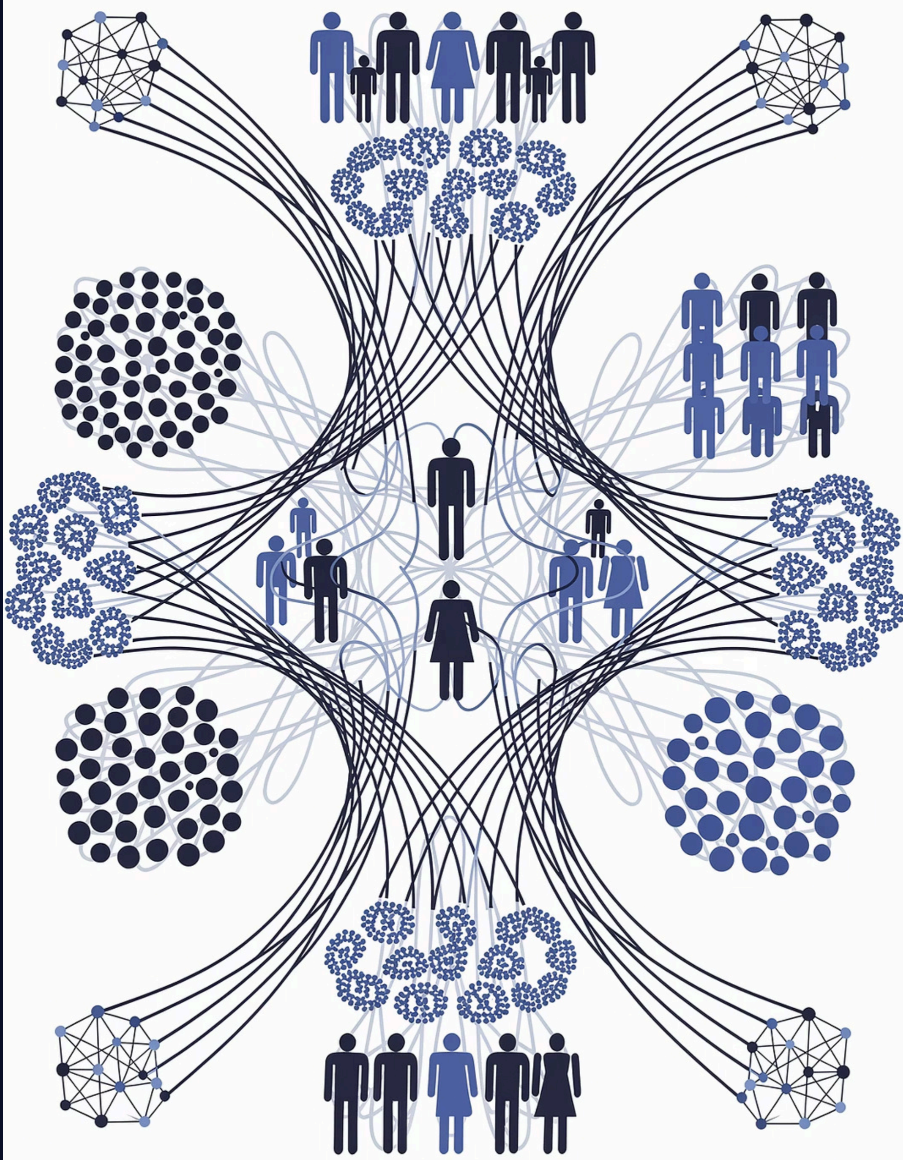
Modelos de Ising y Schelling

MÓDULO 4 | ECONOMÍA APLICADA Y CIENCIA DE DATOS

Técnicas computacionales avanzadas para modelar fenómenos sociales

Concentración en Economía Aplicada y Ciencia de Datos ITESM-SF

CDMX, Feb-Jun 2026



Transiciones de Fase en Sistemas Complejos

Muchos sistemas complejos se caracterizan por presentar diferentes patrones o comportamientos cualitativos, o **fases**. Tales fases corresponden a diferentes formas de organización interna y dos fases están usualmente separadas por un **límite**.

Cruzar este límite implica un cambio en el comportamiento del sistema. Un buen modelo de un sistema complejo debe ser capaz de modelar la presencia de tales fases y sus implicaciones.

Características Clave

- Diferentes patrones de organización
- Límites entre fases
- Cambios cualitativos
- Comportamiento colectivo

Ejemplos de Transiciones de Fase

Fase Ordenada

Una multitud masiva reunida en una plaza de la ciudad, demostrando organización colectiva durante una manifestación política o concentración.

