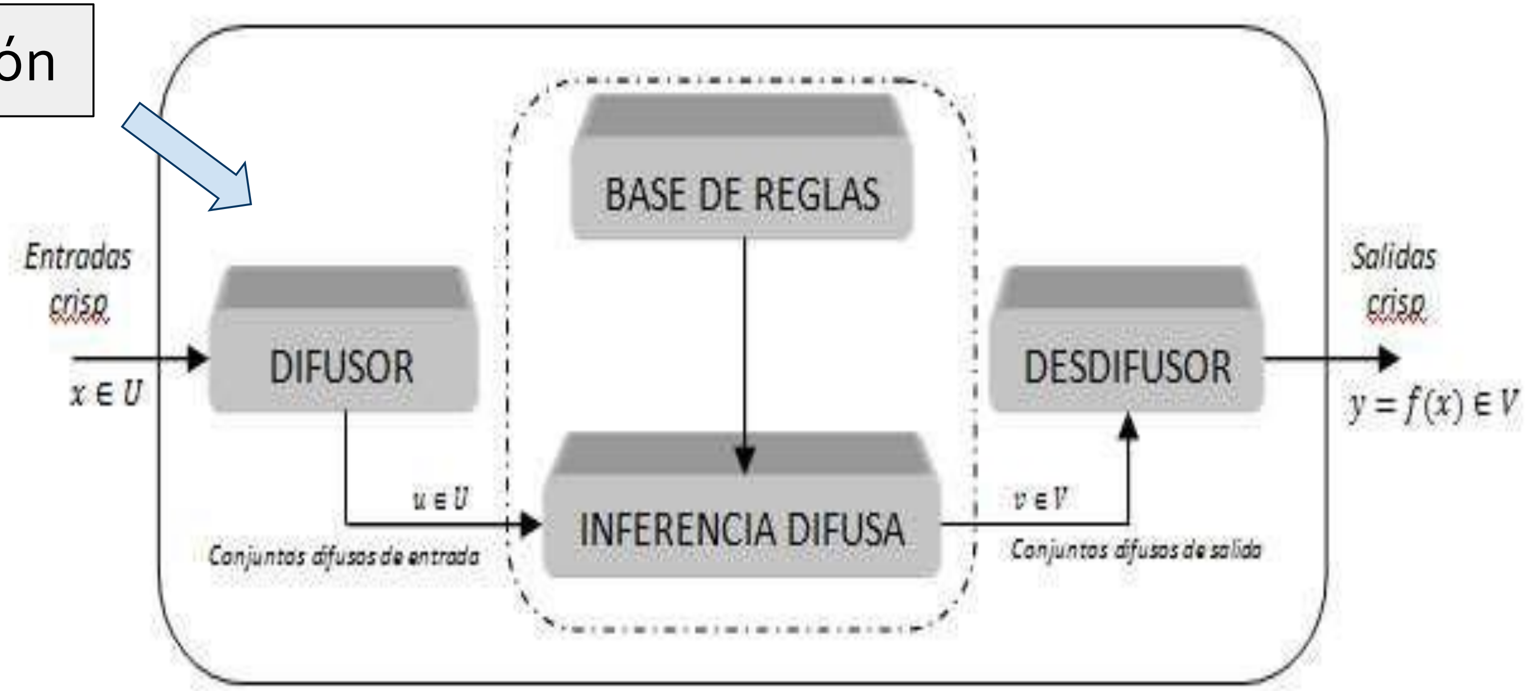
Objetivo :: modelado de sistemas difusos



