

**Rapport de projet INF402**

*Le futoshiki*



## Le futoshiki

Le futoshiki, qui signifie « non égal » en Japonais, est un casse-tête japonais introduit en Europe au début des années 2000.

Son principe est simple, le jeu est composé d'une grille carrée de taille largeur  $N$  ( $2 \leq N \leq 9$ ).

Le joueur doit réussir à placer tous les nombre de 1 à  $N$  dans chaque ligne et chaque colonne tout en respectant les signes « inférieur à » et « supérieur à ».

*Exemple : (Grille 5x5)*

	>			>		>			
4								2	
			4						
							<	4	
	<		<						

5	>	4	3	>	2	>	1		
4		3		1		5		2	
2		1		4		3		5	
3		5		2		1	<	4	
1	<	2	<	5		4			3

Une des contraintes principales de ce projet est d'arriver à modéliser la gestion des signes dans le remplissage des lignes et colonnes

## Traduction logique du problème

Pour commencer, nous nous restreignons à une grille de taille 4x4.

MAURY Norman  
ABU ZAKI Teimur  
MIN1  
SEBAN Jérémy

Nous avons tout d'abord traduit le fait de vérifier que les colonnes et lignes de la grille doivent contenir une seule occurrence d'un nombre  $n$  et que chaque case de la grille contient un unique nombre  $n$ .

Nous utilisons le littéral  $x_{i,j,n}$  avec  $i,j$  les indices des lignes et colonnes comme pour une matrice carrée.

### Règle 1 :

$$\forall (i,j,n) \in \{1, \dots, 4\}, x_{i,j,n} \Leftrightarrow (\bigwedge_{j1 \in [1,4] \setminus j} \overline{x_{i,j1,n}}) \wedge (\bigwedge_{i1 \in [1,4] \setminus i} \overline{x_{i1,j,n}}) \wedge (\bigwedge_{n' \in [1,4] \setminus n} \overline{x_{i,j,n'}})$$

ce qui s'écrit en clauses :

$$\forall (i,j,n) \in \{1, \dots, 4\}, x_{i,j,n} \vee (\bigvee_{j1 \in [1,4] \setminus j} x_{i,j1,n}) \vee (\bigvee_{i1 \in [1,4] \setminus i} x_{i1,j,n}) \vee (\bigvee_{n' \in [1,4] \setminus n} x_{i,j,n'})$$

et

$$\forall (i,j,n) \in \{1, \dots, 4\}, (\overline{x_{i,j,n}} \vee \overline{x_{i,j1,n}}) \text{ avec } j1 \in \{1, \dots, 4\} \setminus j$$

$$\forall (i,j,n) \in \{1, \dots, 4\}, (\overline{x_{i,j,n}} \vee \overline{x_{i1,j,n}}) \text{ avec } i1 \in \{1, \dots, 4\} \setminus i$$

$$\forall (i,j,n) \in \{1, \dots, 4\}, (\overline{x_{i,j,n}} \vee \overline{x_{i,j,n'}}) \text{ avec } n' \in \{1, \dots, 4\} \setminus n$$

Nous traduisons ensuite, la contrainte du signes « inférieur ».

Nous considérons deux couples de coordonnées,  $(i1,j1)$  et  $(i2,j2)$  tel que  $(i1,j1) \neq (i2,j2)$  avec soit  $i1=i2$  ou  $j1=j2$ .

Si on a la case  $\{i1,j1\} < \{i2,j2\}$ , on obtient alors la clause suivante.

### Règle 2 :

$$\forall n \in \{2, \dots, 4\} x_{i2,j2,n} \Leftrightarrow \bigvee_{n' < n} x_{i1,j1,n'}$$

$$\forall n \in \{1, \dots, 3\} x_{i1,j1,n} \Leftrightarrow \bigvee_{n' > n} x_{i2,j2,n'}$$

$$\overline{x_{i2,j2,1}}$$

$$\overline{x_{i1,j1,4}}$$

ce qui se traduit en clauses :

$$\forall n \in \{2, \dots, 4\}, \overline{x_{i2,j2,n}} \vee (\bigvee_{n' < n} x_{i1,j1,n'})$$

$$\text{et } \forall n' < n \quad x_{i2,j2,n} \vee \overline{x_{i1,j1,n'}}$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \{1, \dots, 3\}, \quad & \overline{x_{i1j1,n}} \vee (\vee_{n' > n} x_{i2,j2,n'}) \\ \text{et } \forall n' > n \quad & x_{i1j1,n} \vee \overline{x_{i2j2,n'}} \\ & \overline{x_{i2j2,1}} \\ \text{et} \quad & \overline{x_{i1j1,4}} \end{aligned}$$

