Lista 3 - Mínimos Quadrados/Interpolação
Cálculo Numérico - SME0140

Cynthia de Oliveira Lage Ferreira

2021

1 Parte Teórica

Interpolação

1) Avalie se os itens são verdadeiros ou falsos e justifique caso sejam falsos:

a) Existem diversas funções matemáticas que podem interpolar um dado conjunto de pontos.

b) Se a interpolação polinomial de um conjunto de dados é única, então também é única a representação deste polinômio.

c) Ao interpolar funções contínuas com polinômios usando pontos igualmente espaçados dentro de um intervalo, o polinômio interpolante sempre converge para a função a medida que o número de pontos de interpolação aumenta.

2) Qual é a diferença entre *aproximação* e *interpolação* de uma função?

3) É possível que dois polinômios distintos interpolem um mesmo conjunto de dados de tamanho n? Se sim, quais as condições para isso acontecer? Se não, por que?

4) Determinar os parâmetros de um polinômio interpolador pode ser interpretado como resolver um sistema linear $A\mathrm{x} = y$ em que a matriz A depende das funções de base usadas e o vetor y contém os valores da função a serem interpolados. Descreva em palavras o padrão de entradas não nulas da matriz A para a interpolação polinomial usando cada uma dessas bases:

a) Base Monomial (interpolação polinomial básica usando matriz de Vandermonde).

b) Base de Lagrange.

c) Base de Newton.

5) Considerando a interpolação de Lagrange para n pontos dados (t_i, y_i) em que $i = 1, \cdots, n$, responda:

a) Qual é o grau do polinômio $l_j(t)$ na base de Lagrange?

b) Liste uma vantagem e uma desvantagem da interpolação de Lagrange comparada com a interpolação polinomial usando matriz de Vandermonde.

6) Dados os pontos na tabela 1 determine o polinômio interpolador de grau 2 usando:

t	-1.0	0.0	1.0
y	1.0	0.0	1.0

Tabela 1: Dados para o problema 6.

a) Matriz de Vandermonde.

b) Interpolação de Lagrange.

c) Interpolação de Newton.

7) Dados os pontos na tabela 2 determine o polinômio interpolador usando:

t	1.0	2.0	3.0	4.0
y	11.0	29.0	65.0	125.0

Tabela 2: Dados para o problema 7.

a) Matriz de Vandermonde.

b) Interpolação de Lagrange.

c) Interpolação de Newton.

Mínimos Quadrados

1) Avalie se os itens são verdadeiros ou falsos e justifique caso sejam falsos:

a) Um problema de mínimos quadrados linear sempre tem uma solução.

b) Ajustar um conjunto de dados em uma reta é um problema de mínimos quadrados linear, enquanto ajustar um conjunto de dados a uma curva quadrática é um problema de mínimos quadrados não linear.

c) Supondo que $\mathbf{x}$ seja solução de um problema de mínimos quadrados linear, ou seja $A\mathbf{x} \cong \mathbf{b}$, o resíduo $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$ é ortogonal ao espaço gerado por A, $span(A)$.

d) Ao resolver um problema de mínimos quadrados linear $A\mathbf{x} \cong \mathbf{b}$, se o resíduo é nulo, então a solução é única.

2) Seja um conjunto de m dados (t_i, y_i) ajustado por uma função $f(t, \mathbf{x})$ em que t é uma variável independente e x é um vetor de tamanho n de parâmetros a serem determinados. Responda:

a) O que significa dizer que f é linear nas componentes de $\mathbf{x}$?

b) Dê um exemplo de $f(t, \mathbf{x})$ linear.

c) Dê um exemplo de $f(t, \mathbf{x})$ não linear.

3) Em um problema de mínimos quadrados $A\mathbf{x} \cong \mathbf{b}$, em que A é uma matriz $m \times n$. Se o posto de A é menor que n, então qual dessas situações é possível?

a) Não existe solução.

b) Existe uma única solução.

c) Existe uma solução, porém ela não é única.

4) Seja A uma matriz $m \times n$. Quais as condições que a matriz A deve satisfazer para que a matriz $A^T A$ seja:

a) Simétrica.

b) Não singular.

c) Positiva definida.

5) Se uma barra vertical tem uma força puxando sua extremidade inferior, o tanto que ela vai esticar é proporcional a magnitude da força. Sendo assim, o comprimento total da barra y é dado pela seguinte equação

$$y = x_1 + x_2 t \tag{1}$$

em que x_1 é seu tamanho original, t a força aplicada e x_2 a constante de proporcionalidade. Suponha que as seguintes observações são tomadas relacionando uma magnitude de força com um comprimento final da barra segundo a tabela 3. Monte o sistema de equações normais e resolva obtendo a solução de mínimos quadrados.

t	10	15	20
y	11.60	11.85	12.25

Tabela 3: Observações de magnitude de força por comprimento final da barra.

