Ep3.复变函数的积分

1.复变函数的积分及其性质

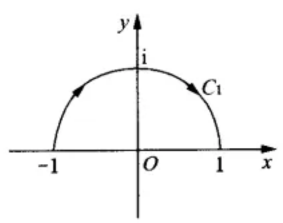
- 定义：即 $S=\int_C f(z)dz=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta z_k$ ；（没什么用）
- 参数法求复变函数的积分：$\int_C f(z)dz=\int_\beta^\alpha f[z(t)]z'(t)dt$ ，关键在于**参数化变为第二类曲线积分**；
  - 圆的路径参数化：$z=re^{i\theta},\theta_1\le\theta\le\theta_2$ ；
  - 若正向曲线的参数表达式为 $z=f(t)(\alpha<t<\beta)$ ，则**反向曲线的参数表达式为** $z=f(\alpha+\beta-t)$ ，例如例题 1；
  - 几个特殊的积分：
    - $\int_C dz=z_2-z_1$
    - $\int_C zdz=\frac{1}{2}(z_2^2-z_1^2)$
    - **若 C 是以 a 为中心且半径为 R 的正向圆周，则** $\oint_C\frac{1}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi i,n=1\\0,n\neq1\end{cases}$
- 复变函数积分的性质（类比一元实函数积分的性质）
  - 线性加减性质；
  - 积分路径可以分多段；
  - 反向曲线积分等于正向曲线积分的负值；
  - 一个不等式：$|\int_C f(z)dz|\le ML$ ，其中 $M=\max\limits_{z\in C}|f(z)|$ ， L 是曲线的长度；

例 1：计算积分 $\int_{C^-} \bar{z}dz$ ，其中 C^- 是上半单位反向圆周.

解：正向曲线的参数方程为： $C: z = e^{it}, 0 \le t \le \pi$

易得 $C^-: z = e^{i(\pi - t)} = -cost + isint, 0 \le t \le \pi$

代入积分得：原式 $= \int_0^{\pi} (-cost - isint)(sint + icost)dt = -i\int_0^{\pi} dt = -\pi i$



(a)

2.柯西积分定理

- 柯西积分定理：设 $f(z)$ 在单连通区域 D 解析， C 是 D 内的一条简单闭曲线，则 $\oint_C f(z)dz = 0$ ；
  - **注意条件！**
    - **$f(z)$ 要在整个区域 D 内解析！**
    - **路径 C 要在区域 D 内！**
  - 理解为：解析函数在解析区域内的积分与路径无关，只与起始位置有关；
- 形变原理：对于多连通区域，其边界上的积分等于沿内部任意边界曲线上的积分和；

例 2：计算积分 $\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}dz$ ， C 为光滑闭曲线， a 不在 C 上， n 为整数；

解：① 若 a 不在曲线 C 所围成的区域内部，则由函数 $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$ 在区域内解析，由柯西积分定理知 $\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = 0.$

② 若 a 在曲线 C 所围成的区域内部，则由形变定理，作一个半径十分小的圆包住奇点，则由经典函数积分可知 $\oint_{C'} \frac{1}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, n = 1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases}$.

关键在于不要遗漏情况 ①！运用柯西积分定理一定要保证区域内/路径上无奇点，否则需要特殊处理！！！

- 原函数定理：设 $f(z)$ 在单连通区域 D 解析，则可以对其求原函数 $F(z)$ ，且其积分值满足牛顿–莱布尼茨公式；

3.柯西积分公式

- 柯西积分公式：设 $f(z)$ 在单连通区域 D 解析， C 是 D 内的一条简单闭曲线， $z_0 \in C$ ，则有 $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$ ，即 $\oint \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$ ；
  - **注意条件！**
    - $f(z)$ **要在整个区域** D **内解析！**
    - **分母对应的点** z_0 **要在区域** D **内！**

例 3：计算积分 $\oint_{|z|=1} \dfrac{z^2+e^z}{z(z-3)}dz.$

解：原式 $= \oint_{|z|=1} \dfrac{1}{3}[(\dfrac{z^2+e^z}{z-3}) - \dfrac{z^2+e^z}{z}]dz = \dfrac{\oint_{|z|=1}\frac{z^2+e^z}{z-3}dz - \oint_{|z|=1}\frac{z^2+e^z}{z}dz}{3}$.

对于第一个积分，**分母对应的点在区域外，可以采用柯西积分定理（环路定理）**，得其值为 0；

对于第二个积分，**分母对应的点在区域内，可以采用柯西积分定理**，得:

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^2+e^z}{z}dz = 2\pi i\cdot(z^2+e^z)|_{z=0} = 2\pi i$$

故原式 $= -\dfrac{2\pi i}{3}$.

注意适用情况！！！

- 高阶柯西积分公式：适用条件同理（即分母对应的点要在区域 D 内），有

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \text{，即 } \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

4.柯西不等式和 Liouville 定理

- 柯西不等式：设函数 $f(z)$ 在闭圆盘 $\{z|0<|z-z_0|\le R\}$ 上解析，则有
  $|f^{(n)}(z_0)| \le \dfrac{n!}{R^n}M$ ；
  - $M = \max|f(z)|$ ；

  特殊的，若 $n=1$ ，则有 $|f'(z)| \le \dfrac{M}{R}$ ；
- Liouville （刘维尔）定理：**有界整函数必为常数**；

例 4：设函数 $f(z)$ 在区域 D 上解析，且函数 $|f(z)|$ 在区域 D 内为常数，证明函数 $f(z)$ 在区域 D 内为常数.

证明： $\because f(z)$ 解析 $\therefore |f'(z)| \leq \dfrac{M}{R}$ ；

而 $f(z)$ 的模为常数，设该常数为 C，则有 $M=C$ ，即 $|f'(z)| \leq \dfrac{C}{R}$ ；

$\because$ $f(z)$ 在整个区域内解析

$\therefore$ 取 $R \to +\infty$ ，则有 $|f'(z)| \leq 0$ ，即 $f'(z)=0$ ；

故 $f(z)$ 在区域 D 内为常数；

例 5：设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是整函数，且 $v(x,y) \leq c$ ，求证 $f(z)$ 是常数.

证明：要想办法**把 v 放到实部而且不等号方向不能反**！

构造 $g(z)=-if(z)=v(x,i)-iu(x,y)$ ， $h(z)=e^{g(z)}=e^{v-ui}$ ；

则易知 $h(z)$ 也为整函数

则有 $|h(z)|=|e^{v-ui}|=e^{v} \leq e^{c}$ ， $h(z)$ 是一个有界整函数，根据刘维尔定理得到 $h(z)$ 是一个常数；

故 $g(z)$ 也是一个常数， $f(z)$ 也为常数；

此类题目的一般思路为将原函数通过一些构造得到一个新函数，用刘维尔定理证明新的函数是常数，那么倒推回去就可以得到原函数也是一个常数！