Lambda calcolo del Secondo Ordine

Alessio Marchetti

Il λ-calcolo

I λ-termini sono parole sull'alfabeto costituito da variabili $x_0, x_1, \ldots,$ dall'astrattore λ e dalle parentesi $(,)$.

Definiamo induttivamente il loro insieme Λ come:

- $x_i \in \Lambda$ per tutte le variabili x_i.
- $t \in \Lambda \;\Rightarrow\; (\lambda x_i.t) \in \Lambda$ per tutte le variabili x_i.
- $t, u \in \Lambda \;\Rightarrow\; (tu) \in \Lambda$.

Semplificare la notazione

L'astrazione si associa a destra:

$$\lambda x_1 \cdots x_n.t = \lambda x_1. \cdots \lambda x_n.t = (\lambda x_1.(\lambda x_2. \cdots (\lambda x_n.(t)) \cdots)$$

L'applicazione si associa a sinistra:

$$t_1 \cdots t_n = (\cdots (t_1) \cdots t_n)$$

Un sottotermine di t è un qualunque termine u utilizzato nella costruzione induttiva di t.
Esempio: xy è un sottotermine di $\lambda x.xyz$.

Riduzione

Un termine t si converte a un termine t' se sono nella forma

$$t = (\lambda x.u)v \qquad t' = u[v/x]$$

dove l'espressione $u[v/x]$ indica la sostituzione di v nella variabile u. Si dice che t' è una conversione di t.

Un termine u si riduce a un termine u' se esiste una successione di passi $u = u_1 = \cdots = u_n = u'$ in cui ogni u_{i+1} è ottenuto sostituendo un sottotermine di u_i con una sua conversione. In questo caso si scrive $u \rightsquigarrow u'$.

Esempio di Riduzione

$$(\lambda x.xx)(\lambda y.y)z \rightsquigarrow (\lambda y.y)(\lambda y.y)z \rightsquigarrow (\lambda y.y)z \rightsquigarrow z.$$

z non può essere ulteriormente ridotto, si dice che è in forma normale.

$$\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \rightsquigarrow (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \rightsquigarrow \cdots$$

Ω non ha una forma normale.

I numeri naturali

Si possono rappresentare i numeri naturali con termini del tipo

$$\bar{n} = \lambda s.\lambda z.\underbrace{s(s(\cdots(s}_{n \text{ ripetizioni}}(z))\cdots)).$$

$\bar{n}$ è il funzionale che compone n volte la funzione data in input.

$$\bar{3}fx \rightsquigarrow f(f(f(x))) = f^3x$$

Questi numerali sono in forma normale.

Funzioni rappresentabili

Un lambda termine E rappresenta un una funzione parziale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ se per ogni intero n

$$E\,\bar{n} \rightsquigarrow \overline{m}$$

se e solo se $f(n) = m$.

Alcuni esempi

$$A = \lambda p.\lambda q.\lambda f.\lambda x.(pf)(qfx)$$

$$A\bar{3}\bar{2} \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.(\bar{3}f)(\bar{2}fx) \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.f^3(f^2x) = \bar{5}.$$

$$M = \lambda p.\lambda q.\lambda f.\lambda x.q(pf)x$$

$$M\bar{3}\bar{2} \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.\bar{2}(\bar{3}f)x \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.(\bar{3}f)(\bar{3}f)x \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.f^3f^3x = \bar{6}.$$

$$E = \lambda p.\lambda q.\lambda f.\lambda x.qpfx$$

$$E\bar{3}\bar{2} \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.\bar{2}\bar{3}fx \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.\bar{3}\bar{3}fx \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.\bar{3}^3fx = \bar{9}.$$

Due riduzioni "patologiche"

Un termine che non diventa più semplice:

$$\omega_3\omega_3 = (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx) \rightsquigarrow (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx) \rightsquigarrow \cdots$$

Un termine normalizzante ma non fortemente normalizzante:

$$(\lambda x.y)(\omega_3\omega_3) \rightsquigarrow y$$

$$(\lambda x.y)(\omega_3\omega_3) \rightsquigarrow (\lambda x.y)(\omega_3\omega_3\omega_3) \rightsquigarrow \cdots$$

Lambda calcolo tipato semplice (1)

Idea: aggiungere vincoli sul come applicare un termine ad un altro.

