Ep7.拉普拉斯变换

7.1 拉普拉斯变换的概念

7.1.1 拉普拉斯变换的定义

- 拉普拉斯变换
  i. 对于复值函数，若积分 $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ 在复平面上的某个区域 D 内收敛于 $F(s)$ ，
  则称 $F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ 为函数 $f(t)$ 的**拉普拉斯变换**，简称 LT
  ii. 记法： $L[f(t)]=F(s)$
  iii. 其中， $f(t)$ 称为函数 $F(s)$ 的**象原函数**， $F(s)$ 称为函数 $f(t)$ 的**原函数**

- 拉普拉斯逆变换
    i. 称函数 $f(t)$ 为函数 $F(s)$ 的**拉普拉斯逆变换**，简称 ILT
    ii. 记法： $f(t)=L^{-1}[F(s)]$
- 单位阶跃函数
    i. 定义：单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}1,t>0\\0,t\le 0\end{cases}$
    ii. $L[u(t)]=\frac{1}{s}$ （计算过程略）
    iii. 人为规定： $t<0$ 时 $f(t)\equiv 0$ ，故所有的 $f(t)$ 实际上都是 $u(t)\cdot f(t)$ ，将 $u(t)$ 省略

7.1.2 拉普拉斯变换的存在条件

- LT 存在定理——当 $f(t)$ 满足以下条件时，其 LT 存在：
    i. 在 $t\ge 0$ 的任意区间上分段连续
    ii. $\exists M>0,\sigma>0$，使得 $|f(t)|<Me^{\sigma t}$
    - 这条可以理解为 $f(t)$ 的增长速度肯定比某个能找到的指数函数慢
    - 其中 σ 称为函数 $f(t)$ 的**增长指数**
    - 如果函数有界，一定可以找到一个指数函数来满足该条件
- 一个典型的 LT ： $L[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}(n=0,1,2,...)$

7.3 基本初等函数的拉普拉斯变换

$f(t)$	$F(s)$
$C(C\in\mathbb{R})$	$\frac{C}{s}$
e^{kt}	$\frac{1}{s-k}$
$t^n(n\in\mathbb{N}^*)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$sh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$

$ch(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

7.2 拉普拉斯变换的基本性质（☆）

7.2.1 线性性质

- LT 和 ILT 都是线性可拆分的，即：
    i. $L[k_1f(t)+k_2g(t)]=k_1L[f(t)]+k_2L[g(t)]$
    ii. $L^{-1}[k_1f(t)+k_2g(t)]=k_1L^{-1}[f(t)]+k_2L^{-1}[g(t)]$

例 1：设 $f(t)=sin^2t$ ，求 $L[f(t)]$.

解： $f(t)=sin^2t=\frac{1-cos(2t)}{2}$

$$\therefore L[f(t)]=\frac{1}{2}L[1-cos(2t)]=\frac{1}{2}\{L[1]-L[cos(2t)]\}=\frac{1}{2}(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4})$$

分析：可以把函数拆分成**若干函数的和或差**进行分别变换，常数可以直接提出来

例 2：设 $F(s)=\frac{s}{(s+2)(s+4)}$ ，求 $L^{-1}[F(s)]$.

解： $F(s)=\frac{2}{s+4}-\frac{1}{s+2}$

故

$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{2}{s+4}-\frac{1}{s+2}]=2L^{-1}[\frac{1}{s-(-4)}]-L^{-1}[\frac{1}{s-(-2)}]=2e^{-4t}-e^{-2t}$$

分析：重点在于根据象函数的形式反推象原函数的形式，即对于基本函数的拉普拉斯展开，正向反向都要熟练

7.2.2 平移性质（☆）

- 时移性质 ——象原函数的平移
    i. LT 形式： $L[f(t-t_0)]=e^{-t_0s}F(s)$
    ii. ILT 形式： $L^{-1}[e^{-t_0s}F(s)]=f(t-t_0)$
- 频移性质——象函数的平移
    i. LT 形式： $L[e^{s_0t}f(t)]=F(s-s_0)$
    ii. ILT 形式： $L^{-1}[F(s-s_0)]=e^{s_0t}f(t)$
- 平移性质的理解
    i. 当出现平移 or **函数乘上了一个 e 的指数时**，考虑使用平移性质

例 3：设 $f(t)=t^ne^{at}$ ，其中 n 为正整数，求 $L[f(t)]$

解： $f(t)$ 中有指数 $\longrightarrow$ $F(s)$ 经过了平移 $\longrightarrow$ 象函数平移与指数保持一致 $\longrightarrow$ 象函数向右平移 a 个单位，即 s 变为 $s-a$

由基本函数的 LT 可知 $L[t^n]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$

故 $L[f(t)]=\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

- 利用平移性质计算周期函数的拉普拉斯展开（☆）
    i. 结论： $L[f(t)]=\dfrac{F_1(s)}{1-e^{-Ts}}$
    ii. 推导：见课本 $P205$

例 4：设 $f(t)=\begin{cases}A,0<t<\tau\\-A,\tau<t<2\tau\end{cases}$ ，且其周期为 2τ ，求 $L[f(t)]$

解：根据结论，有 $L[f(t)]=\dfrac{F_1(s)}{1-e^{-Ts}}$ ，先求 $F_1(s)$

$$F_1(s)=\int_0^\tau f(t)e^{-st}dt+\int_\tau^{2\tau} f(t)e^{-st}dt=A(\int_0^\tau e^{-st}dt-\int_\tau^{2\tau} e^{-st}dt)$$

$$=\frac{A}{s}(1-2e^{-s\tau}+e^{-2s\tau})=\frac{A}{s}(1-e^{-s\tau})^2$$

故由结论： $L[f(t)]=\dfrac{A(1-e^{-s\tau})^2}{s(1-e^{-2s\tau})}$

7.2.3 微分性质（☆）

- 象原函数的微分性质： $L[f'(t)]=sF(s)-f(0^+)$
- 象函数的微分性质： $F^{(n)}(s)=L[(-t)^nf(t)]$
    i. 对于正负交替的象原函数，可以使用象函数的微分性质
    ii. 对于幂函数乘以已知函数的象原函数，可以采用象函数的微分性质

