

# Normalizzazione Forte per il Sistema F

Alessio Marchetti

**Definizione 1** Un termine  $t$  si dice neutrale se è in una delle seguenti forme:  $x$ ,  $t'U$  o  $t'U$ , in cui  $x$  è una variabile,  $t'$  è un termine e  $U$  è un tipo.

**Definizione 2** Un candidato di riducibilità (o semplicemente candidato) di tipo  $U$  è un insieme  $\mathcal{R}$  di termini di tipo  $U$  per cui valgono:

- (CR1) Se  $t \in \mathcal{R}$  allora  $t$  è fortemente normalizzabile.
- (CR2) Se  $t \in \mathcal{R}$  e  $t'$  è un termine ottenuto da una riduzione di  $t$ , cioè  $t \rightsquigarrow t'$ , allora  $t' \in \mathcal{R}$ .
- (CR3) Se  $t$  è neutrale, e per ogni conversione di uno step di  $t$  si ottiene un termine  $t' \in \mathcal{R}$ , allora anche  $t \in \mathcal{R}$ .

**Definizione 3** Dato un termine  $t$ , si definisce  $\nu(t)$  come la massimo numero di step di conversione necessari a portare  $t$  in forma normale. In particolare  $\nu(t) = \infty$  se e solo se  $t$  non è fortemente normalizzabile.

**Definizione 4** Se  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  sono insiemi di termini di tipo rispettivamente  $U$  e  $V$ , si definisce l'insieme  $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$  come l'insieme dei termini di tipo  $U \rightarrow V$  per cui per ogni termine  $u \in \mathcal{R}$  si ha che  $tu \in \mathcal{S}$ .

**Lemma 5** Se  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  sono candidati per i tipi  $U$  e  $V$ , allora  $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$  è candidato di tipo  $U \rightarrow V$ .

*Dimostrazione.* Per mostrare (CR1) prendiamo  $t \in \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$  e una variabile  $x$  di tipo  $U$ . Poiché le variabili sono sia normali che neutri,  $x \in \mathcal{R}$  e quindi  $tx \in \mathcal{S}$ . Inoltre  $\nu(t) < \nu(tx)$ , e quindi siccome  $tx$  è fortemente normalizzabile, anche  $t$  lo è.

Per (CR2), se  $t \rightsquigarrow t'$ , per ogni  $u \in \mathcal{R}$  si ha che  $tu \rightsquigarrow t'u$ . Usando la (CR2) su  $\mathcal{S}$ , si ottiene che  $t'u \in \mathcal{S}$ . Allora  $t'\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$ .

Infine consideriamo  $t$  neutrale di tipo  $U \rightarrow V$  per cui per tutte le conversioni di uno step  $t \rightsquigarrow t'$  si ha che  $t' \in \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$ . Sia  $u \in \mathcal{R}$ , e per induzione su  $\nu(u)$  dimostriamo che  $tu$  si riduce in uno step a termini in  $\mathcal{S}$ . Infatti poiché  $t$  è normale,  $tu$  si può ridurre solo a  $t'u$  o a  $tu'$  per opportuni termini  $t'$  e  $u'$ . Ma il primo appartiene a  $\mathcal{S}$  perchè  $t' \in \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$ , e il secondo ci appartiene per ipotesi induttiva in quanto  $\nu(u') < \nu(u)$ . Per (CR3) su  $\mathcal{S}$  allora  $tu \in \mathcal{S}$ .  $\square$

**Definizione 6** Sia  $T[\underline{X}]$  un tipo con variabili libere in  $\underline{X}$ . Sia  $\underline{U}$  un vettore di tipi della stessa lunghezza e siano  $\mathcal{R}$  dei rispettivi candidati. Possiamo allora definire l'insieme  $\text{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$  di termini riducibili parametrici di tipo  $[\underline{U}/\underline{X}]$  nel modo seguente:

- (1) Se  $T = X_i$  per qualche indice  $i$ , allora  $\text{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \mathcal{R}_i$ .
- (2) Se  $T = V \rightarrow U$ , allora  $\text{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \text{RED}_V[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] \rightarrow \text{RED}_U[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ .
- (3) Se  $T = \Pi Y.W$ , allora  $\text{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$  è l'insieme dei termini  $t$  di tipo  $[\underline{U}/\underline{X}]$  tali che per ogni tipo  $V$  e per ogni candidato  $\mathcal{S}$  di tale tipo vale che  $tV \in \text{RED}_W[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\mathcal{S}/Y]$ .

