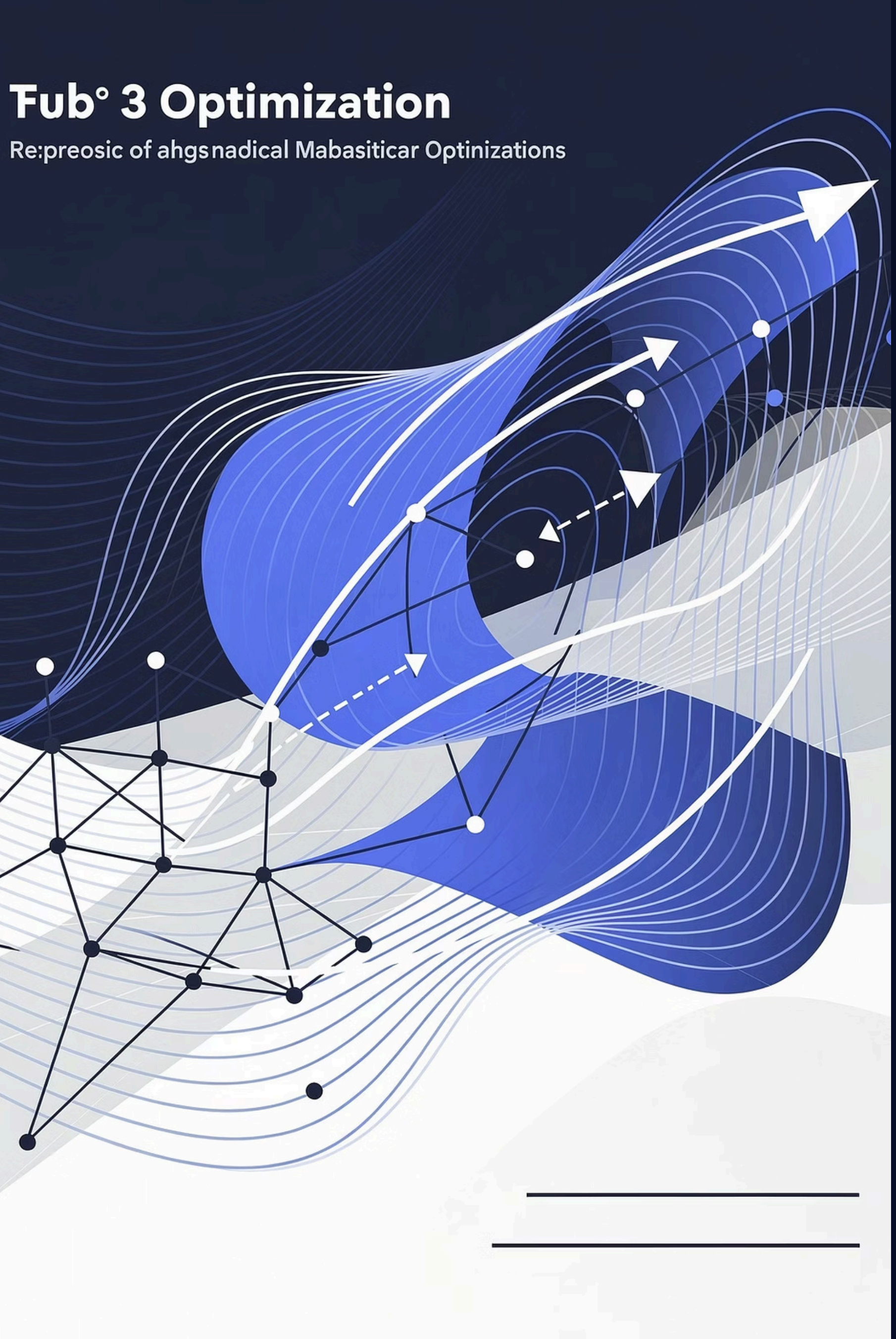


Introducción a la Optimización

Módulo 4: Técnicas computacionales avanzadas para modelar fenómenos sociales

Concentración en Economía Aplicada y Ciencia de Datos

ITESM-SF | CDMX, Feb-Jun 2026

CAPÍTULO 1

Todos Optimizamos

La optimización es una disciplina fundamental que permea diversas industrias y sectores. Desde la manufactura automatizada y la logística global hasta la producción farmacéutica y la agricultura de precisión, sus técnicas son clave para impulsar la eficiencia y facilitar la toma de decisiones estratégicas en el panorama actual.

