二. 网络函数

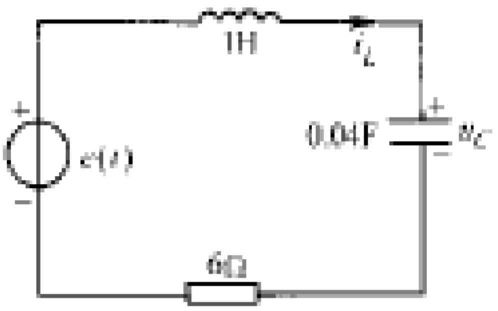
Zero. 部分内容补充

1. 复频域分析的一种方法

- 在遇到形如$f(t)\cdot\sin t$或$f(t)\cdot\cos t$的函数时，可以利用欧拉公式：

$$\boxed{\begin{cases}\cos\omega t=\mathrm{Re}[e^{j\omega t}]\\\sin\omega t=\mathrm{Im}[e^{j\omega t}]\end{cases}}$$

- 若电路中的电容or电感初值不为0，**如果要计算含$\sin\omega t$的项则要注意在运算电路中需要给这些等效电源加一个j**，因为最后取的有效部分是虚部，而这些等效电源是要被取的，不加j会导致在最后的结果中这些等效电源被忽略

> 例1：在下图所示的电路中，已知$u_C(0^-)=1V,i_L(0^-)=5A,e(t)=12\sin 5t\cdot 1(t)V$，用运算法求$i_L(t)$的值为？
>
> 
>
>
> - 如果直接采用运算电路计算，由于$\sin 5t$的LT为$\dfrac{5}{s^2+25}$，代入计算会非常麻烦
> - 因此，改变电源为$e_0(t)=12e^{5jt}$，待求$i_L(t)=\mathrm{Im}(i_{L0}(t))$
> - 运算电路略，根据KVL有：
>
> $$\frac{12}{s-5j}=i_{L0}(t)\cdot(sL+\frac{1}{sC}+R)-jL\cdot i_{L0}(0^-)+j\cdot\frac{u_C(0^-)}{s}$$
>
> $$i_{L0}=\frac{\frac{12}{s-5j}+jL\cdot i_{L0}(0^-)-j\cdot\frac{u_C(0^-)}{s}}{sL+\frac{1}{sC}+R}=\ldots$$
>
> - 之后计算略，计算完后取虚部即可；**要注意这边电感和电容的等效电源部分有一个j!**

2. 回顾稳态暂态解和零状态零输入响应

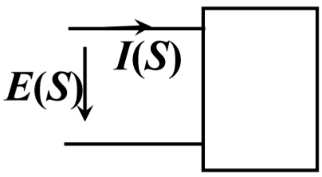
- 方程通解=暂态解=零输入
  a. 方程通解：常微分方程右侧为0，和电源无关的量
  b. 暂态解：换路后很短的时间内的变化情况，由电路本身储能决定，和电源无关的量
  c. 零输入：输入为0，即和电源无关
- 方程特解=稳态解=零状态
  a. 方程特解：常微分方程右侧不为0，和电源有关的量
  b. 稳态解：电路后期的情况，和电源有关
  c. 零状态：电路中储能为0，都由电源产生
- 三要素法：$f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$
  a. 和电源有关的量（零状态）：$f(\infty), f(\infty)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$
  b. 和电源无关的量（零输入）：$f(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}$

（一）网络函数的基本概念

1. 网络函数的基本概念

- 网络函数：输出量与输入量的拉氏变换象函数之比称为网络函数
- 网络函数的分类
  a. 输入输出量在同一端（一端口网络）：驱动点阻抗/导纳
  b. 输入量在一端，输出量在另一端（二端口网络）：转移阻抗/导纳/电压比/电流比

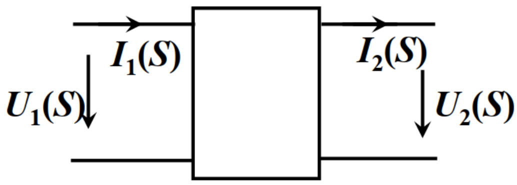
1.驱动点函数



$$H(S)=\frac{E(S)}{I(S)}\quad \text{驱动点阻抗}$$

$$H(S)=\frac{I(S)}{E(S)}\quad \text{驱动点导纳}$$

2.转移函数(传递函数)