**Exemple sur une matrice 2x2:**

<input type="text"/>	>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	>	<input type="text"/>
<input type="text"/>		<input type="text"/>	2	<input type="text"/>	1
<input type="text"/>		<input type="text"/>	2	<input type="text"/>	2
<input type="text"/>		<input type="text"/>	1	<input type="text"/>	2

**Règle 1 :**

$$\begin{aligned} x_{111} &= -x_{112} \cdot -x_{121} \cdot -x_{211} \\ &:= (-x_{111} + -x_{112}) \cdot (x_{111} + x_{112} + x_{121} + x_{211}) \cdot (-x_{111} + -x_{121}) \cdot (-x_{111} + -x_{211}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{112} &= -x_{111} \cdot -x_{122} \cdot -x_{212} \\ &:= (-x_{111} + -x_{112}) \cdot (x_{111} + x_{112} + x_{122} + x_{212}) \cdot (-x_{112} + -x_{122}) \cdot (-x_{112} + -x_{212}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{121} &= -x_{122} \cdot -x_{111} \cdot -x_{221} \\ &:= (-x_{111} + -x_{121}) \cdot (x_{111} + x_{121} + x_{122} + x_{221}) \cdot (-x_{121} + -x_{122}) \cdot (-x_{121} + -x_{221}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{122} &= -x_{121} \cdot -x_{112} \cdot -x_{222} \\ &:= (-x_{112} + -x_{122}) \cdot (x_{112} + x_{121} + x_{122} + x_{222}) \cdot (-x_{121} + -x_{122}) \cdot (-x_{122} + -x_{222}) \end{aligned}$$

$$x_{211} = -x_{212} \cdot -x_{221} \cdot -x_{111}$$

MAURY Norman  
ABU ZAKI Teimur  
MIN1  
SEBAN Jérémy

$$:= (-x_{111} + x_{211}) \cdot (x_{111} + x_{211} + x_{212} + x_{221}) \cdot (-x_{211} + x_{212}) \cdot (-x_{211} + x_{221})$$

$$x_{212} = -x_{211} \cdot x_{112} \cdot x_{222} :$$

$$= (-x_{112} + x_{212}) \cdot (x_{112} + x_{211} + x_{212} + x_{222}) \cdot (-x_{211} + x_{212}) \cdot (-x_{212} + x_{222})$$

$$x_{221} = -x_{222} \cdot x_{211} \cdot x_{121}$$

$$:= (-x_{121} + x_{221}) \cdot (x_{121} + x_{211} + x_{221} + x_{222}) \cdot (-x_{211} + x_{221}) \cdot (-x_{221} + x_{222})$$

$$x_{222} = -x_{221} \cdot x_{212} \cdot x_{122}$$

$$:= (-x_{122} + x_{222}) \cdot (x_{122} + x_{212} + x_{221} + x_{222}) \cdot (-x_{212} + x_{222}) \cdot (-x_{221} + x_{222})$$

### **Règle 2 :**

Case {1,2} < case {1,1} donc :

$$x_{121} \Leftrightarrow x_{112} := (-x_{121} + x_{112}) \cdot (x_{121} + x_{112})$$

$$x_{112} = x_{121} := (-x_{121} + x_{112}) \cdot (x_{121} + x_{112})$$

(ce sont les mêmes car cas particulier)

$$-x_{111}$$

$$-x_{122}$$

et on a par hypothèse :  $x_{222}$

### **Forme Conjonctive :**

$$\begin{aligned} & (-x_{111} + x_{112}) \cdot (x_{111} + x_{112} + x_{121} + x_{211}) \cdot (-x_{111} + x_{121}) \cdot (-x_{111} + x_{211}) \cdot (-x_{111} + x_{112}) \cdot \\ & (x_{111} + x_{112} + x_{122} + x_{212}) \cdot (-x_{112} + x_{122}) \cdot (-x_{112} + x_{212}) \cdot (-x_{111} + x_{121}) \cdot \\ & (x_{111} + x_{121} + x_{122} + x_{221}) \cdot (-x_{121} + x_{122}) \cdot (-x_{121} + x_{221}) \cdot (-x_{112} + x_{122}) \cdot \\ & (x_{112} + x_{121} + x_{122} + x_{222}) \cdot (-x_{121} + x_{122}) \cdot (-x_{122} + x_{222}) \cdot (-x_{111} + x_{211}) \cdot \\ & (x_{111} + x_{211} + x_{212} + x_{221}) \cdot (-x_{211} + x_{212}) \cdot (-x_{211} + x_{221}) \cdot (-x_{112} + x_{212}) \cdot \\ & (x_{112} + x_{211} + x_{212} + x_{222}) \cdot (-x_{211} + x_{212}) \cdot (-x_{212} + x_{222}) \cdot (-x_{121} + x_{221}) \cdot \\ & (x_{121} + x_{211} + x_{221} + x_{222}) \cdot (-x_{211} + x_{221}) \cdot (-x_{221} + x_{222}) \cdot (-x_{122} + x_{222}) \cdot \\ & (x_{122} + x_{212} + x_{221} + x_{222}) \cdot (-x_{212} + x_{222}) \cdot (-x_{221} + x_{222}) \cdot (-x_{121} + x_{112}) \cdot (x_{121} + x_{112}) \cdot \\ & -x_{111} \cdot -x_{122} \cdot x_{222} \end{aligned}$$

