Lista 4 - Integração Numérica/Solução Numérica de EDOs
Cálculo Numérico - SME0140

Cynthia de Oliveira Lage Ferreira

2021

1 Parte Teórica

Integração Numérica

1) Avalie se as suposições são verdadeiras ou falsas e justifique caso sejam falsas:

a) Por ser baseada em interpolação de polinômios, a regra do trapézio tem mais acurácia que a regra do ponto médio.

b) O grau de uma regra de quadratura é o mesmo que o grau do polinômio interpolador no qual a regra é baseada.

c) Uma regra de quadratura de Newton-Cotes com n pontos tem sempre grau $n-1$.

2) Responda:

a) Se uma regra de quadratura para um intervalo $[a,b]$ é baseada em uma interpolação polinomial com n pontos igualmente espaçados, qual é o maior grau de polinômio integrado exatamente por essa quadratura?

b) Ao integrar a função de Runge

$$\int_{-1}^{1} \left(1+25x^3\right)^{-1} dx$$

com uma regra de quadratura de Newton-Cotes baseada em uma interpolação polinomial com n pontos, como é esperado o comportamento dessa quadratura ao aumentar o valor de n? Justifique.

3) Calcule o valor aproximado da integral

$$\int_{0}^{1} x^3 \, dx$$

usando a regra do ponto médio e do trapézio. Responda:

a) Qual a diferença entre esses dois resultados? Qual tem maior acurácia?

b) Agora calcule usando a regra 1/3 de Simpson. O resultado é mais exato?

4) Supondo que a interpolação de Lagrange com n pontos igualmente espaçados é utilizada para derivar uma regra de quadratura. Mostre que os pesos correspondentes são dados pelas integrais das funções base de Lagrange

$$\int_{a}^{b} l_i(x)\, dx \quad i = 1, \ldots, n.$$

5) Suponha que está usando a regra do trapézio para aproximar uma integral no intervalo $[a,b]$. Para obter mais acurácia, o que é melhor: 1) dividir o intervalo pela metade e usar a regra do trapézio em cada subintervalo ou 2) usar a regra 1/3 de Simpson no intervalo original?

6) Analogamente ao exercício anterior, supondo que está usando a regra 1/3 de Simpson para aproximar uma integral no intervalo $[a,b]$. Para obter mais acurácia, o que é melhor: 1) dividir o intervalo e aplicar a regra 1/3 de Simpson em cada subintervalo ou 2) usar a regra 3/8 de Simpson no intervalo original?

Solução Numérica de EDOs

1) Responda:

a) Em geral, apenas a equação diferencial determina uma solução única? Qual informação adicional é necessária para determinar uma solução única?

b) Qual é o método de Euler para resolver EDOs?

2) Considere a EDO $y' = -5y$ com condição inicial $y(0) = 1$. Usando um espaçamento $h = 0.5$, responda:

a) Calcule um passo do método de Euler para este PVI (até $t = 0.5$).

b) Faça o mesmo com o método Runge-Kutta de ordem 2 (RK2).

c) Qual a diferença das duas soluções? Faça mais algumas interações e compare.

3) Considerando a EDO $y' = -y$ com condição inicial $y(0) = 1$ e $h = 1$, resolva:

a) Faça três iterações do método de Euler para este PVI.

b) Faça três iterações do método RK2.

c) Faça uma iteração do esquema Previsor-Corretor usando o método de Euler como previsor e método do Trapézio como corretor. Faça duas iterações do método corretor.

d) Compare as soluções.

4) Dada a EDO de segunda ordem $y'' = y$ com valores iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$, responda:

a) Escreva essa EDO como um sistema de ordem 1.

b) Faça uma iteração do método de Euler para esse sistema usando $h = 0.5$.

c) Repita o item anterior para RK2.

2 Parte Prática

Integração Numérica

1) Implemente as regras do ponto médio, trapézio, 1/3 de Simpson e 3/8 de Simpson e resolva as seguintes integrais:

a) $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$

b) $\int_0^1 \sqrt{x}\log(x)\,dx$

c) $\int_{-1}^1 \cos(x)\,dx$

d) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+100x}\,dx$

Solução Numérica de EDOs

1) Dado o modelo de *Lotka-Volterra* para descrever a dinâmica populacional entre duas espécies (uma presa e outra predadora)

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(\alpha_1 - \beta_1 y_2) \\ y_2(-\alpha_2 + \beta_2 y_1) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

considerando $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.5$ e $\beta_2 = 0.02$ e populações iniciais $y_1(0) = 100$ e $y_2(0) = 10$. Resolva o sistema iterando de $t = 0$ até $t = 25$ usando cada um dos métodos a seguir (a resolução deve ser feita usando *python* com a implementação de cada método):

a) Euler

b) RK2

c) RK4

d) Esquema Previsor-Corretor com Euler como previsor e Trapézio como corretor.

2) Com os resultados do exercício anterior, faça um gráfico mostrando como as populações evoluíram ao longo do tempo. Repita o exercício anterior para diferentes populações iniciais, é possível descobrir populações iniciais em que uma ou ambas espécies tornam-se extintas?

3) O modelo *Kermack-McKendrick* para evolução de uma epidemia em uma população é dado pelo seguinte sistema de EDOs

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -cy_1y_2 \\ cy_1y_2 - dy_2 \\ dy_2 \end{bmatrix}$$

em que y_1 representa os indivíduos suscetíveis a pegar a doença, y_2 representa os indivíduos infectados que circulam (e podem ser fontes de contaminação de novos indivíduos) e y_3 representa os indivíduos infectados que foram removidos seja por isolamento, recuperação, morte ou imunidade. Os parâmetros c e d representam as taxas de infecção e remoção respectivamente. Considerando $c = 1$ e $d = 5$ e valor inicial $y_1(0) = 95$, $y_2(0) = 5$ e $y_3(0) = 0$, resolva numericamente este sistema iterando de $t = 0$ até $t = 1$, usando algum valor de espaçamento h que considerar adequado, com os métodos:

a) RK4

b) Esquema Previsor-Corretor com Euler como previsor e Trapézio como corretor.

4) Observando as soluções do exercício anterior, em uma epidemia o número de infectados tende a crescer inicialmente e depois diminuir até chegar em zero. Usando outros valores de parâmetros e condições iniciais refaça o exercício anterior.