7. Diseño de controles difusos

Objetivo :: modelado de sistemas difusos

fusificación

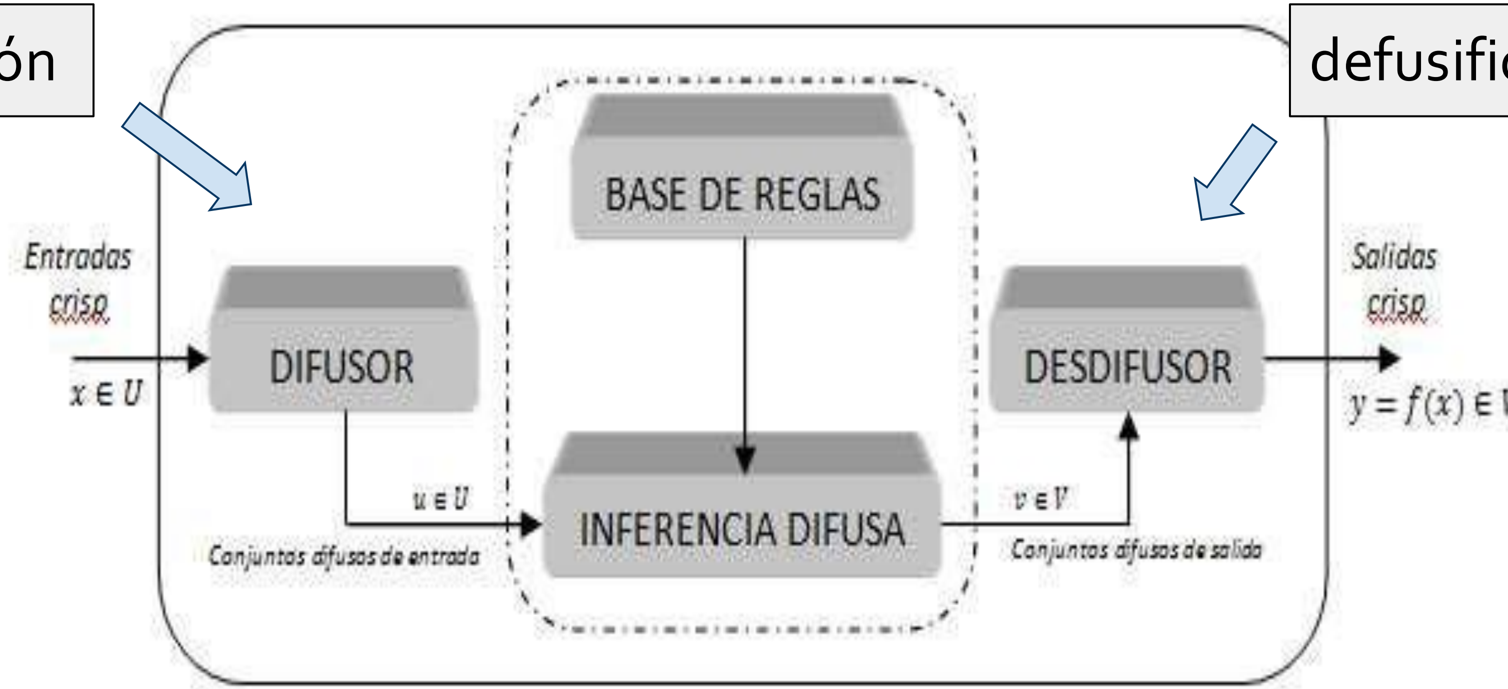


7. Diseño de controles difusos

Objetivo :: modelado de sistemas difusos

fusificación

defusificación

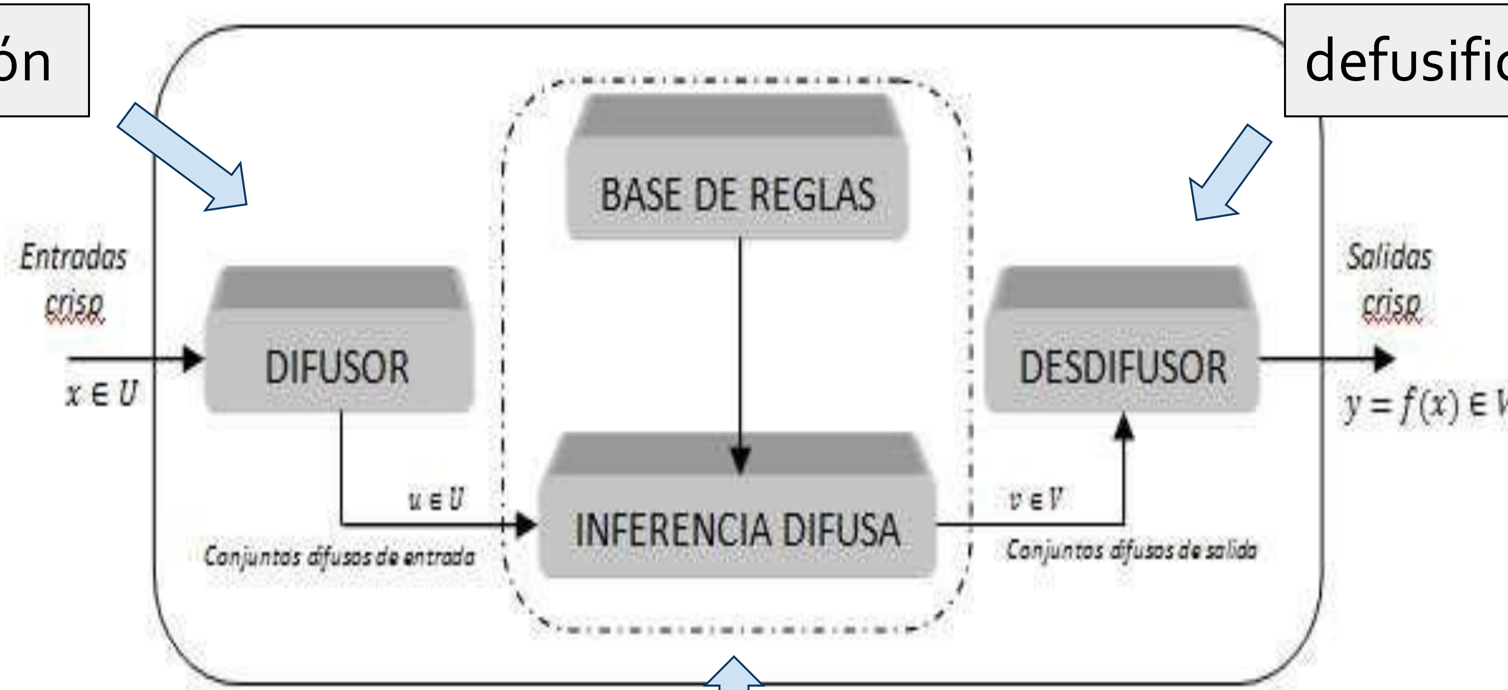


7. Diseño de controles difusos

Objetivo :: modelado de sistemas difusos

fusificación

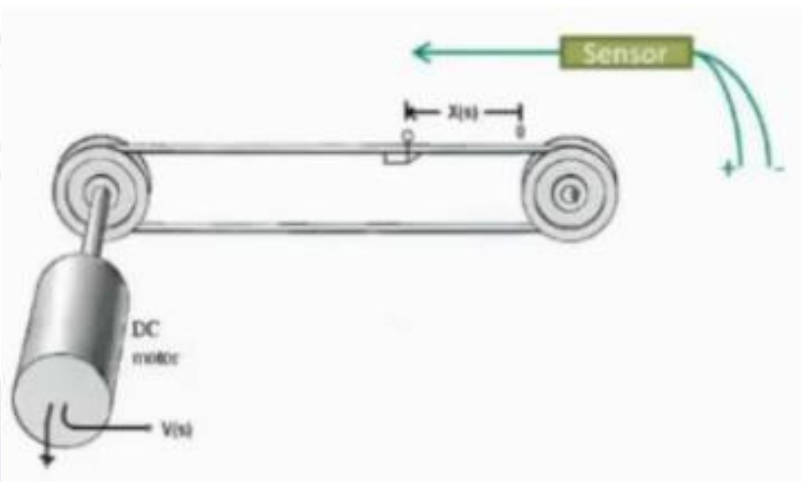
defusificación

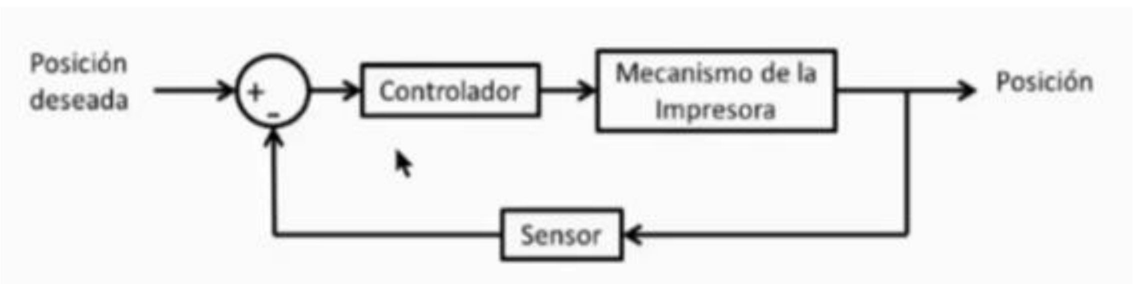


método de inferencia

7. Diseño de controles difusos