Fase Desordenada

Personas en trajes protectores caminando por una calle de la ciudad, representando dispersión y aislamiento individual durante una crisis.

Cuando un parámetro es ajustado y cruza un umbral, observamos cambios en la organización del sistema o en su dinámica. El fenómeno de transición de fase es **colectivo** por naturaleza.

Naturaleza de las Transiciones de Fase

En física, los cambios de fase a menudo están vinculados a cambios entre **orden** y **desorden** en la medida que la **temperatura** cambia. Tales transiciones típicamente implican la existencia de un cambio en la simetría interna de los componentes.

Sólido (S)

Moléculas ordenadas en una estructura de red perfecta. Máximo orden.

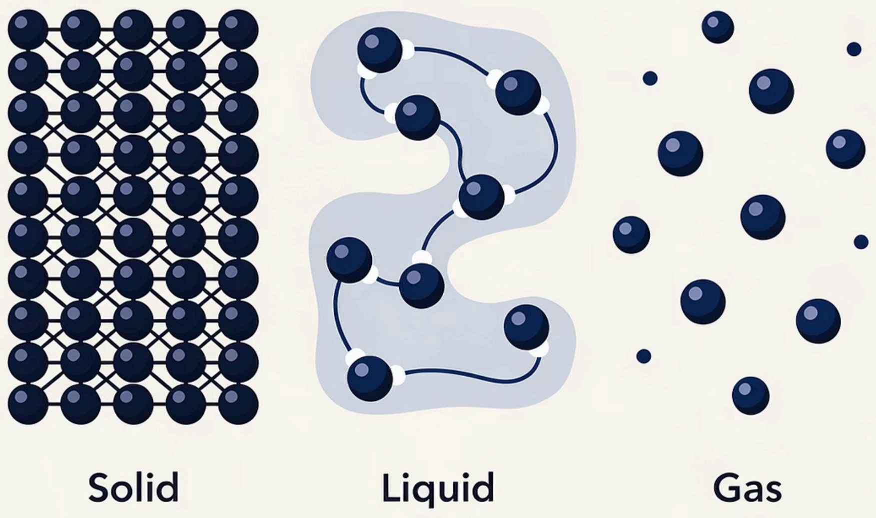
Líquido (L)

Moléculas cercanas pero en disposición desordenada e irregular.

Gas (G)

Moléculas ampliamente espaciadas y distribuidas aleatoriamente. Máximo desorden.

Al incrementar un parámetro externo (el parámetro de control), como la temperatura, podemos incrementar el grado de desorden.

