# Ep5.留数

5.1 孤立奇点及其分类

5.1.1 孤立奇点的分类——可去、本性和 m 级

5.1.2 孤立奇点的性质

5.1.3 判断孤立奇点的性态（归纳版）

2.留数和留数定理

5.2.1 留数的定义

5.2.2 留数定理

5.2.3 留数的计算（☆☆☆）（重点！！！）

5.2.4 总结——留数的常用计算方法

5.2.5* 补充：无穷远处的留数

3.留数定理的应用——计算特殊类型的积分

5.3.1 $\int_0^{2\pi}R(cos\theta,sin\theta)d\theta$类型积分

5.3.2 $\int^{+\infty}_{-\infty}f(x)dx$类型积分

5.3.3$\int^{+\infty}_{-\infty}e^{i\alpha x}f(x)dx$类型积分（$\alpha>0$）

## 5.1 孤立奇点及其分类

### 5.1.1 孤立奇点的分类——可去、本性和 m 级

- 在 Ep4 的 3.1 中我们已经定义了孤立奇点，接下来对孤立奇点进行分类；

  如果 $z_0$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，则在函数的去心邻域 $\{z|0<|z-z_0|<\delta\}$ 内可以将 $f(z)$

展开为罗朗级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}C_n(z-z_0)^n+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$ ，即拆分为正幂部分和负幂部分，此时针对负幂部分有以下三种情况：

i. 若负幂的系数 $C_n$ 都为 0，此时称 $z_0$ 为**可去奇点**；

ii. 若负幂的系数 $C_n$ 有无穷多个不为 0，此时称 $z_0$ 为**本性奇点**；

iii. 若若负幂的系数 $C_n$ 有有限个不为 0（假设有 $m$ 个），此时必然有 $C_{-1}\neq0,C_{-2}\neq0...C_{-m}\neq0$ ，且 $C_{-m-k}=0(k=1,2,...)$ （**即在 $C_{-m}$ 后面的项都为 0**），此时称 $z_0$ 为 **$m$ 级极点**；特殊的，若 $m=1$ 则称为**单极点**；

iv. 可以这么记忆：大多数时候我们主要考虑的是负幂部分，所以如果负幂部分没了（即所有负幂的 $C_n$ 都是 0）那么这个奇点就是“可以被去掉不考虑的”，也就是可去奇点；有无穷多个不为 0，也就是说这个奇点是非常“好”的，所以被称为本性奇点；

---

### 5.1.2 孤立奇点的性质

- 可去奇点的性质（以下性质和“ $z_0$ 为可去奇点”互为等价关系，不是重点）
    i. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 存在且不为无穷；
    ii. $f(z)$ 在 $z_0$ 的一个邻域内有界；
    iii. $\lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)f(z) = 0$ ；
- 本性奇点的性质（不是重点）
    i. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 不存在且不为无穷；
- m 级极点的性质（☆）
    i. 充要条件（**证明题经常用**）： $f(z)$ 可以表示为形如 $\dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$ 的形式，其中 $\psi(z)$ 在 $z_0$ 点解析且 $\psi(z_0) \neq 0$ ；
        1. 理解：可以把“解析”理解为对奇点的级数没有贡献（而且这里规定了 $\psi(z_0) \neq 0$ ），而对于 $h(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^m}$ ，很明显 $z_0$ 是它的一个 m 级极点；
        2. 推论： **$z_0$ 是函数 $f(z)$ 的 m 级极点的充要条件是 $z_0$ 是函数 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点**；

例 1：判断下列函数各奇点的性态： $\dfrac{f(z)}{(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}(z-z_3)^{m_3}\ldots(z-z_n)^{m_n}}$ ，且 $f(z_i) \neq 0, z_i$ 互相不相同.