$$H(S)=\frac{I_2(S)}{U_1(S)}\quad \text{转移导纳}$$

$$H(S)=\frac{U_2(S)}{I_1(S)}\quad \text{转移阻抗}$$

$$H(S)=\frac{U_2(S)}{U_1(S)}\quad \text{转移电压比}$$

$$H(S)=\frac{I_2(S)}{I_1(S)}\quad \text{转移电流比}$$

- 网络函数的基本性质
  a. 网络函数等于冲激响应（零状态响应）的象函数
  b. 网络函数反映了输入和输出的关系，求出网络函数就可以知道任意激励产生的响应象函数，即$R(S)=H(S)\cdot E(S)$
     i. 要注意，网络函数反映的只是零状态响应和激励之间的关系；如果涉及到零输入响应则需要单独考虑！
  c. 网络函数的原函数反映了电路的暂态变化形式

2. 利用网络函数解决双口网络问题

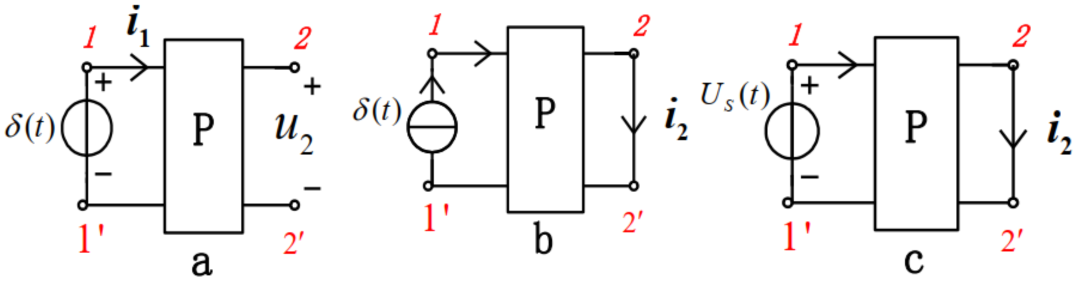
> 例2. （典型例题）对于一个无源无初始状态二端口网络，输入信号$1(t)$时响应的开路电压为$U_0(t)=(1-e^{-100t})1(t)V$，输入信号$\delta(t)$时响应的短路电流为$5e^{-50t}A$，若在另一端连接一个$R=30\Omega$的电阻，激励电压$U_s(t)=5e^{-40t}V$时求响应电流.
>
> - 由于二端口网络是无源无初始状态的，所以不需要考虑零输入响应
> - 目的是求出从连接电阻两端看进去的入端阻抗，需要两个参数：这里可以是开路电压+短路电流
> - 根据第一个条件可以求出转移电压比从而求出开路电压：
>
> $$H_1(s)=(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+100})/(\frac{1}{s})=1-\frac{s}{s+100}$$
> $$U_r(s)=H_1(s)\cdot\frac{5}{s+40}=\frac{500}{(s+100)(s+40)}$$
>
> - 类似的可以求出转移导纳从而求出短路电流：
>
> $$H_2(s)=\frac{5}{s+50}$$
> $$I_r(s)=H_2(s)\cdot\frac{5}{s+40}=\frac{25}{(s+40)(s+50)}$$

- 因此可以得到戴维南等效电路的参数：

$$U_d = \frac{500}{(s+100)(s+40)}$$
$$R_d = \frac{20(s+50)}{s+100}$$

- 后略，关键在于理解网络函数反映输入和输出的一一对应关系！

例3.（典型例题的特殊情况）如图所示的电路，P为无独立源和受控源的网络，已知$i_1(t)=e^{-t}\cdot 1(t), u_2(t)=\delta(t)-e^{-t}\cdot 1(t), i_2(t)=\delta(t)-e^{-t}\cdot 1(t)$。若$u_s(t)=5e^{-5t}\cdot 1(t)$，试求$i_3(t)$.（图片标注有误，即求c中右侧的电流！）



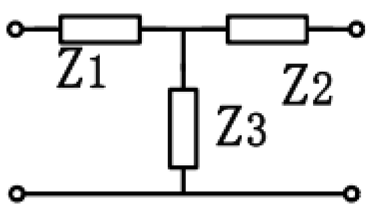
- 本题的难点在于想要进行戴维南等效，就要求出端口看进去的开路电压and短路电流；但是在求短路电流时，需要用到量纲为转移导纳的网络函数，这无法直接通过已有的ab两个条件进行计算；
- 因此，可以用特勒根定理（$\sum U\hat{I}=\sum \hat{U}I$）来计算b中右端电压，这样通过b图就可以得到量纲为导纳的网络函数；
- 取从上往下为正参考方向，则根据特勒根定理：

$$1\cdot(-1)+(1-\frac{1}{s+1})^2=\frac{1}{s+1}\cdot U_{b11'}+0\cdot U_{b22'}$$
$$U_{b11'}=-(s+1)+\frac{s^2}{s+1}=-\frac{2s+1}{s+1}$$

