Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos

Prática 5: Dinâmica Populacional

Stefan Taiguara Couperus Leal 10414866

Maio de 2019

Contents

1 Introdução

A equação diferencial que será foi utilizada para descrever o crescimento populacional é:

$$dN(t) = \alpha N(t)dt \tag{1}$$

Sendo α uma constante de crescimento/decrescimento populacional. Observando a equação acima percebe-se que não é muito realístico, já que prevê um crescimento exponencial sem limites (há uma ausência de predadores, falta de recursos, mortalidade dos indivíduos, etc).

Para uma descrição mais exata do fenômeno é um imposto um corte quando o valor atingir um certo N_{max}.

O objetivo da pratica é estudar as condições que um dado um valor inicial para o numero N de indivíduos permaneça constante com o tempo.

O estudo do mapeamento vai revelar uma grande complexidade e dependência sensível das condições iniciais, definindo um comportamento caótico que será observado nos exercícios.

Primeiramente foi discretizada a equação 1, ou seja, foi considerado instantes de tempo t e $t+\Delta t$ (sendo Δt fixo, mas não necessariamente pequeno). A equação fica:

$$N_{i+1} = (1 + \alpha\Delta t)N_i \approx rN_i \tag{2}$$

Sendo $r = 1 + \alpha\Delta t > 1$. Depois disso foi imposto um limite de N_max.

$$N_{i+1} = rN_i(1 - \frac{N_i}{N_{max}}) \tag{3}$$

Para uma mais simples visualização foi adotado $x_i \approx \frac{N_i}{N_{max}}$. Gerando a equação utilizada para a simulação.

$$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i) \tag{4}$$

A equação 4 define um mapeamento. Neste projeto será estudo a evolução do mapa G(x), o chamado mapa logístico.

2 Metodologia Aplicada

2.1 Tratamento Geral

A inteção desta prática é encontrar valores de $G(x)$ para quais $G(x^*) = x^*$. Será observado as propriedades de G(x), que são:

- $x^* = 0$ Sempre deve ser uma solução
- r deve estar sempre entre 1 e 4.
- Dado que $0 \leq r \leq 4$, Há uma solução para x^* ?

Portanto será variado o valor de r (observando o valor de convergência) afim de verificar as propriedades listadas acima.

2.2 Rumo ao Caos

Não basta ser um ponto fixo do mapa $G(x)$ para um valor de x ser estável na evolução da população. O que ocorre para pontos fixos depende da estabilidade do ponto, que depende do valor do parâmetro r. Para $r > 3$ (e $r < 3.5$) o ponto fixo $x^!$ torna-se instável, levando a um comportamento oscilatório entre x_1 e x_2.

Será realiza testes da evolução do sistema, aumentando o valor de r. Será procurado ver o fenômeno de duplicação de período (que deve ser observado logo antes do caos). Portanto será observado a formação do caos e anotando os valores de r onde as duplicações ocorrem. Com isso será calculado a constante de Feigenbaum δ pela equação abaixo:

$$\delta = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_2} \tag{5}$$

2.3 O Caos!

Como foi visto que o sistema evoluirá para o caos a medida que o valor de r for aumentando, vai ser implementado o calculo do expoente de Lyapunov (é uma forma de quantificar o a falta de controle que tem sobre um numero inicial x_0). Será observado a sensibilidade das condições iniciais colocando o x_0 de dois sistemas variando por um ϵ, desta forma será observado a diferença dos dois sistemas.

Afim de obter o expoente de Lyapunov será utilizado de dois métodos:

Serão simulados dois sistemas: $G^i(x_0)$ e $G(x_0^i + \epsilon)$.

O primeiro é: cada interação será calculado a distância d utilizando da equação 6, com isso será observado o comportamento do gráfico e será extraído o expoente de Lyapunov (γ).

$$d(i) = |G(x_0^i + \epsilon) - G(x_0^i)| \tag{6}$$

A simulação será realizado para valores $r < 3.0$, $r > 3.6$.

