Ep6.保角映射

6.1 保角映射的概念

6.1.1 导数的几何意义

- 导数的模 $|f'(z_0)|$ 反映映射 $\omega=f(z)$ 在 z_0 点的伸缩率；
- 导数的幅角 $Arg(f'(z_0))$ 反映反映映射 $\omega=f(z)$ 在 z_0 点的旋转角；

6.1.2 保角映射的概念和一般性定理

- 保角性
    1. 如果一个映射 $\omega=f(z)$ 在 z_0 处保持两有向曲线之间的角度、方向都不变且保持其伸缩率不变，则称 $\omega=f(z)$ 在 z_0 点是**保角**的；
    2. 如果 $\omega=f(z)$ 在区域 D 内处处保角，则称映射 $\omega=f(z)$ 为 D 内的**保角映射**；
- 保角映射的重要性定理

i. 映射为保角映射的充要条件：区域内解析且 $f'(z_0) \neq 0$ ；

ii. 设 $\omega = f(z)$ 在 z_0 点解析，如果 $f'(z_0) = f''(z_0) = f^{(3)}(z_0) = ... = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ ，但 $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ ，则经过该映射后 $\omega = f(z)$ 把 z_0 点的两曲线之间的夹角放大 k 倍；

iii. **黎曼映射定理**：设 D 和 G 是两个不同于整个复平面的单连通区域，则 $\forall z_0 \in D, \forall \omega_0 \in G$ ，存在唯一的保角映射 $\omega = f(z)$ ，使得 $\omega_0 = f(z_0), argf'(z_0) = \alpha$ ；

iv. **边界原理**：正向→正向；

6.2 初等函数映射

6.2.1 整线性映射 $\omega = Az + B(A, B \in \mathbf{C})$

- $\omega = z + B$

  i. 几何意义：对原区域进行平移；

  ii. 参考图：

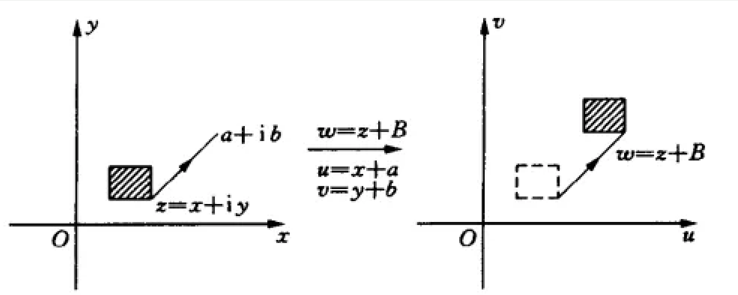


图 6－6　平移映射 $w = T(z) = z + B$

- $\omega = e^{i\alpha} z$

  i. 几何意义：对原区域进行旋转；

  ii. 参考图：

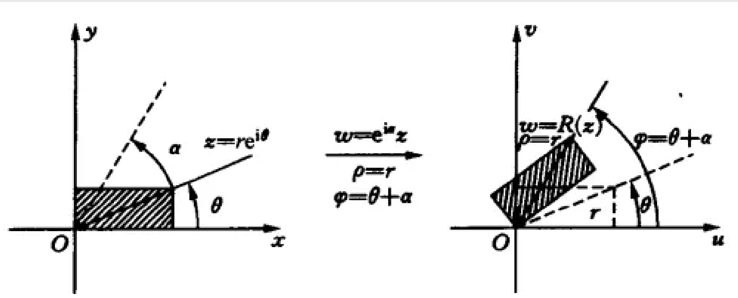


图 6－7　旋转映射 $w = e^{i\alpha} z$

- $\omega = kz(k>0)$

    i. 几何意义：点之间的距离进行了 k 倍的伸缩；

    ii. 参考图：

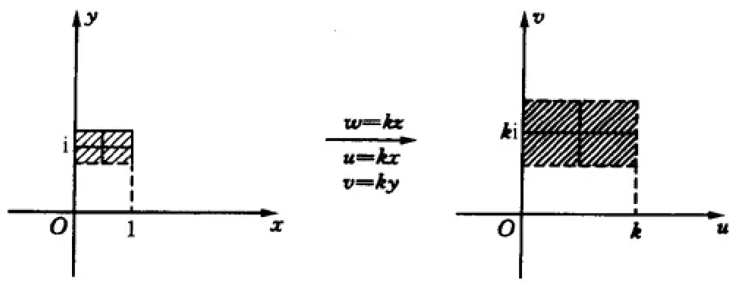


图 6-8　伸缩映射 $w=kz$

- $\omega = Az + B$

    i. 该映射为上述三种基本映射的复合映射，分别处理即可；

例 1：求区域 $D=\{z;Re(z)>1\}$ 在整线性映射 $\omega=(-1+i)z-2+3i$ 下的象区域.

