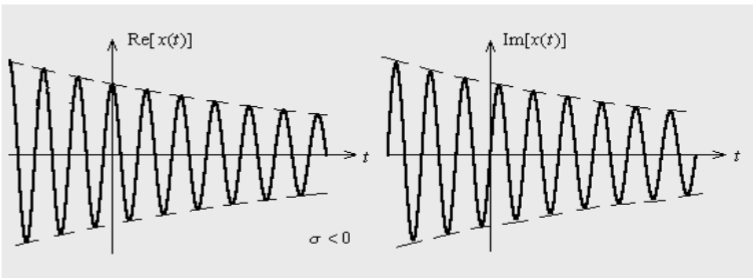
二. 连续信号分析

（一）连续信号的时域描述和分析

1.1 连续信号的时域描述

- 正弦信号
  a. 两个同频率的正弦信号相加，结果仍为正弦信号
  b. 若$f_1 = nf_0$，则两正弦信号的合成信号是频率为f_0的非正弦周期信号
  c. 正弦信号的微分和积分仍然是同频率的正弦信号
- 指数信号
  a. 实指数信号：$x(t) = A \cdot e^{\sigma t}$
  b. 复指数信号：$x(t) = A \cdot e^{(\sigma + j\omega)t}$
    i. 对复指数信号，有$\begin{cases} Re[x(t)] = Ae^{\sigma t} \cdot \cos \omega t \\ Im[x(t)] = Ae^{\sigma t} \cdot \sin \omega t \end{cases}$
    ii. 对每一部分信号，有包络线$x_0(t) = Ae^{\sigma t}$，如下图



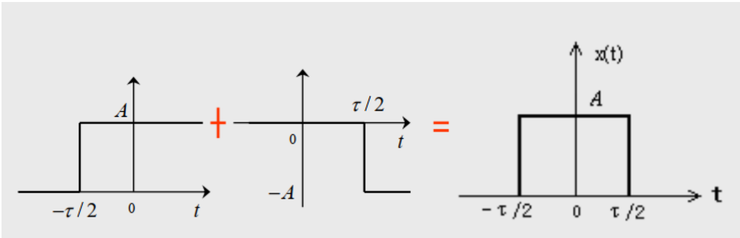
- 取样函数：$f(x) = Sa(x) = \dfrac{\sin x}{x}$
  a. 取样函数为偶函数
  b. 取样函数在$x = 0$时有最大值$Sa(0) = 1$，随着$|x|$的增大总趋势逐渐减小
  c. 当$x = \pm\pi, \pm 2\pi, ...$时过零点
- 奇异信号（☆）
  a. 单位斜坡信号$r(t)$：$r(t) = \begin{cases} t, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$
  b. 单位阶跃信号$u(t)$:$u(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$

i. 单位阶跃信号和单位斜坡信号的关系：$u(t) = \frac{dr(t)}{dt}$

c. 矩形脉冲信号（门函数）$A \cdot \prod(\frac{t}{\tau})$

i. A表示门高，τ表示脉宽

ii. 矩形脉冲信号可以由单位阶跃信号线性组合得到，即：$A \cdot \prod(\frac{t}{\tau}) = A \cdot [u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})]$



d. 单位冲激信号$\delta(t)$：$\delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \\ \int_R \delta(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1 \end{cases}$

i. 将单位冲激信号理解为脉宽趋于0时的矩形脉冲信号，因此其保有矩形脉冲信号的特征，如为偶函数

ii. 冲激信号具有筛选特性：$\int_R x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)$

iii. 冲激信号和阶跃信号的关系：$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$

iv. $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

e. 冲激偶$\delta'(t)$：$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$

i. 冲激偶是奇函数，波形为$\tau \to 0$时，在$-\frac{\tau}{2}$处有一指向正方向且强度为$\frac{1}{\tau}$的冲激信号，在$\frac{\tau}{2}$处有一指向负方向且强度为$\frac{1}{\tau}$的冲激信号

ii. 冲激偶的筛选特性：$\int_R x(t)\delta'(t - t_0) = -x'(t_0)$

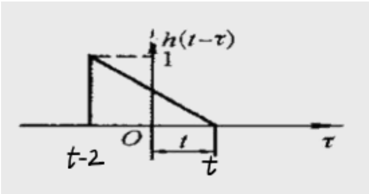
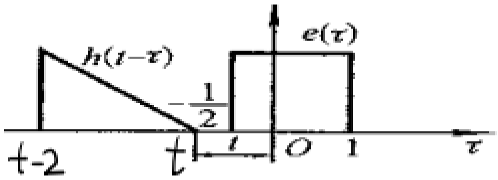
> 例1. 证明$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$
>
> - 这里用到的一个重要结论是：如果要证明两个奇异函数$f(t)$和$g(t)$是相等的，等价于证明$\int x(t)f(t)dt = \int x(t)g(t)dt$
> - 因此，先对左边的奇异函数进行操作，这里的最后一步用到了冲激函数的筛分性：
>
> $$若a > 0 : \int_R \delta(at)x(t)dt = \int_R \delta(u)x(\frac{u}{a})d(\frac{u}{a}) = \frac{1}{a} \cdot \int_R \delta(u)x(\frac{u}{a})du = \frac{1}{a} \cdot x(0)$$
>
> $$若a < 0 : \int_R \delta(at)x(t)dt = \int_{-R} \delta(u)x(\frac{u}{a})d(\frac{u}{a}) = -\frac{1}{a} \cdot \int_R \delta(u)x(\frac{u}{a})du = -\frac{1}{a} \cdot x(0)$$
>
> - 之后，对右侧进行类似的操作：

