Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра информатики
Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №8

на тему

«ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ»

Выполнил студент группы 253505
Снежко Максим Андреевич

____
(дата, подпись студента)

Проверил доцент кафедры
информатики
Анисимов Владимир Яковлевич

____
(дата, подпись преподавателя)

Минск 2023

Оглавление

Цели работы

1. Изучить методы численного вычисления производных и методы численного интегрирования
2. Сравнить методы по трудоёмкости и точности
3. Выполнить тестовое задание по численному дифференцированию и интегрированию
4. Составить алгоритм решения

Теоретические сведения

1) Численное дифференцирование. Для получения формул вычисления производной разобьем отрезок *[a, b]* на n частей следующим образом:

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Тогда $y_k = f(x_k)$, $y_k^{'} = f'(x_k)$, и по формуле Тейлора (считая функцию дважды непрерывно дифференцируемой) получаем

$$y_{k+1} = y_k + y_k{}'h + f''(\xi)h^2\frac{1}{2},$$

или

$$y'_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \frac{f''(\xi)h}{2} \;;$$

где ξ – некоторая точка на $[x_k, x_{k+1}]$.

Таким образом получаем формулу для приближенного вычисления производной : $\boxed{y'_k \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h}, \text{ с погрешностью } R \le \frac{M_2 h}{2}}$, Точность вычисления производной в этом случае имеет порядок $O(h^2)$.

Для того чтобы найти формулу для вычисления второй производной будем считать функцию f(x) четырежды непрерывно дифференцируемой, тогда:

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 + \frac{y'''_k}{6} h^3 + \frac{f^{IV}(\xi_1)}{24} h^4;$$

$$y_{k-1} = y_k - y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 - \frac{y'''_k}{6} h^3 + \frac{f^{IV}(\xi_2)}{24} h^4,$$

отсюда $\dfrac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = y''_k + \dfrac{f^{IV}(\xi_1) + f^{IV}(\xi_2)}{24} h^2$,

значит $\boxed{y''_k \approx \dfrac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}, \quad R = \dfrac{\left|f^{IV}(\xi_k)\right|}{12} h^2 \le \dfrac{M_4 h^2}{12}}$

При этом обеспечивается точность $O(h^2)$.

2) Интегрирование функций. Пусть дана функция $f(x)$, которую необходимо проинтегрировать на отрезке $[a,b]$. Разобьем этот отрезок на n частей следующим образом:

$h = \dfrac{b-a}{n}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, и зафиксируем значения функции в точках разбиения $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Тогда $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$ и, полагая $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx y_{k-1}h$,

можно получить формулы:

$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + ... + y_n)$ *(правых прямоугольников)* ;

$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1})$ *(левых прямоугольников)*;

$\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_0 + h/2) + ... + f(x_{n+1} + h/2))$ *(средних прямоугольников)*.

Проанализируем точность наиболее точной из них формулы средних прямоугольников.

Пусть $\Phi(x) = \int_{x_{k-1}+h/2}^{x_k} f(x)dx \Rightarrow \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})$. (*)

Считая исходную функцию дважды непрерывно дифференцируемой, получаем

$$\Phi(x_k) = \Phi(x_{k-1} + h/2) + \Phi'(x_{k-1} + h/2)\frac{h}{2} + \Phi''(x_{k-1} + h/2)\frac{h^2}{8} + \frac{\Phi'''(\xi_1)}{6}\frac{h^3}{8} =$$
$$= f(x_{k-1} + h/2)\frac{h}{2} + f'(x_{k-1} + h/2)\frac{h^2}{8} + f'''(\xi_1)\frac{h^3}{48}$$

Значит $\Phi(x_{k-1}) = -f(x_{k-1} + h/2)\frac{h}{2} + f'(x_{k-1} + h/2)\frac{h^2}{8} - f'''(\xi_2)\frac{h^3}{48}$

Полученные значения подставим в (*) и приведем подобные:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}) = f(x_{k-1} + h/2)h + \frac{f''(\xi_1) + f(\xi_2)}{48}h^3;$$

Таким образом
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1} + h/2)h + \sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k)\frac{h^3}{24} = h\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1} + h/2) + \frac{f''(\xi)nh^3}{24}, \ R \le \frac{M_2 nh^3}{24};$$

То есть оценка точности для данного метода $O(h^2)$.

Используя формулы правых и левых прямоугольников (взяв их среднее арифметическое) получим *формулу трапеций*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}), R \le \frac{M_2 nh^2}{12}.$$

Можно показать, что ее точность тоже $O(h^2)$.

Формула Симпсона.