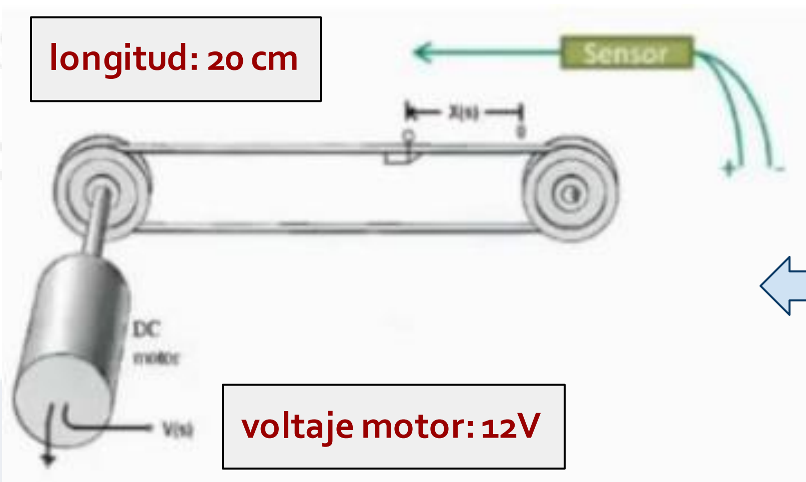
Ejemplo :: diseño del control que regule la posición de un cartucho de una impresora de inyección tinta

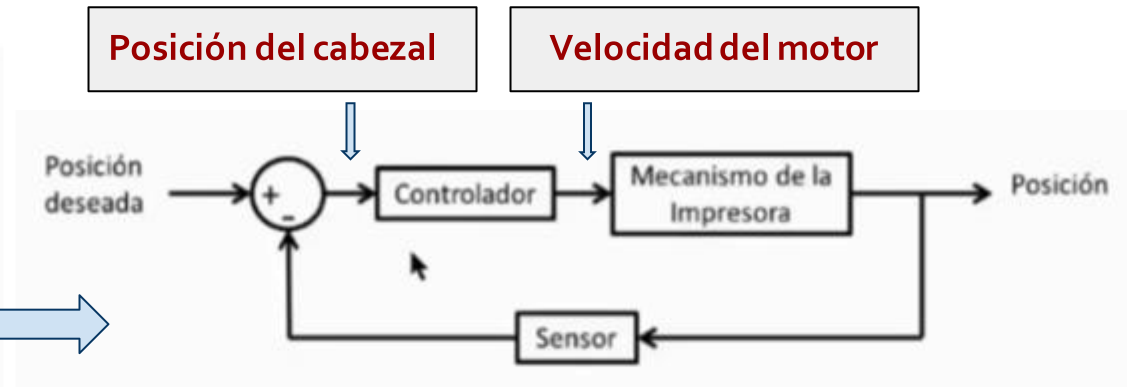




7. Diseño de controles difusos

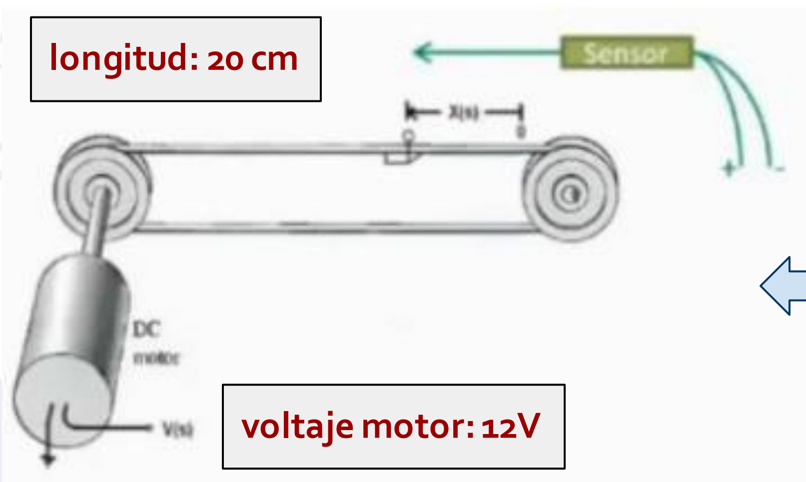
Ejemplo :: diseño del control que regule la posición de un cartucho de una impresora de inyección tinta

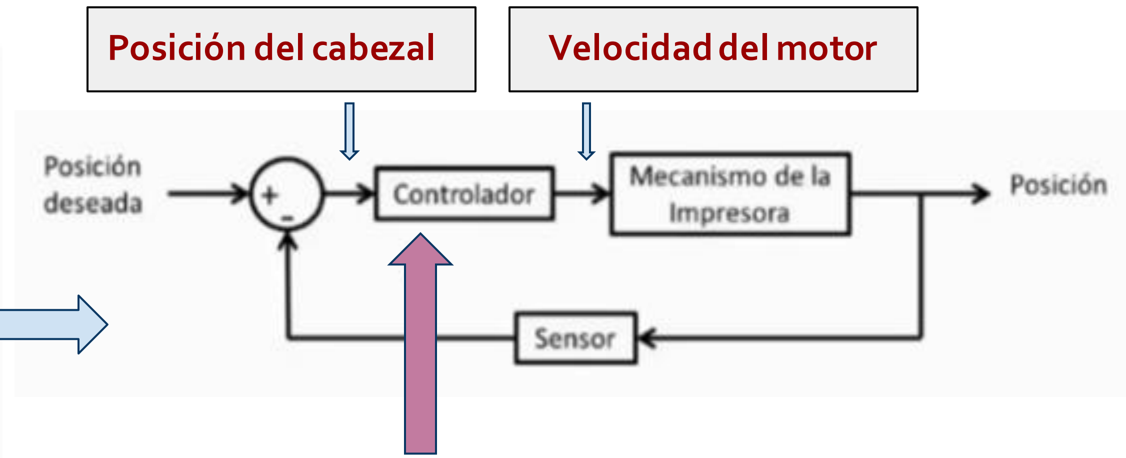




7. Diseño de controles difusos

Ejemplo :: diseño del control que regule la posición de un cartucho de una impresora de inyección tinta