FUNDAMENTOS

¿Qué es la Optimización?

Objetivo

La métrica cuantitativa que se busca maximizar o minimizar para evaluar el rendimiento del sistema.

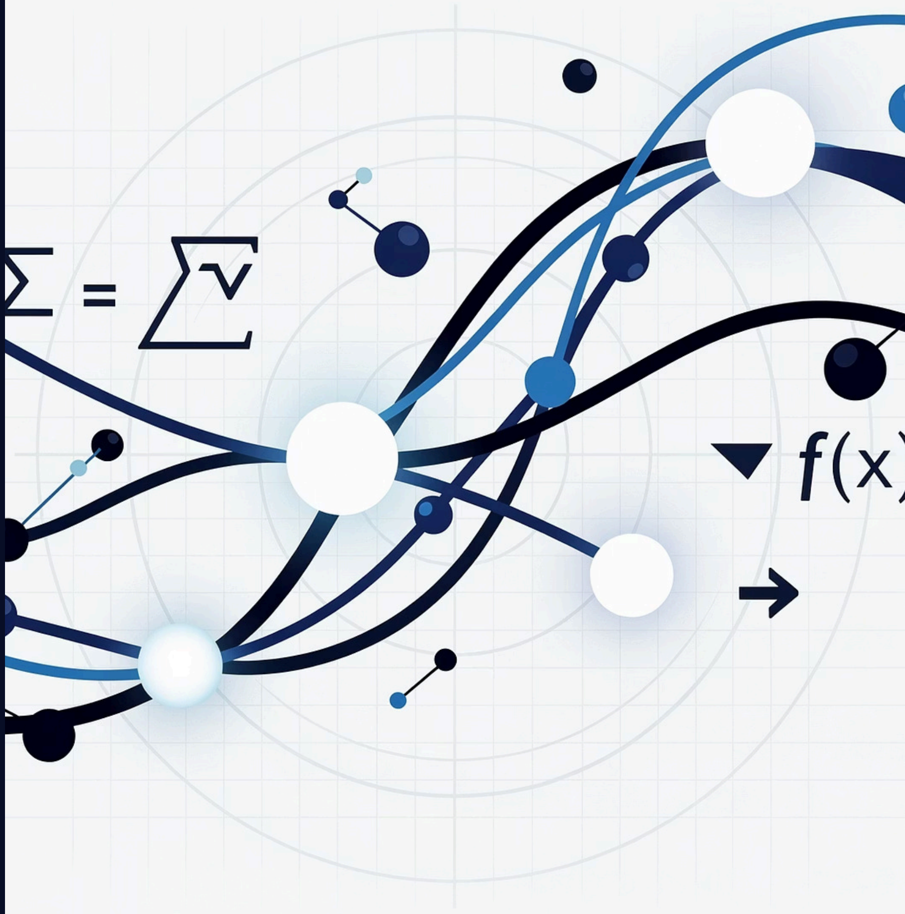
Variables

Los factores ajustables o controlables del sistema que impactan directamente en el objetivo.

Restricciones

Las limitaciones o condiciones impuestas que las variables deben satisfacer.

La optimización constituye una herramienta esencial tanto en las ciencias de la decisión como en el análisis de sistemas físicos. La identificación precisa de estos tres componentes para un problema determinado es conocida como **modelación**.



Del Modelo a la Solución

Algoritmos de Optimización

No existe un algoritmo de optimización universal. Cada tipo de problema exige un algoritmo específico, cuidadosamente adaptado a sus características distintivas.