- 由此可以得到传递导纳，据此就可以得到$I_2(s)$:

$$I_2(s):U_{b11'}(s)=I_3(s):U_s(t)$$
$$I_3(s)=\ ...$$

- 另解：此题也可以通过双口网络的等效电阻模型（π网络或者T网络）来计算，将等效模型代入后分别求出几个位置的阻抗，即可知道整个电路的内部结构，后面就是简单的解电路！



> 例4. 已知无源网络的驱动点函数$H(s)=\frac{I(s)}{U(s)}=\frac{1}{s+2}$，现在在非零状态下外加电源$U(t)=10\cdot 1(t)$，电流响应的初始值$i(0^+)=2A$，求$i(t)$.
>
> - 本题的问题在于初始状态为非零状态，要求的响应可以分为零状态响应和零输入响应
> - 零状态响应由电源引起，直接利用网络函数计算：
>
> $$H(s)=\frac{1}{s+2}=\frac{I'(s)}{\frac{10}{s}}$$
> $$I'(s)=\frac{10}{s(s+2)}$$
> $$i'(t)=5(1-e^{-2t})$$
>
> - 零输入响应可以用网络函数的原函数来反映：
>
> $$i''(t)=ke^{-2t}$$
> $$\text{由此得到全响应的形式为 } i(t)=i'(t)+i''(t)=5(1-e^{-2t})+ke^{-2t}$$
> $$i(0^+)=k=2$$
> $$\text{综上: } i(t)=5-3e^{-2t}$$

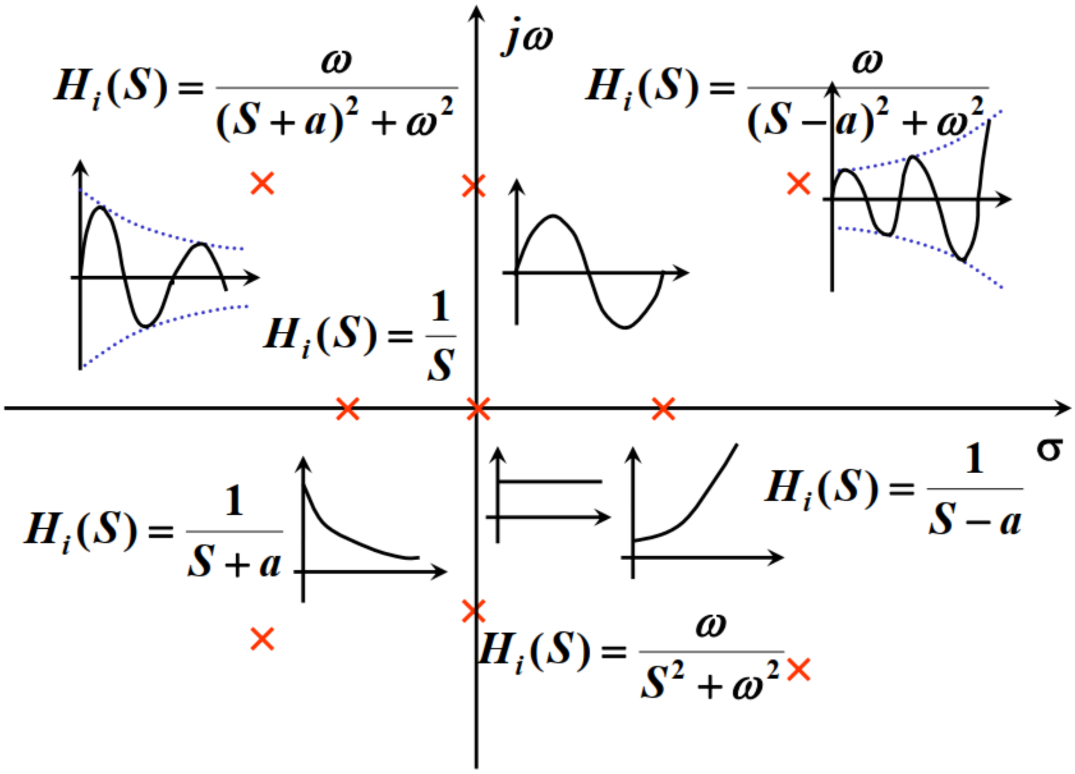
(二)网络函数的零点和极点分析

1. 零点和极点的概念

- 对于线性系统的网络函数（如下），称z_k为**零点**，p_k为**极点**，$H_0=b_m/a_n$为**增益系数**

$$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}=\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_0}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0}=H_0\cdot\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