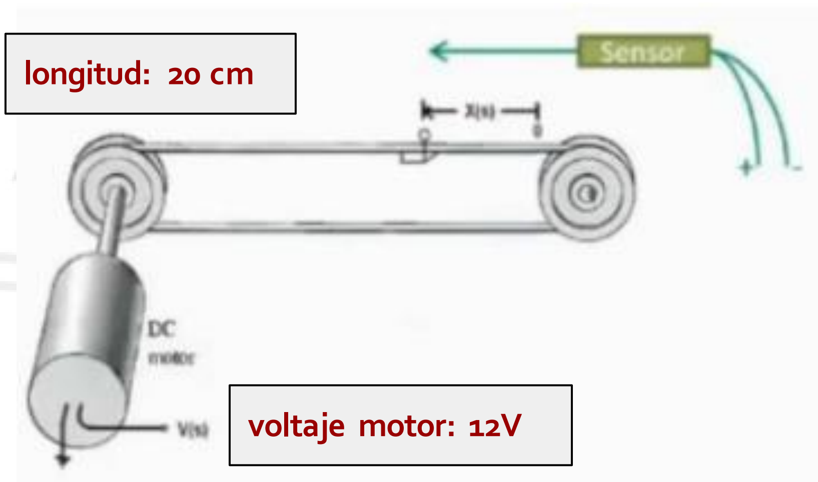


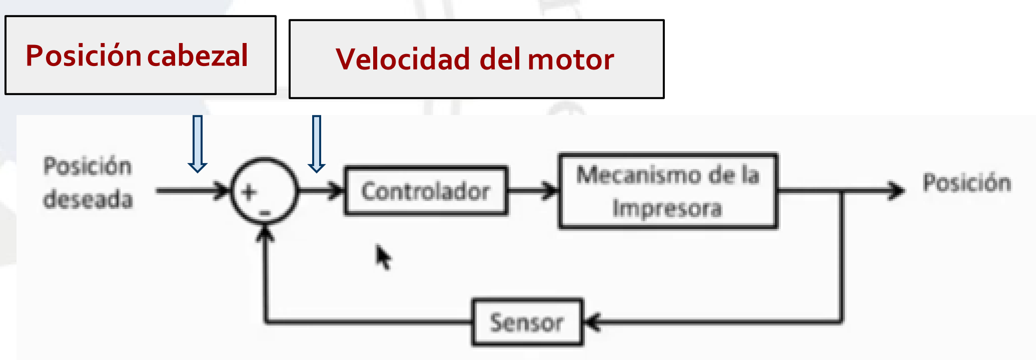
Nuestro objetivo es diseñar esta parte!!

7. Diseño de controles difusos

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

Ejemplo :: diseño del control que regule la posición de un cartucho de una impresora de inyección tinta.

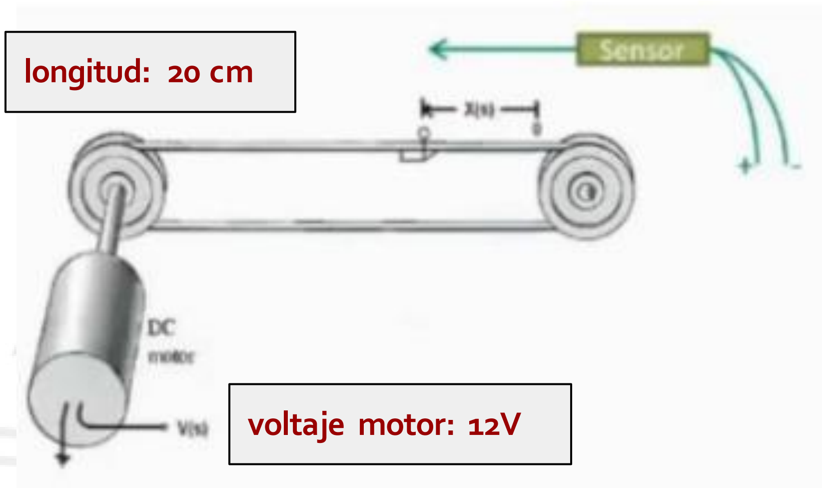


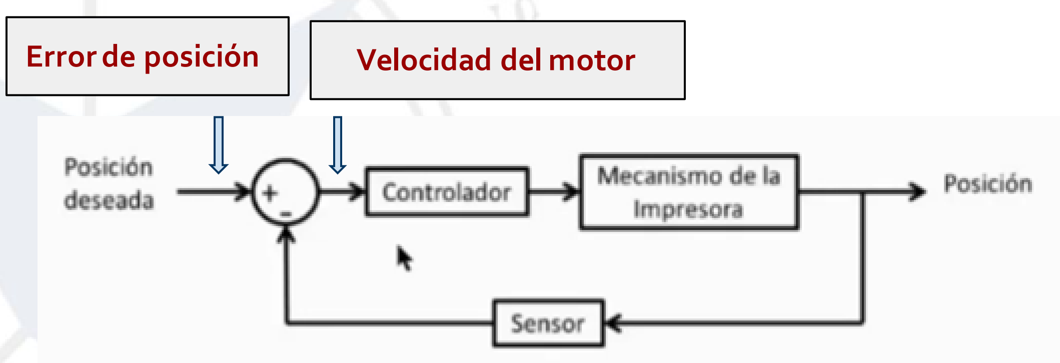


Procedimiento:

1. definir las variables
2. definir el universo del discurso para cada variable
3. definir funciones de membresía
4. definir reglas de control difuso
5. fusificar
6. defusificar