Validación y Mejora

- Criterios de optimalidad para la verificación de soluciones
- Análisis de sensibilidad para evaluar la robustez del modelo
- Refinamiento iterativo del modelo

Una vez formulado el modelo, se aplican algoritmos de optimización para encontrar su solución óptima. Posteriormente, es fundamental validar la eficacia del algoritmo y refinar el modelo mediante técnicas de análisis avanzadas.

CAPÍTULO 2

Formulación Matemática

Formalmente, la optimización consiste en hallar el mínimo o máximo de una función bajo ciertas condiciones impuestas a sus variables:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{sujeto a} \quad \begin{array}{ll} c_i(x) = 0, & i \in \mathcal{E} \\ c_i(x) \geq 0, & i \in \mathcal{I} \end{array}$$

Vector de Variables

Variables del problema, representadas por el vector x

Función Objetivo

Función escalar f a optimizar (minimizar o maximizar)

Restricciones

Funciones c_i que definen las igualdades y desigualdades

Ejemplo: Problema de Optimización

Formulación del Problema

$$\min\ (x_1-2)^2+(x_2-1)^2$$

Sujeto a:

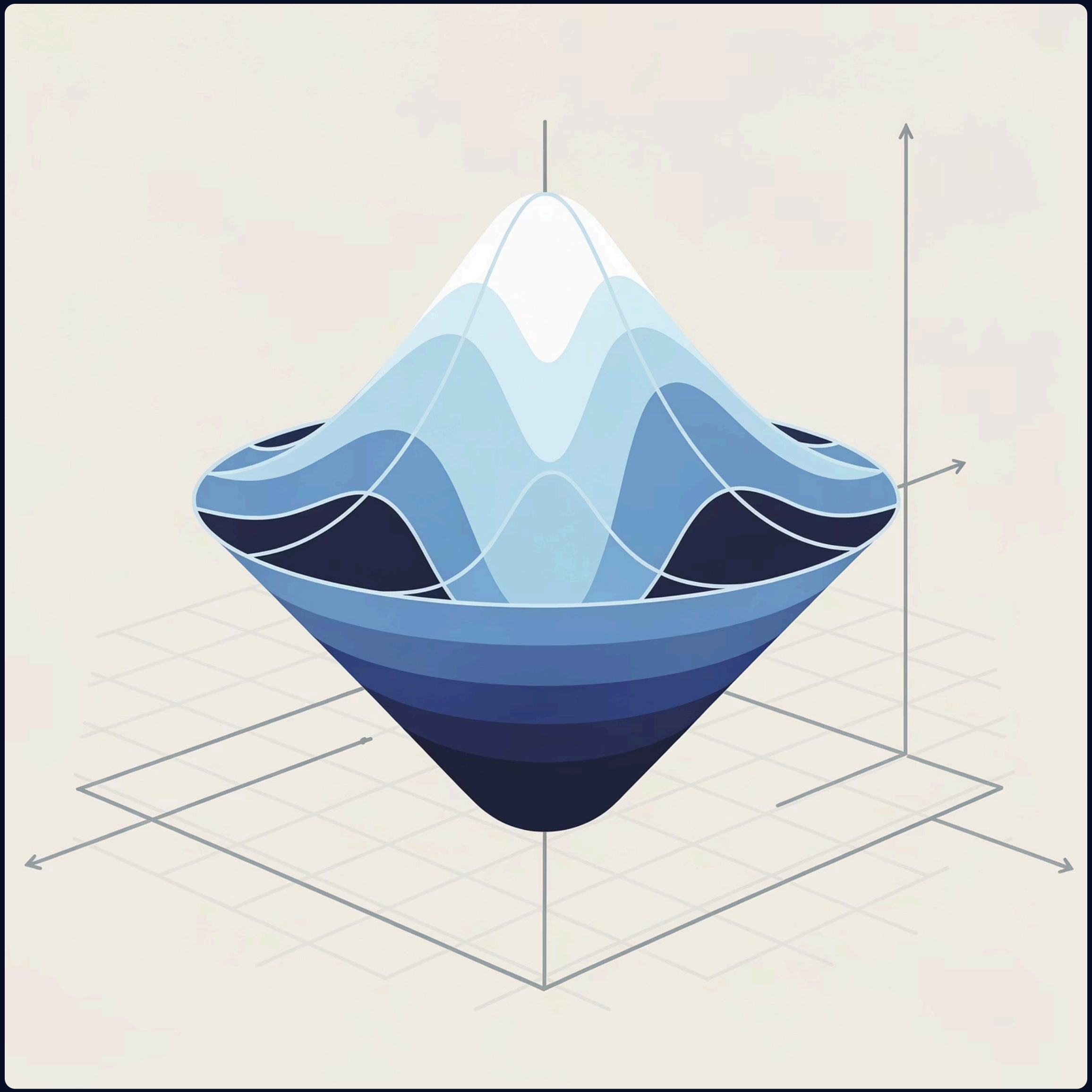
$$x_1^2-x_2\geq 0$$

$$x_1+x_2\geq 2$$

Definimos:

$$f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-1)^2$$

$$c(x)=\begin{bmatrix}-x_1^2+x_2\\-x_1-x_2+2\end{bmatrix}$$



La función objetivo se visualiza como una superficie parabólica. El punto óptimo x^* se halla donde la función alcanza su mínimo dentro de la región factible.

CLASIFICACIÓN

Tipos de Problemas de Optimización

1 Discreta vs. Continua

La optimización **Discreta** trabaja con variables que pertenecen a conjuntos finitos o numerables (ej. el Problema del Vendedor Viajero - TSP).

En contraste, la optimización **Continua** maneja variables definidas sobre conjuntos infinitos no numerables.

2 Restringida vs. No Restringida

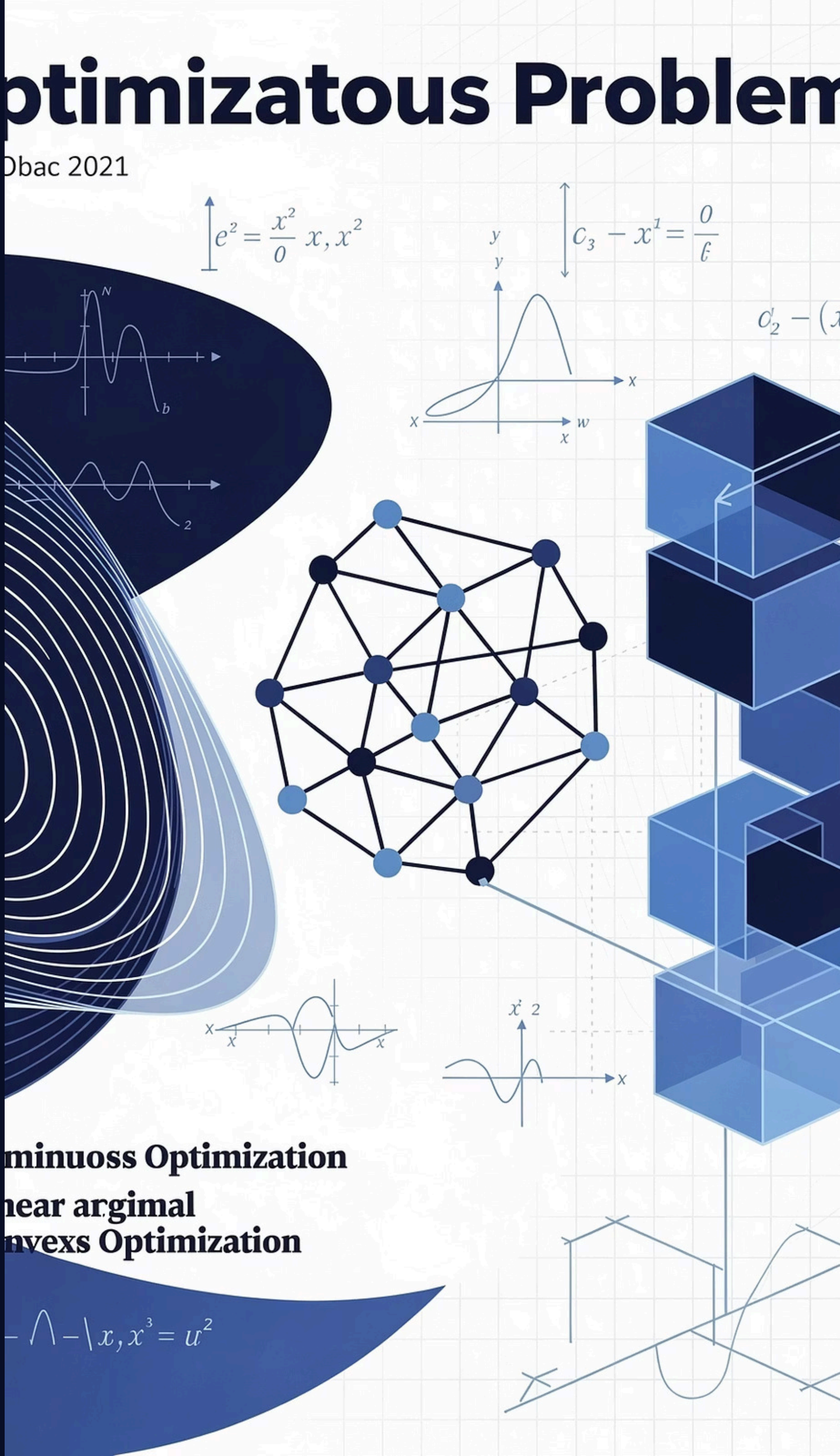
La optimización **No restringida** aborda problemas sin límites o condiciones explícitas en sus variables.