解：对于单个 $z_i$ 进行考虑，是分母的 $m_i$ 次零点，分子对其无贡献，所以 $z_i$ 是该函数的 $m_i$ 级极点；

例 2：设 $z_0$ 是 $f(z)$ 的 $k$ 级极点，证明：

① $z_0$ 是 $f'(z)$ 的 $(k+1)$ 级极点；

② $z_0$ 是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的单极点；

证明：① 条件的充要条件为 **$f(z)$ 可以表示为 $\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^k}$** (其中 $\psi(z)$ 在 $z_0$ 解析且 $\psi(z_0)\neq 0$ )；

故
$$f'(z)=-\frac{k}{(z-z_0)^{k+1}}\psi(z)+\frac{1}{(z-z_0)^k}\psi'(z)=\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}[-k\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)]$$

即 $f'(z)=\frac{\psi_1(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$

其中 $\psi_1(z)$ 满足解析且在 $z_0$ 处不为 0，所以原命题得证！

② 由 ① 得：

故 $\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{k}{z-z_0}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ ，其中 $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ 解析，前面一个式子中容易看出其满足对应条件，所以原命题得证；

**多次利用充要条件：“ $f(z)$ 可以表示为形如 $\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$ 的形式，其中 $\psi(z)$ 在 $z_0$ 点解析且 $\psi(z_0)\neq 0$ ”！**

- 比值型（**非常重要！！！**）
  - i. 对于形如 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的函数，如果分子和分母在 $z_0$ 处都是解析的，且 $z_0$ 分别是 $f(z)$ 的 $m$ 级零点， $g(z)$ 的 $n$ 级零点，则：
    1. 若 $m\geq n$ ，则 $z_0$ 为可去奇点；
    2. **若 $m<n$ ，则 $z_0$ 为 $(n-m)$ 级奇点**；
  - ii. 利用该方法，可以将判断极点的阶数归纳为以下流程：
    1. 找出各奇点；
    2. 判断各奇点分别是分子和分母的几级零点（利用求导法）；
    3. 根据结论判断奇点类型；
    4. 若无通过分母为 0 限制的奇点，则回归定义：**用罗朗级数判断**！

### 5.1.3 判断孤立奇点的性态（归纳版）

- 法一——回归定义，罗朗展开

  i. 有些形式的函数展开较为简单，此时**直接展开**看负幂部分有多少项即可；如 $zcos\frac{1}{z}$ （本性奇点）、 $\frac{e^z-1}{z}$ （可去奇点）、 $\frac{sinz}{z^2}$ （单极点）...

例 1： $z=0$ 为函数 $f(z)=\frac{z^5-sin(z^5)}{z^{20}}$ 的几级极点.

解： $f(z)=\frac{z^5-sin(z^5)}{z^{20}}=\frac{z^5-\sum\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z^5)^n}{z^{20}}=\frac{\frac{z^{15}}{6}-\frac{z^{25}}{120}+\ldots}{z^{20}}$

其负幂部分的最高次数为 5 次，所以为五级极点；

- 法二——分式/多项式型，先判断零点阶数，再判断极点阶数，**零点→极点**；

  i. 先通过一定的限制找出所有的奇点，通常是**分母为 0**；

  ii. 通过逐次求导分别判断奇点是分子和分母的几阶零点；

  iii. 之后通过 5.1.2 中的结论判断极点阶数；

  - 如： $\frac{z-e^z+1}{z(e^z-1)}$ ， $z_1=0$ 为可去极点（分子分母都为二级零点）， $z_k=2k\pi i$ 为单极点（分子不为零点，分母为一级零点）；

例 2： $z=0$ 为函数 $f(z)=\frac{z}{sinz(1-cosz)}$ 的几级极点.

解：易得 $z=0$ 为分子的一级零点；

设分母为 $g(z)=sinz(1-cosz)=sinz-\frac{1}{2}sin2z$

$g'(z_0)=(cosz-cos2z)|_{z=0}=0$ ；

$g''(z_0)=(-sinz+2sin2z)|_{z=0}=0$ ；

$g'''(z_0)=(-cosz+4cos2z)|_{z=0}=3$ ，故为三级零点；

综上： $z=0$ 为原函数的二级极点.