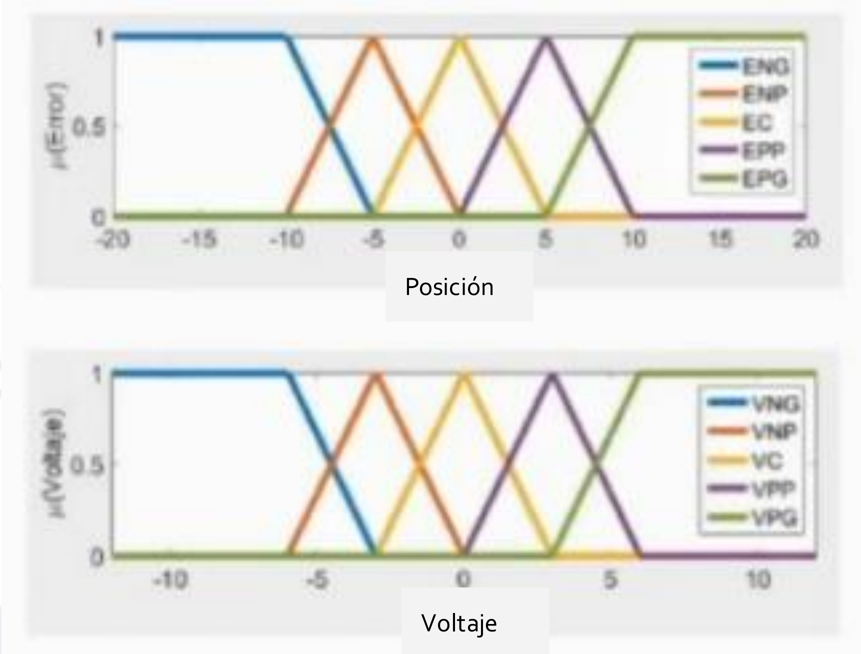
7. Diseño de controles difusos





1. variables
   a. posición del cabezal
   b. voltaje
2. universo de discurso
   a. posición del cabezal → [-20, 20]
   b. voltaje → [-12, 12]

7. Diseño de controles difusos



3. funciones de membresía

M(PNG) = trapmf(e; -20, -20, -10, -5)
M(PNP) = trimf(e; -10, -5, 0)
M(PC) = trimf(e; -5, 0, 5)
M(PPP) = trimf(e; 0, 5, 10)
M(PPG) = trapmf(e; 5, 10, 20, 20)

M(VNG) = trapmf(e; -12, -12, -6, -3)
M(VNP) = trimf(e; -6, -3, 0)
M(VC) = trimf(e; -3, 0, 3)
M(VPP) = trimf(e; 0, 3, 6)
M(VPG) = trapmf(e; 3, 6, 12, 12)

Significado de las abreviaturas para los valores lingüísticos:

- por ejemplo, "PNG" es "posición negativa grande" o VPP es "voltaje positivo pequeño"

7. Diseño de controles difusos

4. **juego de reglas de control difuso**

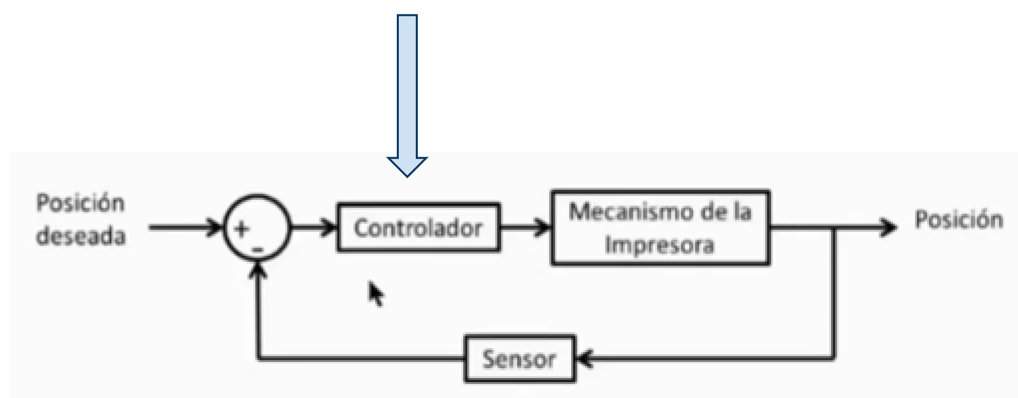
“Si la posición del cabezal es negativa grande entonces el voltaje es negativo grande”

“Si la posición del cabezal es negativa pequeña entonces el voltaje es negativo pequeño”

“Si la posición del cabezal es cero entonces el voltaje es cero”

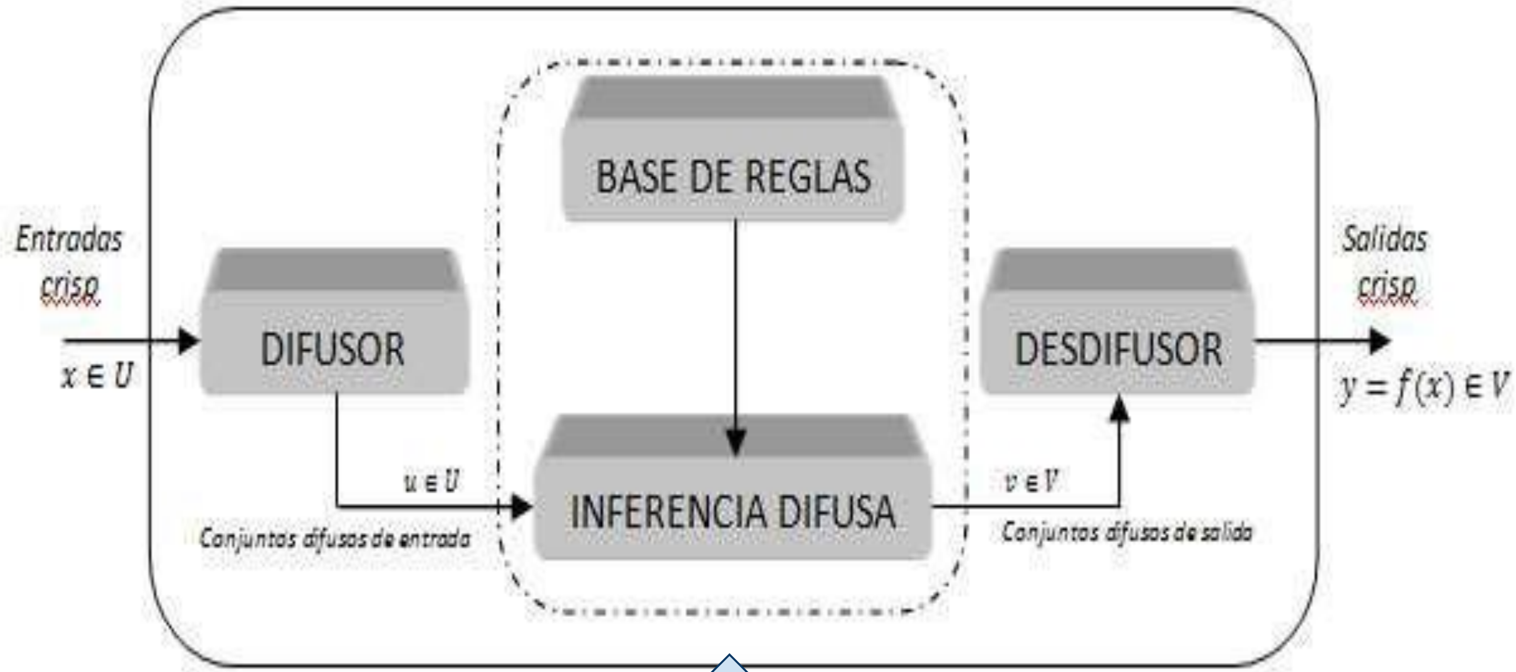
“Si la posición del cabezal es positiva pequeña entonces el voltaje es positivo pequeño”