> $$\int_R \frac{1}{|a|}\delta(t)x(t)dt = \frac{1}{|a|}\cdot\int_R \delta(t)x(t)dt = \frac{1}{|a|}\cdot x(0)$$
>
> - 经过对比，发现两者是相等的，原式得证！

1.2 时域计算

- 常见的信号运算
  a. 尺度变换：$x(t)\to x(at)$
     i. 若$a>1$，说明原信号被压缩
     ii. 若$0<a<1$，说明原信号被拉伸
     iii. 要注意形如$x(-t+1)$的信号压缩两倍后变为$x(-2t+1)$而非$x(-2t+2)$
  b. 左右翻转：$x(t)\to x(-t)$
     i. 要注意形如$x(t+1)$的信号左右翻转后变为$x(-t+1)$而非$x(-t-1)$
  c. 上下翻转：$x(t)\to -x(t)$
  d. 平移：$x(t)\to x(t-t_0)$
     i. 信号的平移遵循左加右减法则
     ii. 可以将周期信号看作是非周期信号经过平移的周期延拓
  e. 叠加/相乘/积分/微分：略
- 信号的卷积（☆）
  a. 卷积的定义：$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$
  b. 卷积的一般计算步骤：改变自变量→翻转→平移（方向从左到右，仔细确定积分限！）→相乘→积分
  c. 卷积的性质
     i. 卷积满足基本的交换律、结合律和分配律
     ii. 与冲激函数的卷积：$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$

> 例2. 如图所示为$e(t)$和$h(t)$的波形，求$e(t)*h(t)$
>
> 
>
>
> - 卷积计算有两种方式：
>   a. 按照卷积的一般计算步骤：适用于信号波形完全已知的情况
>   b. 按照卷积的定义：适用于信号表达式完全已知的情况

> 显然，此题的解法为卷积的一般计算步骤，关键在于确定积分限
>
> - 先将$h(t)$左右翻转，之后从左到右在$e(t)$信号所在坐标系中进行扫描；为了便于划分每种情况的条件，一定要在翻转后的波形中标出t所在的位置，如下图：
>
> 
>
> 
>
>
> - 之后，可以划分出以下几种情况：
>
> $$t \le -\frac{1}{2}\text{或}t \ge 3\text{时}: ans = 0$$
> $$-\frac{1}{2} \le t \le 1\text{时}: ans = \int_{-0.5}^{t} 0.5(t-\tau)d\tau = \frac{1}{4}(t^2 + t + \frac{1}{4})$$
> $$1 \le t \le \frac{3}{2}\text{时}: ans = \int_{-0.5}^{1} 0.5(t-\tau)d\tau = \frac{3}{4}t - \frac{3}{16}$$
> $$\frac{3}{2} \le t \le 3\text{时}: ans = \int_{t-2}^{1} 0.5(t-\tau)d\tau = \frac{1}{4}(-t^2 + 2t + 3)$$
>
> - 可以使用如下结论来验证积分域的正确性：卷积的脉宽是两个信号的脉宽之和。可以看到两信号的原脉宽分别为1.5和2，卷积积分有效的区间为$[-0.5, 3]$，脉宽为3.5，说明积分域是正确的！

1.3 矢量的正交和分解

- 正交函数集：若某个函数集内的任意两个不相同函数都正交（即两者乘积的积分为0），则称该函数集为正交函数集
- 完备正交函数集：如果一个正交函数集外的任意函数都无法被加到里面，就称该函数集为完备正交函数集
- 典型的完备正交函数集
  a. 三角函数集$\{1, \cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t\}(n = 1, 2, \ldots)$在区间$(t_0, t_0 + T)$内是完备正交函数集
  b. 复函数集$\{e^{jn\omega_0 t}\}(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$为完备正交函数集

（二）连续信号的频域分析

2.1 周期信号的傅里叶级数

- 傅里叶级数的三角展开形式

a. 形式：$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$

b. 系数的计算：$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt \\ a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin(n\omega_0 t)dt \\ b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos(n\omega_0 t) \end{cases}$

- 傅里叶级数的复指数展开形式

a. 形式：$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(n\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t}$

b. 系数的计算：$X(n\omega_0) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$

- 两种展开的关系：$X(n\omega_0) = \frac{A_n}{2}\angle\varphi_n$
- 周期信号的功率分配：$P = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X(n\omega_0)|^2$

2.2 非周期信号的傅里叶变换

2.3 傅里叶变换的性质

2.4 周期信号的傅里叶变换