一. 概述

- 通常解决线性动态电路问题的方法：列出微分方程 $\xrightarrow{\text{解微分方程}}$ 微分方程的解；
- 利用拉普拉斯变换解决动态电路问题：先对原微分方程进行拉普拉斯变换转化为s域的代数方程，求解代数方程的解后再通过拉普拉斯反变换得到原方程的解；

二. LT的定义和基本性质

1. LT的定义

- 定义：对定义在$[0,+\infty]$的函数$f(t)$，定义$F(s)=\int_{0^-}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$，记作$L[f(t)]$
- 常见函数的拉普拉斯变换

原函数$f(t)$	象函数$F(s)$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$\delta(t)$	1
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

2. LT的基本性质

- 线性性质：$L[af(t)+bg(t)]=aF(s)+bG(s)$
- 微分性质：$L[\frac{d}{dt}f(t)]=sF(s)-f(0^-)$
- 积分性质：$L[\int_{0^-}^{+\infty}f(t)dt]=\dfrac{1}{s}\cdot F(s)$
- 平移性质：$\begin{cases}\text{时域平移：}L[f(t-t_0)l(t-t_0)]=F(s)\cdot e^{-st_0}\\ s\text{域平移：}L^{-1}[F(s-s_0)]=f(t)\cdot e^{s_0t}\end{cases}$
  - 注意：只要出现了e的指数次，就说明另外一者出现了平移
- 初值性质：$f(0^-)=\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$
- 终值性质：$f(\infty)=\lim\limits_{s\to 0^-}sF(s)$

三. ILT的一般求法

- ILT的一般求法：分离出有理真分式$\dfrac{Q(s)}{P(s)}$，并将其展开为几个简单的式子
- 基本步骤
  - 将分母按照其根分解为几个因式，即$P(s)=(s-s_1)(s-s_2)...(s-s_n)$
  - 之后，对这些根进行分类讨论：
    a. 当分解出的几项均为不等实根时，原式可展开为$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{K_i}{s-s_i}$，

       其中$K_i=(s-s_i)F(s)|_{s=s_i}$
    b. 当分解出的几个根中包含共轭的复根$s\pm j\omega$时，原式可以展开为类似情况1的形式，结论也是类似的；
       - 此处有一个结论，即一对共轭复根对应的两个分式在通过ILT回到时域后，得到的结果为$f(t)=2|K|e^{-at}\cos(\omega t+\theta)$，因此只要计算一个复数根对应的结果，得到$|K|$和$\theta$就可以知道反变换的结果
       - 在计算时要注意：θ对应的是因式$s+a-j\omega$，即$s-(-a+j\omega)$，对应的根内部为正号！！！
       - 计算这类式子时也可以通过对分母进行配方，之后进行配凑的方法进行计算，详见例2
    c. 当分解出的根为n重根时，原式可展开为类似的形式，即$\frac{k_{11}}{s-s_1}+\frac{k_{12}}{(s-s_1)^2}+...+\frac{k_{1n}}{(s-s_1)^n}$，结论为$k_{1j}=\frac{1}{(n-j)!}\cdot\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}[(s-s_1)^n\cdot F(s)]|_{s=s_1}$，特殊的，有$k_{1n}=[(s-s_1)^n\cdot F(s)]|_{s=s_1}$

> 例1：求$F(s)=\dfrac{s^2+3s+5}{s^3+6s^2+11s+6}$的ILT.
>
> 先对分母进行因式分解，即$s^3+6s^2+11s+6=(s+1)(s+2)(s+3)$
>
> 之后，根据结论，可以计算出$\begin{cases}k_1=\frac{3}{2}\\k_2=-3\\k_3=\frac{5}{2}\end{cases}$
>
> 因此，可以分解为$F(s)=\frac{3/2}{s+1}-\frac{3}{s+2}+\frac{5/2}{s+3}$
>
> 此时，可以直接得出$f(t)=\frac{3}{2}e^{-t}-3e^{-2t}+\frac{5}{2}e^{-3t}$
>
> 例2：求$F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+2s+5}$的ILT.
>
> <u>法一：直接利用共轭复根的结论</u>
>
> 先解出分母对应的两个共轭复根为$s_1=-1+2j,s_2=-1-2j$
>
> 之后，解出一个系数即可：$k_1=\frac{s+3}{s+1+2j}|_{s=-1+2j}=\frac{1}{2}(1-i)$
>
> 得到两个未知数$|k|=\frac{\sqrt{2}}{2},\theta=-45^\circ$
>
> 直接代入结论，得$f(t)=\sqrt{2}e^{-t}\cos(2t-45^\circ)$