A outra forma de estimar a constante de Lyapunov é supor um comportamento exponencial para d, com o tempo relacionado com a derivada do mapa $G^{(i)}(x)$ (nota-se que o valor de ϵ é minimo). Como essas considerações obtêm-se:

$$\lambda = \frac{1}{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \ln |G^{'}(x_j)| \tag{7}$$

Resolvendo o $G^{'}(x_j)$ temos:

$$\lambda = \frac{1}{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \ln |r(1-2x)| \tag{8}$$

3 Resultados Obtidos

3.1 Tratamento Geral

O programa usado para chegar nos resultado esta abaixo, ja para graficar foi utlizado do gnuplot.

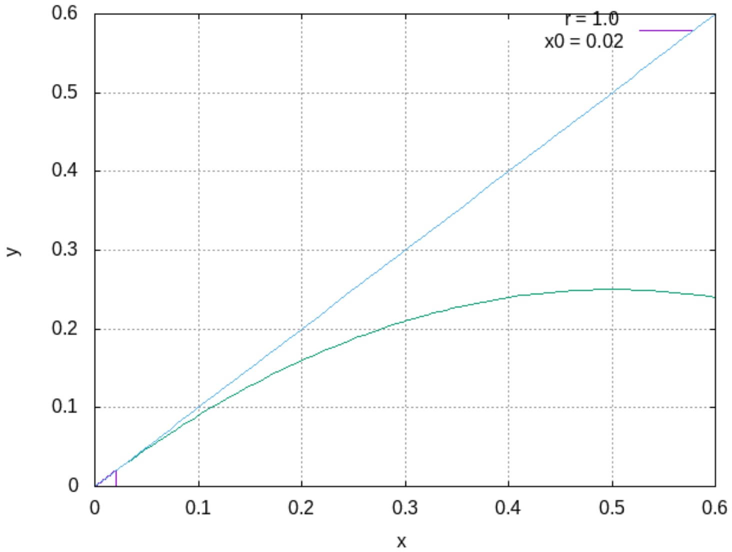
```
program crescimento
implicit none

real(8) :: G, r, x1, x0
integer :: i, N

N = 1000

print *, "Valor de x_o: "
read *, x0
print *, "Valor de r: "
read *, r


open(1, file="exponential.dat")
x = x0
do i = 0, N, 1
x1 = r * x0 * (1.0d0 - x0)
xo = x

write(1 , *) i, x0, x1
```

```
enddo
close(1)

end program crescimento
```

3.1.1 Para r = 1

Usando do programa citado acima foi calculado para $r = 1$, com isso tem-se que:

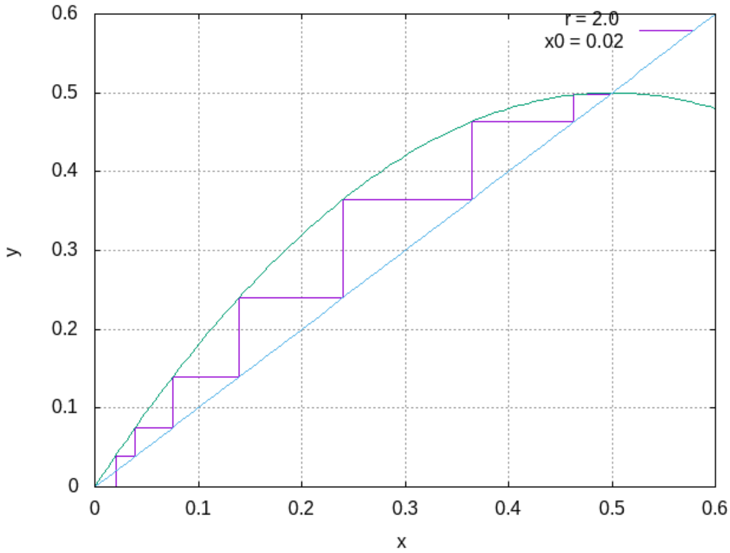
Figure 1: Crescimento Populacional para r = 1



Na figura 1 pe notado que não há valor de convergência, onde o único valor no qual $G(x^*) = x^*$ é para $G(0)$.

