

Un Algoritmo per la Risoluzione del Problema Palindromo Quadratico degli Autovalori

Alessio Marchetti

Presentazione del problema

Si vogliono trovare autovalori e autovettori del seguente polinomio matriciale:

$$P(\lambda) = \lambda^2 A^T + \lambda Q + A$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & H_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} H_0 & H_1^T & 0 & & \\ H_1 & H_0 & H_1^T & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Inoltre H_0 è simmetrica.

Poiché

$$P(\lambda)^T = \lambda^2 A + \lambda Q + A^T = \lambda^2 P\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

se μ è un autovalore per P , anche $1/\mu$ è.

Per la struttura di

$$A = \begin{pmatrix} 0 & H_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha che 0 è un autovalore di molteplicità (almeno) $(m-1)k$ e i relativi autovettori sono gli elementi della base canonica

$e_1, \dots, e_{(m-1)k}$.

In maniera analoga ∞ è autovalore di uguale molteplicità e i relativi autovettori sono gli ultimi $(m-1)k$ vettori della base canonica.

Vogliamo dunque calcolare le soluzioni “meno facili”.

Useremo questi due step:

- 1 Si risolve il problema per $\hat{P}(\lambda) = \lambda^2 H_1^T + \lambda H_0 + H_1$.
- 2 Si utilizzano le soluzioni di \hat{P} per costruire quelle di P .

Una scomposizione utile

Supponiamo che $\hat{\Phi}$ sia una soluzione simmetrica per X dell'equazione

$$X + H_1^T X^{-1} H_1 = H_0.$$

Allora possiamo scomporre

$$\hat{P}(\lambda) = \lambda^2 H_1^T + \lambda H_0 + H_1 = (\lambda H_1^T + \hat{\Phi}) \hat{\Phi}^{-1} (\lambda \hat{\Phi} + H_1).$$

Si nota che se $v^T (\mu \hat{\Phi} + H_1) = 0$, allora anche $\left(\frac{1}{\mu} H_1^T + \hat{\Phi} \right) v = 0$, per cui gli autovettori sinistri dell'ultimo fattore sono gli autovettori destri del primo.

Gli autovalori relativi ad essi sono uno il reciproco dell'altro.

Trovare le soluzioni

Valeva

$$\hat{P}(\lambda) = (\lambda H_1^T + \hat{\Phi})\hat{\Phi}^{-1}(\lambda\hat{\Phi} + H_1).$$

Se (μ, v) è una coppia autovalore e autovettore per $\lambda\hat{\Phi} + H_1$, allora lo è anche per \hat{P} .

Se $(\bar{\mu}, \bar{v})$ è una coppia per $\lambda H_1^T + \hat{\Phi}$ e vale $\bar{v} = \hat{\Phi}^{-1}(\bar{\mu}\hat{\Phi} + H_1)v$, allora $(\bar{\mu}, v)$ è una soluzione per \hat{P} .

Quindi dati (\bar{v}, μ) una coppia di autovalore e autovettore sinistro per l'ultimo termine, la coppia $1/\mu, v$ è una coppia per \hat{P} , con v come sopra.

II Doubling Algorithm

Bisogna determinare una soluzione $\hat{\Phi}$. Si usa l'algoritmo iterativo in cui

$$A_0 = H_1 \quad X_0 = H_0 \quad Y_0 = 0$$

e il passo iterativo è dato da

$$A_{i+1} = A_i(X_i - Y_i)^{-1}A_i$$

$$X_{i+1} = X_i - A_i^T(X_i - Y_i)^{-1}A_i$$

$$Y_{i+1} = Y_i + A_i(X_i - Y_i)^{-1}A_i^T.$$

Si ha che X_i converge alla soluzione $\hat{\Phi}$.

È stato dimostrato che se $Im(H_0) + \lambda Im(H_1)^T + \lambda^{-1} Im(H_1)$ è definita positiva per tutti i λ sulla circonferenza unitaria, esiste una soluzione $\hat{\Phi}$ simmetrica e invertibile per cui $\rho(\hat{\Phi}^{-1}H_1) < 1$, dove ρ è il raggio spettrale.

In questo caso la convergenza è quadratica e vale che

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \|X_i - \hat{\Phi}\| \leq (\hat{\Phi}^{-1}H_1)^{2^{i+1}}$$

Siccome la convergenza è quadratica, vale che esiste una costante α e un indice i per cui per tutti i $j \geq i$ vale che

$$\|X_{j+2} - X_{j+1}\| \leq \alpha \|X_{j+1} - X_j\|^2.$$

Allora se $\epsilon = \|X_{i+1} - X_i\|$ si può valutare

$$\begin{aligned}\|X_i - \hat{\Phi}\| &= \left\| \sum_{j=i}^{\infty} (X_{j+1} - X_j) \right\| \leq \sum_{j=i}^{\infty} \|X_{j+1} - X_j\| \\ &\leq \epsilon + \sum_{j=i}^{\infty} \alpha^{2j-1} \epsilon^{2j} = \epsilon + \frac{\alpha^2 \epsilon^2}{\alpha(1 - \alpha^2 \epsilon^2)} \doteq \epsilon\end{aligned}$$

Si ha dunque che il rapporto $\|X_{i+1} - X_i\| / \|X_i\| < \epsilon_T$ con ϵ_T dell'ordine dell'epsilon di macchina è una buona condizione d'arresto per l'algoritmo.

