Rappresentabilità di Funzioni nel Lambda-calcolo Polimorfico

Candidato: Alessio Marchetti
Relatori: Alessandro Berarducci, Marcello Mamino

Il λ-calcolo è un sistema formale sviluppato negli anni '30 da Alonzo Church. Lo scopo originario era quello di fondare la matematica, e non è stato raggiunto in quanto il sistema si rivelò inconsistente, come dimostrato da Kleene e Rosser nel 1936. Un sottoinsieme di tale sistema si è comunque sviluppato per la sua capacità di esprimere computazioni mediante astrazione su variabili e sostituzione. Lo studio del λ-calcolo è dunque lo studio di entità dette λ-termini che svolgono allo stesso tempo il ruolo di programmi e di dati su cui i programmi lavorano. Sui termini si considererà una relazione di ordine, detta riduzione, che rappresenta l'esecuzione dei programmi. All'interno del λ-calcolo, con opportune codifiche, è possibile rappresentare i numeri naturali e tutte le funzioni calcolabili. Poichè l'insieme delle funzioni calcolabili totali non è ricorsivamente enumerabile esistono dei termini la cui computazione non termina (diremo che non sono normalizzanti).

Il λ-calcolo tipato è una variante del λ-calcolo in cui ad ogni termine è associata un'entità sintattica detta tipo. Esso ha origine nei lavori di Haskell Curry (1934) e di Church (1940). La riduzione in questo caso è ridefinita aggiungendo vincoli sul come è possibile comporre i termini in base al loro tipo, e in particolare rende chiara la classe di dati su cui ciascun programma può operare. Come conseguenza si può dimostrare che questa variante ha la proprietà di normalizzazione, ovvero tutte le computazioni terminano e tutti i termini sono normalizzanti. I tipi sono studiati anche in ambito informatico per la verifica in modo automatico della presenza di alcuni errori che dovrebbero essere altrimenti cercati a mano dal programmatore.

In questa tesi ci occuperemo di una variante del calcolo detta sistema F, anche nota come λ-calcolo polimorfico o λ-calcolo del secondo ordine. Essa è stata sviluppata dal logico Jean-Yves Girard (1972) e dall'informatico John Charles Reynolds (1974). Il sistema F è essenzialmente una variante del λ-calcolo tipato in cui viene aggiunta una quantificazione universale sui tipi.

Anche per il sistema F vale la proprietà di normalizzazione. Troveremo dunque che le funzioni rappresentabili nel sistema F sono solo un sottoinsieme delle funzioni calcolabili totali, e ne daremo una caratterizzazione più precisa: esse sono esattamente le funzioni di cui l'aritmetica di Heyting del secondo ordine dimostra la totalità. Mostreremo quindi un esempio di funzione non rappresentabile nel sistema F e dedurremo dunque la consistenza dell'aritmetica di Peano del secondo ordine a partire dal risultato di normalizzazione.

Metteremo inoltre tale risultato a confronto con un risultato equivalente su un'altra variante del λ-calcolo, detta sistema T di Gödel, per cui vale ugualmente la proprietà di normalizzazione. Nel sistema T infatti le funzioni rappresentabili sono esattamente quelle che l'aritmetica di Heyting del primo ordine dimostra essere totali.