Ep4.泰勒级数和罗朗级数

1.级数

类比实数项级数！！！

1.1 复数序列和复数项级数

- 复数项数列
  - 定义：类比实数数列；
  - 柯西收敛准则；
- 复数项级数
  - 定义：类比实数项级数；
  - 级数收敛的判定方法（类比实数项级数）
    - 其部分和 S_n 有界，则原级数收敛；

- **绝对收敛**的级数必定收敛；
- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n)$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 都收敛（充要条件）；
- **必要条件：** $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.
  - 注意：该条件为必要条件，即可以判断某个级数不收敛，但是满足该条件的级数不一定收敛；
- 一系列判别法同样适用：**比较判别法、根式判别法**...

1.2 复函数序列和复函数项级数

- 复函数序列
  - 定义：类别实函数序列；
  - 收敛的判别方法：类比函数极限的定义；
- 复函数项级数
  - 定义：类比实函数项级数；
  - 函数项级数收敛的判定方法：类比实函数项级数；

1.3 幂函数的收敛性和收敛半径

- 幂级数的收敛：假设幂函数为 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ ，则其收敛性有以下几种情况
  - 只在 $z=a$ 处收敛，此时 $R=0$ ；
  - 在整个平面内都收敛，此时 $R=+\infty$ ；
  - 在圆内 $D(a,R)$ 绝对收敛，在圆外发散，在圆上有些点收敛有些点发散，此时 $R\in(0,+\infty)$ ；
- 收敛半径 R 的求法
  - $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} |\frac{C_{n+1}}{C_n}|$
  - $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|}$
  - 特殊的，若 $\lim C_n$ 存在，则可以得到 $R=1$.

  注意，这里左侧计算的结果都是 $\frac{1}{R}$ 而不是 R ！

例 1：求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{n+2}{3n+1})^n(z-4)^n$ 的收敛半径.

解：$C_n=(\frac{n+2}{3n+1})^n$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}=\frac{1}{3}$，$R=3$.

注意，这里的收敛圆为 $0<|z-4|<3$.

1.4 和函数的解析性

- 假设幂函数 $\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 有收敛半径 R ，其在收敛圆 $0<|z|<R$ 时收敛于和函数 $f(z)$ ，则 $f(z)$ 具有如下性质
  - 逐项可导性，逐项可积性；
  - 因为其逐项可导，**故其在收敛圆内解析**；

2.泰勒级数

2.1 泰勒定理

- 泰勒级数
  - 定义：若函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 解析，则称函数 $f(z)$ 在点 a 的**泰勒级数**为 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$ ，其中 $C_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(k=0,1,2,...)$ 称为**泰勒系数**；
  - 特殊的，在 $a=0$ 处的泰勒级数称为**麦克劳林级数**；
- 泰勒定理
  - 定理：如果函数 $f(z)$ 在**圆 D** 内解析，则该函数可以在圆内展开为泰勒级数，且 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$ ；

    注意：一定要保证该函数在一个圆域内解析！
  - 推论
    - 若圆域内有奇点（即在圆域内不解析），则其泰勒级数不收敛；
    - 因为展开是在一个解析的圆域内进行的，所以根据 1.4 和函数的解析性可知泰勒级数也有逐项可导性和逐项可积性；

2.2 基本初等函数的麦克劳林展开式

- 指对数函数
  - $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
  - $ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}$
- 三角函数
  - $sinz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
  - $cosz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$
- 双曲函数
  - $shz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
  - $chz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

  记忆方法：**双曲函数即将其对应的三角函数各项全部取正**；

2.3 求函数在某点的泰勒级数

- 采用以下步骤
  - 要求函数在 $z=a$ 处的泰勒级数，**首先要在函数中变化出 $z-a$ 这一项**；
  - 通过和函数的逐项可导、逐项可积性，搭配裂项、代数变形等手段将函数变化为已知泰勒展开级数的函数；
  - 合并下标；

例 1：将函数 $f(z)=\frac{1}{1-z}$ 在 $z=i$ 处展开为泰勒级数.

- 变化出 $z-i$ ： $f(z)=\frac{1}{1-i-(z-i)}$
- 转化为已知：

$$f(z)=\frac{1}{1-i-(z-i)}=\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}}\overrightarrow{=}\frac{1}{1-i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-i}{1-i})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n$$

注意：在 “ $\overrightarrow{=}$ ” 中，要将其转化为级数，**前提是** $|\frac{z-i}{1-i}|<1$ ，得到收敛圆为 $|z-i|<\sqrt{2}$.

例 2（利用泰勒级数求高次导数的值）：已知函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n}z^n$ ，求 $f^{(3)}(0)$.

先计算函数的收敛圆，过程略，求得其收敛圆为 $|z|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ ， $z=0$ 在收敛圆内；

根据泰勒定理： $C_3=\frac{f^{(3)}(0)}{3!}$ ，故 $f^{(3)}(0)=3!\cdot C_3=6\cdot\frac{(1+i)^3}{3}=4(-1+i)$.

