Normalizzazione Forte per il Sistema F

Alessio Marchetti

Definizione 1 Un termine t si dice neutrale se è in una delle seguenti forme: x, $t'U$ o $t'U$, in cui x è una variabile, t' è un termine e U è un tipo.

Definizione 2 Un candidato di riducibilità (o semplicemente candidato) di tipo U è un insieme $\mathcal{R}$ di termini di tipo U per cui valgono:

(CR1) Se $t \in \mathcal{R}$ allora t è fortemente normalizzabile.
(CR2) Se $t \in \mathcal{R}$ e t' è un termine ottenuto da una riduzione di t, cioè $t \rightsquigarrow t'$, allora $t' \in \mathcal{R}$.
(CR3) Se t è neutrale, e per ogni conversione di uno step di t si ottiene un termine $t' \in \mathcal{R}$, allora anche $t \in \mathcal{R}$.

Definizione 3 Dato un termine t, si definisce $\nu(t)$ come la massimo numero di step di conversione necessari a portare t in forma normale. In particolare $\nu(t) = \infty$ se e solo se t non è fortemente normalizzabile.

Definizione 4 Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ sono insiemi di termini di tipo rispettivamente U e V, si definisce l'insieme $\mathcal{R} \to \mathcal{S}$ come l'insieme dei termini di tipo $U \to V$ per cui per ogni termine $u \in \mathcal{R}$ si ha che $tu \in \mathcal{S}$.

Lemma 5 Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ sono candidati per i tipi U e V, allora $\mathcal{R} \to \mathcal{S}$ è candidato di tipo $U \to V$.

Dimostrazione. Per mostrare (CR1) prendiamo $t \in \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ e una variabile x di tipo U. Poiché le variabili sono sia normali che che neutrali, $x \in \mathcal{R}$ e quindi $tx \in \mathcal{S}$. Inoltre $\nu(t) < \nu(tx)$, e quindi siccome tx è fortemente normalizzabile, anche t lo è.

Per (CR2),se $t \rightsquigarrow t'$, per ogni $u \in \mathcal{R}$ si ha che $tu \rightsquigarrow t'u$. Usando la (CR2) su $\mathcal{S}$, si ottiene che $t'u \in \mathcal{S}$. Allora $t'\mathcal{R} \to \mathcal{S}$.

Infine consideriamo t neutrale di tipo $U \to V$ per cui per tutte le conversioni di uno step $t \rightsquigarrow t'$ si ha che $t' \in \mathcal{R} \to \mathcal{S}$. Sia $u \in \mathcal{R}$, e per induzione su $\nu(u)$ dimostriamo che tu si riduce in uno step a termini in $\mathcal{S}$. Infatti poiché t è normale, tu si può ridurre solo a $t'u$ o a tu' per opportuni termini t' e u'. Ma il primo appartiene a $\mathcal{S}$ perchè $t' \in \mathcal{R} \to \mathcal{S}$, e il secondo ci appartiene per ipotesi induttiva in quanto $\nu(u') < \nu(u)$. Per (CR3) su $\mathcal{S}$ allora $tu \in \mathcal{S}$. $\square$

Definizione 6 Sia $T[\underline{X}]$ un tipo con variabili libere in $\underline{X}$. Sia $\underline{U}$ un vettore di tipi della stessa lunghezza e siano $\mathcal{R}$ dei rispettivi candidati. Possiamo allora definire l'insieme $\mathrm{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ di termini riducibili parametrici di tipo $[\underline{U}/\underline{X}]$ nel modo seguente:

(1) Se $T = X_i$ per qualche indice i, allora $\mathrm{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \mathcal{R}_i$.
(2) Se $T = V \to U$, allora $\mathrm{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \mathrm{RED}_V[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] \to \mathrm{RED}_W[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$.
(3) Se $T = \Pi Y.W$, allora $\mathrm{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ è l'insieme dei termini t di tipo $[\underline{U}/\underline{X}]$ tali che per ogni tipo V e per ogni candidato $\mathcal{S}$ di tale tipo vale che $tV \in \mathrm{RED}_W[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\mathcal{S}/Y]$.

Lemma 7 $\mathrm{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ è un candidato di riducibilità di tipo $[\underline{U}/\underline{X}]$.

Dimostrazione. Lo facciamo per induzione sulla complessità del tipo T. Il caso in cui T è una variabile individuale, il teorema è una tautologia. Il caso in cui $T = V \to W$ lo abbiamo già fatto. Manca solo il caso in cui $T = \Pi Y.W$.

Verifichiamo (CR1). Sia $t \in \mathrm{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$, V un tipo e $\mathcal{S}$ un suo candidato. Allora $tV \in \mathrm{RED}_W[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\mathcal{S}/Y]$ per definizione. Usando l'ipotesi induttiva sul tipo W si ha che tV è fortemente normalizzabile. Ma vale anche che $\nu(t) < \nu(tV)$. Quindi anche t è fortemente normalizzabile.