> 法二：通过配方和平移性质化简运算
> 通过观察，可以发现分母可以配方为$(s+1)^2+4$，故$F(s)=\frac{(s+1)+2}{(s+1)^2+2^2}$
> 通过配凑，将其化为$F(s)=\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}+\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$
> 发现其刚好为函数$G(s)=\frac{s}{s^2+2^2}+\frac{2}{s^2+2^2}$平移得到
> 而$g(t)=\sin(2t)+\cos(2t)$，故$f(t)=g(t+1)=e^{-t}[\sin(2t)+\cos(2t)]$
>
> 例3：求$F(s)=\dfrac{s+4}{s(s+1)^2}$的ILT.
>
> 先分解为几个最基本的分式，即$\frac{s+4}{s(s+1)^2}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_{21}}{s+1}+\frac{k_{22}}{(s+1)^2}$
> 代入结论，分别计算即可：
> $k_1=4,k_{21}=\dfrac{1}{1!}\cdot\dfrac{d}{ds}[(s+1)^2F(s)]|_{s=-1}=-4,k_{22}=[(s+1)^2F(s)]|_{s=-1}=-3$
> 因此，原式可以分解为$\frac{4}{s}-\frac{4}{s+1}-\frac{3}{(s+1)^2}$
> 之后易得$f(t)=4-4e^{-t}-3te^{-t}$

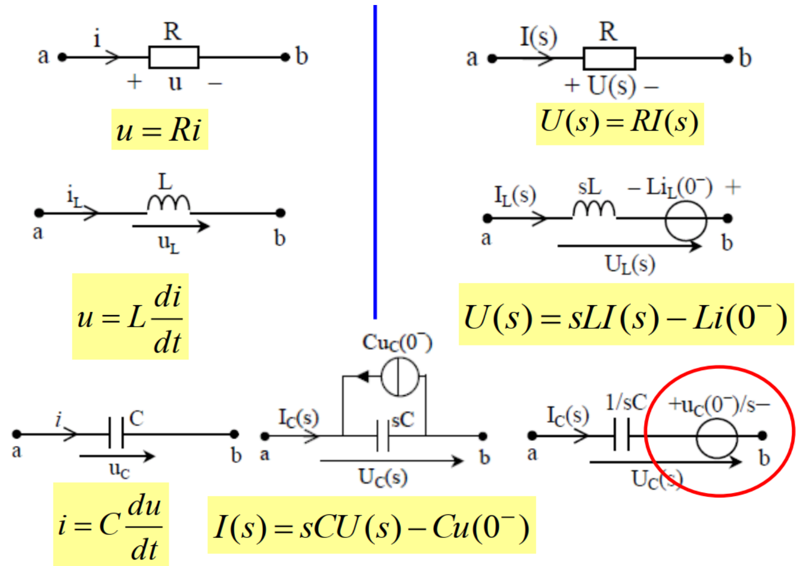
四.线性动态电路的拉氏变换

1. 元件伏安特性的复频域表达式

- 重在理解，实际上就是时域特性两端取LT（结合微分性质和积分性质），要自己会推导！

元件	时域特性	复频域特性
R	$u=Ri$	$U(s)=RI(s)$
L	$u=L\cdot\frac{di}{dt}$	$U(s)=L[sI(s)-i(0^-)]$
C	$i=C\cdot\frac{du}{dt}$	$I(s)=C[sU(s)-u(0^-)]$
$CCVS$	$u_2=ri_1$	$U_2(s)=rI_1(s)$

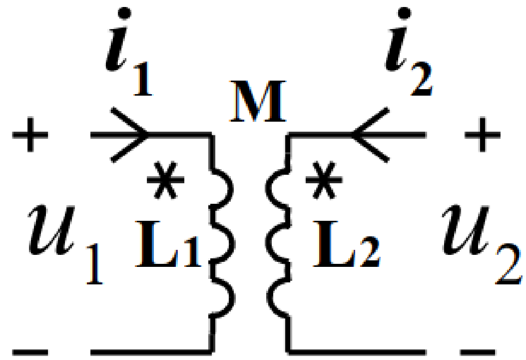
2. RLC等效电路



- 将电阻直接用电阻本身等效即可
- 将电容和电感都等价为一个等效阻抗和一个恒压源的串联
  - 其中，等效阻抗分别为sL和$\frac{1}{sC}$，与元件本身的阻抗$j\omega L$和$\frac{1}{j\omega C}$形式是类似的
  - 等效电压源的大小由初始条件决定，要记住，电感为$Li_L(0^-)$，电容为$\frac{u_C(0^-)}{s}$
  - 要注意方向，电感中等效电压源的电压是被减掉的，电容中是加上去的

3. 互感等效电路

- 不用特别记，写出时域的伏安特性之后两边取IT即可
- 一个例子（如下图）
  - 在如图所示的互感线圈中，可以列出时域的伏安特性方程，即：$\begin{cases} u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \end{cases}$
  - 之后，对两个式子两侧分别取拉普拉斯变换，得到下面两式：
    - $U_1(s) = L_1[sI_1(s) - i_1(0^-)] + M[sI_2(s) - i_2(0^-)]$
    - $U_2(s) = L_2[sI_2(s) - i_2(0^-)] + M[sI_2(s) - i_1(0^-)]$
    - 要注意的是方括号内部是减号！



五.用运算电路解过渡问题

1.用运算电路解决过渡过程问题的一般步骤

- Step1：画运算电路；
- Step2：求激励电源的拉氏变换；
- Step3：在s域中列KVL和KCL；
- Step4：利用分解定理解反变换；
- 注意：在s域中$U_C(s),U_L(s)$指的是等效运算阻抗和恒压源两侧的电压之和！！！