Rappresentabilità di Funzioni nel Lambda-calcolo Polimorfico

Candidato: Alessio Marchetti
Relatori: Alessandro Berarducci, Marcello Mamino

Il λ-calcolo

I λ-termini sono parole sull'alfabeto costituito da variabili $x_0, x_1, \ldots,$ dall'astrattore λ e dalle parentesi $(,)$.

Definiamo induttivamente il loro insieme Λ come:

- $x_i \in \Lambda$ per tutte le variabili x_i.
- $t \in \Lambda \;\Rightarrow\; (\lambda x_i.t) \in \Lambda$ per tutte le variabili x_i.
- $t, u \in \Lambda \;\Rightarrow\; (tu) \in \Lambda$.

Semplificare la notazione

L'astrazione si associa a destra:

$$\lambda x_1 \cdots x_n.t = \lambda x_1. \cdots \lambda x_n.t = (\lambda x_1.(\lambda x_2. \cdots (\lambda x_n.(t)) \cdots)$$

L'applicazione si associa a sinistra:

$$t_1 \cdots t_n = (\cdots (t_1) \cdots t_n)$$

Un sottotermine di t è un qualunque termine u utilizzato nella costruzione induttiva di t.
Esempio: xy è un sottotermine di $\lambda x.xyz$.

Riduzione

Un sottotermine t si converte a un sottotermine t' se sono nella forma

$$t = (\lambda x.u)v \qquad t' = u[v/x]$$

dove l'espressione $u[v/x]$ indica la sostituzione di v nelle occorrenze libere di x. Si dice che t' è una conversione di t.

Un termine u si riduce a un termine u' se esiste una successione di passi $u = u_1 = \cdots = u_n = u'$ in cui ogni u_{i+1} è ottenuto sostituendo un sottotermine di u_i con una sua conversione. In questo caso si scrive $u \rightsquigarrow u'$.

Esempio di Riduzione

$$(\lambda x.xx)(\lambda y.y)z \rightsquigarrow (\lambda y.y)(\lambda y.y)z \rightsquigarrow (\lambda y.y)z \rightsquigarrow z.$$

z non può essere ulteriormente ridotto, si dice che è in forma normale.

$$\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \rightsquigarrow (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \rightsquigarrow \cdots$$

Ω non ha una forma normale.

I numeri naturali

Si possono rappresentare i numeri naturali con termini del tipo

$$\bar{n} = \lambda s.\lambda z.\, \underbrace{s(s(\cdots(s}_{n \text{ ripetizioni}}(z))\cdots)).$$

$\bar{n}$ è il funzionale che compone n volte la funzione data in input.

$$\bar{3}fx \rightsquigarrow f(f(f(x))) = f^3x$$

Questi numerali sono in forma normale.

Funzioni rappresentabili

Un lambda termine E rappresenta un una funzione parziale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ se per ogni intero n

$$E\,\bar{n} \rightsquigarrow \overline{m}$$

se e solo se $f(n) = m$.

Alcuni esempi

$$A = \lambda p.\lambda q.\lambda f.\lambda x.(pf)(qfx)$$

$$A\bar{3}\bar{2} \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.(\bar{3}f)(\bar{2}fx) \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.f^3(f^2x) = \bar{5}.$$

$$M = \lambda p.\lambda q.\lambda f.\lambda x.q(pf)x$$

$$M\bar{3}\bar{2} \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.\bar{2}(\bar{3}f)x \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.(\bar{3}f)(\bar{3}f)x \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.f^3f^3x = \bar{6}.$$

$$E = \lambda p.\lambda q.\lambda f.\lambda x.qpfx$$

$$E\bar{3}\bar{2} \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.\bar{2}\bar{3}fx \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.\bar{3}\bar{3}fx \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.\bar{3}^3fx = \bar{9}.$$

Due riduzioni "patologiche"

Un termine che non diventa più semplice:

$$\omega_3\omega_3 = (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx) \rightsquigarrow (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx) \rightsquigarrow \cdots$$

Un termine normalizzante ma non fortemente normalizzante:

$$(\lambda x.y)(\omega_3\omega_3) \rightsquigarrow y$$

$$(\lambda x.y)(\omega_3\omega_3) \rightsquigarrow (\lambda x.y)(\omega_3\omega_3\omega_3) \rightsquigarrow \cdots$$

Lambda calcolo tipato semplice (1)

Idea: aggiungere vincoli sul come applicare un termine ad un altro.