Дана функция $f(x)$, которую необходимо проинтегрировать на отрезке $[a,b]$. Разобьем этот отрезок на 2n частей следующим образом:

$$h = \frac{b-a}{2n}, \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b. \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx$$

Будем аппроксимировать элементарную трапецию некоторой параболической трапецией (например $y = ax^2 + bx + c$) через точки вида

A(x_{2k}, y_{2k}), B(x_{2k+1}, y_{2k+1}), C(x_{2k+2}, y_{2k+2});

Составим систему: $\begin{cases} y_{2k} = ax_{2k}^2 + bx_{2k} + c \\ y_{2k+1} = ax_{2k+1}^2 + bx_{2k+1} + c \\ y_{2k+2} = ax_{2k+2}^2 + bx_{2k+2} + c \end{cases}$ (**)

Посчитаем определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} x_{2k}^2 & x_{2k} & 1 \\ x_{2k+1}^2 & x_{2k+1} & 1 \\ x_{2k+2}^2 & x_{2k+2} & 1 \end{vmatrix} \ne 0$, значит данная система имеет решение a,b,c и причем единственное.

Решая ее мы получим так называемую малую формулу Симпсона:

$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} (ax^2 + bx + c)dx = \ldots = \frac{h}{3}(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2})$, где a, b и c берутся из системы (**).

По сдвоенному элементарному промежутку запишем

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{3}(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}) =$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 2(y_2 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \ldots + y_{2n-1}) + y_{2n})$$

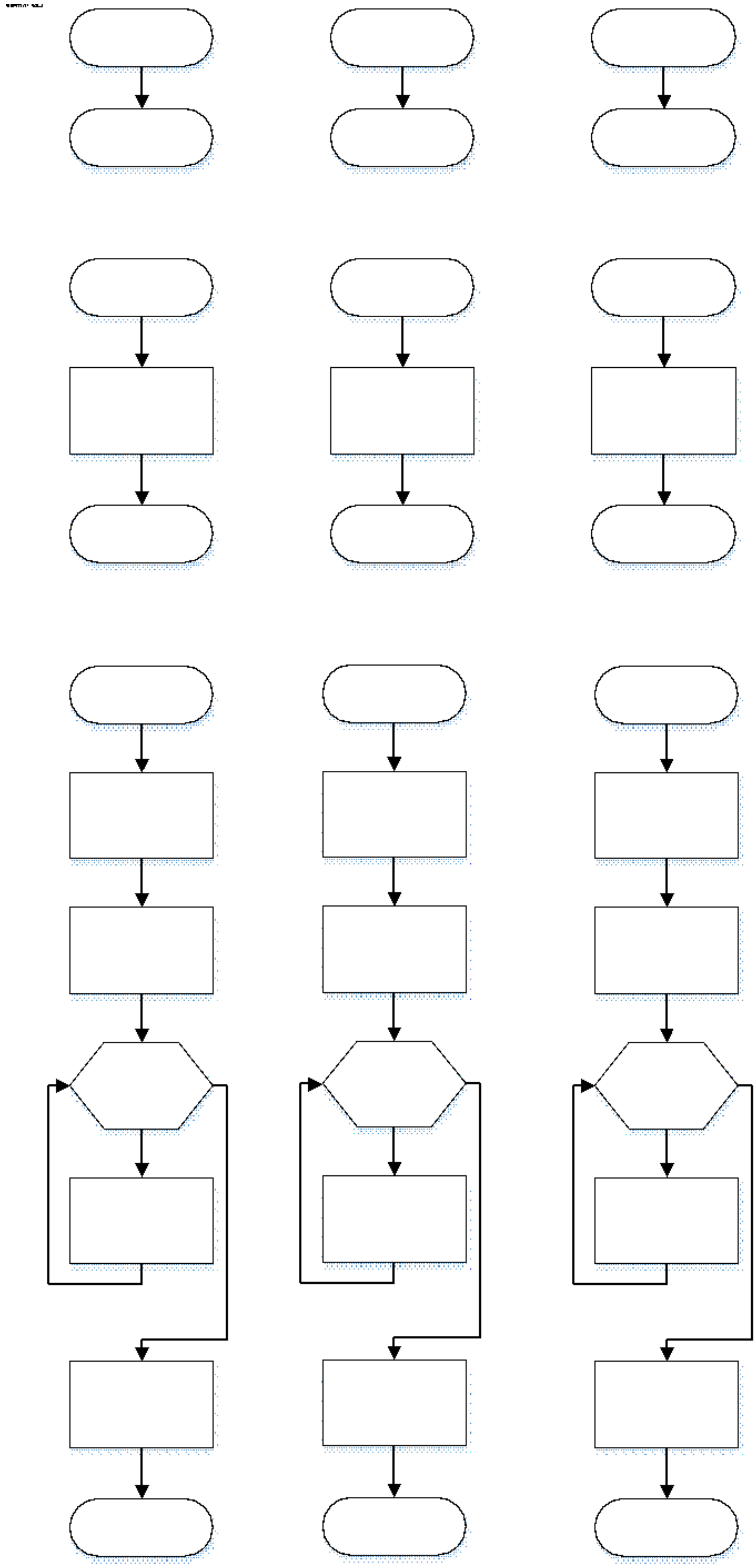
Таким образом, получается формула Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \ldots + y_{2n-1})],\ R \le \frac{(b-a)^4 h^4 M_4}{180};$$

Данная формула обеспечивает точность вычислений $O(h^4)$.