Ce qui donne, une fois simplifiée :

$$(-x_{111}) \cdot (x_{112}) \cdot (x_{121}) \cdot (-x_{122}) \cdot (x_{211}) \cdot (-x_{212}) \cdot (-x_{221}) \cdot (x_{222})$$

MAURY Norman  
ABU ZAKI Teimur  
MIN1  
SEBAN Jérémy

On peut voir que la seule solution possible est :

$$['x_{111}', 'x_{112}', 'x_{121}', 'x_{122}', 'x_{211}', 'x_{212}', 'x_{221}', 'x_{222}'] \\ = [ 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1 ]$$

A l'aide de la traduction des clauses on peut prévoir combien de clause on a et créer le fichier DIMACS convenable .

**En format DIMACS (le fichier équivalent) :**

```
p cnf 222 36

-111 -112 0
111 112 121 211 0
-111 -121 0
-111 -211 0
-111 -112 0
111 112 122 212 0
-112 -122 0
-112 -212 0
-111 -121 0
111 121 122 221 0
-121 -122 0
-121 -221 0
-112 -122 0
112 121 122 222 0
-121 -122 0
-122 -222 0
-111 -211 0
111 211 212 221 0
-211 -212 0
-211 -221 0
-112 -212 0
112 211 212 222 0
-211 -212 0
-212 -222 0
-121 -221 0
121 211 221 222 0
-211 -221 0
-221 -222 0
-122 -222 0
122 212 221 222 0
```

MAURY Norman  
ABU ZAKI Teimur  
MIN1  
SEBAN Jérémy

-212 -222 0  
-221 -222 0  
-121 112 0  
121 -112 0  
-111 0  
222 0

### **Présentation des programmes :**

Pour l'implémentation du jeu nous avons réalisé trois programmes.

Le premier programme "dimacs" effectue la transformation des données contenues dans la grille de futoshiki initiale en un fichier DIMACS. Ce programme dépend du module "dimacs" et "fonctions". "dimacs" prend, en entrée, un fichier contenant les données initiales (dont le format sera explicité dans le README.txt) et la taille de la grille. Il produit un fichier appelé "dimacs.txt" qui contient les clauses en format DIMACS.

Le deuxième programme "3\_SAT" effectue la traduction du fichier "dimacs.txt" en format 3-SAT. Il écrit le résultat dans un nouveau fichier sortie appelé "dimacs.txt\_3\_SAT". Ce programme dépend du module "3\_SAT" et du module "fonctions". Le programme prend comme unique argument "dimacs.txt".

Le dernier programme "res\_dimacs" dépend du module "res\_dimacs" et du module "fonctions". Il prend en arguments deux éléments : le fichier solution du SAT solveur et la taille de la grille. "res\_dimacs" traduit le fichier solution du sat solveur dans "fichier.txt" contenant les valeurs de chaque case ligne par ligne.

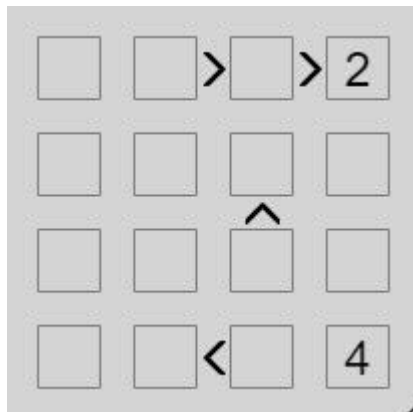
Pour finir, nous avons écrit un programme python utilisant la librairie Tkinter. Ce programme ouvre une fenêtre graphique contenant la grille finale remplie correspondant au fichier "fichier.txt".

