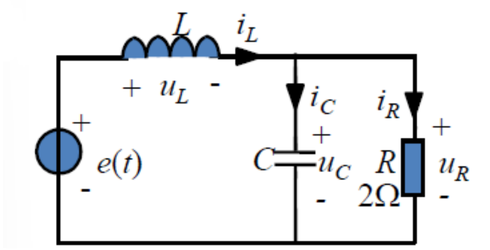
三. 状态方程

（一）状态方程中的基本概念

- 状态变量x：分析动态过程中所选取的独立变量称为**状态变量**；
  a. 状态变量的意义：确定①一组**最少数量**的状态变量$\mathbf{X}=[\,x_1,x_2,\ldots x_n\,]^T$ ② $t\geq t_0$后的输入 即可确认t_0及之后任意时刻额定响应；
  b. 状态变量的选取：**通常选择u_C和i_L**（不唯一，但是习惯这样取）
  c. 状态变量和储能元件的联系：状态变量的个数等于**独立的储能元件**个数
- 状态方程：求解状态变量的方程为**状态方程**；
  a. 状态方程的一般形式：$[\,\dot{x}\,]=[\,A\,][\,x\,]+[\,B\,][\,u\,]$
- 输出方程：用状态变量和输入量表示输出量的方程为**输出方程**；
  a. 输出方程的一般形式：$[\,y\,]=[\,C\,][\,x\,]+[\,D\,][\,u\,]$

> 例1. 如图所示的电路中，已知$u_C(0)=3V,i_L(0)=0,e(t)=20\sin(\omega t+30^\circ)$，列写输入方程和输出方程.
>
> 
>
>
> - 按照状态变量选取的原则，选择u_C,i_L为状态变量
> - 在列写状态方程时，**对于电容列写KCL，对于电感列写KVL，并将所有变量都用选取的状态变量表示**，即：
>
> $$i_C=C\cdot\frac{du_C}{dt}=i_L-\frac{u_C}{R}$$
> $$u_L=L\cdot\frac{di_L}{dt}=e(t)-u_C$$
>
> - 之后整理为一般形式：
>
> $$\begin{bmatrix}\frac{du_C}{dt}\\ \frac{di_L}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{CR} & \frac{1}{C}\\ -\frac{1}{L} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}e(t)$$
>
> - 输出方程：

> $$\begin{bmatrix} u_L \\ i_C \\ u_R \\ i_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{R} & 1 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

（二）状态方程的列写

1. 直观法

- 选择电容电压和电感电流为状态变量，用状态变量表示其他位置量，列写状态方程；

2. 叠加法

- 叠加法求状态方程的一般步骤：
  a. 将电源、电容、电感均抽离到网络外
  b. **电容用电压源代替，电感用电流源代替**
  c. 用叠加定理求待求量

3. 含有奇异电路的处理

- 奇异电路：含有纯电容和独立电压源组成的回路or纯电感和独立电流源的割集的电路称为**奇异电路**
- 奇异电路的一般处理方法：**由关联的两个变量只取一个座位状态变量，另一个通过两者关联的方程代入**；

（三）状态方程的求解

1. 拉氏变换法（解析解）

$$
\begin{gathered}
\text{已知状态方程 } \dot{X} = AX + Bu \text{ 和初始值} X(0^-) \\
\to \mathscr{L}[\dot{X}] = \mathscr{L}[AX + Bu] \\
\to sX(s) - X(0^-) = AX(s) + BU(s) \\
\to (\mathrm{diag}[s] - A)X(s) = BU(s) + X(0^-) \\
\to X(s) = (\mathrm{diag}[s] - A)^{-1} \cdot [BU(s) + X(0^-)]
\end{gathered}
$$