Анализируя рассмотренные методы численного интегрирования мы можем сделать вывод, что расчет по формуле Симпсона является наиболее точным.

Алгоритм задания



Программная реализация

Дифференцирование:

```
def deriviativeFirst(f, x, f2, f3):
    M2 = abs(f2.subs(z, x))
    if M2 == 0:
        M3 = abs(f3.subs(z, x))
        h = (6 * epsilon / M3) ** (1 / 2)
    else:
        h2 = 2 * epsilon / M2
        M3 = abs(f3.subs(z, x))
        h3 = (6 * epsilon / M3) ** (1 / 2)
        h = min(h2, h3)
    return (f.subs(z, x + h) - f.subs(z, x - h)) / (2 * h)
def deriviativeSecond(f, x, f4):
    M4 = abs(f4.subs(z, x))
    h2 = abs((12 * epsilon / M4))
    h = abs(h2 ** (1 / 2))
    return (f.subs(z, x + h) - 2 * f.subs(z, x) + f.subs(z, x - h)) / h2

2 usages
def deriviativeSecond2(f, x, f2, f4):
    M4 = abs(f4.subs(z, x))
    h2 = abs((12 * epsilon / M4))
    h = abs(h2 ** (1 / 2))
    a = (f.subs(z, x + h) - 2 * f.subs(z, x) + f.subs(z, x - h)) / h2
    while a - f2.subs(z, x) > epsilon:
        h -= epsilon ** 3
        a = (f.subs(z, x + h) - 2 * f.subs(z, x) + f.subs(z, x - h)) / h2
    return a
```

Интегрирование:

```python
def intMiddleRectangle(f, l, r, n):
    h = (r - l) / n
    x = l + h / 2
    s = 0.0
    while x < r:
        s += f.subs(z, x) * h
        x += h
    return s


2 usages
def integralTrapezoid(f, l, r, n):
    h = (r - l) / n
    x = l + h / 2
    s = 0.0
    while x < r:
        s += ((f.subs(z, x - h / 2) + f.subs(z, x + h / 2)) / 2) * h
        x += h
    return s
def integralSimpson(f, l, r, n):
    h = (r - l) / n
    x = l + h / 2
    s = 0.0
    while x < r:
        fa = f.subs(z, x - h / 2)
        fm = f.subs(z, x)
        fb = f.subs(z, x + h / 2)
        s += (fa + 4 * fm + fb) * h / 6
        x += h
    return s
```

Тестовые примеры

Тестовый пример 1. Найти численное значение первой и второй производной в точке. Найти численное значение интеграла по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона

Входные данные: $y = \sin x^3$, [1,4], x = 2.5

Вывод программы:

```
Значение производной первого порядка: -18.6855097793376
Значение производной первого порядка, полученное численными методами: -18.6855097022601
Отклонение: 7.70774342129243E-8

Значение производной второго порядка: -44.0817345412585
Значение производной второго порядка, полученное численными методами: -44.0817292051093
Отклонение: 0.00000533614915809721
Значение производной второго порядка, полученное численными методами(2-й способ): -44.081735375
Отклонение: 8.33842214831293E-7

Ожидаемое значение интеграла: 0.204284

Число итераций: 6293
Метод прямоугольников: 0.204283418245651
Отклонение: 5.81754349221475E-7

Число итераций: 10412
Метод трапеций: 0.204283704982032
Отклонение: 2.95017967527622E-7

Число итераций: 613
Метод Симпсона: 0.204283573203296
Отклонение: 4.26796704255938E-7
```

Тестовый пример 2. Найти численное значение первой и второй производной в точке. Найти численное значение интеграла по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона

Входные данные: $y = \cos x$ [4,8], x = 6

Вывод программы:

```
Значение производной первого порядка: 0.279415498198926
Значение производной первого порядка, полученное численными методами: 0.279415498198724
Отклонение: 2.02060590481778E-13

Значение производной второго порядка: -0.960170286650366
Значение производной второго порядка, полученное численными методами: -0.960169286650783
Отклонение: 9.99999583362055E-7
Значение производной второго порядка, полученное численными методами(2-й способ): -0.960169286650
Отклонение: 9.99999583362055E-7

Ожидаемое значение интеграла: 1.7462

Число итераций: 2840
Метод прямоугольников: 1.74616088621337
Отклонение: 0.0000391137866311286

Число итераций: 3570
Метод трапеций: 1.74616055933019
Отклонение: 0.0000394406698129846

Число итераций: 108
Метод Симпсона: 1.74616074303339
Отклонение: 0.0000392569666129994
```