**Lemma 7**  $\text{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$  è un candidato di riducibilità di tipo  $[\underline{U}/\underline{X}]$ .

*Dimostrazione.* Lo facciamo per induzione sulla complessità del tipo  $T$ . Il caso in cui  $T$  è una variabile individuale, il teorema è una tautologia. Il caso in cui  $T = V \rightarrow W$  lo abbiamo già fatto. Manca solo il caso in cui  $T = \Pi Y.W$ .

Verifichiamo (CR1). Sia  $t \in \text{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ ,  $V$  un tipo e  $\mathcal{S}$  un suo candidato. Allora  $tV \in \text{RED}_W[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\mathcal{S}/Y]$  per definizione. Usando l'ipotesi induttiva sul tipo  $W$  si ha che  $tV$  è fortemente normalizzabile. Ma vale anche che  $\nu(t) < \nu(tV)$ . Quindi anche  $t$  è fortemente normalizzabile.

Per (CR2), supponiamo di avere  $t \rightsquigarrow t'$  con uno step di conversione. Allora,  $tV \rightsquigarrow t'V$ , per cui  $t'V \in \text{RED}_W[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\mathcal{S}/Y]$  e quindi  $t' \in \text{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ .

Infine, per (CR3), consideriamo  $t$  un qualunque termine di tipo  $T$  neutrale. Supponiamo che per ogni  $t'$  ottenuto dalla conversione di  $t$  in un singolo step si abbia  $t'$  riducibile parametrico. Allora per ogni tipo  $V$  e relativo candidato  $\mathcal{S}$ , le uniche conversioni di  $tV$  sono della forma  $tV \rightsquigarrow t'V$ . Usando l'ipotesi induttiva allora anche  $tV$  è riducibile parametrico, e quindi si ha la tesi.  $\square$

**Lemma 8**  $\text{RED}_{T[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \text{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\text{RED}_V[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]/Y]$ .

*Dimostrazione.* Come prima, facciamo un'induzione sulla complessità del tipo  $T$ . Per comodità, usiamo l'abbreviazione  $A = \text{RED}_V[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ .

Iniziamo con il caso in cui  $T = Z$  è una variabile individuale diversa da  $Y$ . Allora vale che

$$\text{RED}_{T[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \text{RED}_Z[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \text{RED}_Z[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][A/Y].$$

Se invece  $T = Y$  si ha che

$$\text{RED}_{T[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \text{RED}_Y[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \text{RED}_Y[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][[V/[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]]/Y].$$

Consideriamo ora il caso in cui  $T = U \rightarrow W$ . Vale che

$$\begin{aligned} \text{RED}_{T[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] &= \text{RED}_{U[V/Y] \rightarrow W[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \\ &= \text{RED}_{U[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] \rightarrow \text{RED}_{W[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \\ &= \text{RED}_U[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][A/Y] \rightarrow \text{RED}_W[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][A/Y] = \\ &= \text{RED}_{U \rightarrow W}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][A/Y]. \end{aligned}$$

Sia  $Z$  come prima e svolgiamo il caso  $T = \Pi Z.W$ . Per definizione,  $\text{RED}_{\Pi Z.W[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$  è l'insieme di tutti i termini  $t$  per cui per ogni tipo  $U$  e relativo candidato  $\mathcal{S}$  vale che

$$tU \in \text{RED}_{W[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\mathcal{S}/Z] = \text{RED}_W[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\mathcal{S}/Z][A/Y].$$

Dunque si ottiene la tesi per la definizione di  $\text{RED}_{\Pi Z.W}$ .

Infine il caso in cui  $T = \Pi Y.W$  è semplice perchè  $Y$  non occorre libera in  $T$ .  $\square$

**Lemma 9** Se per ogni tipo  $V$  e per ogni candidato di riducibilità  $\mathcal{S}$  per  $V$  vale che  $w[V/Y] \in \text{RED}_W[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\mathcal{S}/Y]$ , allora  $\Lambda Y.w \in \text{RED}_{\Pi Y.W}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo per induzione su  $\nu(w)$  che tutte le conversioni in uno step di  $(\Lambda Y.w)V$  sono in  $\text{RED}_W[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\mathcal{S}/Y]$ . Una conversione di tali conversioni possono essere soltanto di due forme. La prima è  $(\Lambda Y.w')V$ , con  $w'$  una conversione di  $w$ . Ma allora  $\nu(w') < \nu(w)$  e si usa l'ipotesi induttiva. La seconda forma è del tipo  $w[V/Y]$ , e questa è riducibile parametrico per ipotesi del lemma.