Per (CR2), supponiamo di avere $t \rightsquigarrow t'$ con uno step di conversione. Allora, $tV \rightsquigarrow t'V$, per cui $t'V \in \mathrm{RED}_W[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\mathcal{S}/Y]$ e quindi $t' \in \mathrm{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$.

Infine, per (CR3), consideriamo t un qualunque termine di tipo T neutrale. Supponiamo che per ogni t' ottenuto dalla conversione di t in un singolo step si abbia t' riducibile parametrico. Allora per ogni tipo V e relativo condidato $\mathcal{S}$, le uniche conversioni di tV sono della forma $tV \rightsquigarrow t'V$. Usando l'ipotesi induttiva allora anche tV è riducibile parametrico, e quindi si ha la tesi. □

Lemmma 8 $\mathrm{RED}_{T[V/Y]} = \mathrm{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\mathrm{RED}_V[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]/Y]$.

Dimostrazione. Come prima, facciamo un'induzione sulla complessità del tipo T. Per comodità, usiamo l'abbreviazione $A = \mathrm{RED}_V[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$.

Iniziamo con il caso in cui $T = Z$ è una variabile individuale diversa da Y. Allora vale che

$$\mathrm{RED}_{T[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \mathrm{RED}_Z[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \mathrm{RED}_Z[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][A/Y].$$

Se invece $T = Y$ si ha che

$$\mathrm{RED}_{T[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \mathrm{RED}_V[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \mathrm{RED}_Y[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][[V/[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]]/Y].$$

Consideriamo ora il caso in cui $T = U \to W$. Vale che

$$\begin{aligned}\mathrm{RED}_{T[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] =&\mathrm{RED}_{U[V/Y]\to W[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \\ &\mathrm{RED}_{U[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] \to \mathrm{RED}_{W[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \\ &\mathrm{RED}_{U}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][A/Y] \to \mathrm{RED}_{W}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][A/Y] = \\ &\mathrm{RED}_{U\to W}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][A/Y].\end{aligned}$$

Sia Z come prima e svolgiamo il caso $T = \Pi Z.W$. Per definizione, $\mathrm{RED}_{\Pi Z.W[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ è l'insieme di tutti i termini t per cui per ogni tipo U e relativo candidato $\mathcal{S}$ vale che

$$tU \in \mathrm{RED}_{W[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\mathcal{S}/Z] = \mathrm{RED}_{W}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\mathcal{S}/Z][A/Y].$$

Dunque si ottiene la tesi per la definizione di $\mathrm{RED}_{\Pi Z.W}$.

Infine il caso in cui $T = \Pi Y.W$ è semplice perchè Y non occorre libera in T. $\square$

Lemma 9 Se per ogni tipo V e per ogni candidato di riducibilità $\mathcal{S}$ per V vale che $w[V/Y] \in \mathrm{RED}_W[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\mathcal{S}/Y]$, allora $\Lambda Y.w \in \mathrm{RED}_{\Pi Y.W}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su $\nu(w)$ che tutte le conversioni in uno step di $(\Lambda Y.w)V$ sono in $\mathrm{RED}_W[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\mathcal{S}/Y]$. Una conversione di tali conversioni possono essere soltanto di due forme. La prima è $(\Lambda Y.w')V$, con w' una conversione di w. Ma allora $\nu(w') < \nu(w)$ e si usa l'ipotesi induttiva. La seconda forma è del tipo $w[V/Y]$, e questa è riducibile parametrico per ipotesi del lemma.

Allora la dimstrazione si conclude per (CR3). $\square$

Lemma 10 Se $t \in \mathrm{RED}_{\Pi Y.W}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$, allora $tV \in \mathrm{RED}_{W[V/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ per ogni tipo V.

Dimostrazione. Per la definizione di $\mathrm{RED}_{\Pi Y.W}$, per ogni candidato $\mathcal{S}$ per V vale che $tV \in \mathrm{RED}_W[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}][\mathcal{S}/Y]$. Allora vale anche per $\mathcal{S} = \mathrm{RED}_V[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ e la tesi segue per il lemma XXX. $\square$

Definizione 11 Un termine t di tipo T è riducibile se è in $\mathrm{RED}_T[\underline{\mathcal{SN}}/\underline{X}]$ dove $X_1, \dots, X_m$ sono le variabili libere di T e $\underline{\mathcal{SN}}_i$ è l'insieme dei termini fortemente normalizzabili di tipo X_i.

Proposizione 12 Sia t un termine di tipo T le cui variabili libere sono $x_1, \dots, x_n$ di tipo rispettivamente $U_1, \dots, U_n$. Supponiamo che le variabili libere dei tipi T e di tutti gli U_i siano $X_1, \dots, X_m$. Siano $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_m$ candidati di riducibilità per dei tipi $V_1, \dots, V_m$ e siano inoltre $u_1, \dots, u_n$ termini di tipo $U_1[\underline{V}/\underline{X}], \dots U_n[\underline{V}/\underline{X}]$ presi nei rispettivi $\mathrm{RED}_{U_i}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$. Allora $t[\underline{V}/\underline{X}][\underline{u}/\underline{x}] \in \mathrm{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$.