# 2.留数和留数定理

### 5.2.1 留数的定义

- 设 $z_0$ 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点，则 $f(z)$ 在一个去心邻域内罗朗展开的 $\dfrac{1}{z-z_0}$ **的系数** $C_{-1}$ 定义为 $f(z)$ 在 $z_0$ 处的留数，记为 $Res[f;z_0]$ ；
- 根据罗朗定理的系数公式得到 $Res[f;z_0]=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} f(\xi)d\xi$ （不重要）；

---

### 5.2.2 留数定理

- 设 $C$ 是单连通区域 $D$ （没有洞）内的一条简单闭曲线，如果 $f(z)$ 在 $C$ 上解析，且在 $C$ 内除了有限个孤立奇点 $z_i$ 之外解析，则有：$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum Res[f;z_i]$ ；
- 理解：留数定理将封闭曲线 $C$ 上的积分转化为求区域内各奇点处留数的计算；因此重点在于如何计算留数！

---

### 5.2.3 留数的计算（☆☆☆）（重点！！！）

- 通用：根据定义！！！**算任何留数前先看一下方不方便展开！！！**
  - 根据定义，容易知道可去奇点的留数为 0，因为是“可去”的，负幂部分系数都为 0；
  - 根据定义，可以知道一个**偶函数在原点处的留数肯定为 0**，因为其罗朗级数不包含 $\dfrac{1}{z}$ 这一项；

例 3：求 $\oint_{|z|=4} \frac{zdz}{sinz(1-cosz)}$ .

解：先判断各个奇点： $z_1=0$ ，为二级极点（在例 2 中已经判断过了）；

$z_2=\pi, z_3=-\pi$ ，为单极点（证明略）；

之后分别计算留数：

- $Res[f(z);0]=0$ ，**因为偶函数展开不含奇次幂！**
- $Res[f(z);\pi]=(\frac{z}{cosz-cos2z})|_{z=\pi}=-\frac{\pi}{2}$ ；
- 同理 $Res[f(z);-\pi]=(\frac{z}{cosz-cos2z})|_{z=-\pi}=\frac{\pi}{2}$

综上： $I=0-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=0;$

- 极点处的留数计算：

（以下均设 $z_0$ 是函数 $f(z)$ 的 $m$ 级极点）

i. 通用： $Res[f(z);z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}[(z-z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}}$ ；

**ii. 单极点**

1. 直接用通用计算： $Res[f(z);z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ ；
   - 通常为**奇点为 0** 时使用（极限比较好算），或者**分母含有 $z-z_0$ 时**使用（可以消去一部分分母）
2. 若 $f(z)$ 是分式形式，即 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ ，且 $z_0$ 是分母的 $k+1$ 级零点，是分子的 $k$ 级零点，则可以得到 $z_0$ 是单极点，此时有 $Res[f(z);z_0]$ = $(k+1)\frac{P^{(k)}(z_0)}{Q^{(k+1)}(z_0)}$
   - 记忆方法：分母是 $k+1$ 次所以求 $k+1$ 次导，分子同理，可以记忆成求导可以把 $n$ 级给“还原”回去，**但是不要忘记前面要提出来一个 $k+1$** ！
   - 特殊的，若 $k=0$ （即不是分子的零点，是分母的一级零点），**则 $Res[f(z);z_0]=\frac{P(z)}{Q'(z)}$** ；**——最常用！**

**iii. 二级极点**

1. 直接用通用计算： $Res[f(z);z_0]$ = $\lim_{z\to z_0}\frac{d[(z-z_0)^2 f(z)]}{dz}$ ；

2. 若 $f(z)$ 是分式形式，即 $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ ，且 $z_0$ 不是分子的零点，是分母的二级零点，则有 $Res[f(z);z_0]=2\frac{g'}{h''}-\frac{2}{3}\frac{gh'''}{(h'')^2}$ ；
   - 特殊的，若分母 $h(z)=(z-z_0)^2$ ，则 $Res[f(z);z_0]=g'(z_0)$ ——**最常用！**

**iv. k 级极点**

- 若 $f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^k}$ ，则 $Res[f(z);z_0]=\frac{\psi^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}$ ；