Afin de faciliter l'exécution de programme nous avons créé un script shell qui nous permet d'exécuter les programmes dans l'ordre avec les bons arguments en une seule ligne de commande. Il prend en arguments le fichier entré et la taille de la grille. Il crée le fichier "dimacs.txt", puis le transforme en 3-SAT appelé "dimacs.txt\_3\_SAT", puis on exécute le SAT solveur sur ce dernier fichier, et on affiche le résultat.

### **Tests d'exécution du programme :**

#### **Grille 4x4:**

MAURY Norman  
ABU ZAKI Teimur  
MIN1  
SEBAN Jérémy



Fichier entrée :

**2**

**4**

**1 4 2**

**4 4 4**

**1 3 1 2**

**1 4 1 3**

**2 3 3 3**

**4 2 4 3**

ligne de commande: ***./monsat.sh entree\_grille\_4.txt 4***

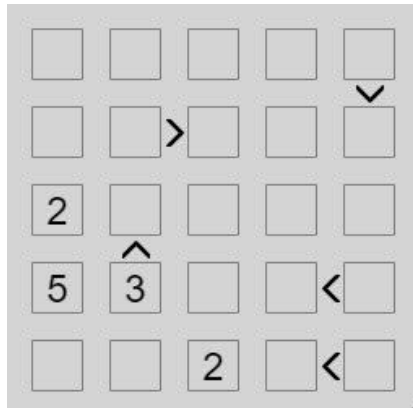
sortie

1	4	3	2
4	2	1	3
2	3	4	1
3	1	2	4

**Grille 5x5:**



MAURY Norman  
ABU ZAKI Teimur  
MIN1  
SEBAN Jérémy



Fichier entrée :

**4**

**5**

**3 1 2**

**4 1 5**

**4 2 3**

**5 3 2**

**2 3 2 2**

**2 5 1 5**

**3 2 4 2**

**4 4 4 5**

**5 4 5 5**

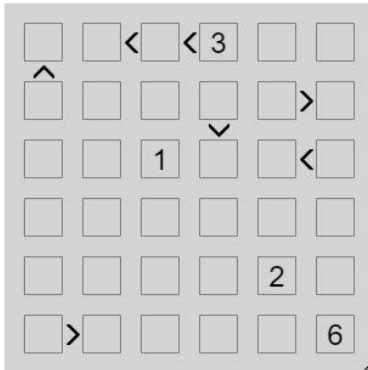
ligne de commande: ***./monsat.sh entree\_grille\_5.txt 5***

Sortie:

3	2	1	5	4
4	5	3	2	1
2	1	5	4	3
5	3	4	1	2
1	4	2	3	5

MAURY Norman  
ABU ZAKI Teimur  
MIN1  
SEBAN Jérémy

**Grille 6x6:**



**Fichier entrée :**

**4**

**7**

**1 4 3**

**3 3 1**

**5 5 2**

**6 6 6**

**1 2 1 3**

**1 3 1 4**

**1 1 2 1**

**2 6 2 5**

**3 4 2 4**

**3 5 3 6**

**6 2 6 1**

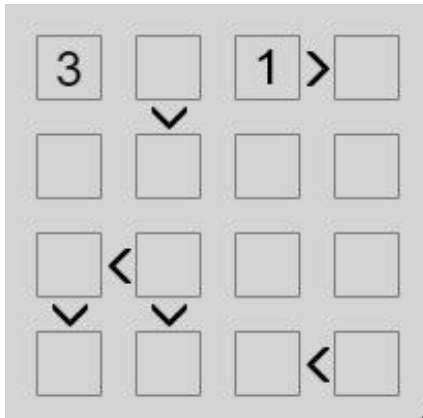
**ligne de commande: *./monsat.sh entree\_grille\_6.txt 6***

**Sortie:**

5	1	2	3	6	4
6	2	3	5	4	1
2	6	1	4	3	5
3	4	6	1	5	2
1	5	4	6	2	3
4	3	5	2	1	6

MAURY Norman  
ABU ZAKI Teimur  
MIN1  
SEBAN Jérémy

**Grille 4x4 insatisfaisable:**



**Fichier entrée :**

2

6

1 1 3

1 3 1

1 4 1 3

2 2 1 2

3 1 3 2

4 1 3 1

4 2 3 2

4 3 4 4

**ligne de commande:** `./monsat.sh entree_grille_faux_4.txt 4`

**Sortie:**



MAURY Norman  
ABU ZAKI Teimur  
MIN1  
SEBAN Jérémy

### **Conclusion:**

Ce projet nous a permis d'avoir une approche plus concrète de la logique en appliquant celle-ci à un exemple de casse tête.

Pour la réalisation de nos tests, Nous avons utilisé [ce site](#) pour générer des exemples et vérifier nos résultats. Chacun des test que nous avons effectués était concluant.