Exercícios - Cálculo 3 - Aula 15
Teorema de Stokes

Os exercícios desta lista abordam integrais de linha de campos vetoriais ao longo de curvas fechadas que se fossem calculadas diretamente pela definição seriam muito trabalhosas. Como os campos vetoriais envolvidos possuem rotacional simples, o uso do teorema de Stokes pode tornar os cálculos mais simples. No entanto, o teorema de Stokes não poderá ser aplicado diretamente porque consideraremos campos vetoriais com um conjunto de singularidades enlaçado pela curva.

Exemplo 1. Calcule

$$\int_C -y\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}dx + x\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}dy + (z-1)\cos^7(z)dz,$$

onde C é a curva dada pela interseção do plano $z = y + 3$ com o cilindro $4x^2 + y^2 = 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário. (resp.: 6π.)

Solução. Denote o campo vetorial dado por

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(-y\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}, x\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}, (z-1)\cos^7(z)\right).$$

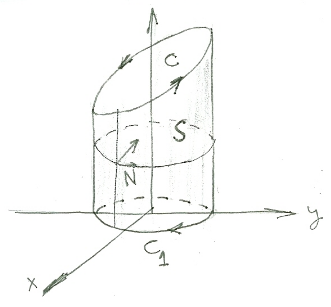
Analisando as expressões das componentes de $\vec{F}$ e levando em consideração que a curva C é uma elipse no plano $z = y + 3$, segue que o cálculo direto dessa integral de linha é muito trabalhoso. Um método alternativo é o uso do teorema de Stokes para converter o cálculo da integral de linha no cálculo do fluxo do rotacional de $\vec{F}$ através de uma superfície tendo C como bordo. Porém, esse método requer um certo cuidado, pois o domínio de $\vec{F}$ é $\mathbb{R}^3-$ eixo z, ou seja, o eixo z é o conjunto de singularidades de $\vec{F}$. Uma escolha natural seria a superfície $z = y + 3$ para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $4x^2 + y^2 \leq 4$. No entanto, ela não satisfaz as hipóteses do teorema de Stokes, porque qualquer região aberta em $\mathbb{R}^3$ contendo essa superfície tem interseção não vazia com o eixo z. Visto que o eixo z é ilimitado, não existe superfície limitada que não intercepta o eixo z e tenha a curva C como a única componente de bordo. Para contornar esta dificuldade, considere S a porção do cilindro $4x^2 + y^2 = 4$ compreendida entre os planos $z = 0$ e $z = y + 3$. O bordo ∂S de S é $\partial S = C \cup C_1$, onde C_1 é a curva definida por $4x^2 + y^2 = 4$ e $z = 0$. Um cuidado que devemos ter na escolha de S é que as componentes do bordo C e C_1 não se interceptem. Como a elipse C está contida no semi-espaço superior $(z > 0)$ e C_1 está contida no plano $z = 0$, temos $C \cap C_1 = \emptyset$. Além disso, a escolha de S dessa forma é estratégica. Como veremos, este método exige calcular a integral de linha $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, a qual é mais simples uma vez que a expressão de $\vec{F}$ no plano $z = 0$ é mais simples, dando a possibilidade de calculá-la diretamente, ou aplicar o teorema de Green uma que C_1 é curva plana e a componente $\vec{k}$ do rotacional de $\vec{F}$ ter uma expressão simples.

Como a orientação de C foi dada, devemos escolher uma orientação em S coerente com a hipótese do teorema de Stokes. Mais especificamente, como a curva C está orientada no sentido anti-horário, pela regra da mão direita, devemos escolher o campo normal unitário a S apontando para dentro. Ainda pela regra da mão direita, a outra parte C_1 do bordo de S deve ser orientada no sentido horário. Desse modo, ∂S está orientado positivamente, portanto, coerente com a hiptese do teorema de Stokes.

Uma parametrização de S é dada por $\sigma(\theta, z) = (\cos\theta, 2\sin\theta, z)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 2\sin\theta + 3$.

O campo normal unitário a S escolhido é

$$\vec{N} = \frac{\sigma_z \times \sigma_\theta}{\|\sigma_z \times \sigma_\theta\|} = \left(\frac{-2\cos\theta}{\sqrt{1+3\cos^2(\theta)}}, \frac{-\sin\theta}{\sqrt{1+3\cos^2(\theta)}}, 0\right).$$



Um cálculo direto fornece que o rotacional de $\vec{F}$ é rot$\vec{F}(x,y,z) = (0,0,2)$. Assim, rot$\vec{F} \cdot \vec{N} = 0$ em todos os pontos S. Portanto, pelo teorema de Stokes,

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{N} dS = 0.$$

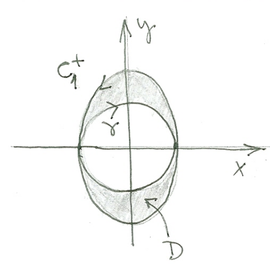
Como $\partial S = C \cup C_1$, temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde C_1^+ denota a curva C_1 percorrida no sentido anti-horário.

Para calcular $\int_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, vamos aplicar o teorema de Green porque o cálculo direto dessa inetgral de linha é trabalhoso pelo mesmo motivo de antes.

Como C_1^+ é uma curva fechada envolvendo a origem, vamos aplicar a técnica de isolar a singularidade tomando a circunferência γ de centrada na origem, de raio 1 e orientada no sentido horário. Denote por D a região no plano x limitada pela elipse C_1^+ e pela circunferência γ, conforme a figura:



Pelo teorema de Green,

$$\int_{C_1^+ \cup \gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{k} dxdy = \iint_D 2dxdy = 2\text{área}(D).$$

Logo,

$$\int_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\text{área}(D) - \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Como D é a região entre a circunferência e a elipse, temos

$$2\text{área}(D) = 2(2\pi - \pi) = 2\pi.$$

Denotando γ^+ a circunferência γ percorrida no sentido anti-horário, temos

$$-\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma^+} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\cos t, \sin t, 0)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-2\sin t, 2\cos t, -1)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)dt = \int_0^{2\pi} 2dt = 4\pi.$$

Portanto,

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 6\pi.$$

Exercício 1. Calcule

$$\int_C \left(\frac{-y}{2x^2+y^2} + yz\right)dx + \left(\frac{x}{2x^2+y^2} - xz\right)dy + \left(e^{z^2} + z^2\right)dz,$$

onde C é a curva dada pela interseção das superfícies $z = 5 - x^2 - 2y^2$ e $z = 3x^2 + 1$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário. (resp.: $-4\sqrt{2}\pi$.)

Sugestão: decomponha o campo vetorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{2x^2+y^2} + yz,\ \frac{x}{2x^2+y^2} - xz,\ e^{z^2} + z^2\right)$$

na forma $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, *sendo*

$$\vec{F}_1(x,y,z) = \left(\frac{-y}{2x^2+y^2},\ \frac{x}{2x^2+y^2},\ 0\right) \quad e \quad \vec{F}_2(x,y,z) = \left(yz,\ -xz,\ e^{z^2} + z^2\right).$$

Exercício 2. Calcule

$$\int_C \left(\frac{xz}{x^2+y^2} + y\right)dx + \left(\frac{yz}{x^2+y^2}\right)dy + e^{z^4}dz,$$

onde C é a curva dada pela interseção das superfícies $z = \operatorname{arctg}(5+x^4+y^8)$ e $x^2+y^2 = 1$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário. (resp.: $-\pi$.)