Por otro lado, la optimización **Restringida** opera bajo condiciones que delimitan una región factible para las soluciones.

3 Lineal vs. No Lineal

En problemas de optimización **Lineal**, tanto la función objetivo como todas las restricciones son funciones lineales.

La optimización **No lineal**, en cambio, implica que al menos una de estas funciones (objetivo o restricciones) es no lineal.

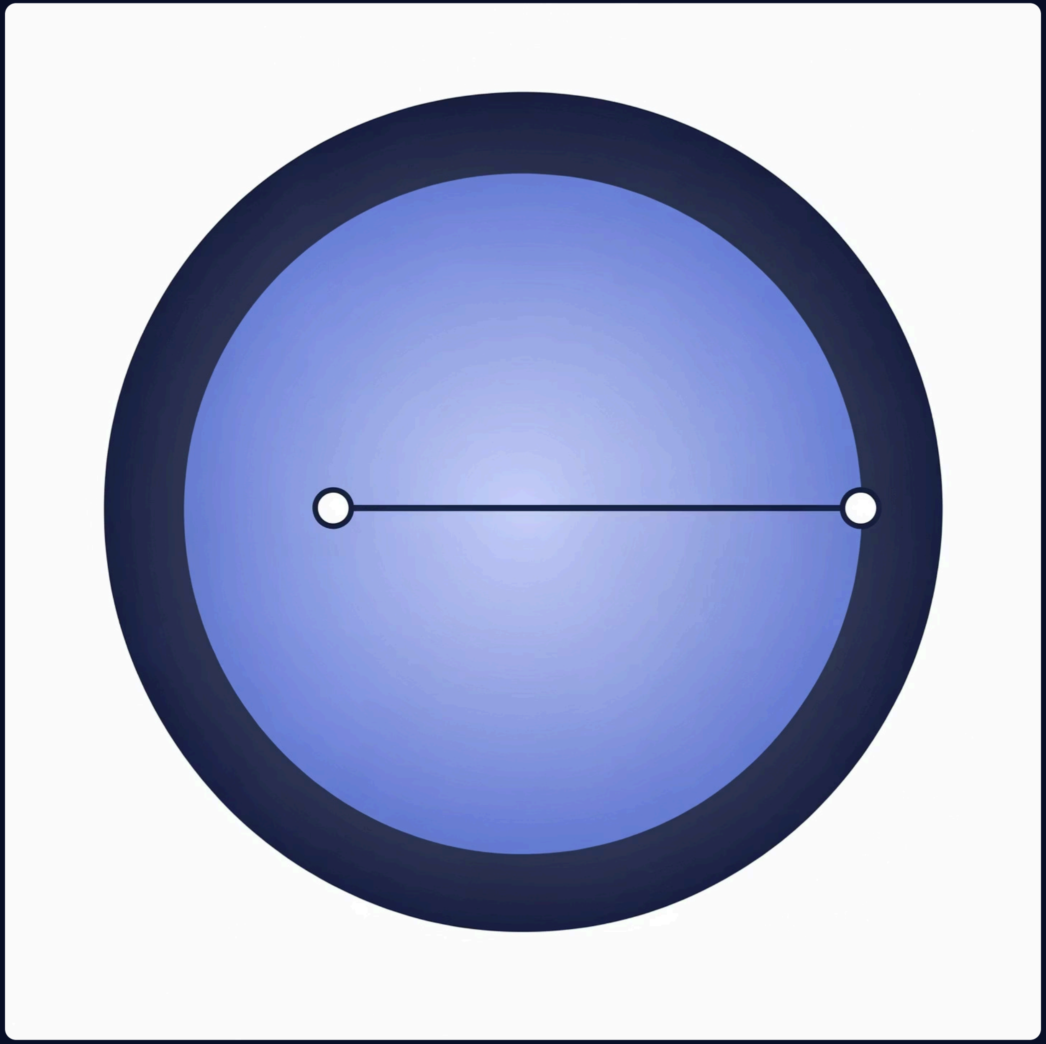


Convexidad: Concepto Fundamental

Conjuntos Convexos

Un conjunto $S \in \mathbb{R}^n$ se define como convexo si, para cualquier par de puntos x e y que le pertenezcan, el segmento de línea que los une está completamente contenido dentro de S.

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in S, \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$



Funciones Convexas

Una función f se considera convexa si su dominio es un conjunto convexo y satisface la siguiente desigualdad:

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$

CAPÍTULO 3

Condiciones de Optimalidad

01

Condición Necesaria de Primer Orden (FONC)

El gradiente debe ser cero: $\nabla f(x^*) = 0$.

Esto indica un punto estacionario donde la función no varía instantáneamente.

02

Condición Necesaria de Segundo Orden (SONC)

El Hessiano debe ser positivo semidefinido: $\nabla^2 f(x^*) \geq 0$.