7.2.4 积分性质（☆）

- 象原函数的积分性质： $L[\int_0^\tau f(t)dt]=\dfrac{F(s)}{s}$
- 象函数的积分性质： $L[\dfrac{f(t)}{t}]=\int_s^\infty F(u)du$
- 一个引理： $\int_0^\infty \dfrac{f(t)}{t}dt=\int_0^\infty F(s)ds$

例 6：求积分 $\int_0^{\infty} \frac{sint}{t} dt$

解：已知 $L[sint] = \frac{1}{s^2+1}$

故 $I = \int_0^{\infty} \frac{1}{s^2+1} ds = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot Res[F(s);i] = \pi i \cdot \frac{1}{2i} = \frac{\pi}{2}$

7.2.5 极限性质

7.2.6 卷积和卷积定理

- 卷积
    i. 定义： $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$
    ii. 记法： $f_1(t) * f_2(t)$
- 卷积定理： $L[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$ ，即 $L^{-1}[F(s)G(s)] = f(t) * g(t)$

7.2.7 定理总结

- 线性性质——不需要特别注意，应该是知道的
- 平移性质（重点！）
    i. 象函数平移对象原函数指数影响一致
    ii. 象原函数平移对象函数指数影响**有一个负号**
    iii. 计算周期函数的 LT
- 微分性质——关键是求 $L[(-t)^n f(t)]$
- 积分性质——利用积分性质求一类广义积分： $\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(s) ds$
- 极限性质——貌似没什么用
- 卷积——求两函数相乘的 ILT

7.3 拉普拉斯逆变换（ILT）

7.3.1 留数求象原函数

- 定理： $f(t) = \sum_{k=1}^{n} Res[F(s)e^{st}; s_k]$

例 7：求 $L^{-1}[\frac{1}{s^2(s+1)}]$

解：<u>法一——利用线性性质</u>

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{1-s}{s^2}+\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s}$$

故 $f(t)=t+e^{-t}-1$

<u>法二——利用留数</u>

$$Res[F(s)e^{st};0]=\ (\frac{e^{st}}{s+1})'|_{s=0}=(\frac{te^{st}(s+1)-e^{st}}{(s+1)^2})|_{s=0}=t-1$$

$$Res[F(s)e^{st};-1]=(\frac{e^{st}}{s^2})|_{s=-1}=e^{-t}$$

故 $f(t)=t-1+e^{-t}$

<u>法三——利用卷积</u>

$$L^{-1}[\frac{1}{s^2}]=t,L^{-1}[\frac{1}{s+1}]=e^{-t}$$

由卷积定理： $f(t)=t\ *\ e^{-t}=\int_0^t\tau e^{\tau-t}d\tau$

$$=e^{-t}\int_0^t\tau e^{\tau}d\tau=e^{-t}\cdot[(\tau-1)e^{\tau}]|_0^t=e^{-t}[(t-1)e^t+1]=t-1+e^{-t}$$

分析：从中可见能分解的话分解是最快的，实在分解不出来就尝试留数，尽量不要用卷积，有点绕还容易算错

7.3.2 展开定理求象原函数

- 若 $\lim\limits_{s\to\infty}F(s)=0$ 且 $F(s)$ 可以被罗朗展开为 $\sum\frac{a_n}{s^{n+1}}$ ，则 $f(t)=\sum\frac{a_n}{n!}t^n$
- 利用展开定理的一般步骤：
    i. 判断象函数是否满足条件
    ii. 将象函数展开为罗朗级数
    iii. 找到 a_n ，代入结论

例 8：求 $L^{-1}[\frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}]$

解： $\lim_{s\to\infty}(\frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}})=0$

易知 $F(s)=\frac{1}{s}\sum\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{1}{s})^n=\sum\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{1}{s})^{n+1}$

故 $a_n=\frac{(-1)^n}{n!}$

代入结论得 $f(t)=\sum\frac{(-1)^n}{(n!)^2}t^n$

7.3.3 求 ILT 的一般方法

- 利用线性性质，分成几项分别求
- 利用留数定理
- 利用卷积
- 若便于罗朗展开，则利用展开定理

7.4 拉普拉斯变换解 ODE

7.4.1 常系数线性 ODE

- 基本原理——方程两边先进行拉普拉斯变换，求解变换之后的方程，再进行拉普拉斯逆变换即可求得解

例 9：解方程 $y''+4y'+3y=e^{-t}$ ，其中 $y(0)=y'(0)=1$

解：先对方程两侧取 LT ：

设 $L[y(t)]=Y(s)$ ，则有 $\begin{cases}L[y''(t)]=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)-s-1\\L[y'(t)]=sY(s)-y(0)=sY(s)-1\end{cases}$

代入得 $Y(s)(s^2+4s+3)-s-5=\frac{1}{s+1}$

解得 $Y(s)=\frac{s^2+6s+6}{(s+1)^2(s+3)}=\frac{7}{4(s+1)}+\frac{1}{2(s+1)^2}-\frac{3}{4(s+3)}$

故 $y(t)=\frac{7}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{3}{4}e^{-3t}$

7.4.2 常系数线性 ODE 方程组

- 基本原理——每个方程两侧都进行拉普拉斯变换，若有 n 个函数代求，则理论上可以求出 n 个象函数，之后对象函数进行拉普拉斯逆变换即可得到象原函数