Un Algoritmo per la Risoluzione del Problema Palindromo Quadratico degli Autovalori

Alessio Marchetti

Presentazione del problema

Si vogliono trovare autovalori e autovettori del seguente polinomio matriciale:

$$P(\lambda) = \lambda^2 A^T + \lambda Q + A$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & H1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} H0 & H1 & 0 & \\ H1^T & H0 & H1 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Inoltre H_0 è simmetrica.

Simmetrie del problema

Poiché

$$P(\lambda)^T = \lambda^2 A + \lambda Q + A^T = \lambda^2 P\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

se μ è un autovalore per P, anche $1/\mu$ è.

Alcune soluzioni facili

Per la struttura di

$$A = \begin{pmatrix} 0 & H1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha che 0 è un autovalore di molteplicità (almeno) $(m-1)k$ e i relativi autovettori sono gli elementi della base canonica $e_1, \ldots, e_{(m-1)k}$.

In maniera analoga ∞ è autovalore di uguale molteplicità e i relativi autovettori sono gli ultimi $(m-1)k$ vettori della base canonica.

Strategia generale

Vogliamo dunque calcolare le soluzioni “meno facili”.
Useremo questi due step:

1. Si risolve il problema per $\hat{P}(\lambda) = \lambda^2 H_1^T + \lambda H_0 + H_1$.
2. Si utilizzano le soluzioni di $\hat{P}$ per costruire quelle di P.

Una scomposizione utile

Supponiamo che $\hat{\Phi}$ sia una soluzione simmetrica per X dell'equazione

$$X + H_1^T X^{-1} H_1 = H_0.$$

Allora possiamo scomporre

$$\hat{P}(\lambda) = \lambda^2 H_1^T + \lambda H_0 + H_1 = (\lambda H_1^T + \hat{\Phi})\hat{\Phi}^{-1}(\lambda\hat{\Phi} + H_1).$$

Si nota che se $v^T(\mu\hat{\Phi} + H_1) = 0$, allora anche $\left(\frac{1}{\mu} H_1^T + \hat{\Phi}\right) v = 0$, per cui gli autovettori sinistri dell'ultimo fattore sono gli autovettori destri del primo.
Gli autovalori relativi ad essi sono uno il reciproco dell'altro.

Trovare le soluzioni

Valeva

$$\hat{P}(\lambda) = (\lambda H_1^T + \hat{\Phi})\hat{\Phi}^{-1}(\lambda\hat{\Phi} + H_1).$$

Se (μ, v) è una coppia autovalore e autovettore per $\lambda\hat{\Phi} + H_1$, allora lo è anche per $\hat{P}$.

Se $(\bar{\mu}, \bar{v})$ è una coppia per $\lambda H_1^T + \hat{\Phi}$ e vale $\bar{v} = \hat{\Phi}^{-1}(\bar{\mu}\hat{\Phi} + H_1)v$, allora $(\bar{\mu}, v)$ è una soluzione per $\hat{P}$.

Quindi dati $(\bar{v}, \mu)$ una coppia di autovalore e autovettore sinistro per l'ultimo termine, la coppia $1/\mu, v$ è una coppia per $\hat{P}$, con v come sopra.

Il Doubling Algorithm

Bisogna determinare una soluzione di Φ. Si usa l'algoritmo iterativo in cui

$$A_0 = H_1 \qquad X_0 = H_0 \qquad Y_0 = 0$$

e il passo iterativo è dato da

$$\begin{aligned} A_{i+1} &= A_i(X_i - Y_i)^{-1}A_i \\ X_{i+1} &= X_i - A_i^T(X_i - Y_i)^{-1}A_i \\ Y_{i+1} &= Y_i + A_i(X_i - Y_i)^{-1}A_i^T. \end{aligned}$$

Si ha che X_i converge alla soluzione $\hat{\Phi}$.