Esta condición es fundamental para asegurar una curvatura adecuada para un mínimo.

03

Condiciones Suficientes

Si se cumplen $\nabla f(x^*) = 0$ y $\nabla^2 f(x^*) > 0$ (es decir, el Hessiano es positivo definido), entonces x^* es un mínimo local estricto.

Estas condiciones extienden los principios de optimalidad del caso univariado a funciones multivariadas, empleando el gradiente y el Hessiano en sustitución de las primeras y segundas derivadas, respectivamente.

CAPÍTULO 4

Gradiente Descendente

1

Dirección de Búsqueda

La dirección de búsqueda se establece como el gradiente negativo: $p_k = -\nabla f(x_k)$, indicando el descenso más pronunciado.

2

Actualización Iterativa

El punto se actualiza iterativamente según la fórmula $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, donde α_k es el tamaño de paso.

3

Condiciones de Wolfe

Estas condiciones aseguran un descenso adecuado de la función: $f(x_k + \alpha_k p_k) < f(x_k) + c_1 \alpha \nabla f_k^T p_k$.

El algoritmo de gradiente descendente es un método iterativo esencial para minimizar una función, procediendo en la dirección opuesta a su gradiente. El tamaño de paso α_k se determina mediante técnicas como el backtracking para asegurar una convergencia robusta y eficiente.