3.1.2 Para r = 2

Figure 2: Crescimento Populacional para r = 2



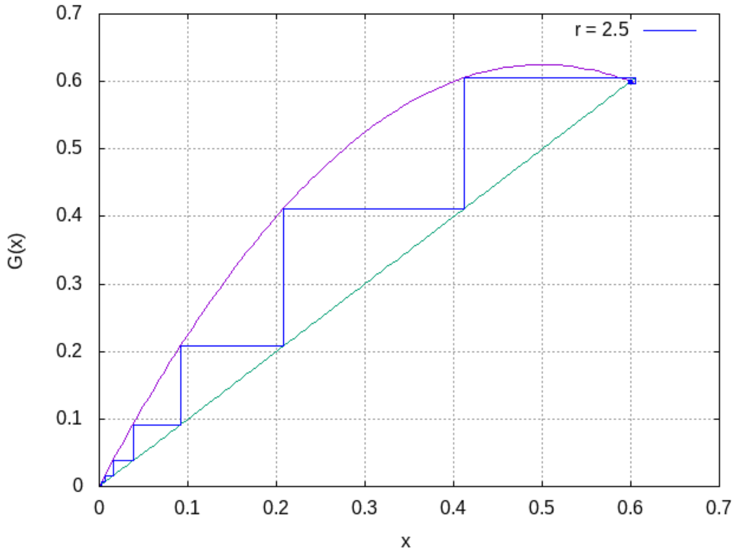
É notado que há uma convergência para um único ponto, sendo o valor dele igual a:

$$x^* = 0.50000000000000008$$

Percebe-se também que o primeiro item das propriedades citadas em 2.1 é válido, já que $G(0) = 0$.

3.1.3 Para r = 2.5

Figure 3: Crescimento Populacional para r = 2.5

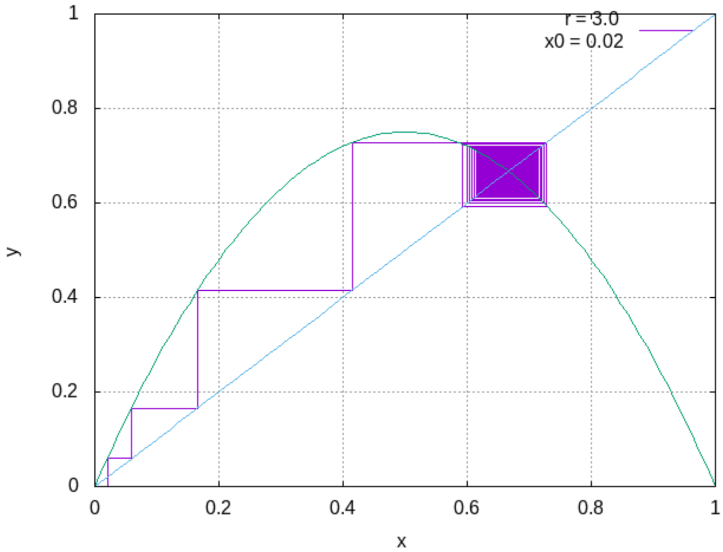


O valor de convergência onde $G(x^*) = x^*$ é:

$$x^* = 0.60000000000000009$$

3.1.4 Para r = 3

Figure 4: Crescimento Populacional para r = 3

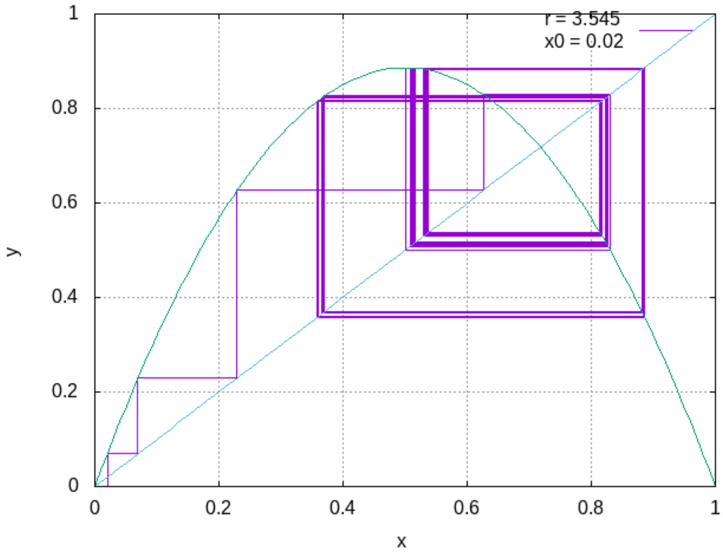


O valor de convergência é de:

$$x^* = 0.66430218085545800$$

3.1.5 Para r = 3.545

Figure 5: Crescimento Populacional para r = 3.545



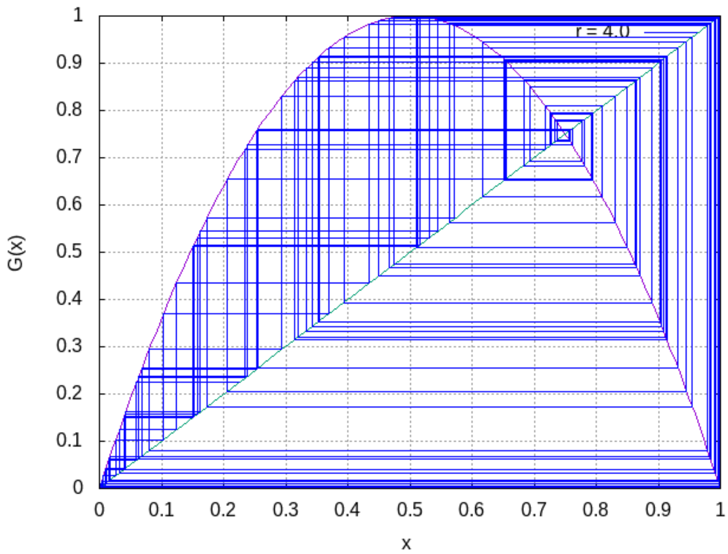
Ja na figura 5 é notado que há dois valores onde oa função oscila. Sendo estes valores igual a:

$$x_1 = 0.530306328253437 49$$

$$x_2 = 0.88299401132833288$$

3.1.6 Para r = 4

Figure 6: Crescimento Populacional para r = 4.0



Percebe que o crescimento populacional atingiu um padrão caótico, onde não se é possível determinar valor de convergência.