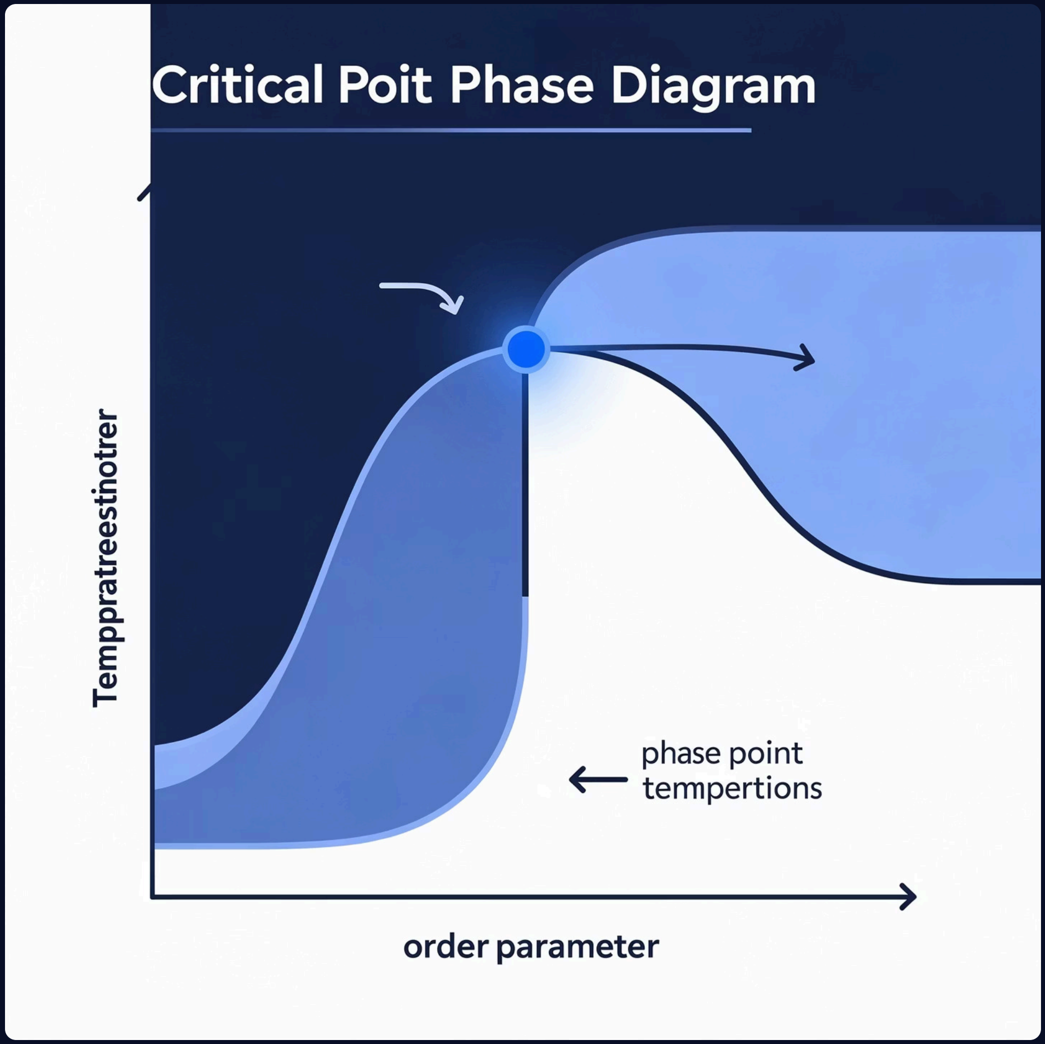


Puntos Críticos y Parámetros de Orden

Conceptos Fundamentales

Un **punto crítico** describe la presencia de una transición muy estrecha que separa dos fases bien definidas. Estas fases están caracterizadas por distintas propiedades macroscópicas vinculadas a cambios en la naturaleza de las interacciones microscópicas.

Una transición de fase crítica está caracterizada por algún **parámetro de orden** $\phi(\mu)$ que depende de algún **parámetro de control** externo μ (como la temperatura).



Aunque parece muy complicado diseñar un modelo microscópico capaz de proporcionar una idea de cómo ocurren las transiciones de fase, resulta que se ha logrado una gran comprensión mediante el uso de modelos extremadamente simplificados.

Modelo de Ising: Fundamentos

El modelo comienza con un lattice cuadrado con L × L sitios. Cada sitio está ocupado por un **spin**, el cual tiene sólo dos posibles estados:

Estado -1

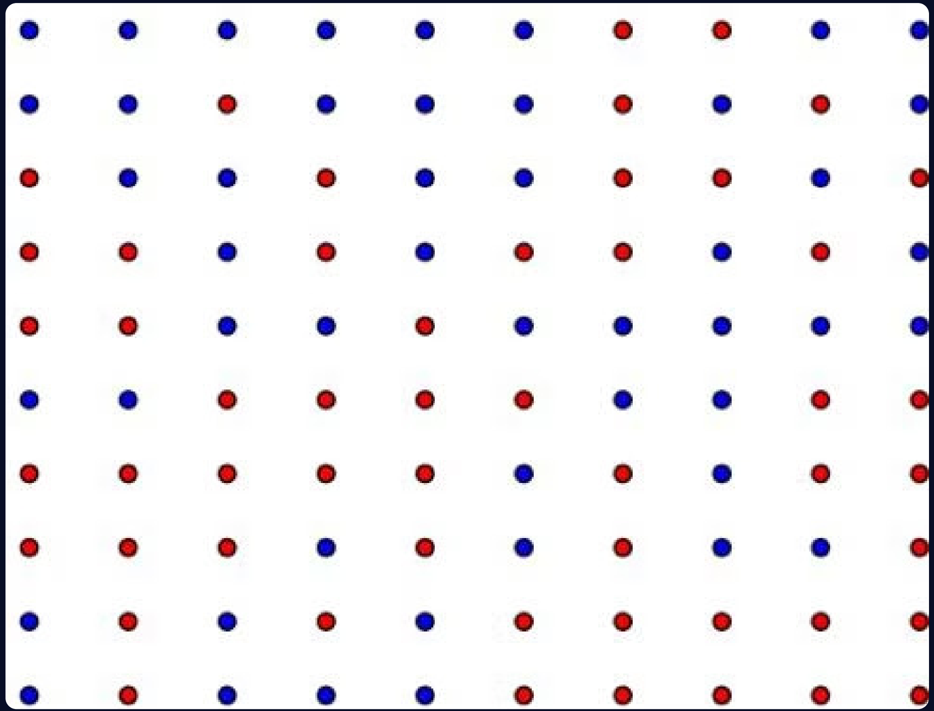
Spin down (hacia abajo)

Estado +1

Spin up (hacia arriba)

La magnetización total M(T) para una temperatura dada T es simplemente la suma:

$$M(T) = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^{N} S_i, \quad \text{donde } N = L^2$$



Una cuadrícula 10×10 de spines mostrando un patrón complejo de puntos azules y rojos.

