

Lambda calcolo del Secondo Ordine

Alessio Marchetti

I λ -termini sono parole sull'alfabeto costituito da variabili x_0, x_1, \dots , dall'astrattore λ e dalle parentesi $(,)$.

Definiamo induttivamente il loro insieme Λ come:

- $x_i \in \Lambda$ per tutte le variabili x_i .
- $t \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x_i. t) \in \Lambda$ per tutte le variabili x_i .
- $t, u \in \Lambda \Rightarrow (tu) \in \Lambda$.

Semplificare la notazione

L'astrazione si associa a destra:

$$\lambda x_1 \cdots x_n. t = \lambda x_1. \cdots \lambda x_n. t = (\lambda x_1. (\lambda x_2. \cdots (\lambda x_n. (t)) \cdots))$$

L'applicazione si associa a sinistra:

$$t_1 \cdots t_n = (\cdots (t_1) \cdots t_n)$$

Un sottoterminale di t è un qualunque termine u utilizzato nella costruzione induttiva di t .

Esempio: xy è un sottoterminale di $\lambda x. xyz$.

Un termine t si converte a un termine t' se sono nella forma

$$t = (\lambda x. u)v \quad t' = u[v/x]$$

dove l'espressione $u[v/x]$ indica la sostituzione di v nella variabile u . Si dice che t' è una conversione di t .

Un termine u si riduce a un termine u' se esiste una successione di passi $u = u_1 = \dots = u_n = u'$ in cui ogni u_{i+1} è ottenuto sostituendo un sottotermini di u_i con una sua conversione. In questo caso si scrive $u \rightsquigarrow u'$.

$$(\lambda x.xx)(\lambda y.y)z \rightsquigarrow (\lambda y.y)(\lambda y.y)z \rightsquigarrow (\lambda y.y)z \rightsquigarrow z.$$

z non può essere ulteriormente ridotto, si dice che è in forma normale.

$$\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \rightsquigarrow (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \rightsquigarrow \dots$$

Ω non ha una forma normale.

Si possono rappresentare i numeri naturali con termini del tipo

$$\bar{n} = \lambda s. \lambda z. \underbrace{s(s(\cdots (s(z)) \cdots))}_{n \text{ ripetizioni}}.$$

\bar{n} è il funzionale che compone n volte la funzione data in input.

$$\bar{3}f x \rightsquigarrow f(f(f(x))) = f^3 x$$

Questi numerali sono in forma normale.

Un lambda termine E rappresenta una funzione parziale $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ se per ogni intero n

$$E\bar{n} \rightsquigarrow \bar{m}$$

se e solo se $f(n) = m$.

$$A = \lambda p. \lambda q. \lambda f. \lambda x. (pf)(qfx)$$

$$A\bar{3}\bar{2} \rightsquigarrow \lambda f. \lambda x. (\bar{3}f)(\bar{2}fx) \rightsquigarrow \lambda f. \lambda x. f^3(f^2x) = \bar{5}.$$

$$M = \lambda p. \lambda q. \lambda f. \lambda x. q(pf)x$$

$$M\bar{3}\bar{2} \rightsquigarrow \lambda f. \lambda x. \bar{2}(\bar{3}f)x \rightsquigarrow \lambda f. \lambda x. (\bar{3}f)(\bar{3}f)x \rightsquigarrow \lambda f. \lambda x. f^3f^3x = \bar{6}.$$

$$E = \lambda p. \lambda q. \lambda f. \lambda x. qpfx$$

$$E\bar{3}\bar{2} \rightsquigarrow \lambda f. \lambda x. \bar{2}\bar{3}fx \rightsquigarrow \lambda f. \lambda x. \bar{3}\bar{3}fx \rightsquigarrow \lambda f. \lambda x. \bar{3}^3fx = \bar{9}.$$

Due riduzioni “patologiche”

Un termine che non diventa più semplice:

$$\omega_3\omega_3 = (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx) \rightsquigarrow (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx) \rightsquigarrow \dots$$

Un termine normalizzante ma non fortemente normalizzante:

$$(\lambda x.y)(\omega_3\omega_3) \rightsquigarrow y$$

$$(\lambda x.y)(\omega_3\omega_3) \rightsquigarrow (\lambda x.y)(\omega_3\omega_3\omega_3) \rightsquigarrow \dots$$

Lambda calcolo tipato semplice (1)

Idea: aggiungere vincoli sul come applicare un termine ad un altro.