“Si la posición del cabezal es positiva grande entonces el voltaje es positivo grande”



7. Diseño de controles difusos

Objetivo :: modelado de sistemas difusos



método de inferencia

7. Diseño de controles difusos

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

4. método de inferencia

		interpretación matemática
x es A′		A'
Si x es A1, entonces y es B1	⇨	$B'_1 = A' \cdot R_1 = A' \cdot (A_1 \times B_1)$
Si x es A2, entonces y es B2		$B'_2 = A' \cdot R_2 = A' \cdot (A_2 \times B_2)$
…		…
y es B′		$B' = B'_1 \cup B'_2 \cup \ldots$

- Como en lógica difusa cierto valor (**x**) no pertenece exclusivamente a uno de los conjuntos (**A1..n**) implicados en una regla, sino que pertenece en diferente grado a cada uno de ellos, cada "x" debe aplicarse a cada regla.

7. Diseño de controles difusos

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

4. método de inferencia

		interpretación matemática
x es A′		A'
Si x es A1, entonces y es B1	⇨	$B'_1 = A' \cdot R_1 = A' \cdot (A_1 \times B_1)$
Si x es A2, entonces y es B2		$B'_2 = A' \cdot R_2 = A' \cdot (A_2 \times B_2)$
…		…
y es B′		$B' = B'_1 \cup B'_2 \cup \ldots$

- El conjunto **B′** es un nuevo conjunto que resulta de la "**unión**" de cada operación de composición (**$B_{1..n}$**) relativa a las reglas definidas.

7. Diseño de controles difusos

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

4. método de inferencia

interpretación matemática

x es A′		A'
Si x es A1, entonces y es B1	⇨	$B'_1 = A' \cdot R_1 = A' \cdot (A_1 \times B_1)$
Si x es A2, entonces y es B2		$B'_2 = A' \cdot R_2 = A' \cdot (A_2 \times B_2)$
…		…
y es B′		$B' = B'_1 \cup B'_2 \cup \ldots$

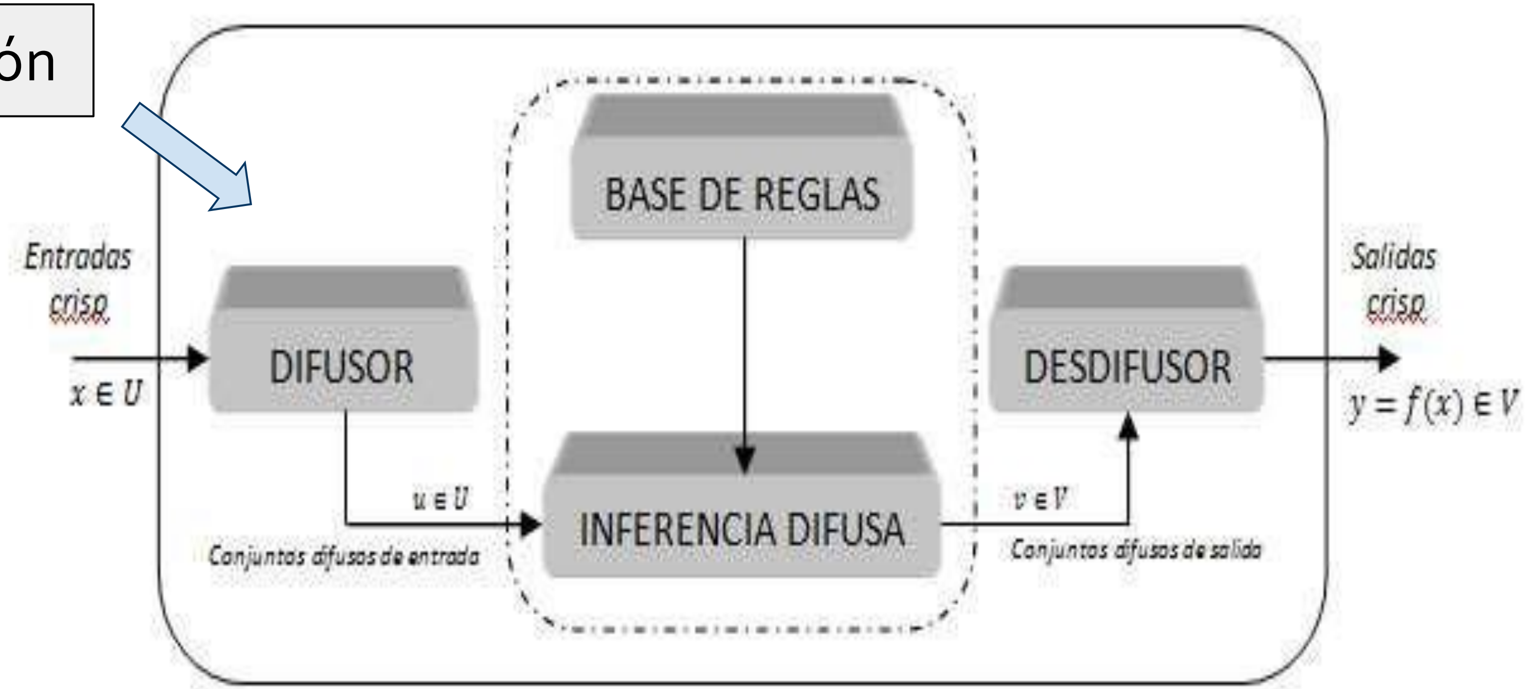
- En la práctica, para evitar calcular todos los conjuntos **$B_{1..n}$**, basta con presuponer un valor **x_0** y aplicar la función **‘Singleton’** a fin de simplificar las operaciones de **producto cartesiano y composición**

… es lo que se denomina **fusificar**!

