

# **TECNOLÓGICO DE MONTERREY**

Departamento de Economía

Dr. Leonardo González Tejeda

## **Introducción a la Optimización**

### **SERIE DE EJERCICIOS PRÁCTICOS**

*Nivel Básico a Avanzado*

Módulo 4: Técnicas computacionales avanzadas

para modelar fenómenos sociales

*Concentración en Economía Aplicada y Ciencia de Datos*

**2026**

## Introducción

Esta serie de ejercicios ha sido diseñada para reforzar los conceptos fundamentales de optimización presentados en el módulo. Los problemas están organizados en orden de dificultad creciente, comenzando con conceptos básicos y progresando hacia aplicaciones más complejas.

Todos los ejercicios incluyen soluciones detalladas implementadas en **Wolfram Mathematica**, una poderosa herramienta de cálculo simbólico y numérico ampliamente utilizada en investigación académica y aplicaciones industriales.

## Objetivos de Aprendizaje

Al completar estos ejercicios, el estudiante será capaz de:

- Formular problemas de optimización matemáticamente
- Aplicar condiciones de optimalidad (FONC y SONC)
- Calcular gradientes y hessianos de funciones multivariadas
- Implementar y aplicar el algoritmo de gradiente descendente
- Analizar la convexidad de funciones y conjuntos
- Utilizar herramientas computacionales profesionales para resolver problemas de optimización

## Ejercicios Nivel Básico

### Ejercicio 1: Conceptos Fundamentales

Dificultad: ★★☆☆☆

Considere la función univariada  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ .

Tareas:

- a) Encuentre todos los puntos críticos de la función
- b) Determine si cada punto crítico es un mínimo local, máximo local o punto de inflexión
- c) Identifique el mínimo global en el dominio  $x \in [-10, 10]$
- d) Grafique la función y marque los puntos críticos encontrados

### Ejercicio 2: Gradiente y Derivadas Direccionales

Dificultad: ★★☆☆☆

Dada la función  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 + x_1$ .

Tareas:

- a) Calcule el gradiente  $\nabla f(x)$
- b) Evalúe el gradiente en el punto  $(1, 2)$
- c) Calcule la derivada direccional en  $(1, 2)$  en la dirección  $s = [-1, 1]$
- d) Genere un gráfico de contorno de la función mostrando el gradiente en  $(1, 2)$

### Ejercicio 3: Matriz Hessiana y Convexidad

Dificultad: ★★☆☆☆

Para la función  $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1 - 2x_2$ .

Tareas:

- a) Calcule la matriz Hessiana  $\nabla^2 f(x)$
- b) Determine los eigenvalores del Hessiano
- c) Clasifique la función como convexa, cóncava o ninguna de las anteriores
- d) Encuentre el punto crítico y verifique las condiciones FONC y SONC

## Ejercicios Nivel Intermedio

### Ejercicio 4: Función de Rosenbrock

Dificultad: ★★★☆☆

La función de Rosenbrock es un problema clásico de optimización:  $f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2$ .

Tareas:

- a) Verifique analíticamente que (1, 1) es un punto crítico
- b) Calcule el Hessiano en (1, 1) y verifique las condiciones de segundo orden
- c) Grafique la función en 3D y sus curvas de nivel
- d) Implemente gradiente descendente con punto inicial (0, 0) y  $\alpha = 0.001$

### Ejercicio 5: Optimización con Restricciones Lineales

Dificultad: ★★★☆☆

Minimice  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  sujeto a las restricciones:

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Tareas:

- a) Grafique la región factible
- b) Identifique geométricamente el punto óptimo
- c) Resuelva usando el método de Lagrange
- d) Verifique la solución con Wolfram utilizando funciones de optimización restringida

## Ejercicios Nivel Avanzado

### Ejercicio 6: Gradiente Descendente con Condiciones de Wolfe

Dificultad: ★★★★☆

Implemente el algoritmo de gradiente descendente con búsqueda de línea usando condiciones de Wolfe para minimizar:

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^4 - 4x_1^2 - 8x_2^2$$

Tareas:

- a) Identifique todos los puntos críticos analíticamente
- b) Implemente el algoritmo backtracking para el tamaño de paso con  $c_1 = 10^{-4}$  y  $\rho = 0.5$
- c) Compare la convergencia desde diferentes puntos iniciales: (0,0), (1,1), (-1,-1)
- d) Genere gráficos de las trayectorias de optimización y la evolución del valor de la función

### Ejercicio 7: Problema de Portafolio de Markowitz

Dificultad: ★★★★☆

Un inversionista tiene tres activos con rendimientos esperados  $\mu = [0.12, 0.10, 0.08]$  y matriz de covarianza:

$$\Sigma = [[0.04, 0.01, 0.02], [0.01, 0.03, 0.015], [0.02, 0.015, 0.05]]$$

Minimice el riesgo  $\sigma^2(w) = w^T \Sigma w$  sujeto a:

- Rendimiento esperado mínimo:  $w^T \mu \geq 0.10$
- Suma de pesos:  $\sum w_i = 1$
- Sin ventas en corto:  $w_i \geq 0$