解：法一——求逆映射

若给出的区域通过若干不等式来限制，则可以采用其逆映射来求出象区域；

映射 $\omega=(-1+i)z-2+3i$ 的逆映射为 $z=\dfrac{\omega+2-3i}{-1+i}$ （求逆映射）

故 $x+yi=\dfrac{u+vi+2-3i}{-1+i}=\dfrac{-u+v-5}{2}+i\cdot\dfrac{-u-v+1}{2}$ （反表示，分离实部虚部）

原区域为 $x>1$ ，故 $\dfrac{-u+v-5}{2}>1$

解得象区域为 $v>u+7$ ；

法二——利用边界原理

原区域的边界曲线为 $x=1$ ，即边界曲线上一点可以表示为 $(1,y)$

代入 w 得映射后的边界曲线为 $(-1+i)(1+yi)-2+3i$

化简得 $w_0=(-y-3)+i(4-y)$ ，满足 $u-v=-7$ ，即 $v=u+7$

任取原区域内一点 $(2,0)$ ，代入得其象点为 $(-4,5)$ ，在区域 $v>u+7$ 区域内

综上，象区域为 $v>u+7$

例 2：求将圆周曲线 $|z|=1$ 映射为圆周曲线 $|w-3+2i|=5$ 且满足 $\zeta(-i)=3+3i$ 的整线性映射 $w=\zeta(z)$.

解：原曲线映射成为象曲线的步骤：先平移 $3-2i$ ，再伸缩到原来的 5 倍；

故 $\zeta(z)=5e^{i\alpha}\cdot z+3-2i$ ；

代入 $\zeta(-i)=-5i\cdot e^{i\alpha}+3-2i=3+3i$ 得 $e^{i\alpha}=-1$

故 $\zeta(z)=-5z+3-2i$ ；

6.2.2 倒数映射 $\omega=\dfrac{1}{z}$

- 反演映射 $\omega=\dfrac{z}{|z|^2}$
  - 几何意义：点 z 被映射为**关于单位圆的对称点**；
- 倒数映射
  - 将倒数映射看做两个映射的复合： $\omega=\overline{\zeta},\zeta=\dfrac{z}{|z|^2}$ ；
  - 几何意义：先将点关于单位圆反演，再关于实轴对称；
- 广义圆
  - 可以将直线看作是半径无穷大的圆，则统称圆和直线为广义圆；
  - 结论： Z 平面上的广义圆 $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$ 经过倒数映射后变为 W 平面上的广义圆 $D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0$ ；

例 3：求在映射 $w=\frac{1}{z}$ 下， Z 平面上的区域 $D=\{z;Re(z)>\frac{1}{2}\}$ 与 $|z-\frac{1}{2}|<1$ 的象区域.