Dinámica del Modelo de Ising

Los spines tienen una tendencia natural a alinearse con sus spines vecinos en la misma dirección. Si un spin **down** está rodeado por vecinos **up**, el spin tenderá a adoptar el mismo estado **up**. El estado final será una lattice con spines solo **up** o **down**.

1

Minimización de Energía

El sistema trata de minimizar el Hamiltoniano

2

Interacciones Locales

Acoplamiento entre vecinos cercanos con constante $J > 0$

3

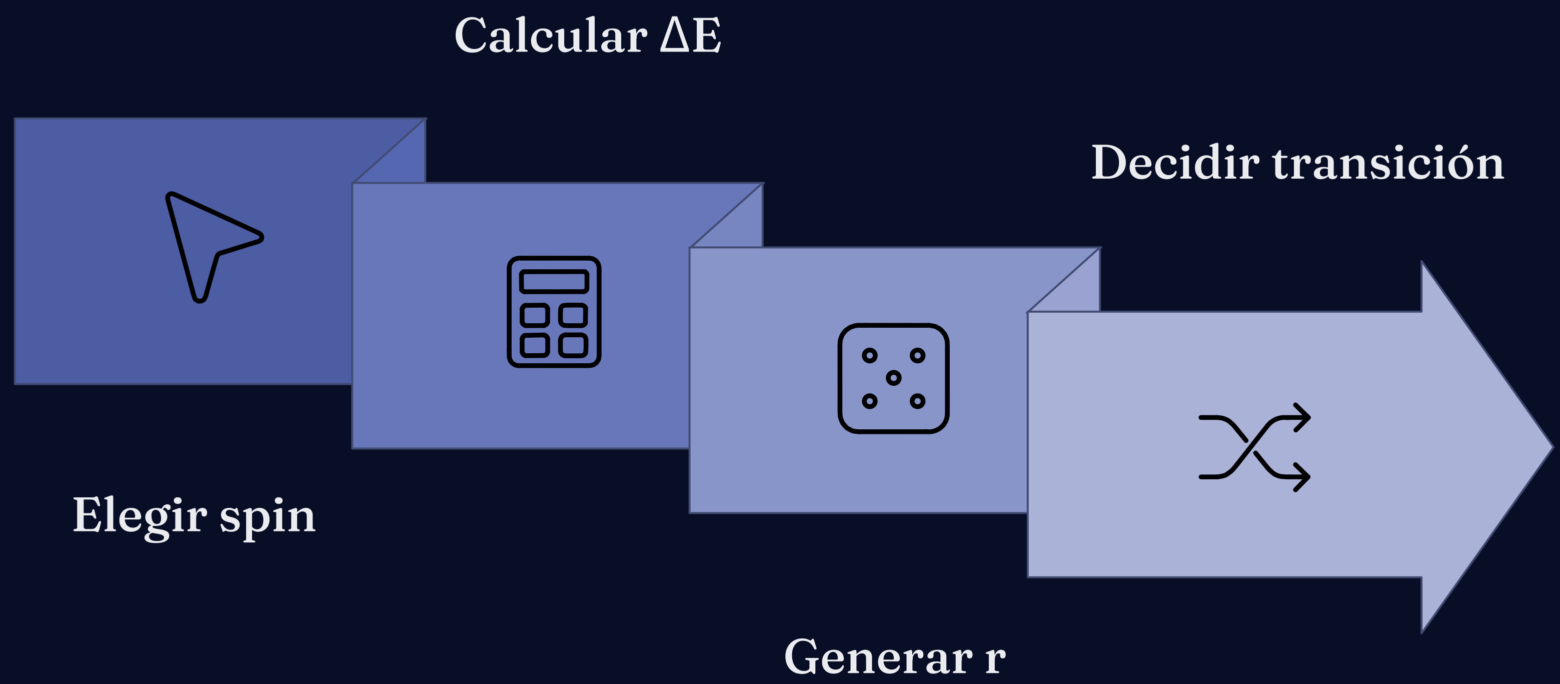
Fase Ordenada

Magnetización $M = 1$ o $M = -1$

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} J S_i S_j$$

Donde $J > 0$ es una constante de acoplamiento y la suma es sobre los vecinos cercanos. Pares de unidades con el mismo valor contribuyen a **reducir** la energía, mientras que pares con valores distintos la **incrementan**.