例 3：将函数 $f(z)=\frac{1}{(z-2)^2}$ 在 $z=1$ 处展开.

$\frac{1}{2-z}=\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$ （这一步过程略）

故 $f(z)=(\frac{1}{2-z})'=\sum_{n=0}^{\infty}n(z-1)^n$

分析：灵活运用求导和积分来进行展开，可以类比微甲二级数中的那类题目

3.解析函数零点的孤立性和唯一性定理

3.1 零点

- 定义：类比实函数的零点；

- 零点的孤立性
  - 定义：若函数在 z_0 的某个圆域内解析，且 $f(z_0)=0$ ，在圆域内仅有这一个零点，则称这个零点为 $f(z)$ 的**孤立零点**；
  - 孤立零点定理：不恒为 0 的解析函数的零点必然是孤立的；
    - 推论 1（这个定理的逆否命题即为孤立零点定理，其实是现有下后有上，所以没什么用）：函数 $f(z)$ 在 D 内解析， $z_0 \in D$ ，如果在 D 内的一个点列 $\{z_n\}$ ， $f(z_n)=0$ ，且 $z_n \to z_0(n \to \infty)$ ，则 $f(z)$ 恒为 0；
    - 推论 2（洛必达法则）：设函数 $f(z)$、$g(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析，且 $f(z_0)=g(z_0)=0$ ，且 $g'(z_0) \neq 0$ ，则 $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$ ；
- k 级零点：类比实函数的 k 级零点（对应方程的多重根），可以定义复变函数的 **k 级零点**；
  - k 级零点要满足： $f^{(1)}(z_0)=f^{(2)}(z_0)=...=f^{(k-1)}(z_0)=0$ ， $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ ；
  - 另一种判断方法： $f(z)$ 能表示成 $(z-z_0)^k\,\varphi(z)$ 的形式，其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析且 $\varphi(z_0) \neq 0$ ；

3.2 解析函数唯一性定理

- 定义在 D 上的两个解析函数，只要在 D 内的某一部分（子区域或弧段）上的值相等，这两个函数在区域 D 上恒相等；

4.罗朗级数

4.1 双边级数的收敛性

- 双边级数
  - 定义：称形如
    $$\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n = ...+C_{-n}(z-z_0)^{-1}+...+C_{-1}(z-z_0)^{-1}+C_0+C_1(z-z_0)^1+...+C_n(z-z_0)^n+...$$
    的级数为**双边级数**；
  - 双边级数可以分为**正幂级数**和**负幂级数**两部分；
  - 常数项 C_0 属于正幂级数；
- 双边级数的解析域

- 对于正幂级数，其对应了在圆域内解析的一个函数；
- 对于双边级数，其对应了在圆环 $D=\{z \mid R_1<|z-z_0|<R_2\}$ 内解析的一个函数，其中 R_1 对应负幂级数部分， R_2 对应正幂级数部分；

4.2 罗朗定理

- 定理
  - 罗朗定理：设函数 $f(z)$ 在环域 $D=\{z;r<|z-a|<R\}$ 内解析，则在此圆环内，函数可以展开为罗朗级数 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-a)^n$ ，其中 $C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$ ， $C_\rho=\{z;|z-a|=\rho\}(r<\rho<R)$ 沿逆时针方向；
- 解题的一般步骤：罗朗定理看起来非常抽象，但是针对解题，掌握以下步骤：
  - 找圆环；
  - 在原函数里变化出 $(z-a)$ ；
  - 通过代数变形（通常是化为等比级数）进行求和，重点在于在不同的圆环下控制公比项满足 $|\ q\ |<1$ ；

例 4：将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ 在 $z=2$ 处展开为罗朗级数.

- 找圆环：
  - $D_1=\{z;0<|z-2|<1\}$ ；
  - $D_2=\{z;1<|z-2|<+\infty\}$

① 求 D_1 内展开的罗朗级数，此时 $0<|z-2|<1$ ；

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z-2-1}=\frac{1}{1-(z-2)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(z-2)^n \text{ ，故 } f(z)=\sum(z-2)^{n-1} \text{ ；}$$

② 求 D_2 内展开的罗朗级数，此时 $1<|z-2|<+\infty$ ；

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z-2-1}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z-2}}=\frac{1}{z-2}\cdot\sum(\frac{1}{z-2})^n=\sum(\frac{1}{z-2})^{n+1}$$

故 $f(z)=(\dfrac{1}{z-2})^{n+2}$ ；

注意：**要保证等比级数收敛**！！！

例 5：将函数 $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$ 在 $z=1$ 处展开为罗朗级数.

圆环 $D=\{z;0<|z-1|<+\infty\}$

设 $\xi=\dfrac{1}{z-1}$ ，则 $f(z)=e^{\xi}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^n\cdot n!}$