Si definiscono induttivamente i tipi come:

- I tipi variabile $U_1, U_2, \ldots$ sono tipi.
- Se U e V sono tipi $(U \to V)$ è un tipo.

Per comodità $\to$ si associa a destra:

$$U_1 \to U_2 \to \cdots \to U_n = (U_1 \to (U_2 \to (\cdots \to (U_n) \cdots))).$$

Lambda calcolo tipato semplice (2)

I termini si definiscono come:

- Le variabili di tipo U sono $x_1, x_2, \ldots$ per ogni tipo U.
- Se x è una variabile di tipo U e t è un termine di tipo V, allora $\lambda x.t$ è un termine di tipo $U \to V$.
- Se f è un termine di tipo $U \to V$ e t è un termine di tipo U, allora ft è un termine di tipo V.

Per indicare che un termine t è di tipo U si scrive anche t^U.

Numerali

Sia U un tipo. Si definiscono i numerali come i termini

$$\bar{n} = \lambda s^{U \to U}.\lambda z^{U}.\underbrace{s(s(\cdots(s}_{n \text{ ripetizioni}}(z))\cdots)).$$

La definizione è uguale alla precedente, ma con le variabili tipate.

Funzioni rappresentabili

Sia I il tipo $(U \to U) \to (U \to U)$. Somma e moltiplicazione come definite prima si possono tipare:

$$A = \lambda p^I.\lambda q^I.\lambda f^{U\to U}.\lambda x^U.(pf)(qfx)$$

$$M = \lambda p^I.\lambda q^I.\lambda f^{U\to U}.\lambda x^U.q(pf)x$$

L'esponenziazione, che era stata precedente definita come

$$E = \lambda p.\lambda q.\lambda f.\lambda x.qpfx$$

non si può tipare. Le funzioni rappresentabili in questo calcolo sono esattamente le funzioni polinomiali a tratti.

Lambda calcolo del Secondo Ordine (1)

Si definiscono induttivamente i tipi come:

- I tipi variabile $U_1, U_2, \ldots$ sono tipi.
- Se U e V sono tipi $(U \to V)$ è un tipo.
- Se X è un tipo variabile e U è un tipo, allora $(\Pi X.U)$ è un tipo.

Lambda calcolo del Secondo Ordine (2)

I termini si definiscono come:

- Le variabili di tipo U sono $x_1, x_2, \ldots$ per ogni tipo U.
- Se x è una variabile di tipo U e t è un termine di tipo V, allora $\lambda x.t$ è un termine di tipo $U \to V$.
- Se f è un termine di tipo $U \to V$ e t è un termine di tipo U, allora ft è un termine di tipo V.
- Se t è un termine di tipo $\Pi X.U$ e V è un tipo, allora tV è un termine di tipo $U[V/X]$.
- Se t è un termine di tipo U e X è una variabile tipo che non compare libera nei tipi delle variabili libere di t, allora $\Lambda X.t$ è un termine di tipo $\Pi X.U$.

Numerali

Definiamo il tipo intero

$$N = \Pi X.(X \to X) \to (X \to X).$$

I numerali hanno la forma

$$\bar{n} = \Lambda X.\lambda f^{X \to X}.\lambda x^{X}.f^{n}x.$$

L'esponenziale

In questo caso si può definire l'esponenziale:

$$E = \lambda p^N . \lambda q^N \Lambda X . \lambda f^{X \to X} . \lambda x^X . q(X \to X)(pX) fx.$$

$$\begin{aligned}
E\bar{2}\bar{3} \rightsquigarrow & \Lambda X . \lambda f^{X \to X} . \lambda x^X . \bar{3}(X \to X)(\bar{2}X) f \rightsquigarrow \\
& \Lambda X . \lambda f^{X \to X} . \lambda x^X . (\lambda g^{(X \to X) \to (X \to X)} . \lambda y^{X \to X} . g^3 y)(\bar{2}X) fx \rightsquigarrow \\
& \Lambda X . \lambda f^{X \to X} . \lambda x^X . (\bar{2}X)^3 fx \rightsquigarrow \\
& \Lambda X . \lambda f^{X \to X} . \lambda x^X . (\lambda g^{X \to X} . \lambda y^X . g^2 y)^3 fx \rightsquigarrow \\
& \Lambda X . \lambda f^{X \to X} . \lambda x^X . (\lambda g^{X \to X} . \lambda y^X . g^2 y)^2 f^2 x \rightsquigarrow \\
& \Lambda X . \lambda f^{X \to X} . \lambda x^X . (\lambda g^{X \to X} . \lambda y^X . g^2 y) f^4 x \rightsquigarrow \\
& \Lambda X . \lambda f^{X \to X} . \lambda x^X . f^8 x \rightsquigarrow \bar{8}
\end{aligned}$$