- 极点分析
  a. 极点是系统固有的特征值，体现了网络的自然频率
  b. 每一个极点代表着一个响应分量的形式，极点在复平面上的分布决定其响应的形态
  c. **左半边平面极点代表衰减过渡过程，右半边平面极点代表增长过渡过程，虚轴分量表示正弦响应**



（三）网络函数与稳态响应

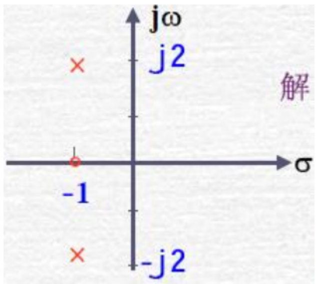
1. 网络函数与稳态响应的关系

- 单位阶跃响应的稳态响应：$r(\infty)=H(0)$

> **推导过程（要掌握）：**
>
> $$H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}\Rightarrow R(s)=\frac{1}{s}\cdot H(s)$$
> $$\text{由终值定理：}r(\infty)=\lim_{s\to 0}sR(s)=H(0)$$

- 单位正弦激励$u(t)=\sqrt{2}\sin(\omega t+\theta)$的稳态响应：
  $r(t)=\sqrt{2}U|H(j\omega)|\sin(\omega t+\theta+\angle H(j\omega))$

> 例5. 已知零极点图如下图所示，且$h(0^+)=2$，求$H(s)$.



- 根据零极点图，可以写出网络函数的基本形式：

$$H(s)=K\cdot\frac{s+1}{(s+1-2j)(s+1+2j)}$$

- 之后，利用终值定理：

$$h(0^+)=\lim_{s\to\infty}sH(s)=K=2$$
$$H(s)=\ ...$$

2.网络函数零极点和频率特性关系（了解）

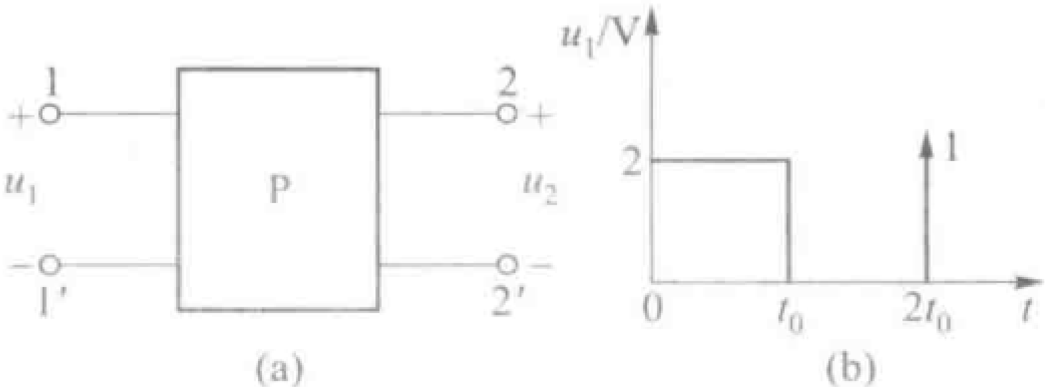
3.一道综合性例题（课后习题（8.20）

例5.图中的P为一无独立源但是有非零初始条件储能元件的线性二端口网络，已知：$u_1(t)=\delta(t)\mathrm{V}$时$u_2(t)=2e^{-t}\mathrm{V}$，$u_1(t)=1(t)\mathrm{V}$时$u_2(t)=(3+4e^{-t})1(t)\mathrm{V}$，求：

（1）u_2的零输入响应；

（2）电压传递函数$H(s)=\dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}$以及$u_2$的冲激响应和单位阶跃响应；