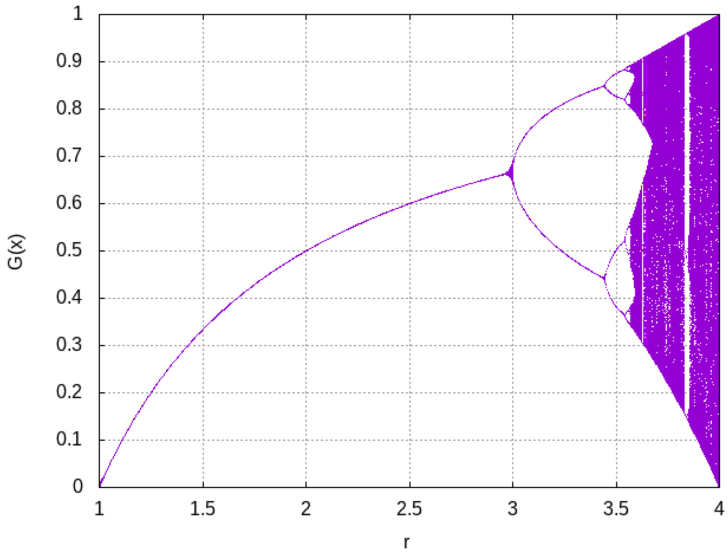
3.2 Rumo ao Caos

O programa usado para observar o comportamento da variação de r afim de descobrir a constante de Feigenbaum se encontra abaixo:

```
program rvariation
implicit none

real(8) :: r, dr, x0, x1
real(8) :: r_min, r_max

integer :: contador, verificador

integer :: i, n_test, n_steps, r_steps
r_min = 1.0d0
r_max = 4.0d0

n_test = 100
n_steps = 1000
```

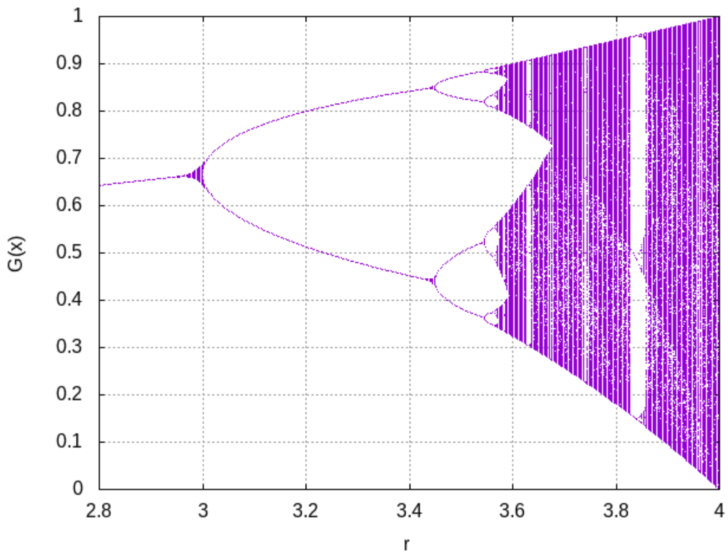
```fortran
r_steps = 1000


contador = 1
verificador = 0

open(1, file='rVariation.dat')

dr = (r_max - r_min) / r_steps ! Incremento em r

r = r_min

do while ( r < r_max)
        x0 = 0.5d0

        do i = 1, n_test, 1
                x1 = r * x0 * (1.d0 - x0)
                x0 = x1
        enddo

        do i = 1, n_steps, 1
                x1 = r * x0 * (1.d0 - x0)
                write(1, *) r, x1

                x0 = x1
        enddo

        r = r + dr
enddo
close(1)

end program rvariation
```

Figure 7: Diagrama de bifurcação em função de r



Para fins de analise foi pego só os valores depois de $r = 2.8$ (já que antes desse intervalo não há bifurcação).

Figure 8: Diagrama de bifurcação em função de r



Com isso os valores de r são:
$r_1 = 3.4485$
$r_2 = 3.5438$

$r_3 = 3.5644$

Utilizando da equação 5:

$$\delta = 4.6262.$$

Comparando o valor obtido pelo da literatura [2].

$$\frac{4.6262}{4.6692} \approx 0.99$$

3.3 O Caos!

O programa usado para calcular o valor do expoente de Lyapunov é:

```
program exer1
implicit none

! Declaracao de variaveis
integer :: i, N

real(8) :: r, epsilon
real(8) :: x0, x1, x0t, x1t

real(8) :: lambda, x0d, x1d


read *, r
read *, x0
read *, epsilon


N = 1000
x0t = x0 + epsilon
x0d = x0

open(1, file="dist_out.dat")
write(1, *) 0, x1, x1t, abs(x1 - x1t)

do i = 1, N, 1
```