7. Diseño de controles difusos

Objetivo :: modelado de sistemas difusos

fusificación



5. Fusificación

Supone calcula la pertenencia de cierto **x_0 de A′** al conjunto resultante **B′**

A′

B′1 = A′ · R1 = A′ · (**A1** x **B1**)

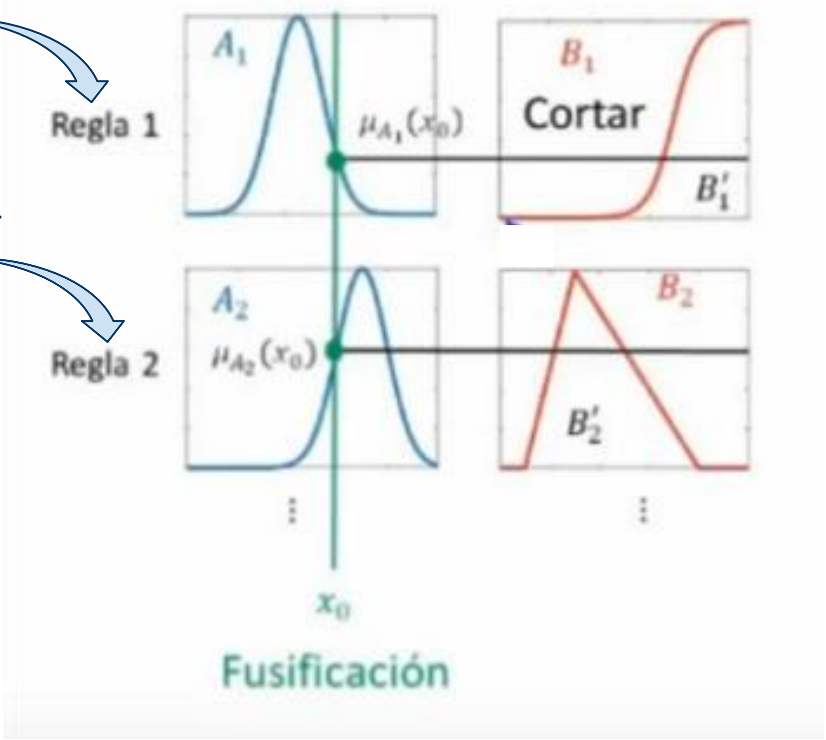
B′2 = A′ · R2 = A′ · (**A2** x **B2**)

…

B′n

método de inferencia

→ La función **Singleton** define el **punto de corte** (valor de entrada **x_0**) tanto para el conjunto de entrada (**A′**) como el de salida (**B′**)



7. Diseño de controles difusos

CIPFP Mislata
Centre Integrat Públic
Formació Professional Superior

5. Fusificación

Supone calcula la pertenencia de cierto **x_0 de A′** al conjunto resultante **B′**

A′

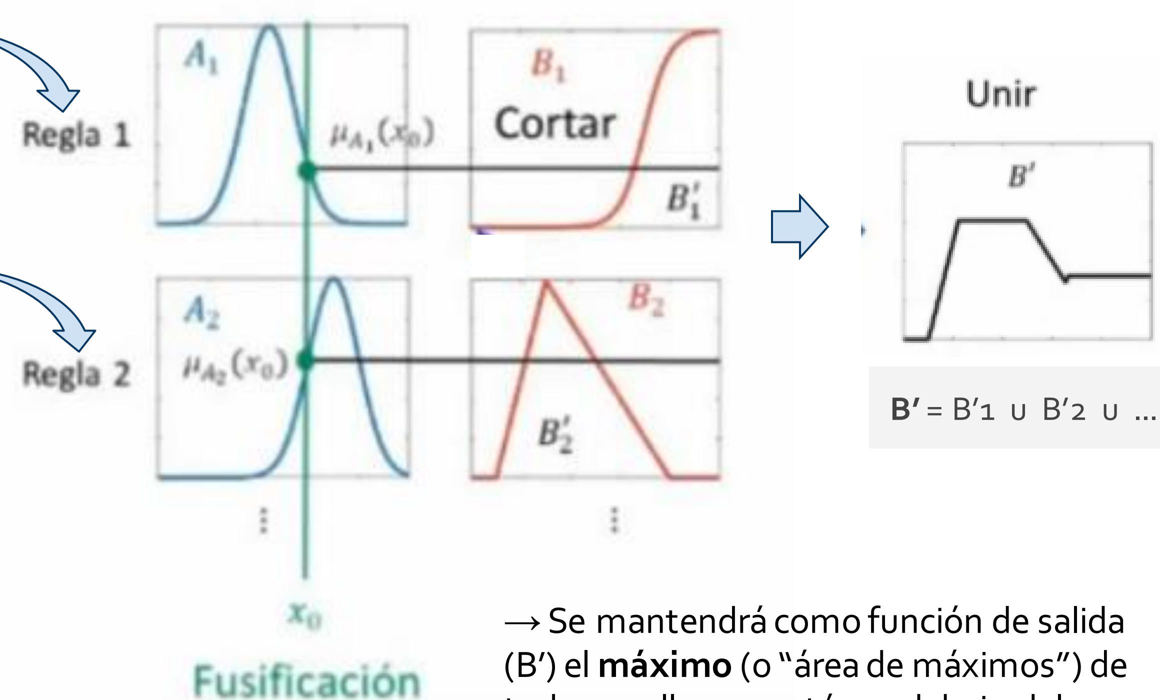
B′1 = A′ · R1 = A′ · (**A1 x B1**)

B′2 = A′ · R2 = A′ · (**A2 x B2**)

…

B′n

→ La función **Singleton** define el **punto de corte** (valor de entrada **x_0**) tanto para el conjunto de entrada (**A′**) como el de salida (**B′**)