Tareas:

- a) Formule el problema como optimización cuadrática
- b) Resuelva usando programación cuadrática en Wolfram
- c) Calcule la frontera eficiente para rendimientos entre 0.08 y 0.12
- d) Graifique la frontera eficiente y marque el portafolio óptimo

### Ejercicio 8: Problema de Producción Multi-Producto

Dificultad: ★★★★☆

Una empresa produce tres productos con función de beneficio:

$$\Pi(x_1, x_2, x_3) = 50x_1 + 40x_2 + 35x_3 - 0.5x_1^2 - 0.4x_2^2 - 0.3x_3^2 - 0.2x_1x_2 - 0.1x_2x_3$$

Sujeto a restricciones de recursos:

- Horas de trabajo:  $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 200$
- Material A:  $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 300$
- Material B:  $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 250$
- No negatividad:  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

**Tareas:**

- a) Resuelva el problema usando optimización no lineal con restricciones
- b) Calcule y analice los multiplicadores de Lagrange
- c) Realice análisis de sensibilidad variando la disponibilidad de Material A entre 250 y 350
- d) Interprete económicoamente los resultados y recomendaciones

## Anexo: Guía de Wolfram Mathematica

### Historia y Contexto

**Wolfram Mathematica** es un sistema de cálculo técnico desarrollado por Wolfram Research, fundado por Stephen Wolfram en 1987. Es una de las herramientas computacionales más poderosas y completas disponibles para matemáticas, ciencia e ingeniería.

El sistema integra capacidades de cálculo numérico, simbólico, gráfico y de programación en un entorno unificado. Ha sido utilizado en investigaciones que han llevado a descubrimientos científicos importantes y es ampliamente adoptado en universidades y empresas de todo el mundo.

### Características Principales

- **Cálculo Simbólico:** Manipulación algebraica, cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales
- **Computación Numérica:** Alta precisión arbitraria, álgebra lineal, optimización
- **Visualización:** Gráficos 2D/3D de alta calidad, gráficos interactivos
- **Machine Learning:** Redes neuronales, clasificación, predicción
- **Procesamiento de Datos:** Importación/exportación de múltiples formatos, bases de datos

### Instalación

#### Para Estudiantes e Instituciones Académicas

El ITESM cuenta con licencias institucionales de Wolfram Mathematica. Los estudiantes pueden:

- Acceder a través de los laboratorios de cómputo del campus
- Solicitar una licencia estudiantil al departamento de TI
- Utilizar Wolfram|Alpha Pro (versión en línea) con credenciales institucionales

### Pasos de Instalación

- 1. Visite [wolfram.com/mathematica](http://wolfram.com/mathematica)
- 2. Descargue la versión para su sistema operativo (Windows, macOS, Linux)
- 3. Ejecute el instalador siguiendo las instrucciones en pantalla
- 4. Active el producto con su clave de licencia institucional
- 5. Verifique la instalación abriendo Mathematica y ejecutando:  $2+2$

### Uso Básico para Optimización

#### Sintaxis Fundamental

Wolfram utiliza una sintaxis basada en expresiones. Los comandos básicos incluyen:

Operación	Sintaxis
Definir función	$f[x_] := x^2 - 4x + 3$
Derivada	$D[f[x], x]$
Gradiente	$\text{Grad}[f[x, y], \{x, y\}]$
Hessiano	$D[f[x, y], \{\{x, y\}, 2\}]$
Minimización	$\text{NMinimize}[f[x, y], \{x, y\}]$
Gráfico 3D	$\text{Plot3D}[f[x, y], \{x, -5, 5\}, \{y, -5, 5\}]$

## Funciones Clave de Optimización

Función	Uso
<code>FindMinimum</code>	Minimización numérica local
<code>NMinimize</code>	Minimización global (varios métodos)
<code>Minimize</code>	Minimización simbólica exacta
<code>LinearProgramming</code>	Programación lineal
<code>QuadraticProgramming</code>	Programación cuadrática
<code>ConvexOptimization</code>	Optimización convexa

## Recursos Adicionales

- **Documentación oficial:** [reference.wolfram.com/language/](http://reference.wolfram.com/language/)
- **Wolfram|Alpha:** [wolframalpha.com](http://wolframalpha.com) (calculadora en línea)
- **Tutorial interactivo:** [wolfram.com/language/fast-introduction-for-math-students/](http://wolfram.com/language/fast-introduction-for-math-students/)
- **Comunidad:** [community.wolfram.com](http://community.wolfram.com)
- **Soporte ITESM:** Contacte al departamento de TI del campus

## Consejos para Principiantes

- Use Shift+Enter para ejecutar comandos
- Aproveche el autocompletado con Tab
- Use ? antes de un comando para ver su documentación (ej: ?Plot)
- Guarde su trabajo frecuentemente en formato .nb (notebook)

- Practique con ejemplos simples antes de problemas complejos
  - Explore las paletas de símbolos matemáticos (menú Palettes)
- 

Para más información sobre los ejercicios y soluciones detalladas,  
**consulte el documento complementario de Soluciones.**