1. 变量可分离

2. 齐次

设 $\frac{y}{x}=u$，$y=ux$，$\frac{dy}{dx}=\frac{d(ux)}{dx}=x\cdot\frac{du}{dx}+u$

3. 一阶线性：$\frac{dy}{dx}+p(x)\cdot y=f(x)$

$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$ ①

*伯努利方程：$\frac{dy}{dx}+p(x)\cdot y=f(x)\cdot y^n$

(两侧同除 y^n)：$\frac{1}{y^n}\cdot\frac{dy}{dx}+p(x)\cdot\frac{1}{y^{n-1}}=f(x)$

$\frac{1}{1-n}\cdot\frac{d\frac{1}{y^{n-1}}}{dx}+p(x)\cdot\frac{1}{y^{n-1}}=f(x)$

设 $u=\frac{1}{y^{n-1}}$，即转化为①

注意考虑 $y=0$ 的情况

4. 全微分方程 $Mdx+Ndy=0$

判断是否为全微分方程：$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

如果是：$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)dy$

如果不是：① 分项组合，凑常用微分

$ydx+xdy=d(xy)$

$\boxed{y}dx-xdy\Rightarrow\frac{ydx-xdy}{y^2}=d(\frac{x}{\boxed{y}})$；同理

有 $\frac{\boxed{x}dy-ydx}{x^2}=d(\frac{y}{\boxed{x}})$.

另一种：$\frac{\boxed{y}dx-xdy}{x^2+y^2}=d(\arctan\frac{x}{\boxed{y}})$

同理：$\frac{\boxed{x}dy-ydx}{x^2+y^2}=d(\arctan\frac{y}{\boxed{x}})$

(好像是一致的！可以找得快一些！)

② 观察出积分因子 $\mu(x,y)$

③ 算 $\mu(x)$ 或 $\mu(y)$

推导：求 μ，使得在 $du=\mu Mdx+\mu Ndy$ 中，

有 $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$

即 $\frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot M+\mu\cdot\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}N+\mu\cdot\frac{\partial N}{\partial x}$

$\therefore\ \mu(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=\frac{\partial\mu}{\partial x}N-\frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot M$

1° 若 μ 仅关于 x，则 $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$

即 $\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})$

$\Downarrow$

只关于 x，右侧也应只关于 x

2° 若 μ 仅关于 y，同理有

$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}=-\frac{1}{M}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})$

省流：若 $\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})$ 只和 x 有关（记为 $u(x)$）

则 μ 只和 x 有关，且 $\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}=u(x)$

若 $-\frac{1}{M}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})$ 只和 y 有关（.. $v(x)$）

则 ... y 有关，且 $\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}=v(x)$

5. 可降阶二阶

① $y^{(n)}=f(x)$：多次积分即可

② $f(y'',y',x)=0$

设 $y'=u=\frac{dy}{dx}$，则 $y''=\frac{du}{dx}$.

$f(y'',y',x)\Rightarrow f(u',u,x)$

③ $f(y'',y',y)=0$

△要防止 x 出现

设 $y'=u=\frac{dy}{dx}$，则 $y''=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=u\cdot\frac{du}{dy}$

$f(y'',y',x)\Rightarrow f(\frac{du}{dy},u,y)=0$

6. 二阶常系数线性

① 齐次：$y''+py'+qy=0$

解方程 $\lambda^2+p\lambda+q$ 得特征根 λ_1,λ_2.

不等实根：$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$

相等根：$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$

不等虚根：$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

$\begin{cases}\lambda_1=\alpha+\beta i\\ \lambda_2=\alpha-\beta i\end{cases}$

② 非齐次：$y''+py'+qy=f(x)$

☆ 非齐次解 = $\underbrace{\text{齐次通解}}_{\text{见①}}$ + $\underbrace{\text{非齐次特解}}_{\text{如下}}$.

1° $f(x)=P_m(x)\cdot e^{\alpha x}$.

将 α 代入特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q$

若：α 不是根，设 $y^*=P_m(x)\cdot e^{\alpha x}$

α 是单根，... $y^*=x\cdot P_m(x)\cdot e^{\alpha x}$

α 是重根，... $y^*=x^2\cdot P_m(x)\cdot e^{\alpha x}$

→ 待定系数即可.