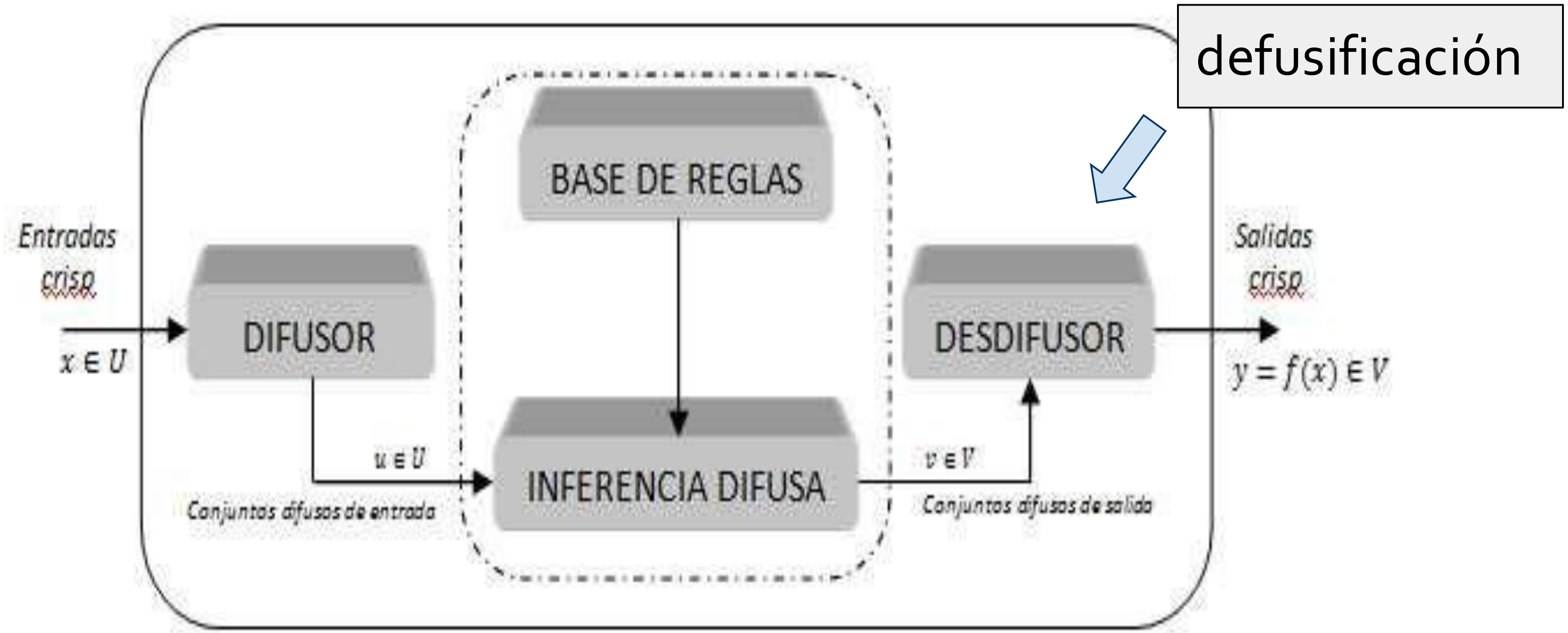


B′ = B′1 ∪ B′2 ∪ …

→ Se mantendrá como función de salida (B′) el **máximo** (o "área de máximos") de todo aquello que esté por debajo del punto de corte fijado por x_0

7. Diseño de controles difusos

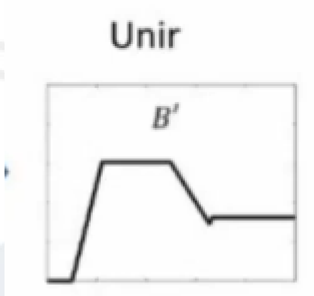
Objetivo :: modelado de sistemas difusos



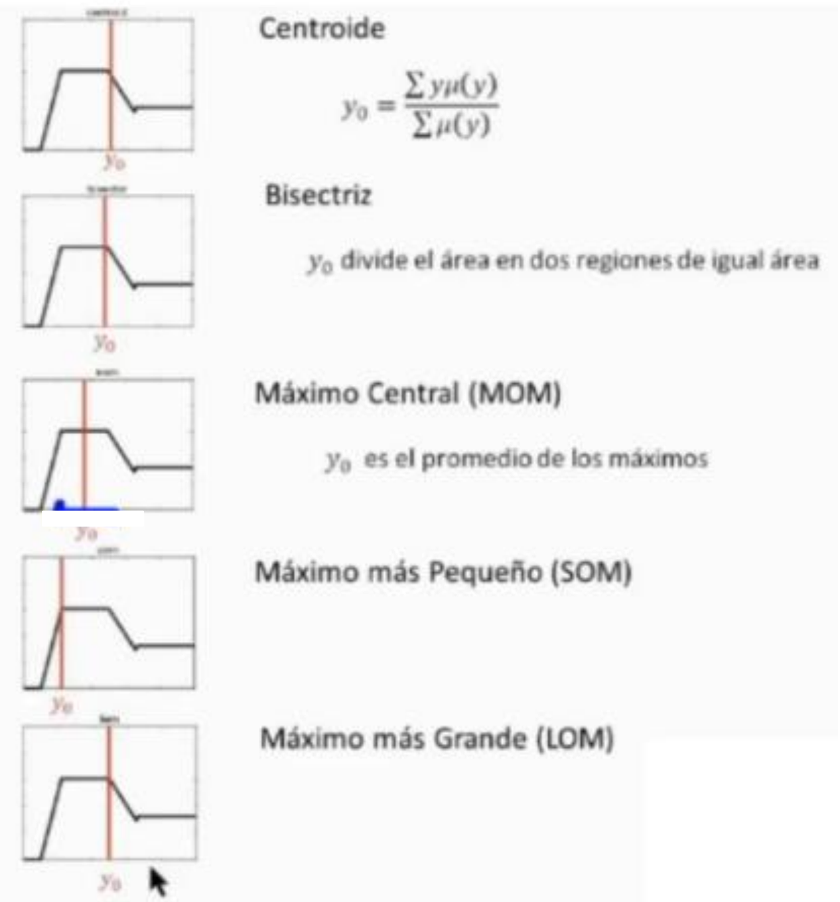
7. Diseño de controles difusos

6. Defusificación

Consiste en obtener un valor aproximado **y_0** en el conjunto B' con el cual el **x_0** se relaciona



defusificación



7. Diseño de controles difusos

Ejemplo de control difuso

- Entra en moodle y descarga el documento “Sesión 3 :: Control Difuso” en el que aparece el tratamiento en Python del ejemplo de diseño del control que regula la posición de un cartucho de una impresora de inyección tinta.