解： 法 1——逆映射表示

逆映射为 $z=\frac{1}{w}$ ，即 $x+yi=\frac{1}{u+vi}=\frac{u-vi}{u^2+v^2}$

故 $\begin{cases} x=\frac{u}{u^2+v^2} \\ y=-\frac{v}{u^2+v^2} \end{cases}$

先求象区域 ①，即 $\frac{u}{u^2+v^2}>\frac{1}{2}$ ，即 $(u-1)^2+v^2<1$ ；

再求象区域 ②，即 $(\frac{u}{u^2+v^2}-\frac{1}{2})^2+(-\frac{v}{u^2+v^2})^2<\frac{3}{4}$

解得 $(u+\frac{2}{3})^2+v^2>\frac{16}{9}$ ；

故象区域如下图：

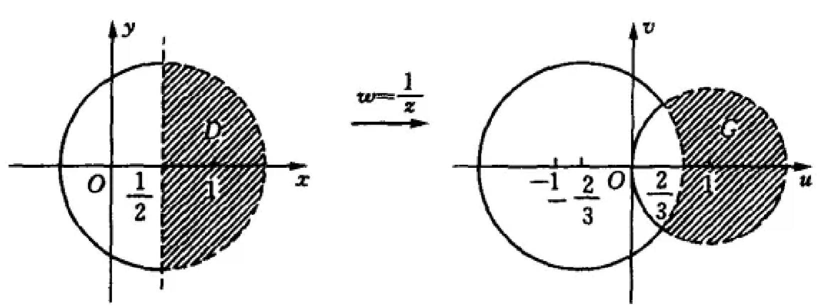


图 6-11 $w=\frac{1}{z}$ 将 D 映射为 G

法二——利用广义圆的结论（☆）

在计算象区域 ② 的时候，计算较为繁琐，此时直接利用广义圆的结论可以大大简化计算！

原区域的表达式为 $(1)(x^2+y^2)+(-1)x+(0)y-\frac{3}{4}=0$ ；

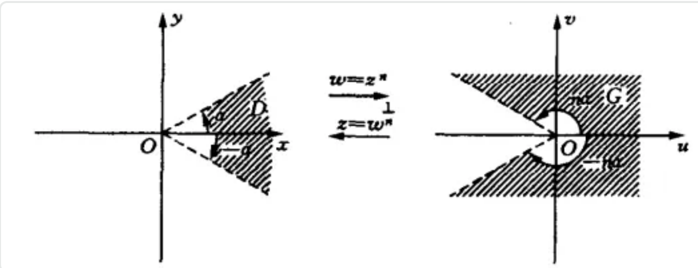
则其象曲线为： $-\frac{3}{4}(u^2+v^2)-u+1=0$ ，即 $(u+\frac{2}{3})^2+v^2=\frac{16}{9}$

注意到点 $(1,0)$ 经过倒数映射后仍为其本身，而该点在圆内；

故象区域为 $(u+\frac{2}{3})^2+v^2>\frac{16}{9}$ ；

6.2.3 幂函数映射 $\omega=z^n$ 和根式映射 $\omega=\sqrt[n]{z}$

- 幂函数映射
    - 将圆域映射为圆域，半径从 r 变为 r^n ；
    - 将射线映射为射线，倾斜角从 θ 变为 $n\theta$ ；
    - **将过原点的角域放大 n 倍**；



- 根式映射
    - 根式映射为幂函数映射的逆映射，所有行为反过来即可，但要注意是多值的；

6.2.4 指数映射 $\omega = e^z$ 和对数映射 $\omega = Ln(z)$

- 指数映射
    - 整体作用：把水平带域映射为角域，把垂直直线映射为圆；
    - 原象为水平带域
        - 以 $y = 0$ 为分界线，**带域 $y_1 i < y < y_2 i$ 被映射为 $y1 < arg\omega < y2$** （注意，上下限均不能超出 π ，否则要先用周期函数处理）；
    - 原象为垂直直线
        - 把直线 $x = x_0$ 映射为圆 $\omega = e^{x_0 i}$ ；

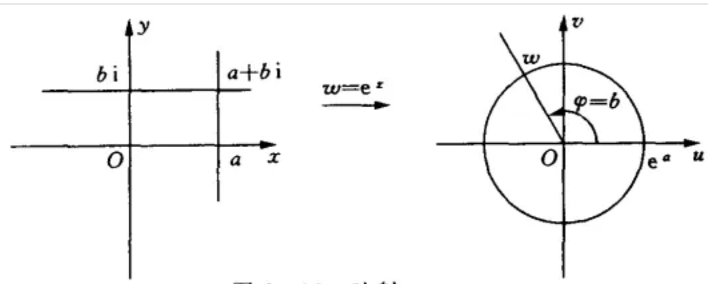


图 6-16 映射 $w = e^z$

$\{x + iy;\ x = a\} \to \{\rho e^{i\varphi};\ \rho = e^a\}$

$\{x + iy;\ y = b\} \to \{\rho e^{i\varphi};\ \rho > 0,\ \varphi = b\}$

- 对数映射
    - 整体作用：是指数映射的逆映射；

6.3 分式线性映射

6.3.1 分式线性映射

- 概念
  - 形如 $\omega = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 的映射 $(ad-bc \neq 0)$ 称为分式线性映射；
  - 分式线性映射可以看做下面三个映射的复合：
    - $\omega_1 = z + \dfrac{d}{c}$
    - $\omega_2 = \dfrac{1}{w_1}$
    - $\omega = A + B\omega_2$
- 分式线性映射也是保角映射；