Si definiscono induttivamente i tipi come:

- I tipi variabile $U_1, U_2, \ldots$ sono tipi.
- Se U e V sono tipi $(U \to V)$ è un tipo.

Per comodità $\to$ si associa a destra:

$$U_1 \to U_2 \to \cdots \to U_n = (U_1 \to (U_2 \to (\cdots \to (U_n) \cdots))).$$

Lambda calcolo tipato semplice (2)

I termini si definiscono come:

- Le variabili di tipo U sono $x_1, x_2, \ldots$ per ogni tipo U.
- Se x è una variabile di tipo U e t è un termine di tipo V, allora $\lambda x.t$ è un termine di tipo $U \to V$.
- Se f è un termine di tipo $U \to V$ e t è un termine di tipo U, allora ft è un termine di tipo V.

Per indicare che un termine t è di tipo U si scrive anche t^U.

Numerali

Sia U un tipo. Si definiscono i numerali come i termini

$$\bar{n} = \lambda s^{U \to U}.\lambda z^{U}.\underbrace{s(s(\cdots(s}_{n \text{ ripetizioni}}(z))\cdots)).$$

La definizione è uguale alla precedente, ma con le variabili tipate.

Funzioni rappresentabili

Sia I il tipo $(U \to U) \to (U \to U)$. Somma e moltiplicazione come definite prima si possono tipare:

$$A = \lambda p^I.\lambda q^I.\lambda f^{U \to U}.\lambda x^U.(pf)(qfx)$$

$$M = \lambda p^I.\lambda q^I.\lambda f^{U \to U}.\lambda x^U.q(pf)x$$

L'esponenziazione, che era stata precedente definita come

$$E = \lambda p.\lambda q.\lambda f.\lambda x.qpfx$$

non si può tipare. Le funzioni rappresentabili in questo calcolo sono esattamente le funzioni polinomiali a tratti.

Lambda calcolo del Secondo Ordine (1)

Si definiscono induttivamente i tipi come:

- I tipi variabile $U_1, U_2, \ldots$ sono tipi.
- Se U e V sono tipi $(U \to V)$ è un tipo.
- Se X è un tipo variabile e U è un tipo, allora $(\Pi X.U)$ è un tipo.

Lambda calcolo del Secondo Ordine (2)

I termini si definiscono come:

- Le variabili di tipo U sono $x_1, x_2, \dots$ per ogni tipo U.
- Se x è una variabile di tipo U e t è un termine di tipo V, allora $\lambda x.t$ è un termine di tipo $U \to V$.
- Se f è un termine di tipo $U \to V$ e t è un termine di tipo U, allora ft è un termine di tipo V.
- Se t è un termine di tipo $\Pi X.U$ e V è un tipo, allora tV è un termine di tipo $U[V/X]$.
- Se t è un termine di tipo U e X è una variabile tipo che non compare libera nei tipi delle variabili libere di t, allora $\Lambda X.t$ è un termine di tipo $\Pi X.U$.

Numerali

Definiamo il tipo intero

$$N = \Pi X.(X \to X) \to (X \to X).$$

I numerali hanno la forma

$$\bar{n} = \Lambda X.\lambda f^{X \to X}.\lambda x^{X}.f^{n}x.$$

L'esponenziale

In questo caso si può definire l'esponenziale:

$$E = \lambda p^N.\lambda q^N \Lambda X.\lambda f^{X\to X}.\lambda x^X.q(X \to X)(pX)fx.$$