Si definiscono induttivamente i tipi come:

- I tipi variabile U_1, U_2, \dots sono tipi.
- Se U e V sono tipi $(U \rightarrow V)$ è un tipo.

Per comodità \rightarrow si associa a destra:

$$U_1 \rightarrow U_2 \rightarrow \dots \rightarrow U_n = (U_1 \rightarrow (U_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (U_n) \dots))).$$

Lambda calcolo tipato semplice (2)

I termini si definiscono come:

- Le variabili di tipo U sono x_1, x_2, \dots per ogni tipo U .
- Se x è una variabile di tipo U e t è un termine di tipo V , allora $\lambda x.t$ è un termine di tipo $U \rightarrow V$.
- Se f è un termine di tipo $U \rightarrow V$ e t è un termine di tipo U , allora ft è un termine di tipo V .

Per indicare che un termine t è di tipo U si scrive anche t^U .

Sia U un tipo. Si definiscono i numerali come i termini

$$\bar{n} = \lambda s^{U \rightarrow U}. \lambda z^U. \underbrace{s(s(\cdots (s(z)) \cdots))}_{n \text{ ripetizioni}}.$$

La definizione è uguale alla precedente, ma con le variabili tipate.

Sia I il tipo $(U \rightarrow U) \rightarrow (U \rightarrow U)$. Somma e moltiplicazione come definite prima si possono tipare:

$$A = \lambda p^I. \lambda q^I. \lambda f^{U \rightarrow U}. \lambda x^U. (pf)(qfx)$$

$$M = \lambda p^I. \lambda q^I. \lambda f^{U \rightarrow U}. \lambda x^U. q(pf)x$$

L'esponenziazione, che era stata precedente definita come

$$E = \lambda p. \lambda q. \lambda f. \lambda x. qpfx$$

non si può tipare. Le funzioni rappresentabili in questo calcolo sono esattamente le funzioni polinomiali a tratti.

Lambda calcolo del Secondo Ordine (1)

Si definiscono induttivamente i tipi come:

- I tipi variabile U_1, U_2, \dots sono tipi.
- Se U e V sono tipi $(U \rightarrow V)$ è un tipo.
- Se X è un tipo variabile e U è un tipo, allora $(\Pi X. U)$ è un tipo.

Lambda calcolo del Secondo Ordine (2)

I termini si definiscono come:

- Le variabili di tipo U sono x_1, x_2, \dots per ogni tipo U .
- Se x è una variabile di tipo U e t è un termine di tipo V , allora $\lambda x.t$ è un termine di tipo $U \rightarrow V$.
- Se f è un termine di tipo $U \rightarrow V$ e t è un termine di tipo U , allora ft è un termine di tipo V .
- Se t è un termine di tipo $\Pi X.U$ e V è un tipo, allora tV è un termine di tipo $U[V/X]$.
- Se t è un termine di tipo U e X è una variabile tipo che non compare libera nei tipi delle variabili libere di t , allora $\Lambda X.t$ è un termine di tipo $\Pi X.U$.

Definiamo il tipo intero

$$N = \Pi X. (X \rightarrow X) \rightarrow (X \rightarrow X).$$

I numerali hanno la forma

$$\bar{n} = \Lambda X. \lambda f^{X \rightarrow X}. \lambda x^X. f^n x.$$

In questo caso si può definire l'esponenziale:

$$E = \lambda p^N. \lambda q^N \wedge X. \lambda f^{X \rightarrow X}. \lambda x^X. q(X \rightarrow X)(pX) f x.$$