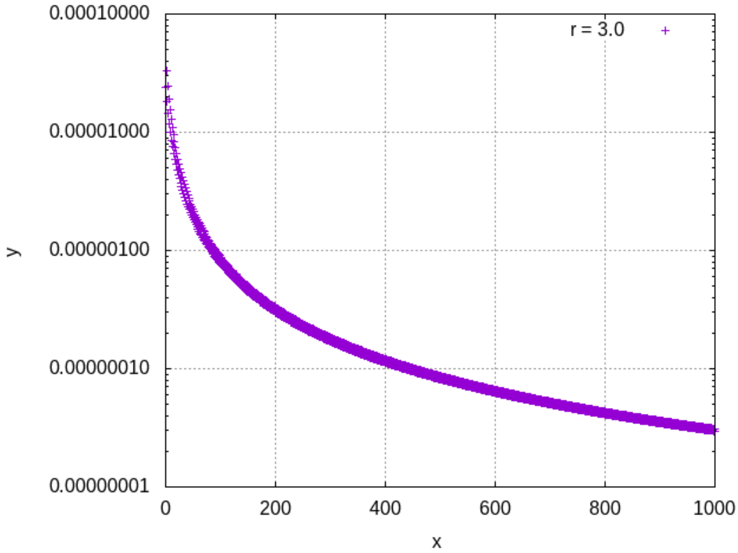
```fortran
! Parte A
x1 = r * x0 * (1.d0 - x0)
x1t = r * x0t * (1.d0 - x0t)

write(1, *) i, x1, x1t, abs(x1 - x1t)

! Parte B
x1d = r * x0d * (1.d0 - x0d)

lambda = lambda + dlog(abs(r * (1.d0 - 2.d0 * x1d)))


x0 = x1
x0t = x1t
x0d = x1d

enddo
close(1)


! Calculo de  lambda
lambda = 1.d0 / (N - 1.d0) * lambda
print *, "O valor de lambda eh : ", lambda

end program exer1
```

Os valores que serão colocados como padrão, onde estes valores serão constantes durante a realização deste projeto.

$$x_0 = 0.1$$
$$\epsilon = 10^{-5}$$

3.3.1 Para r = 3

Figure 9:

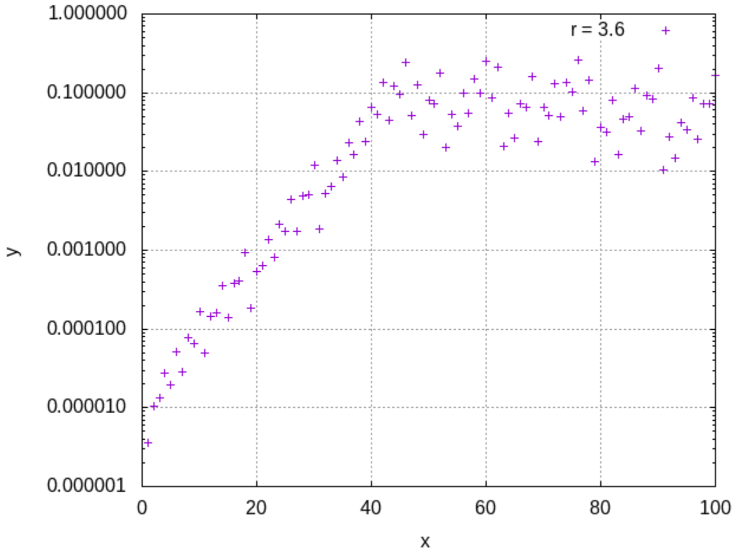


Com as variáveis definidas acima foi obtido um λ igual a:

$$\lambda = -6.705100524852471710^{-3}$$

3.3.2 Para r = 3.6

Figure 10:



Dado que há um limite de crescimento(onde este limite é 1.0), quando a diferença se aproxima de do limite há a perda do comportamento exponencial.

$$\lambda = 0.18498747192623105$$

References

[1] Nicholas J Giordano - Computational Physics - Prentice Hall

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Feigenbaum_constants`