2° $f(x)=P_m(x)\cdot e^{\alpha x}$ $f(x)$ → 三角($\sin/\cos$).

把三角用欧拉公式化为指数，转化为1°

之后 sin 取虚部，cos 取实部.

☆ 不要忘记加齐次通解.

☆ 二阶以上类似，对每个 λ 都判断一次之后相加.

λ：

- 实数
  - 单根：对应 $Ce^{\lambda x}$ ✓
  - 多根：对应 $(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda x}$ ✓
- 复数
  - 单根：对应 $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ ✓
  - 多根：对应 $e^{\alpha x}[(a_1+a_2x+\cdots+a_kx^{k-1})\cos\beta x+(b_1+b_2x+\cdots+b_kx^{k-1})\sin\beta x]$

7. 二阶变系数线性

看到这个！

* 欧拉方程：$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y = f(x)$，$(x>0)$

(以三阶为例)．$x^3 y''' + a_1 x^2 y'' + a_2 x y' + a_3 y = f(x)$

设 $x = e^t$（如果 $x<0$ 就 $x=-e^t$）．则 $t = \ln x$．

① $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt} \Rightarrow xy' = \frac{dy}{dt}$

② $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$

$= -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$

$\Rightarrow x^2 y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$

③ $y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right]$

$= -\frac{2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$

$= -\frac{2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$

$= \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + 2\cdot\frac{dy}{dt}\right) \Rightarrow x^3 y''' = \ldots$

代入后都化为 y．t 的方程．

① 刘维尔方法：已知齐次特解，求齐次通解？

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

已知 $y_1 \Rightarrow y = Cy_1$ 也为特解 $\Rightarrow$ 通解为 $y = u(x)\cdot y_1$

$u(x) = y_1\cdot\left[C_1\cdot\int\frac{1}{y_1^2}e^{\int p(x)dx}dx + C_2\right]$

* 特殊情况：$2p'(x) + [p(x)]^2 - 4q(x) = a \in R$

则特解 $y_1 = e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}$．$y = uy_1$

可以刘维尔，也可以特定系数

② 常数变换法：已知齐次通解，求非齐次解？

$y'' + p(x)\cdot y' + q(x)y = f(x)$

已知齐次通解 $y = C_1y_1 + C_2y_2$

则非齐次解：$y = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$

且有 $\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' = .. \\ u_2' = .. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = .. \\ u_2 = .. \end{cases} \Rightarrow y$ ✓

8. 线性方程组（齐次）

① 换元法：略

② 特征向量法．

1° 都为实根（无重根）

求 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$，算出特征向量 $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$

则有 $\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \overset{C_1}{}e^{\lambda_1}\cdot\xi_1 + \cdots + \overset{C_2}{}e^{\lambda_n}\cdot\xi_n}$

2° 有复数根（一定成对出现）

只算一个 λ_1，代入得到 ξ．一个解为 $e^{\lambda}\xi = e^{\lambda}[\xi_1 + i\xi_2]$

用欧拉公式展开 e^{λ}！实虚部分离 ✓

$\Rightarrow e^{\alpha}\cdot(\xi_3 + i\xi_4)$．则 λ_1, λ_2 对应 ξ_3．ξ_4．

则有 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \cdots + \underset{C_1}{\hat{}}e^{\alpha}\cdot\xi_3 + \underset{C_2}{\hat{}}e^{\alpha}\cdot\xi_4$

3° 有 k 重根．

算出 λ．用 $(A-\lambda E)^k\cdot\vec{V_0} = 0$ 算出 $\vec{V_{01}}, \vec{V_{02}}, \ldots \vec{V_{0k}}$

$(A-\lambda E)\vec{V_{0i}} = \vec{V_{1i}}$．$(A-\lambda E)\vec{V_{1i}} = \vec{V_{2i}} \cdots$

则 $x_i = (\vec{V_{0i}} + t\vec{V_{1i}})e^{\lambda t}$

9. 线性方程组（非齐次）

先求齐次通解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C_1e^{\lambda_1 t}\cdot\xi_1 + \cdots + C_ne^{\lambda_n\cdot t}\cdot\xi_n$

定义基础解矩阵 $X = (\xi_1, \ldots \xi_n)$

则原方程组解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X\cdot C(t)$

满足 $X\cdot C'(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow C'(t) \Rightarrow C(t)$