---

### 5.2.4 总结——留数的常用计算方法

- 首先判断**能不能罗朗展开**！
- 不便于展开，则判断极点的级数；---有些其实可以用柯西积分公式来类比

  i. 单极点：
  1. 极点为 0 或者分母能消去—— $Res[f(z);z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ ；
  2. 分式形式—— $Res[f(z);z_0]$ = $(k+1)\frac{P^{(k)}(z)}{Q^{(k+1)}}$ ；
  3. 分式形式下的一种特殊情况—— $Res[f(z);z_0]=\frac{P(z)}{Q'(z)}$ （分子不是零点，分母一级零点）；

  ii. 二级极点：
  1. 分式形式—— $Res[f(z);z_0]=2\frac{g'}{h''}-\frac{gh'''}{(h'')^2}$ ；
  2. 分式形式下的一种特殊情况—— $Res[f(z);z_0]=g'(z_0)$ （分母是二次幂）；

  iii. 三级及以上极点：
  1. 通用方法： $Res[f(z);z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}[(z-z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}}$ ；
  2. 分式形式下的一种特殊情况—— $Res[f(z);z_0]=\frac{\psi^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}$ ；（分母是 k 次幂）；

  iv. 如果有很多很多极点：考虑下面的无穷远处的留数；

---

#### 5.2.5* 补充：无穷远处的留数

- 定义： $Res[f(z);\infty]=-C_{-1}$ ，即为其他所有留数的和的相反数；
- 另一种计算方法： $Res[f(z);\infty]=-Res[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2};0]$ ；
- 另一种表述方法（主要是这个！）： $\sum_{k=1}^{n}Res[f(z);z_k]=Res[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2};0]$ ；
- 另两种计算方法：**在 $\infty$ 的邻域内**展开为罗朗级数，此时直接找 $C_{-1}$ 即可，不用加负号；
- 如果函数有很多个极点，一一计算其留数非常繁琐，此时直接计算其无穷远处的留数即可；

例 4：求 $\oint_{|z|=3}\frac{z^{15}dz}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ .

原积分有很多的极点，所以考虑用无穷远点处的级数；

定义 $g(z)=\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})=\frac{1}{(1+z^2)^2(1+2z^4)^3z}$ ；

故 $I=2\pi i\cdot Res[g(z);0]=2\pi i\lim\limits_{z\to0}\frac{1}{(1+z^2)^2(1+2z^4)^3}=2\pi i$ .

---

## 3.留数定理的应用——计算特殊类型的积分

#### 5.3.1 $\int_0^{2\pi}R(cos\theta,sin\theta)d\theta$ 类型积分

- 定理： $\int_0^{2\pi}R(cos\theta,sin\theta)d\theta$ = $\oint_{|z|=1}f(z)dz$ ，其中 $f(z)=\frac{1}{iz}R(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2zi})$ ；
- 注意事项
  i. 即代入 $\begin{cases}cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\\ sin\theta=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\end{cases}$
  ii. 不要漏掉 $\frac{1}{iz}$ ！
  iii. 积分区间可以用 $[a,a+2\pi]$ 来代替；
  iv. 只能**用于积分长度为 $2\pi$ 的积分**！

例 5：求 $I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+a^2-2acos\theta}d\theta$ ，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$ .

解：利用定理得 $I=\oint_{C_1}\frac{1}{iz}\cdot\frac{1}{1+a^2-2a\cdot\frac{z^2+2}{2z}}dz=i\oint_{C_1}\frac{1}{(az-1)(z-a)}dz$ （化简过程略）

① 若 $a>1$ ，则只有奇点 $z=\frac{1}{a}$ 在单位圆内部

故 $I=2\pi i\cdot Res[g(z);\frac{1}{a}]=\frac{2\pi}{a^2-1}$

② 若 $a<1$ ，同理 $I=\frac{2\pi}{1-a^2}$

### 5.3.2 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 类型积分

- 在该类积分的计算中，对于 $f(x)$ 实际上有限制（详见书本），但是由于在实际应试过程中该函数通常是一个幂函数的组合，即 $f(x)=\frac{\sum a_ix^i}{\sum b_ix^i}$ ，此时 $f(x)$ 已经满足了限制，因此我们只考虑这种情况；
- $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\sum\{f(z)\text{在上半平面内的留数}\}$

### 5.3.3 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha x}f(x)dx$ 类型积分（ $\alpha>0$ ）

- 同理，只考虑 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 的情况，其中 $[P(z)]=m,[Q(z)]=n$ ，且 $n\geq m+1$ ；
- 满足条件时（基本上是满足的）， $I=2\pi i\sum\{e^{i\alpha z}f(z)\text{在上半平面内的留数}\}$
- $\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}cos\alpha xf(x)=Re(I)\\ \int_{-\infty}^{+\infty}sin\alpha xf(x)=Im(I)\end{cases}$