Convergenza

È stato dimostrato che se $Im(H_0) + \lambda Im(H_1)^T + \lambda^{-1} Im(H_1)$ è definita positiva per tutti i λ sulla circonferenza unitaria, esiste una soluzione $\hat{\Phi}$ simmetrica e invertibile per cui $\rho(\hat{\Phi}^{-1} H_1) < 1$, dove ρ è il raggio spettrale.

In questo caso la convergenza è quadratica e vale che

$$\limsup_{i \to \infty} \left\| X_i - \hat{\Phi} \right\| \leq (\hat{\Phi}^{-1} H_1)^{2^{i+1}}$$

Criterio di arresto

Siccome la convergenza è quadratica, vale che esiste una costante α e un indice i per cui per tutti i $j \geq i$ vale che

$$\|X_{j+2} - X_{j+1}\| \leq \alpha \|X_{j+1} - X_j\|^2 .$$

Allora se $\epsilon = \|X_{i+1} - X_i\|$ si può valutare

$$\left\|X_i - \hat{\Phi}\right\| = \left\|\sum_{j=i}^{\infty}(X_{j+1} - X_j)\right\| \leq \sum_{j=i}^{\infty} \|X_{j+1} - X_j\|$$

$$\leq \epsilon + \sum_{j=i}^{\infty} \alpha^{2j-1}\epsilon^{2j} = \epsilon + \frac{\alpha^2\epsilon^2}{\alpha(1-\alpha^2\epsilon^2)} \doteq \epsilon$$

Si ha dunque che il rapporto $\|X_{i+1} - X_i\| / \|X_i\| < \epsilon_T$ con ϵ_T dell'ordine dell'espilon di macchina è una buona condizione d'arresto per l'algoritmo.

Teorema

Supponiamo che P e $\hat{P}$ siano entrambi regolari, per cui vale che il loro determinante non è identicamente nullo al variare di λ. Allora vale che $\hat{P}$ ha un coppia decomponibile

$$((J_0 \oplus J_1 \oplus J_\infty, [Y_0, Y_1, Y_\infty]).$$

Cioè le matrici soddisfano le proprietà

$$\begin{pmatrix} Y_0 & Y_1 & Y_\infty J_\infty \\ Y_0 J_0 & Y_1 J_1 & Y_\infty \end{pmatrix} \text{ è non singolare,}$$

per $i = 0, 1$

$$\begin{aligned} H_1^T Y_i J_i^2 + H_0 Y_i J_i + H_1 Y_i = 0 \\ H_1^T Y_\infty + H_0 Y_\infty J_\infty + H_1 Y_\infty J_\infty^2 = 0 \end{aligned}$$

e J_0 ha solo autovalori nulli, mentre J_1 ha solo autovalori non nulli.

Siano

$$Z_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix}; \qquad Z_1 = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_1 J_1^{m-1} \end{pmatrix}; \qquad Z_\infty = \begin{pmatrix} Y_\infty & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix};$$

$$W_f = 0_{n-k+k_0} \oplus J_1^m; \qquad W_\infty = 0_{n-k+k_0}$$

Supponiamo che $J_0 = J_\infty = 0_{k_0}$.
Allora

$$(W_f \oplus W_\infty, [Z_0, Z_1, Z_\infty])$$

è una coppia decomponibile per P.

Questo vuol dire verificare che la matrice

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & 0 \\ 0 & Z_1 J_1^m & Y_\infty \end{pmatrix}$$

è invertibile e che valgono

$$AZ_0 = 0;$$

$$A^T Z_\infty = 0;$$

$$A^T Z_1 J_1^{2m} + QZ_1 J_1^m + AZ_1 = 0.$$

Nelle prime due equazioni i due addendi nulli che includevano J_0 e J_∞ non sono stati scritti.