Allora la dimostrazione si conclude per (CR3).  $\square$

**Lemma 10** Se  $t \in \text{RED}_{\Pi Y.W}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ , allora  $tV \in \text{RED}_{W[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$  per ogni tipo  $V$ .

*Dimostrazione.* Per la definizione di  $\text{RED}_{\Pi Y.W}$ , per ogni candidato  $\mathcal{S}$  per  $V$  vale che  $tV \in \text{RED}_W[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\mathcal{S}/Y]$ . Allora vale anche per  $\mathcal{S} = \text{RED}_V[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$  e la tesi segue per il lemma XXX.  $\square$

**Lemma 11** Se per ogni  $u \in \text{RED}_U[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$  vale che  $v[u/x] \in \text{RED}_V[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ , allora  $\lambda x^U.v \in \text{RED}_{U \rightarrow V}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo per induzione su  $\nu(u) + \nu(v)$  che tutte le conversioni di  $(\lambda x^U.v)u$  sono riducibili parametrici. Infatti tale termine si converte in  $(\lambda x^U.v)u'$ , con  $u'$  conversione di  $u$ , oppure in  $(\lambda x^U.v')u$  con  $v'$  conversione di  $v$ , oppure in  $v[u/x]$ . I primi due casi si risolvono con l'ipotesi induttiva, il terzo con l'ipotesi del lemma.

Infine il teorema si dimostra per la proprietà (CR3).  $\square$

**Definizione 12** Un termine  $t$  di tipo  $T$  è riducibile se è in  $\text{RED}_T[\underline{\mathcal{SN}}/\underline{X}]$  dove  $X_1, \dots, X_m$  sono le variabili libere di  $T$  e  $\underline{\mathcal{SN}}_i$  è l'insieme dei termini fortemente normalizzabili di tipo  $X_i$ .

**Proposizione 13** Sia  $t$  un termine di tipo  $T$  le cui variabili libere sono  $x_1, \dots, x_n$  di tipo rispettivamente  $U_1, \dots, U_n$ . Supponiamo che le variabili libere dei tipi  $T$  e di tutti gli  $U_i$  siano  $X_1, \dots, X_m$ . Siano  $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_m$  candidati di riducibilità per dei tipi  $V_1, \dots, V_m$  e siano inoltre  $u_1, \dots, u_n$  termini di tipo  $U_1[V/X], \dots, U_n[V/X]$  presi nei rispettivi  $\text{RED}_{U_i}[\mathcal{R}/X]$ . Allora  $t[V/X][u/x] \in \text{RED}_T[\mathcal{R}/X]$ .

*Dimostrazione.* Per induzione sulla complessità di  $t$ . Distinguiamo allora i seguenti casi:

- (i)  $t = x_i$ . Questo caso è una tautologia.
- (ii)  $t = wv$ , con  $w$  di tipo  $W \rightarrow T$  e  $v$  di tipo  $W$ . Per ipotesi induttiva vale che  $w[V/X][u/x] \in \text{RED}_{W \rightarrow T}[\mathcal{R}/X]$  e che  $v[V/X][u/x] \in \text{RED}_W[\mathcal{R}/X]$ . In questo caso la tesi segue dalla definizione di  $\text{RED}_{W \rightarrow T}$ .
- (iii)  $t = wS$ . Questo caso è una diretta conseguenza del lemma XXX sull'istanziamento.
- (iv)  $t = \Lambda Z.Y$ . Questo discende dal lemma XXX sulla generalizzazione.
- (v)  $t = \lambda y^P.w$ . Questo caso si fa con il lemma XXX sui tipi freccia.

□

**Proposizione 14** Tutti i termini del sistema F sono riducibili.

*Dimostrazione.* Basta usare la proposizione precedente e prendere  $\mathcal{R}_i = \mathcal{SN}_i$  e  $u_i = x_i$ . □

**Teorema 15** Tutti i termini del sistema F sono fortemente normalizzabili.