Ep1.预备知识

1.复数

- 复数的一般形式： $z=x+yi$ ，其中实部 $x=Re\ (z)$ ，虚部 $y=Im\ (z)$ ；
- 两复数相等，当且仅当它们的实部和虚部都相等；
- 定义“**共轭复数**”：复数 $z=x+yi$ 的共轭复数记为 $\overline{z}=x-yi$ ；
- 复数的模 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ ，一些相关的运算：
  - $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$
  - $|z|^2=z\cdot\overline{z},\ \ |z|=|\overline{z}|$
- 当复数 $z\neq 0$ 时，称实轴正向与复数 z 的夹角为复数的**辐角**，记为 $\theta=Arg(z)$ ；
  - **辐角 θ 是多值的**，但是满足 $tan\theta=\dfrac{y}{x}$ ；
  - 对满足条件 $-\pi<\theta_0\leq\pi$ 的辐角 θ_0 ，称其为复数的**辐角主值**，记为 $\theta_0=arg(z)$ ；则得到辐角和辐角主值之间的关系为： $Arg(z)=arg(z)+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,...)$

> 例 1：已知 $z_1=1+\sqrt{3}i,z_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$，求 $arg(z_1-z_2)$?
>
> 解： $z_1-z_2=(1-\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})i$
>
> 故 $arg(z_1-z_2)=arg[(1-\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})i]=arctan\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}+\pi$
>
> 注意：**结尾要加一个 π** ！因为根据图像可知所要求的幅角主值是一个落在第二象限内的角，即位于区间 $(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 内，而 $arctan\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ 是一个负数，实际上它落在了所要求的角的对面，所以要加一个 π ！

- 复数的三角函数表示和指数表达（★）
  - 三角函数表达： $z=r(cos\theta+isin\theta)$ ；
  - 指数表达： $z=re^{i\theta}$ ；

- 转换关系： $r = |z|, \theta = Arg(z)$ ；
- 复数的三角函数表达和指数表达都可以理解为： **r 体现了复数的长度，后面的附带量（ $cos\theta + isin\theta$ 和 $e^{i\theta}$ ）都是一个“角度量”，反映辐角；**

2.复数的运算

- 复数的四则运算：略；
- 复数的乘幂（多用三角形式和指数形式来表达）
  - 三角形式： $[r(cos\theta + isin\theta)]^n = r^n(cosn\theta + isinn\theta)$ ；
    - 特殊的，取 $r = 1$ ，则得到棣莫佛公式： $(cos\theta + isin\theta)^n = cosn\theta + isinn\theta$ ；
  - 指数形式： $(re^{i\theta})^n = r^n e^{i(n\theta)}$ ；
- 复数的方根：记 $w^n = z$ ，则：
  - 三角形式： $w = \sqrt[n]{r}[cos(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}) + isin(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n})]$ ；
  - 指数形式： $w = \sqrt[n]{r}e^{i\cdot\frac{\theta_0+2k\pi}{n}}$ ；
  - 记忆为：**复数的模直接开n次根号，复数的辐角主值变为** $\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}$ ；
  - **证明过程如下：**

设 $w = \rho e^{i\varphi}$，由 $w^n = z$ 得 $(\rho e^{i\varphi})^n = re^{i\theta}$，$\theta = \mathrm{Arg}z$. 再设 $\theta_0 = \arg z$，则有

$$\rho^n = r,\ n\varphi = \theta_0 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

解之得

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \varphi = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (1.22)$$

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \qquad (1.23)$$

3.复平面的扩充（不是很重要）

- 将复平面上的点和北极点连接，与复球面产生一个交点，这样，复平面上的点就被一一对应到复球面上；

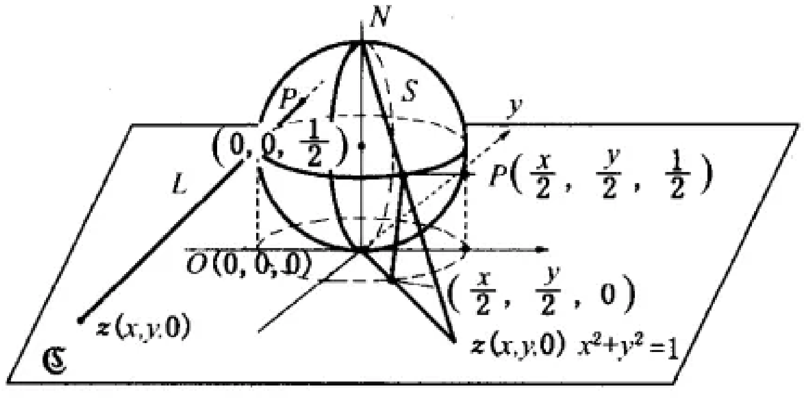

图 1－1 复球面

- 定义北极点所对应的复平面上的点为**无穷远点**；

4.复平面上的点集（不是很重要）

- 曲线参数表示：略，值得记忆的是**若曲线 $C: z(t)=x(t)+iy(t)(\alpha \leq t \leq \beta)$ ，则其反向曲线的参数表示为 $C^{-}: \gamma(t)=z(\alpha+\beta-t)(\alpha \leq t \leq \beta)$** ；
- 邻域，去心邻域：略；
- 区域的相关概念：略；