Normalizzazione forte

Un calcolo è fortemente normalizzante quando tutti i suoi termini sono fortemente normalizzanti, ovvero ogni percorso di riduzione porta a una forma normale.

Il lambda calcolo tipato semplice e tipato al secondo ordine sono fortemente normalizzanti.

Normalizzazione forte per il tipato semplice

Definiamo la riducibilità:

- I riducibili di tipo variabile U sono i termini di tipo U fortemente normalizzanti.
- I riducibili di tipo $U \to V$, per U, V tipi qualunque, sono i termini f di tipo $U \to V$ tali che per ogni t riducibile di tipo U, ft è riducibile di tipo V.

Proprietà dei riducibili

1. I riducibili sono fortemente normalizzanti.
2. Se t è riducibile e $t \rightsquigarrow u$, allora anche u è riducibile.
3. Sia t una variabile oppure un termine nella forma uv. Se ogni riduzione di t in uno step porta a un termine riducibile, allora t è riducibile.

Si dimostra per induzione sulla complessità dei termini che tutti i termini sono riducibili.

Un tentativo di riadattamento

Si vuole provare a estendere il concetto di riducibilità anche per i termini del secondo ordine.

"Un termine t di tipo $\Pi X.U$ è riducibile se per ogni tipo V, tV è riducibile di tipo $U[V/X]$."

Definizione impredicativa: per esempio $V = \Pi X.U$.

Candidati di riducibilità

Un candidato di riducibilità per un tipo U è un insieme $\mathcal{R}$ per cui valgono:

1. Se $t \in \mathcal{R}$, allora t è fortemente normalizzante.
2. Se $t \in \mathcal{R}$ e $t \leadsto u$, allora $u \in \mathcal{R}$.
3. Sia t un termine di tipo U che sia una variabile oppure un'applicazione nella forma uv o uU. Se ogni conversione in un passo di t porta a un termine in $\mathcal{R}$, allora $t \in \mathcal{R}$.

Riducibilità parametrica

Sia T un tipo con variabili tipo libere in $\underline{X}$.
Siano $\underline{U}$ dei tipi e $\underline{\mathcal{R}}$ rispettivi candidati.

Definiamo i riducibili parametrici $\mathrm{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ di tipo $T[\underline{U}/\underline{X}]$ come:

- Se $T = X_i$, allora $\mathrm{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}] = \mathcal{R}_i$.
- Se $T = V \to W$, allora $f \in \mathrm{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ se per ogni $t \in \mathrm{RED}_V[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$, vale che $ft \in \mathrm{RED}_W[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$.
- Se $T = \Pi Y.V$, allora $t \in \mathrm{RED}_T[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}]$ se per ogni tipo W e per ogni candidato $\mathcal{S}$ per W vale che $tW \in \mathrm{RED}_{V[W/Y]}[\underline{\mathcal{R}}/\underline{X}, \mathcal{S}/Y]$.

I riducibili parametrici sono candidati di riducibilità.

Normalizzazione per il secondo ordine

A questo punto si possono definire i riducibili di tipo T come i termini in $\mathrm{RED}_T[\underline{\mathcal{SN}}/\underline{X}]$, dove gli X_i sono i tipi delle variabili tipo libere di T e gli $\mathcal{SN}_i$ sono i termini fortemente normalizzanti di tipo X_i.

Si dimostra poi che tutti i termini sono riducibili, e quindi fortemente normalizzanti.

Cosa ci si perde?

Le funzioni rappresentabili sono esattamente quelle dimostrabilmente totali nell'artimetica del secondo ordine.