（3）当$u_1(t)$为图b所示的波形时求$u_2(t)$的全响应；



题图 8. 20

（1）在本题中，不同激励下都会有对应的零输入响应和零状态响应，列方程的要点在于：

- 不同激励下零输入响应（和电源无关的响应）是相同的，由网络内的初始条件决定；

- 不同激励下零状态响应（和电源有关的响应）与激励的比值是相同的，是网络函数；
- 由此可以列写方程：

$$\frac{2}{s+1} = H(s)\cdot 1 + U_P(s)$$
$$\frac{3}{s} + \frac{4}{s+1} = H(s)\cdot\frac{1}{s} + U_P(s)$$

- 联立可以解出：

$$H(s) = \frac{-4}{s-1} + \frac{-1}{s+1}$$
$$U_P(s) = \frac{3}{s+1} + \frac{4}{s-1}$$

- 由此可以得到零输入响应的原函数：

$$u_p(t) = (3e^{-t} + 4e^{t})1(t)\mathrm{V}$$

（2）网络函数在（1）中已经得到：$H(s) = \frac{-4}{s-1} + \frac{-1}{s+1}$

- 这里要明确：“冲激响应”和“阶跃响应”这种说法指的都是零状态响应，也就是说不用考虑初始状态；如果需要考虑，题目会指出是“全响应”（如题3）；因此这里直接代入网络函数求解即可：

$$\text{冲激响应：}U'(s) = H(s), u'(t) = （-4e^{t} - e^{-t}）1(t)\mathrm{V}$$
$$\text{单位阶跃响应：}U''(s) = H(s)\cdot\frac{1}{s} = \frac{-4}{s-1} + \frac{3}{s} + \frac{1}{s+1}$$
$$u''(t) = (-4e^{t} + 3 + e^{-t})1(t)\mathrm{V}$$

（3）全响应包括零输入响应和零状态响应；其中零输入响应与激励无关，在（1）中已经求出；零状态响应用网络函数求解即可：

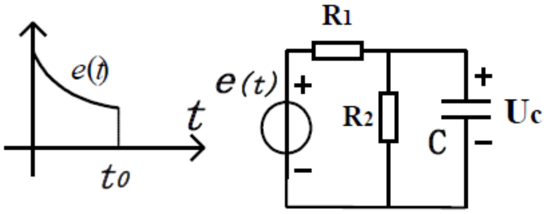
$$u_1(t) = 2[1(t) - 1(t-t_0)] + \delta(t-2t_0)$$
$$U_1(s) = \frac{2}{s}(1 - e^{-st_0}) + e^{-2st_0}$$
$$\text{零输入响应：}U_2'(s) = H(s)\cdot U_1(s) = (\frac{-8}{s-1} + \frac{6}{s} + \frac{2}{s+1})(1 - e^{-st_0}) - (\frac{4}{s-1} + \frac{1}{s+1})e^{-2st_0}$$
$$\text{零状态响应：}U_2''(s) = \frac{3}{s+1} + \frac{4}{s-1}$$
$$\Rightarrow u_2(t) = (-4e^{t} + 6 + 5e^{-t})1(t) - [-8e^{t-t_0} + 6 + 2e^{-(t-t_0)}]1(t-t_0)$$
$$-[4e^{t-2t_0} + e^{-(t-2t_0)}]\cdot 1(t-2t_0)$$

（四）卷积法

- 卷积的定义：$e(t) * h(t) = \int_0^t e(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t e(t-\tau)h(\tau)d\tau$

- 卷积定理：时域函数的卷积等于频域函数相乘

例6. 如图所示的电路，R1=3Ω，R2=6Ω，C=0.5F，$e(t)=\begin{cases}3e^{-2t},0\le t\le 2\\0,t>2\end{cases}$，求$u_C(t)$的零状态响应



- 先通过运算电路得出网络函数为$h(t)=\dfrac{2}{3}e^{-t}\cdot 1(t)$（过程略）
- 则零状态响应为$U(s)=H(s)\cdot E(s)=L[h(t)*e(t)]$，即$u_C(t)=h(t)*e(t)$
- 关于卷积的运算方法可以参考信号分析与处理中的部分内容，这里不作详细展开，本题计算如下：

$$0<t<2\text{时},u_C(t)=\int_0^t 3e^{-2\tau}\cdot\frac{2}{3}e^{-(t-\tau)}d\tau$$
$$t>2\text{时},u_C(t)=\int_0^2 3e^{-2\tau}\cdot\frac{2}{3}e^{-(t-\tau)}d\tau$$

- 可以参考如下示意图：