6) Monte o sistema de mínimos quadrados linear $A\mathbf{x} \cong \mathbf{b}$ para ajustar a função $f(t, \mathbf{x}) = x_1 t + x_2 \exp^t$ aos três dados seguintes $(1, 2)$, $(2, 3)$ e $(3, 5)$.

2 Parte Prática

Interpolação

1) Para a função

$$f(t) = \frac{1}{1 + 25t^2} \tag{2}$$

no intervalo $[-1, 1]$ **faça:**

a) Implemente a interpolação de Lagrange e de Newton.

b) Usando 11 pontos igualmente espaçados dentro do intervalo dado, calcule as interpolações de Lagrange e Newton com o código implementado no item anterior.

c) Repita o processo com 21 pontos. O que acontece? Exiba o gráfico das soluções comparando com a exata.

d) Usando a função **scipy.interpolate.interp1d** calcule a interpolação usando *spline* linear e cúbica. Exiba os gráficos e comente as diferenças das soluções deste item para os anteriores.

e) Repita os itens b) e c) com nós de Chebyshev.

2) Um experimento produziu o conjunto de dados apresentado na tabela 4. Deseja-se interpolar esses dados com uma curva suave para que possa obter valores razoáveis de y para valores de t entre os pontos em que as medidas foram tiradas. Faça:

t	0.0	0.5	1.0	6.0	7.0	9.0
y	0.0	1.6	2.0	2.0	1.5	0.0

Tabela 4: Dados experimentais obtidos para o exercício 2.

a) Usando a interpolação de Lagrange ou Newton (com o código que já foi implementado), calcule o polinômio de grau 5 que interpola esses dados. Exiba graficamente esse polinômio.

b) Repita o item anterior, porém usando *splines* cúbicas (com a função **scipy.interpolate.interp1d**).

c) Qual método retornou a solução que aparentemente calcula melhor valores de y para pontos entre os pontos dados? Para este conjunto de dados, uma interpolação por partes parece mais adequada?

3) Os dados apresentados na tabela 5 devem fornecer uma aproximação para a função raiz quadrada, sendo assim faça:

x	0.0	1.0	4.0	9.0	16.0	25.0	36.0	49.0	64
y	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0

Tabela 5: Dados para aproximar a função raiz quadrada.

a) Usando a interpolação de Lagrange ou Newton (com o código que já foi implementado), calcule o polinômio de grau 8 que interpola esses dados. Exiba graficamente esse polinômio juntamente com o gráfico da função exata (usando **math.sqrt** para obter os valores corretos da função raiz quadrada) no intervalo $[0, 64]$.

b) Repita o item anterior usando *splines* cúbicas (com a função **scipy.interpolate.interp1d**).

c) Qual das duas interpolações é melhor no intervalo $[0, 64]$ inteiro? Qual é melhor entre 0 e 1?

Mínimos Quadrados

1) Implemente o método dos mínimos quadrados e ajuste os dados da tabela 6 com polinômios de grau $n = 0, 1, \cdots, 5$. Mostre todas as curvas obtidas em um gráfico juntamente com os dados originais, qual polinômio ajustou melhor os dados? Explique os motivos que levaram a tal conclusão.

t	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y	1.0	2.7	5.8	6.6	7.5	9.9

Tabela 6: Dados

2) Para o seguinte problema de mínimos quadrados, responda:

$$\begin{bmatrix} 0.16 & 0.10 \\ 0.17 & 0.11 \\ 2.02 & 1.29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.28 \\ 3.31 \end{bmatrix} \tag{3}$$

a) Resolva o sistema usando qualquer método de sua escolha (seja implementado por você mesmo, ou usando alguma função dada do Python).

b) Resolva o mesmo problema usando um lado direito com uma pequena perturbação:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.25 \\ 3.33 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

c) Compare os resultados dos itens a) e b).

3) Um planeta segue uma órbita elipsoidal que pode ser representada no plano Cartesiano (x, y) **pela seguinte equação**

$$ay^2 + bxy + cx + dy + e = x^2. \tag{5}$$

Responda:

a) Com alguma implementação do método dos mínimos quadrados (seja implementado por você mesmo, ou usando alguma função dada do Python) determine os parâmetros a, b, c, d e e dadas as observações apresentadas na tabela 7.

x	1.02	0.95	0.87	0.77	0.67
y	0.39	0.32	0.27	0.22	0.18
x	0.56	0.44	0.30	0.16	0.01
y	0.15	0.13	0.12	0.13	0.15

Tabela 7: Posições do planeta observado.

b) Mostre os valores das observações juntamente com a órbita obtida com a aproximação em um gráfico.

c) Resolva novamente o problema perturbando os dados da seguinte forma: adicione para cada coordenada de cada observação dada um número aleatório no intervalo $[-0.005, 0.005]$. Como isso afetou a solução? Mostre em um gráfico igual ao do item anterior a solução obtida, compare com a solução anterior.