6.3.2 三点唯一确定的分式线性映射

- 分式线性映射的变量削减
  - 对于一个分式线性映射，可以被化为如下的形式： $\omega = k\dfrac{z-\beta}{z-\gamma}$ ；
- 三点确定的分式线性映射
  - 一般情况： $\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1} = \dfrac{\omega-\omega_1}{\omega-\omega_2}\cdot\dfrac{\omega_3-\omega_2}{\omega_3-\omega_1}$
  - 特殊情况：若其中有一个象点为 ∞ （此处取 ω_2 ），则有 $\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1} = \dfrac{\omega-\omega_1}{\omega_3-\omega_1}$
- **补充结论**——对于 Z 平面上的圆周曲线（或直线）：
  - 若所有点经过映射后都不为 ∞ ，则象曲线为**半径有限的圆周曲线**；
  - 若有一个点的象点为 ∞ ，则象曲线**必然为直线**；
  - 即：**一段圆弧/直线经过分式线性映射之后只有两种结果——直线或圆弧**；
  - 即：想要达到将一段圆弧映射为直线/**将圆域映射为带域**的效果，可以构造分式线性映射；

例 4：（求分式线性映射）试求将 Z 平面上三个点 $1,-i,i$ 映射为 W 平面上三个点 $1,-1,0$ 的分式线性映射.

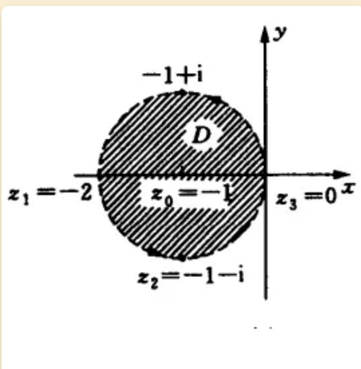
解：直接代入公式即可—— $\frac{z-1}{z+i}\cdot\frac{i+i}{i-1}=\frac{\omega-1}{\omega+1}\cdot\frac{0+1}{0-1}$

解得 $\omega=\frac{(1+i)(z-i)}{(1-3i)z+(1+3i)}$

另解：设 $w=k\cdot\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ ，由 $w(i)=0$ 得 $\alpha=i$ ，之后把剩下两个点代进去解方程即可

例 5：（求象区域）求将圆域 $|z+1|<1$ 通过映射 $\omega=\frac{(1-i)z+2}{(1+i)z+2}$ 映射的象区域.

解：先画出原区域，如下图：



令分母为 0，解得点 $-1+i$ 对应的象点为 ∞ ，故圆被映射为一条直线；

取三个点 $-2,-1-i,0$ ，沿着曲线**正向前进**，三个点对应的象点分别为 $-1,0,1$ ；

故该圆被映射为一条直线 $v=0$ ，根据边界原理得象区域为 $Im(\omega)>0$.

6.3.3 两个重要的分式线性映射

- 卷筒——把上半平面映射为单位圆
  - 公式： $\omega=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$ ；
  - 参数意义： z_0 为 Z 平面内想要被映射为圆心的点， θ 为实数；
- 换圆心——把单位圆映射为单位圆
  - 公式： $\omega=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-z\,\overline{z_0}}$ ；
  - z_0 为原单位圆内想要被映射为新的单位圆圆心的点， θ 为实数；