$$\begin{aligned}
E\bar{2}\bar{3} \rightsquigarrow & \Lambda X.\lambda f^{X\to X}.\lambda x^X.\bar{3}(X \to X)(\bar{2}X)f \rightsquigarrow \\
& \Lambda X.\lambda f^{X\to X}.\lambda x^X.(\lambda g^{(X\to X)\to(X\to X)}.\lambda y^{X\to X}.g^3 y)(\bar{2}X)fx \rightsquigarrow \\
& \Lambda X.\lambda f^{X\to X}.\lambda x^X.(\bar{2}X)^3 fx \rightsquigarrow \\
& \Lambda X.\lambda f^{X\to X}.\lambda x^X.(\lambda g^{X\to X}.\lambda y^X.g^2 y)^3 fx \rightsquigarrow \\
& \Lambda X.\lambda f^{X\to X}.\lambda x^X.(\lambda g^{X\to X}.\lambda y^X.g^2 y)^2 f^2 x \rightsquigarrow \\
& \Lambda X.\lambda f^{X\to X}.\lambda x^X.(\lambda g^{X\to X}.\lambda y^X.g^2 y) f^4 x \rightsquigarrow \\
& \Lambda X.\lambda f^{X\to X}.\lambda x^X.f^8 x \rightsquigarrow \bar{8}
\end{aligned}$$

Normalizzazione forte

Un calcolo è fortemente normalizzante quando tutti i suoi termini sono fortemente normalizzanti, ovvero ogni percorso di riduzione porta a una forma normale.

Il lambda calcolo tipato semplice e tipato al secondo ordine sono fortemente normalizzanti.

Normalizzazione forte per il tipato semplice

Si introduce la riducibilità come una proprietà dei termini che implica l'essere fortemente normalizzanti.

Per esempio, i riducibili di tipo $U \to V$ sono i termini t per cui per ogni riducibile u di tipo U, tu è riducibile di tipo V.

Per induzione sulla complessità del tipo si dimostra che tutti i termini sono riducibili.

Normalizzazione forte per il sistema F

Si vuole provare a estendere il concetto di riducibilità anche per i termini del secondo ordine.

I riducibili di tipo $\Pi X.U$ sono i termini t per cui per ogni tipo V, tV è riducibile di tipo $U[V/X]$.

Ma se $V = \Pi X.U$?

Un termine t di tipo $\Pi X.U$ è riducibile con parametri $\overline{\mathcal{R}}$ se per ogni tipo V, tV è riducibile con parametri $\overline{\mathcal{R}}, \mathcal{S}$, per ogni $\mathcal{S}$.

Rappresentabilità (1)

Se una funzione è rappresentata da t allora $t\overline{n}$ ha una forma normale che deve essere di tipo Int. Quindi tutte le funzioni rappresentabili sono totali.

Non possono essere tutte le funzioni calcolabili totali o ne avremmo un'enumerazione ricorsiva.

Infatti sono tutte le funzioni di cui l'aritmetica di Peano (o di Heyting) del secondo ordine dimostra la totalità.

Formalizzare la dimostrazione

Associando una codifica nei numeri naturali ad ogni termine, la proprietà di normalizzazione può essere espressa come una proprietà sui numeri naturali.

Occorre però avere un quantificatore universale su tutti i possibili parametri: serve la logica del secondo ordine.

Per ogni termine t, la dimostrazione che t è fortemente normalizzante può essere fatta nell'aritmetica di Peano del secondo ordine.

Rappresentabilità (2)

L'idea: trasformare una dimostrazione ϵ di totalità in un programma $[\![\epsilon]\!]$ che calcola la funzione.

Le ipotesi sono variabili libere.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\eta\\ \vdots\,\epsilon\\ \phi\end{array}}{\eta\to\phi}\,\delta \quad\Longrightarrow [\![\delta]\!] = \lambda x.[\![\epsilon]\!]$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\epsilon\\ \phi\end{array}}{\forall X\phi}\,\delta \quad\Longrightarrow [\![\delta]\!] = \Pi X.[\![\epsilon]\!]$$

Rappresentabilità (3)

Una dimostrazione di totalità

$$\forall x[\mathsf{Int}(x) \to \exists y(\mathsf{Int}(y) \wedge \text{“}f(x) = y\text{''})]$$

si traduce in un termine di tipo

$$\mathsf{Int} \to (\mathsf{Int} \times [\![\delta]\!])$$

che è una funzione che preso n, calcola $f(n)$ e un altro termine che scartiamo.

Conseguenze

Con un argomento di diagonalizzazione si trova una funzione che non è rappresentabile.

Quindi non è possibile dimostrare che è totale.

Otteniamo quindi che la normalizzazione forte è indipendente dagli assiomi di Peano.

Grazie per l'attenzione