Dimostrazione

Per l'invertibilità,

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & 0 \\ 0 & Z_1 J_1^m & Y_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & Z_1' & 0 & 0 \\ 0 & Y_0 & Y_1 J_1^{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_1 J_1^m & Y_\infty & 0 \\ 0 & 0 & (Z_1 J_1^m)' & 0 & I \end{pmatrix}$$

che per eliminazione delle colonne è invertibile se e solo se lo è

$$\begin{pmatrix} Y_0 & Y_1 J_1^{m-1} & 0 \\ 0 & Y_1 J_1^m & Y_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_0 & Y_1 & 0 \\ 0 & Y_1 J_1 & Y_\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & & \\ & J_1^{m-1} & \\ & & I \end{pmatrix}$$

Per ipotesi si sa che

$$H_1 Y_0 = 0; \qquad H_1^T Y_\infty = 0.$$

Allora per la struttura a blocchi di A, valgono le prime due equazioni della tesi, infatti

$$AZ_0 = \begin{pmatrix} 0 & H_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H_1 Y_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alcuni commenti

La condizione $J_0 = J_\infty = 0$ è automaticamente soddisfatta se queste due matrici hanno dimensione nulla, cioè quando H_1 è invertibile.

La scomposizione fatta della coppia decomponibile conferma il discorso sulle molteplicità di 0 e di ∞ fatto prima.

Soluzioni di P

Sia (J_f, X_f) la parte corrispondente agli autovalori finiti di un polinomio matriciale $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} D_i \lambda^i$
Con una trasformazione del tipo

$$X_f \longrightarrow X_f Q$$
$$J_f \longrightarrow Q^{-1} J_f Q$$

per un'opportuna matrice di cambio di base Q si può supporre che J sia di Jordan.

Infatti

$$\begin{pmatrix} X_f Q & X_\infty J_\infty^{l-1} \\ \vdots & \vdots \\ X_f J_f^{l-1} Q & X_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_f & X_\infty J_\infty^{l-1} \\ \vdots & \vdots \\ X_f J_f^{l-1} & X_\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

e

$$0 = \sum_{i=0}^{l} D_i X_f J_f^i = \sum_{i=0}^{l} D_i (X_f Q)(Q^{-1} J_f Q)^i.$$

Vale che se μ è un autovalore per J, allora μ^m è un autovalore per J^m.

Dunque data una soluzione di autovalore e autovettore (μ, v) per $\hat{P}$ è possibile trovare la soluzione per P

$$\left(\mu^m, \begin{pmatrix} v \\ v\mu \\ \vdots \\ v\mu^{m-1} \end{pmatrix} \right)$$

leggendo l'equazione della coppia decomponibile sulle colonne corrispondenti agli autovettori.

Ricapitolando

1. Si calcola $\hat{\Phi}$ con il doubling algorithm.
2. Si trovano trovano autovalori e autovettori destri e sinistri di $\lambda H_1 + \hat{\Phi}$ con il metodo QZ.
3. Si processano gli autovalori sinistri v risolvendo il sistema

$$(\mu H_1 + \hat{\Phi})w = \hat{\Phi}v.$$

4. Si ricavano le soluzioni di P con il teorema precedente.

Ottimizzare il punto 3

Avendo utilizzato il metodo QZ per risolvere il pencil $\lambda H_1 + \hat{\Phi}$ si dispone di due matrici unitarie U e V per cui vale

$$UH_1V = G \qquad U\hat{\Phi}V = T$$

con G e T triangolari superiori. Allora il sistema da risolvere è

$$U^H(\lambda G + T)V^H w = U^H T V^H v$$

per cui si risolve

$$(\lambda G + T)u = TV^H v$$

e poi

$$V^H w = u.$$

Analisi all'indietro dell'errore

Sia (μ, v) una coppia di autovalre e autovettore calcolati per P. Idealmente

$$r = (\mu^2 A^T + \mu Q + A)v$$

è nullo, ma in casi reali non lo è.
Cerchiamo delle perturbazioni nei dati iniziali ΔA e ΔQ per cui

$$[\mu^2 (A + \|A\| \, \Delta A)^T + \mu (Q + \|Q\| \, \Delta Q) + (A + \|A\| \, \Delta A)]v = 0$$

