Ep2.解析函数

1.复变函数的概念

- 复变函数：描述了在复平面上由一个区域指向另一个区域的映射；
- 集合的相关定义：单射，满射，双射；

例 1：设函数 $f(z)=z^2$ ，问它把平面上的曲线 $x^2-y^2=a$ 和 $2xy=b(a,b\in R)$ 分别映射为什么曲线?

解：设复数 $z=x+yi$ 经过映射后变为 $w=u+vi$

① 对于曲线 $x^2-y^2=a$ ：

$$f(z)=z^2=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+i(2xy)=u+vi$$

故 $u=x^2-y^2=a, v=2xy\in\mathbb{R}$

即 u 是一个定值，而 v 是一个无界量，所以对应的点 (u,v) 在直线 $u=a$ 上

② 对于曲线 $2xy=b$

同理可得 $u=x^2-y^2, v=2xy=b$

即 u 是一个无界量，而 v 是一个定值，所以对应的点在直线 $v=b$ 上

例 2：设函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ ，求其将 Z 平面上的圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 映射成 ω 平面上的图形方程.

解：设复数 $z=x+yi$ 经过映射后变为 $w=u+vi$

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}$$

则 x,y 满足 $\begin{cases}u=\frac{x}{x^2+y^2}\\ v=-\frac{y}{x^2+y^2}\end{cases}$ ；

设 $x=1+cos\theta,y=sin\theta$ ，代入得：

$$x^2+y^2=(1+cos\theta)^2+(sin\theta)^2=2(1+cos\theta)$$

$$u=\frac{1+cos\theta}{2(1+cos\theta)}=\frac{1}{2},\ v=-\frac{sin\theta}{2(1+cos\theta)}=-\frac{2sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}}{4cos^2\frac{\theta}{2}}=-\frac{1}{2}tan\frac{\theta}{2}$$

即 u 是一个定值，而 v 是一个无界量

故在 ω 平面上其被映射为直线 $u=\dfrac{1}{2}$.

2.极限，连续和导数

（类比实函数即可，很好理解，只是邻域变成了一个圆域）

- 定义**极限**：设 $w=f(z)$ 在区间 $D=\{z|0<|z-z_0|<\rho\}$ 中有定义，若对于 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $z\in D$ 时，$|f(z)-A|<\epsilon$ 成立，则称 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ ；（即实函数中的 $\varepsilon-\delta$ 语言）；
  - **注意：极限要存在，即沿着任意路径接近 z_0 时极限都存在且相等**；
- 定义**连续**：如果设 $w=f(z)$ 在区间 $D=\{z|0<|z-z_0|<\rho\}$ 中有定义，且 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$ ，则称函数 $w=f(z)$ 在 z_0 点连续；
  - 两个定理：
    - 定理 1：函数 $w=f(z)=u+vi$ 在 z_0 处连续的充要条件是函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续；
    - 定理 2：当函数 $w=f(z)$ 在有界闭区间 D 上连续时，它的模 $|f(z)|$ 在 D 上也连续且可以取到最大值和最小值；
- 定义**导数**：类比实函数即可，不做赘述

3. 解析函数

- 复变函数的导数：略，类比一元实函数的导数；
- 解析函数（☆）
  - 定义：
    - 解析：如果存在着 z_0 的某个邻域，在该邻域中的每个点 z 处，函数 $f(z)$ 的导数均存在，则称函数 $f(z)$ **在 z_0 点解析**；如果函数在某个区域内的任意点都解析，则称函数在这个**区域内解析**；
    - 整函数：若函数在整个复平面 C 上解析，则称该函数为**整函数**或**全纯函数**；
    - 奇点：函数不解析的点成为函数的**奇点**；
    - 简单来说，**解析函数就是区域内可导的函数**；

> 例 3：讨论函数 $f(z)=\overline{z}$ 的解析性.
>
> 解：考虑函数 $f(z)=\overline{z}$ 的导数，即考虑极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$
>
> 则有：$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\overline{z+\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ ；
>
> 对于 $\Delta z\to 0$ ，规定路径为 $y=kx$ 方向，则
>
> $$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{1-ik}{1+ik}$$
>
> 极限值和 k 有关，故极限不存在
>
> $\therefore f(z)$ 处处不可导，故其不解析.
>
> 分析：可以直接用 C–R 来做，但是定义法也应当掌握，在某些情况下可能会有用

  - 解析函数的判断方法：
    - Cauchy–Riemann 方程（C–R 方程）：函数 $f(z)=u+iv$ 在某点可导的充分必要条件为该点
    - 满足 C–R 方程：$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$ ，此时有 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ；
      - 若只有部分点满足 C–R 方程，说明**函数在这些点上可导**；
      - 对于解析，需要说明这个点的一个邻域内的所有点都可导；如果 C–R 方程的满足给出了一些点，说明这些点上该函数式是可导的，但是这些点的邻域内有点是不可导的，

说明这些点上函数都是不解析的；

例 4：讨论函数 $f(z)=x^3+3xy^2+i(y^3+3x^2y)$ 的解析性.

解：由题知 $\begin{cases} u=x^3+3xy^2 \\ v=y^3+3x^2y \end{cases}$

由 C–R 条件：$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+3y^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y}=6xy \\ \frac{\partial v}{\partial x}=6xy \\ \frac{\partial v}{\partial y}=3x^2+3y^2 \end{cases}$ ，且 $6xy=-6xy$ ，故 $xy=0$

$\therefore$ 函数 $f(z)=x^3+3xy^2+i(y^3+3x^2y)$ 只在坐标轴上可导

$\therefore$ 函数 $f(z)$ 在整个复平面内都不解析

分析：因为该函数只在坐标轴上可导，而解析要求邻域内可导，可知对于坐标轴上任意一点，必定存在邻域，该邻域内有点是不可导的，所以原函数处处不解析

例 5：讨论函数 $f(z)=x^2-iy$ 的可微性和解析性.