6.4 做题（☆）

6.4.1 基本映射

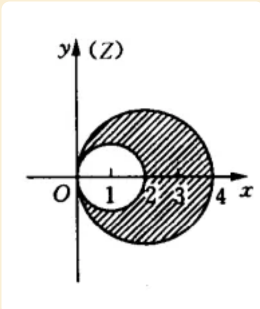
- 整线性映射：平移+伸缩
- 倒数映射：反演
- 幂函数：角域翻 n 倍
- **指数：带域变角域（很容易忽略）**
- **分式线性映射：直线/圆→直线/圆（控制起点和无穷远点）**
    - **把上半单位圆映射为第一象限的映射：** $w = \dfrac{1+z}{1-z}$

6.4.2 例题

- 基本做法：找到特殊点→初步构造→逐步调整

例 1：求将区域 $A=\{z;|z-1|>1且|z-2|<2\}$ 映射为区域 $B=\{w;0<Re(w)<1\}$ 的任一保角映射.

解：画出原区域 A ，如下图：



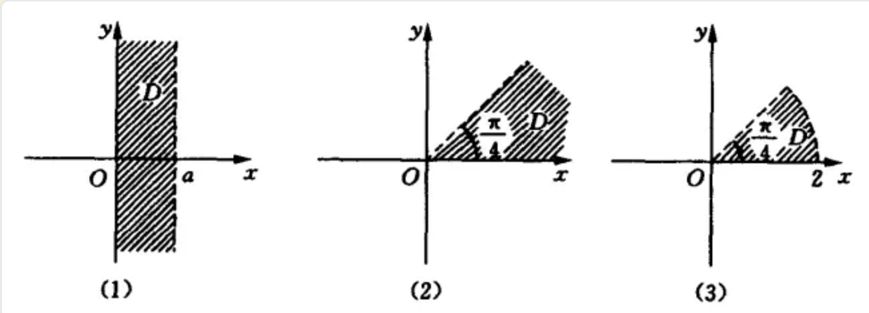
因为要把两个边界曲线都映射为直线，**根据分式线性映射的结论，它们都要有一个点映射到无穷远点**，因此只能是它们的交点（即原点）映射为无穷远点，故可以设 $w_1=\dfrac{z-a}{z}$

之后，根据边界原理，想要把里面的小圆映射为直线 $u=0$ ，**所以想要让点 $(2,0)$ 被映射为 $(0,0)$** ，据此可以得到 $a=2$ ，所以第一步映射是 $w_1=\dfrac{z-2}{z}$ ，此时已经把里面的小圆映射成了 v 轴

之后逐步进行调整——先考虑外侧大圆通过映射 w_1 之后变成怎样的一条直线。代入特殊点 $(2,2)$ 和 $(4,0)$ ，可以得到它们分别被映射为 $(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2})$ 和 $(\dfrac{1}{2},0)$ ，所以大圆被映射为 $u=\dfrac{1}{2}$ ，此时的区域为 $0<Re(w_1)<\dfrac{1}{2}$ ，因此调整为 $w=2w_1$

综上：所需的映射为 $\dfrac{2(z-1)}{z}$

例 2：求将下列各区域映射为单位圆内部的任意一个保角映射



思路：要映射成单位圆貌似只有那个公式，因此要想办法先**映射为整个上半平面**

(1) 一个有限的区域变成无限的区域通常只有两种方法——指数映射和分式线性映射

先转到上半面： $w_1 = iz$

为了后面取指数，先变得规整一点： $w_2 = \frac{w_1}{a} \cdot \pi = \frac{i\pi}{a} z$

取指数，变成上半平面： $w_3 = e^{w_2} = e^{\frac{i\pi}{a} z}$

之后代入结论： $w = \frac{w_3 - i}{w_3 + i} = \frac{e^{\frac{i\pi}{a} z} - i}{e^{\frac{i\pi}{a} z} + i}$

(2) 显然转四次就可以变成上半平面： $w_1 = z^4$

之后代入结论： $w = \frac{w_1 - i}{w_1 + i} = \frac{z^4 - i}{z^4 + i}$

(3) 这里要变成无限的区域肯定不能用指数映射，所以只能考虑用分式线性映射，为了方便运算可以先把这片扇形变成上半圆，即 $w_1 = (\frac{4}{z})^4$

之后通过很常见的一个分式线性映射变成第一象限： $w_2 = \frac{1 + w_1}{1 - w_1}$

变成上半平面： $w_3 = w_2^2$ ，之后易得