dove la norma presa è quella di Frobenius e ΔQ è simmetrica. A priori esistono infinite di queste matrici, ma quello a cui siamo interessati è l'errore ottimo

$$\epsilon = \min_{\Delta A, \Delta Q} \sqrt{\|\Delta A\|^2 + \|\Delta A\|^2}$$

È dimostrabile che

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\delta_1^2}{\|A\| \, |1+\tau^2|^2 + \|Q\| \, |\tau|^2} \frac{\delta_2^2}{\|A\| \, (1+\tau^4) + \|Q\| \, |\tau|^2/2}}$$

dove

$$\delta_1 = \frac{v^T r}{\|v\|^2} \qquad \delta_2 = \frac{\sqrt{\|r\|^2 \, \|v\|^2 - |v^T r|^2}}{\|v\|^2}$$

Errore strutturato

Le perturbazioni studiate non rispettano la strutture a blocchi delle matrici iniziali. Consideriamo allora delle perturbazioni che hanno la struttura del problema, partendo da matrici perturbate $H_0 + \|H_0\| \Delta H_0$ e $H_1 + \|H_1\| \Delta H_1$. Chiameremo l'errore ϵ in questo caso errore all'indietro α-strutturato ϵ_α.
Consideriamo la coppia $(\eta, w) = (\mu^{1/m}, v_{1:k})$ a cui si può associare il vettore

$$\hat{r} = (\eta^2 H_1^T + \eta H_0 + H_1)w$$

e l'errore

$$\hat{\epsilon} = \min_{\Delta H_1, \Delta H_1} \sqrt{\|\Delta H_1\|^2 + \|\Delta H_0\|^2}$$

Metteremo in relazione ϵ e ϵ_α.

Per prima cosa notiamo che le perturbazioni α-strutturate hanno norma

$$\|\Delta A\| = \|\Delta H_1\|$$

e

$$\|Q\|^2 = m\|H_0\|^2 + (2m-2)\|H_1\|^2$$

$$\|Q\|^2\|\Delta Q\|^2 = m\|H_0\|^2\|\Delta H_0\| + (2m-2)\|H_1\|^2\|\Delta H_1\|^2 .$$

Allora

$$\begin{aligned} \|A\|^2 + \|Q\|^2 &= \|H_1\|^2 + \frac{m\|H_0\|^2\|\Delta H_0\| + (2m-2)\|H_1\|^2\|\Delta H_1\|^2}{m\|H_0\|^2 + (2m-2)\|H_1\|^2} \\ &\leq \left(1 + \frac{(2m-2)\|H_1\|^2}{m\|H_0\|^2 + (2m-2)\|H_1\|^2}\right)(\|H_1\|^2 + \|H_0\|^2) \end{aligned}$$

Sulla precisione degli autovalori

Il metodo presentato è anche vantaggioso rispetto alla precisione. Supponiamo di saper calcolare direttamente gli autovalori di P. Essi saranno corretti a meno di un termine dell'ordine dell'epsilon di macchina.

$$\mu_{calc} = \mu_{esatto} + O(u) = \mu_{esatto}\left(1 + \frac{O(u)}{|\mu_{esatto}|}\right).$$

Stesso discorso per le soluzioni di $\hat{P}$.

$$\hat{\mu}_{calc} = \hat{\mu}_{esatto} + O(u) = \hat{\mu}_{esatto}\left(1 + \frac{O(u)}{|\hat{\mu}_{esatto}|}\right).$$

Se $\hat{\mu}$ viene usato per calcolare μ come nel metodo proposto si ottiene che

$$\mu_{calc} = \hat{\mu}_{esatto}^{m}\left(1 + \frac{O(u)}{|\hat{\mu}_{esatto}|}\right)^{m} = \mu_{esatto}\left[1 + O\left(m\frac{u}{\mu_{esatto}{}^{1/m}}\right)\right]$$