Supponiamo che P e \hat{P} siano entrambi regolari, per cui vale che il loro determinante non è identicamente nullo al variare di λ . Allora vale che \hat{P} ha un coppia decomponibile

$$((J_0 \oplus J_1 \oplus J_\infty, [Y_0, Y_1, Y_\infty])).$$

Cioè le matrici soddisfano le proprietà

$$\begin{pmatrix} Y_0 & Y_1 & Y_\infty J_\infty \\ Y_0 J_0 & Y_1 J_1 & Y_\infty \end{pmatrix} \text{ è non singolare,}$$

per $i = 0, 1$

$$H_1^T Y_i J_i^2 + H_0 Y_i J_i + H_1 Y_i = 0$$

$$H_1^T Y_\infty + H_0 Y_\infty J_\infty + H_1 Y_\infty J_\infty^2 = 0$$

e J_0 ha solo autovalori nulli, mentre J_1 ha solo autovalori non nulli.

Siano

$$Z_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix}; \quad Z_1 = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_1 J_1^{m-1} \end{pmatrix}; \quad Z_\infty = \begin{pmatrix} Y_\infty & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix};$$

$$W_f = 0_{n-k+k_0} \oplus J_1^m; \quad W_\infty = 0_{n-k+k_0}$$

Supponiamo che $J_0 = J_\infty = 0_{k_0}$.

Allora

$$(W_f \oplus W_\infty, [Z_0, Z_1, Z_\infty])$$

è una coppia decomponibile per P .

Questo vuol dire verificare che la matrice

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & 0 \\ 0 & Z_1 J_1^m & Y_\infty \end{pmatrix}$$

è invertibile e che valgono

$$AZ_0 = 0;$$

$$A^T Z_\infty = 0;$$

$$A^T Z_1 J_1^{2m} + QZ_1 J_1^m + AZ_1 = 0.$$

Nelle prime due equazioni i due addendi nulli che includevano J_0 e J_∞ non sono stati scritti.

Per l'invertibilità,

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & 0 \\ 0 & Z_1 J_1^m & Y_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & Z_1' & 0 & 0 \\ 0 & Y_0 & Y_1 J_1^{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_1 J_1^m & Y_\infty & 0 \\ 0 & 0 & (Z_1 J_1^m)' & 0 & I \end{pmatrix}$$

che per eliminazione delle colonne è invertibile se e solo se lo è

$$\begin{pmatrix} Y_0 & Y_1 J_1^{m-1} & 0 \\ 0 & Y_1 J_1^m & Y_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_0 & Y_1 & 0 \\ 0 & Y_1 J_1 & Y_\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & & \\ & J_1^{m-1} & \\ & & I \end{pmatrix}$$

Per ipotesi si sa che

$$H_1 Y_0 = 0; \quad H_1^T Y_\infty = 0.$$

Allora per la struttura a blocchi di A , valgono le prime due equazioni della tesi, infatti

$$AZ_0 = \begin{pmatrix} 0 & H_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H_1 Y_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La condizione $J_0 = J_\infty = 0$ è automaticamente soddisfatta se queste due matrici hanno dimensione nulla, cioè quando H_1 è invertibile.

La scomposizione fatta della coppia decomponibile conferma il discorso sulle molteplicità di 0 e di ∞ fatto prima.

Sia (J_f, X_f) la parte corrispondente agli autovalori finiti di un polinomio matriciale $P(\lambda) = \sum_{i=0}^l D_i \lambda^i$

Con una trasformazione del tipo

$$X_f \longrightarrow X_f Q$$

$$J_f \longrightarrow Q^{-1} J_f Q$$

per un'opportuna matrice di cambio di base Q si può supporre che J sia di Jordan.

Infatti

$$\begin{pmatrix} X_f Q & X_\infty J_\infty^{l-1} \\ \vdots & \vdots \\ X_f J_f^{l-1} Q & X_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_f & X_\infty J_\infty^{l-1} \\ \vdots & \vdots \\ X_f J_f^{l-1} & X_\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

e

$$0 = \sum_{i=0}^l D_i X_f J_f^i = \sum_{i=0}^l D_i (X_f Q) (Q^{-1} J_f Q)^i.$$

Vale che se μ è un autovalore per J , allora μ^m è un autovalore per J^m .

Dunque data una soluzione di autovalore e autovettore (μ, v) per \hat{P} è possibile trovare la soluzione per P

$$\left(\mu^m, \begin{pmatrix} v \\ v\mu \\ \vdots \\ v\mu^{m-1} \end{pmatrix} \right)$$

leggendo l'equazione della coppia decomponibile sulle colonne corrispondenti agli autovettori.

