Lambda calcolo del Secondo Ordine

Alessio Marchetti

Il λ-calcolo

I λ-termini sono parole sull'alfabeto costituito da variabili $x_0, x_1, \ldots,$ dall'astrattore λ e dalle parentesi $(,)$.

Definiamo induttivamente il loro insieme Λ come:

- $x_i \in \Lambda$ per tutte le variabili x_i.
- $t \in \Lambda \;\Rightarrow\; (\lambda x_i.t) \in \Lambda$ per tutte le variabili x_i.
- $t, u \in \Lambda \;\Rightarrow\; (tu) \in \Lambda$.

Semplificare la notazione

L'astrazione si associa a destra:

$$\lambda x_1 \cdots x_n.t = \lambda x_1. \cdots \lambda x_n.t = (\lambda x_1.(\lambda x_2. \cdots (\lambda x_n.(t)) \cdots)$$

L'applicazione si associa a sinistra:

$$t_1 \cdots t_n = (\cdots (t_1) \cdots t_n)$$

Un sottotermine di t è un qualunque termine u utilizzato nella costruzione induttiva di t.
Esempio: xy è un sottotermine di $\lambda x.xyz$.

Riduzione

Un termine t si converte a un termine t' se sono nella forma

$$t = (\lambda x.u)v \qquad t' = u[v/x]$$

dove l'espressione $u[v/x]$ indica la sostituzione di v nella variabile u. Si dice che t' è una conversione di t.

Un termine u si riduce a un termine u' se esiste una successione di passi $u = u_1 = \cdots = u_n = u'$ in cui ogni u_{i+1} è ottenuto sostituendo un sottotermine di u_i con una sua conversione. In questo caso si scrive $u \rightsquigarrow u'$.

Esempio di conversione

$$(\lambda x.xx)(\lambda y.y)z \rightsquigarrow (\lambda y.y)(\lambda y.y)z \rightsquigarrow (\lambda y.y)z \rightsquigarrow z.$$

z non può essere ulteriormente ridotto, si dice che è in forma normale.

$$\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \rightsquigarrow (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \rightsquigarrow \cdots$$

Ω non ha una forma normale.

I numeri interi

Si possono rappresentare i numeri interi con termini del tipo

$$\bar{n} = \lambda s.\lambda z.\, \underbrace{s(s(\cdots(s}_{n \text{ ripetizioni}}(z))\cdots)).$$

$\bar{n}$ è il funzionale che compone n volte la funzione data in input.

$$\bar{3}fx \rightsquigarrow f(f(f(x))) = f^3 x$$

Questi numerali sono in forma normale.

Funzioni rappresentabili

Un lambda termine E rappresenta un una funzione parziale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ se per ogni intero n

$$E\bar{n} \rightsquigarrow \overline{f(n)}$$

quando $f(n)$ è definito.

Alcuni esempi

$$A = \lambda p.\lambda q.\lambda f.\lambda x.(pf)(qfx)$$

$$A\bar{3}\bar{2} \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.(\bar{3}f)(\bar{2}fx) \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.f^3(f^2x) = \bar{5}.$$

$$M = \lambda p.\lambda q.\lambda f.\lambda x.q(pf)x$$

$$M\bar{3}\bar{2} \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.\bar{2}(\bar{3}f)x \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.(\bar{3}f)(\bar{3}f)x \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.f^3f^3x = \bar{6}.$$

$$E = \lambda p.\lambda q.\lambda f.\lambda x.qpfx$$

$$E\bar{3}\bar{2} \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.\bar{2}\bar{3}fx \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.\bar{3}\bar{3}fx \rightsquigarrow \lambda f.\lambda x.\bar{3}^3fx = \bar{9}.$$

Condizionali, punto fisso, e cicli while

Le funzioni rappresentabili sono esattamente le ricorsive.
Non saprei se farla o meno.

Due riduzioni "patologiche"

Un termine che non diventa più semplice:

$$\omega_3\omega_3 = (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx) \rightsquigarrow (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx) \rightsquigarrow \cdots$$

Un termine normalizzante ma non fortemente normalizzante:

$$(\lambda x.y)(\omega_3\omega_3) \rightsquigarrow y$$

$$(\lambda x.y)(\omega_3\omega_3) \rightsquigarrow (\lambda x.y)(\omega_3\omega_3\omega_3) \rightsquigarrow \cdots$$

Lambda calcolo tipato semplice (1)

Idea: aggiungere vincoli sul come applicare un termine ad un altro.

Si definiscono induttivamente i tipi come:

- I tipi variabile $U_1, U_2, \ldots$ sono tipi.
- Se U e V sono tipi $(U \to V)$ è un tipo.

Per comodità $\to$ si associa a destra:

$$U_1 \to U_2 \to \cdots \to U_n = (U_1 \to (U_2 \to (\cdots \to (U_n) \cdots))).$$

Lambda calcolo tipato semplice (2)

I termini si definiscono come:

- Le variabili di tipo U sono $x_1, x_2, \ldots$ per ogni tipo U.
- Se x è una variabile di tipo U e t è un termine di tipo V, allora $\lambda x.t$ è un termine di tipo $U \to V$.
- Se f è un termine di tipo $U \to V$ e t è un termine di tipo U, allora ft è un termine di tipo V.

Per indicare che un termine t è di tipo U si scrive anche t^U.

Numerali

Sia U un tipo. Si definiscono i numerali come i termini

$$\bar{n} = \lambda s^{U \to U}.\lambda z^{U}.\underbrace{s(s(\cdots(s}_{n \text{ ripetizioni}}(z))\cdots)).$$

La definizione è uguale alla precedente, ma con le variabili tipate.

Funzioni rappresentabili

Sia I il tipo $(U \to U) \to (U \to U)$. Somma e moltiplicazione come definite prima si possono tipare:

$$A = \lambda p^I.\lambda q^I.\lambda f^{U\to U}.\lambda x^U.(pf)(qfx)$$

$$M = \lambda p^I.\lambda q^I.\lambda f^{U\to U}.\lambda x^U.q(pf)x$$

L'esponenziazione, che era stata precedente definita come

$$E = \lambda p.\lambda q.\lambda f.\lambda x.qpfx$$

non si può tipare. Le funzioni rappresentabili in questo calcolo sono esattamente i polinomi definiti a tratti.

Lambda calcolo del Secondo Ordine (1)

Si definiscono induttivamente i tipi come:

- I tipi variabile $U_1, U_2, \ldots$ sono tipi.
- Se U e V sono tipi $(U \rightarrow V)$ è un tipo.
- Se X è un tipo variabile e U è un tipo, allora $(\Pi X.U)$ è un tipo.

Lambda calcolo del Secondo Ordine (2)

I termini si definiscono come:

- Le variabili di tipo U sono $x_1, x_2, \ldots$ per ogni tipo U.
- Se x è una variabile di tipo U e t è un termine di tipo V, allora $\lambda x.t$ è un termine di tipo $U \to V$.
- Se f è un termine di tipo $U \to V$ e t è un termine di tipo U, allora ft è un termine di tipo V.
- Se t è un termine di tipo $\Pi X.U$ e V è un tipo, allora tV è un termine di tipo $U[V/X]$.
- Se t è un termine di tipo U e X è una variabile tipo che non compare libera nei tipi delle variabili libere di t, allora $\Lambda X.t$ è un termine di tipo $\Pi X.U$.

Numerali

Definiamo il tipo intero

$$N = \Pi X.(X \to X) \to (X \to X).$$

I numerali hanno la forma

$$\bar{n} = \Lambda X.\lambda f^{X \to X}.\lambda x^{X}.f^{n}x.$$