Avaliação 2

Cálculo Numérico (SME0104)
Professora Cynthia Lage Ferreira

28 de julho de 2021

Orientações Gerais

- Esta avaliação é **individual** e deverá ser desenvolvida na plataforma Colab (https://colab.research.google.com/).
- Cada aluno deverá produzir um **arquivo .ipynb** contendo tanto a parte escrita (teórica) quanto a parte prática (códigos em Python) de cada um dos exercícios.
- Os arquivos deverão estar identificados da seguinte forma: **NOMEDOALUNO-NoUSP-TURMA.ipynb** a fim de facilitar a organização das atividades pela professora.
- Os arquivos deverão ser **enviados até às 8h do dia 30/07** através da plataforma e-disciplinas da USP (https://edisciplinas.usp.br/) respeitando o prazo. **Os arquivos recebidos por e-mail não serão corrigidos.**
- Apenas os alunos que estiverem com a **situação regularizada no Sistema Jupiter** terão suas avaliações corrigidas.
- Todos os exercícios deverão conter justificativas teóricas e todos os códigos utilizados para resolver os problemas deverão ser apresentados, executados e minimamente comentados.
  Questões com respostas sem justificativas não serão consideradas.
- Os alunos que quiserem poderão apresentar um resumo teórico referente aos conteúdos de cada questão. A realização desta tarefa poderá gerar uma bonificação ao aluno, a critério da professora.
- As funções prontas do Python dos métodos estudados poderão ser utilizadas para validar os resultados obtidos, mas não as utilize como ÚNICA forma de solução dos exercícios.

1 Mínimos Quadrados

O crescimento populacional do Brasil ao longo dos anos pode ser observdo na tabela abaixo, de acordo com dados do Censo-IBGE:

Ano	1872	1890	1900	1920	1940	1950	1960	1970	1980	1991	2000	2010
População (milhões)	9,9	14,3	17,4	30,6	41,2	51,9	70,9	94,5	121,1	146,9	169,5	190,7

O último Censo foi realizado em 2010 e, devido à pandemia da Covid-19, o de 2020 foi adiado, de modo que não é possível saber, com maior precisão, a população atual do país. Com o objetivo de estimar a população do Brasil em 2021, ajuste, no sentido dos mínimos quadrados, uma reta e uma parábola aos dados representados na tabela.

a) Qual das duas aproximações você considera melhor para estimar a população atual do país ? Justifique a sua resposta calculando o erro da aproximação. Mostre, também, os gráficos das duas aproximações obtidas.

b) Qual seria a população estimada do Brasil em 2021 ? Justifique.

2 Equações Diferenciais Ordinárias

O modelo *Kermack-McKendrick* para evolução de uma epidemia em uma população é dado pelo seguinte sistema de EDOs

$$\begin{bmatrix} S'(t) \\ I'(t) \\ R'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -bS(t)I(t) \\ bS(t)I(t) - aI(t) \\ aI(t) \end{bmatrix}$$

em que $S(t)$ representa os indivíduos suscetíveis a pegar a doença no instante t, $I(t)$ representa os indivíduos infectados que circulam (e podem ser fontes de contaminação de novos indivíduos) e $R(t)$ representa os indivíduos infectados que foram removidos seja por isolamento, recuperação, morte ou imunidade. Os parâmetros a e b representam as taxas de recuperação e contágio, respectivamente.

a) Considerando $a = 0.1$ e $b = 0.0007$ e condição inicial $S(0) = 999$, $I(0) = 1$ e $R(0) = 0$, resolva numericamente este sistema utilizando o método de Runge-Kutta de ordem 4 iterando de $t = 0$ até $t = 70$, com espaçamento $h = 0.001$. Com quantos dias o pico da epidemia é atingido e qual é o número total de infectados ?

b) Suponha que as medidas de isolamento tenham sido intensificadas de modo que o parâmetro b passe a valer 0.0004. Se forem mantidas as condições iniciais e o parâmetro a, compare e discuta o resultado obtido com o resultado do item anterior.

3 Zeros de funções e sistemas não lineares

A região sombreada do gráfico apresentado a seguir representa o perfil de duas elevações dado pela função $p(x) = -x^4 + 7.7x^3 - 18x^2 + 13.6x$. Um projétil é lançado a partir da menor elevação e descreve uma curva dada por $q(x) = -x^2 + 5x + 0.75$. Pede-se determinar a altura na qual ocorre o impacto com a maior elevação.

- Formule o problema de modo que sua solução seja uma raiz de uma função não linear $f : \Re \to \Re$. Use o método da bisseção com precisão 0.001 e até 5 iterações para aproximar esta raiz e, consequentemente, a altura na qual ocorre o impacto.

- Formule este problema de modo que sua solução seja uma raiz de função não linear $F : \Re^2 \to \Re^2$. Use o método de Newton para sistemas com precisão 0.001 para aproximar esta raiz e, consequentemente, a altura na qual ocorre o impacto.

Comente as soluções detalhadamente, apresentando os códigos utilizados, os critérios de parada e comparações entre os dois resultados.