- 1 Si calcola $\hat{\Phi}$ con il doubling algorithm.
- 2 Si trovano trovano autovalori e autovettori destri e sinistri di $\lambda H_1 + \hat{\Phi}$ con il metodo QZ.
- 3 Si processano gli autovalori sinistri ν risolvendo il sistema

$$(\mu H_1 + \hat{\Phi})w = \hat{\Phi}v.$$

- 4 Si ricavano le soluzioni di P con il teorema precedente.

Ottimizzare il punto 3

Avendo utilizzato il metodo QZ per risolvere il pencil $\lambda H_1 + \hat{\Phi}$ si dispone di due matrici unitarie U e V per cui vale

$$UH_1V = G \quad U\hat{\Phi}V = T$$

con G e T triangolari superiori. Allora il sistema da risolvere è

$$U^H(\lambda G + T)V^H w = U^H T V^H v$$

per cui si risolve

$$(\lambda G + T)u = T V^H v$$

e poi

$$V^H w = u.$$

Analisi all'indietro dell'errore

Sia (μ, v) una coppia di autovalore e autovettore calcolati per P . Idealmente

$$r = (\mu^2 A^T + \mu Q + A)v$$

è nullo, ma in casi reali non lo è.

Cerchiamo delle perturbazioni nei dati iniziali ΔA e ΔQ per cui

$$[\mu^2(A + \|A\| \Delta A)^T + \mu(Q + \|Q\| \Delta Q) + (A + \|A\| \Delta A)]v = 0$$

dove la norma presa è quella di Frobenius e ΔQ è simmetrica. A priori esistono infinite di queste matrici, ma quello a cui siamo interessati è l'errore ottimo

$$\epsilon = \min_{\Delta A, \Delta Q} \sqrt{\|\Delta A\|^2 + \|\Delta A\|^2}$$

È dimostrabile che

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\delta_1^2}{\|A\| |1 + \tau^2|^2 + \|Q\| |\tau|^2} \frac{\delta_2^2}{\|A\| (1 + \tau^4) + \|Q\| |\tau|^2 / 2}}$$

dove

$$\delta_1 = \frac{v^T r}{\|v\|^2} \quad \delta_2 = \frac{\sqrt{\|r\|^2 \|v\|^2 - |v^T r|^2}}{\|v\|^2}$$

Le perturbazioni studiate non rispettano la strutture a blocchi delle matrici iniziali. Consideriamo allora delle perturbazioni che hanno la struttura del problema, partendo da matrici perturbate $H_0 + \|H_0\| \Delta H_0$ e $H_1 + \|H_1\| \Delta H_1$. Chiameremo l'errore ϵ in questo caso errore all'indietro α -strutturato ϵ_α .

Consideriamo la coppia $(\eta, w) = (\mu^{1/m}, v_{1:k})$ a cui si può associare il vettore

$$\hat{r} = (\eta^2 H_1^T + \eta H_0 + H_1)w$$

e l'errore

$$\hat{\epsilon} = \min_{\Delta H_1, \Delta H_0} \sqrt{\|\Delta H_1\|^2 + \|\Delta H_0\|^2}$$

Metteremo in relazione ϵ e ϵ_α .

Per prima cosa notiamo che le perturbazioni α -strutturate hanno norma

$$\|\Delta A\| = \|\Delta H_1\|$$

e

$$\|Q\|^2 = m \|H_0\|^2 + (2m - 2) \|H_1\|^2$$

$$\|Q\|^2 \|\Delta Q\|^2 = m \|H_0\|^2 \|\Delta H_0\| + (2m - 2) \|H_1\|^2 \|\Delta H_1\|^2.$$

Allora

$$\begin{aligned} \|A\|^2 + \|Q\|^2 &= \|H_1\|^2 + \frac{m \|H_0\|^2 \|\Delta H_0\| + (2m - 2) \|H_1\|^2 \|\Delta H_1\|^2}{m \|H_0\|^2 + (2m - 2) \|H_1\|^2} \\ &\leq \left(1 + \frac{(2m - 2) \|H_1\|^2}{m \|H_0\|^2 + (2m - 2) \|H_1\|^2} \right) (\|H_1\|^2 + \|H_0\|^2) \end{aligned}$$

Sulla precisione degli autovalori

Il metodo presentato è anche vantaggioso rispetto alla precisione. Supponiamo di saper calcolare direttamente gli autovalori di P . Essi saranno corretti a meno di un termine dell'ordine dell'epsilon di macchina.

$$\mu_{calc} = \mu_{esatto} + O(u) = \mu_{esatto} \left(1 + \frac{O(u)}{|\mu_{esatto}|} \right).$$

Stesso discorso per le soluzioni di \hat{P} .

$$\hat{\mu}_{calc} = \hat{\mu}_{esatto} + O(u) = \hat{\mu}_{esatto} \left(1 + \frac{O(u)}{|\hat{\mu}_{esatto}|} \right).$$

Se $\hat{\mu}$ viene usato per calcolare μ come nel metodo proposto si ottiene che

$$\mu_{calc} = \hat{\mu}_{esatto}^m \left(1 + \frac{O(u)}{|\hat{\mu}_{esatto}|} \right)^m = \mu_{esatto} \left[1 + O \left(m \frac{u}{\mu_{esatto}^{1/m}} \right) \right]$$