$$\begin{aligned} E \bar{2} \bar{3} &\rightsquigarrow \wedge X. \lambda f^{X \rightarrow X}. \lambda x^X. \bar{3}(X \rightarrow X)(\bar{2}X) f \rightsquigarrow \\ &\wedge X. \lambda f^{X \rightarrow X}. \lambda x^X. (\lambda g^{(X \rightarrow X) \rightarrow (X \rightarrow X)}. \lambda y^{X \rightarrow X}. g^3 y)(\bar{2}X) f x \rightsquigarrow \\ &\wedge X. \lambda f^{X \rightarrow X}. \lambda x^X. (\bar{2}X)^3 f x \rightsquigarrow \\ &\wedge X. \lambda f^{X \rightarrow X}. \lambda x^X. (\lambda g^{X \rightarrow X}. \lambda y^X. g^2 y)^3 f x \rightsquigarrow \\ &\wedge X. \lambda f^{X \rightarrow X}. \lambda x^X. (\lambda g^{X \rightarrow X}. \lambda y^X. g^2 y)^2 f^2 x \rightsquigarrow \\ &\wedge X. \lambda f^{X \rightarrow X}. \lambda x^X. (\lambda g^{X \rightarrow X}. \lambda y^X. g^2 y) f^4 x \rightsquigarrow \\ &\wedge X. \lambda f^{X \rightarrow X}. \lambda x^X. f^8 x \rightsquigarrow \bar{8} \end{aligned}$$

Un calcolo è fortemente normalizzante quando tutti i suoi termini sono fortemente normalizzanti, ovvero ogni percorso di riduzione porta a una forma normale.

Il lambda calcolo tipato semplice e tipato al secondo ordine sono fortemente normalizzanti.

Definiamo la riducibilità:

- I riducibili di tipo variabile U sono i termini di tipo U fortemente normalizzanti.
- I riducibili di tipo $U \rightarrow V$, per U, V tipi qualunque, sono i termini f di tipo $U \rightarrow V$ tali che per ogni t riducibile di tipo U , ft è riducibile di tipo V .

1. I riducibili sono fortemente normalizzanti.
2. Se t è riducibile e $t \rightsquigarrow u$, allora anche u è riducibile.
3. Sia t una variabile oppure un termine nella forma uv . Se ogni riduzione di t in uno step porta a un termine riducibile, allora t è riducibile.

Si dimostra per induzione sulla complessità dei termini che tutti i termini sono riducibili.

Un tentativo di riadattamento

Si vuole provare a estendere il concetto di riducibilità anche per i termini del secondo ordine.

“Un termine t di tipo $\Pi X.U$ è riducibile se per ogni tipo V , tV è riducibile di tipo $U[V/X]$.”

Definizione impredicativa: per esempio $V = \Pi X.U$.

Un candidato di riducibilità per un tipo U è un insieme \mathcal{R} per cui valgono:

1. Se $t \in \mathcal{R}$, allora t è fortemente normalizzante.
2. Se $t \in \mathcal{R}$ e $t \rightsquigarrow u$, allora $u \in \mathcal{R}$.
3. Sia t un termine di tipo U che sia una variabile oppure un'applicazione nella forma uv o uU . Se ogni conversione in un passo di t porta a un termine in \mathcal{R} , allora $t \in \mathcal{R}$.

Sia T un tipo con variabili tipo libere in \underline{X} .

Siano \underline{U} dei tipi e $\underline{\mathcal{R}}$ rispettivi candidati.

Definiamo i riducibili parametrici $\text{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ di tipo $T[\underline{U}/\underline{X}]$ come:

- Se $T = X_i$, allora $\text{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \mathcal{R}_i$.
- Se $T = V \rightarrow W$, allora $f \in \text{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ se per ogni $t \in \text{RED}_V[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$, vale che $ft \in \text{RED}_W[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$.
- Se $T = \Pi Y.V$, allora $t \in \text{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ se per ogni tipo W e per ogni candidato \mathcal{S} per W vale che $tW \in \text{RED}_{V[W/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}, \mathcal{S}/Y]$.

I riducibili parametrici sono candidati di riducibilità.

A questo punto si possono definire i riducibili di tipo T come i termini in $\text{RED}_T[\underline{\mathcal{SN}}/\underline{X}]$, dove gli X_i sono i tipi delle variabili tipo libere di T e gli \mathcal{SN}_i sono i termini fortemente normalizzanti di tipo X_i .

Si dimostra poi che tutti i termini sono riducibili, e quindi fortemente normalizzanti.