解： $u=x^2, v=-y$ ；

根据 C–R 条件，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x=\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$ ； $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$ ；

故 $f(z)$ 在直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 上是可导的，在平面内处处不解析；

4.解析函数和调和函数

- 定义：
  - 调和函数：若函数 $U(x,y)$ 的二阶偏导数连续且满足 $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$ （即 $\Delta U=0$ ，其中 Δ 为微分算子 $\dfrac{\partial^2}{\partial^2 x}+\dfrac{\partial^2}{\partial^2 y}$ ），则称函数 $U(x,y)$ 为**调和函数**；
  - 共轭调和函数：若给出一个调和函数 $U(x,y)$ ，能找到另外一个调和函数 $V(x,y)$ ，使得这两个函数能分别作为一个解析函数的实部和虚部（即满足 C–R 条件），则称这对函数为**共轭调和函数**；
    - 另一种解读：若一个函数是解析的，那么它的实部和虚部互为共轭调和函数

例 6：已知调和函数 $u(x,y)=xy^3-x^3y$ ，求它的共轭调和函数 $v(x,y)$.

解：**（固定套路求法）**

由题知 $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=y^3-3x^2y=\frac{\partial v}{\partial y} & ①\\ \frac{\partial u}{\partial y}=3xy^2-x^3=-\frac{\partial v}{\partial x} & ②\end{cases}$

对于 ① 式：$\partial v=(y^3-3x^2y)\partial y$ ，两侧积分得

$$v=\int(y^3-3x^2y)dy=\frac{y^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+\phi(x)\ .$$

代入 ② 式得：$-\dfrac{\partial v}{\partial x}=3xy^2-\phi'(x)=3xy^2-x^3,\phi(x)=\dfrac{x^4}{4}+C$.

$$\therefore v(x,y)=\frac{y^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{x^4}{4}+C$$

- 将用 x,y 表示的函数转化为用 z 表示的函数
  - 如果是解析的：令 $y=0$ ，则此时 x 所在的位置就可以看做 $f(z)$ 中 z 所在的位置；
  - 如果是不解析的（少）：代入 $\begin{cases}x=\frac{z+\overline{z}}{2}\\ y=\frac{z-\overline{z}}{2i}\end{cases}$

例 7：求函数 $f(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$ 的导数（用 z 表示）

令 $y=0$ ，得到 $f(x)=x^3$ ，即 $f(z)=z^3$ ，$f'(z)=3z^2$

5.基本解析函数

- 指数函数
  - 定义：$exp(z)=e^z=e^x(cosy+isiny)$
  - 理解：$e^z=e^{x+yi}=e^xe^{iy}=e^x(cosy+isiny)$
  - 性质：
    - 复指数函数仍然满足指数函数的基本运算法则；
    - e^z 是周期函数，其周期 $T=2n\pi i(n\in N^+)$ ；

例 8：解方程 $(z+2i)^3=1$

解：设 $z+2i=u$ ，之后考虑方程 $u^3=1$

设 $u=e^{i\beta}$ （因为根据幂的运算法则可知 u 的模一定是 1）

则有 $u^3=e^{i(3\beta)}=e^{2k\pi i}$

故 $3i\beta=2k\pi i$, $\beta=\frac{2}{3}k\pi$

则 $u=e^{\frac{2}{3}k\pi i}=z+2i$ ， $z=-2i+e^{\frac{2}{3}k\pi i}$

- 对数函数：
  - 定义： $w=Ln(z)=ln|z|+i\cdot Arg(z)=ln|z|+i(argz+2k\pi)$
  - 定义：记 $w_0=ln(z)=ln|z|+iargz$ 为对数函数的**主值**；

例 9：解方程 $Lnz=1-\frac{\pi}{4}i.$

解： $Lnz=ln|z|+i(argz+2k\pi)=1-\frac{\pi}{4}i$

故 $\begin{cases} ln|z|=1 \\ argz+2k\pi=-\frac{\pi}{4} \end{cases}$ ，解得 $|z|=e,argz=-\frac{\pi}{4}$

故 $z=e[cos(-\frac{\pi}{4})+isin(-\frac{\pi}{4})]=\frac{\sqrt{2}e}{2}(1-i)$.

- 幂函数
  - 定义（由指数函数引出）： $z^n=e^{nLnz}=e^{n(ln|z|+iArgz)}$
  - 定义：记 $e^{n(ln|z|+iargz)}$ 为幂函数的**主值**；
- 三角函数和双曲函数
  - 定义三角函数： $\begin{cases} sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \\ cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \end{cases}$
  - 定义双曲函数： $\begin{cases} sh(z)=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z}) \\ ch(z)=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z}) \end{cases}$
  - 三角函数和双曲函数的求导法则：
    $(sinz)'=cosz,(cosz)'=-sinz,(shz)'=chz,(chz)'=shz$
  - 互换关系： $cos(iz)=chz,sin(iz)=shz;ch(iz)=cosz,sh(iz)=isinz;$
  - $sinz,cosz$ 的周期为 $2k\pi$ ， shz,chz 的周期为 $2k\pi i$ ；
  - $sinz,shz$ 为奇函数， $cosz,chz$ 为偶函数；

- 一些恒等式：看书，感觉基本上没什么用；
- $|sinz|, |cosz|$ 是无界函数；