Algoritmo de Metropolis para Simulación



La simulación comienza con una configuración de spin completamente desordenada. Al fijar la temperatura T y la constante de acoplamiento J, el nuevo estado es obtenido por medio de reglas simples aplicadas iterativamente.

01

Selección Aleatoria

Elige un spin Si de forma aleatoria del lattice

02

Cálculo de Energía

Calcula el cambio de energía ΔE asociado con el cambio Si → -Si

03

Generación Aleatoria

Genera un número aleatorio $0 \leq \xi \leq 1$ con distribución uniforme

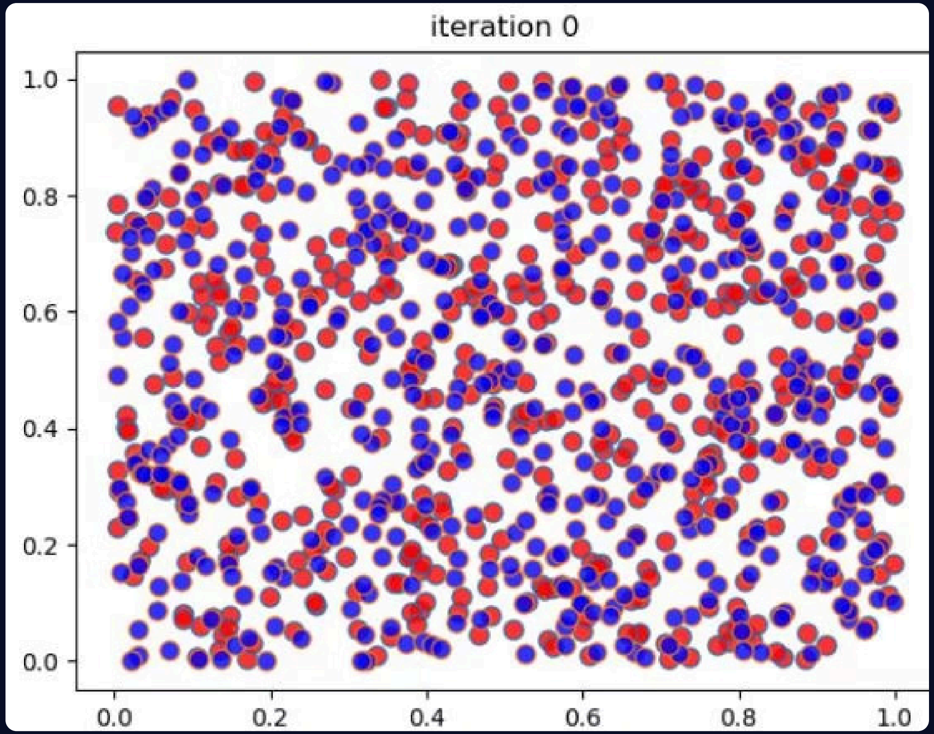
04

Decisión de Transición

Si $\xi < \exp(-\Delta E/kT)$, cambia el estado del spin. En caso contrario, se mantiene

$$W(S_i \to -S_i) = \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right)$$

Modelo de Schelling: Segregación Urbana



Estado inicial del modelo de Schelling mostrando distribución aleatoria de hogares rojos y azules.

Schelling (1969, 1971) diseñó su modelo para explicar el incremento y prevalencia de vecindarios segregados en ciudades de USA. La idea principal fue que incluso si las personas se sienten cómodas viviendo en vecindarios mixtos, tales vecindarios son inherentemente inestables una vez que se incorpora la dinámica.

Regla de Satisfacción

Un hogar se considerará feliz en su ubicación actual siempre que al menos la mitad de sus vecinos sean del mismo color. Si menos de la mitad son del mismo color, el hogar se hace infeliz y busca moverse.

Dinámica del Modelo de Schelling

1

Configuración Inicial

Asignación aleatoria de colores a n hogares y posiciones (x, y) en el cuadrado unitario [0, 1] × [0, 1]

2

Selección Aleatoria

En cada turno, uno de los n hogares es seleccionado de forma aleatoria

3

Evaluación de Felicidad

Si el hogar es feliz, no hay cambio. Si es infeliz, se selecciona nueva ubicación (x', y')

4

Reubicación

El proceso se repite hasta que el hogar es feliz en su nueva posición

> Nótese la similaridad con el Modelo de Ising. En el Modelo de Ising las interacciones locales son mediante efectos magnéticos y los spines prefieren alinearse en la misma dirección que la de sus vecinos. En el Modelo de Schelling, los hogares que son cercanos entre sí prefieren ser de la misma raza.