Тестовый пример 3. Найти численное значение первой и второй производной в точке. Найти численное значение интеграла по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона

Входные данные: $y = \sqrt{\tan x}$ [0,1.5], x = 0.75

Вывод программы:

```
Значение производной первого порядка: 0.967616338994002
Значение производной первого порядка, полученное численными методами: 0.967616338994153
Отклонение: 1.50768286744096E-13

Значение производной второго порядка: 0.832809593966394
Значение производной второго порядка, полученное численными методами: 0.832810594098064
Отклонение: 0.00000100013166959290
Значение производной второго порядка, полученное численными методами(2-й способ): 0.832810593855
Отклонение: 9.99888873920440E-7

Ожидаемое значение интеграла: 1.6893633

Число итераций: 1231
Метод прямоугольников: 1.68937978838255
Отклонение: 0.0000164883825517492

Число итераций: 20321
Метод трапеций: 1.68937871050310
Отклонение: 0.0000154105031031637

Число итераций: 3835
Метод Симпсона: 1.68937860829541
Отклонение: 0.0000153082954061912
```

Тестовый пример 4. Найти численное значение первой и второй производной в точке. Найти численное значение интеграла по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона

Входные данные: $y = \sinh\frac{1}{x}$ [1,2], x = 1.5

Вывод программы:

```
Значение производной первого порядка: -0.546922480019393
Значение производной первого порядка, полученное численными методами: -0.546922480028040
Отклонение: 8.64686100499057E-12

Значение производной второго порядка: 0.870890903929273
Значение производной второго порядка, полученное численными методами: 0.870891904021653
Отклонение: 0.00000100009238013232
Значение производной второго порядка, полученное численными методами(2-й способ): 0.870891903891
Отклонение: 9.99961964787133E-7

Ожидаемое значение интеграла: 0.7576327

Число итераций: 1231
Метод прямоугольников: 0.757633168629325
Отклонение: 4.68629325012238E-7

Число итераций: 1331
Метод трапеций: 0.757633262597727
Отклонение: 5.62597727293834E-7

Число итераций: 39
Метод Симпсона: 0.757633205631657
Отклонение: 5.05631656988470E-7
```

Тестовый пример 5. Найти численное значение первой и второй производной в точке. Найти численное значение интеграла по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона

Входные данные: $y = x^4 - 3$ [0,4], x = 2

Вывод программы:

```
Значение производной первого порядка: 32.0000000000000
Значение производной первого порядка, полученное численными методами: 31.9999999405241
Отклонение: 5.94759477223761E-8

Значение производной второго порядка: 48.0000000000000
Значение производной второго порядка, полученное численными методами: 48.0000009837056
Отклонение: 9.83705604085117E-7
Значение производной второго порядка, полученное численными методами(2-й способ): 48.00000098370
Отклонение: 9.83705604085117E-7

Ожидаемое значение интеграла: 192.8

Число итераций: 37754
Метод прямоугольников: 192.799999880660
Отклонение: 1.19339603088520E-7

Число итераций: 74215
Метод трапеций: 192.800000061283
Отклонение: 6.12834583080257E-8

Число итераций: 232
Метод Симпсона: 192.800000002919
Отклонение: 2.91871060653648E-9
```

Решение задания

Вариант 8

Задание. В каждом варианте найти численное значение первой и второй производной в точке, являющейся серединой заданного интервала, с точностью до 0,01. Вычислить с заданной точностью интегралы по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона. Сравнить методы по точности.

8.	$\frac{\sin x}{x}$	[1 ; 2]	Трапеций	0,000001	**0,6593294**

Вывод программы:

```
Значение производной первого порядка: -0.396172970712222
Значение производной первого порядка, полученное численными методами: -0.396172970704895
Отклонение: 7.32691685101372E-12

Значение производной второго порядка: -0.136766030119740
Значение производной второго порядка, полученное численными методами: -0.136765030123827
Отклонение: 9.99995912603913E-7
Значение производной второго порядка, полученное численными методами(2-й способ): -0.136765030123827
Отклонение: 9.99995912603913E-7

Ожидаемое значение интеграла: 0.6593294

Число итераций: 201
Метод прямоугольников: 0.659330043774808
Отклонение: 6.43774807906894E-7

Число итераций: 187
Метод трапеций: 0.659329586968782
Отклонение: 1.86968781568098E-7

Число итераций: 15
Метод Симпсона: 0.659329906771652
Отклонение: 5.06771652308835E-7
```

Выводы

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы были изучены и сравнены по трудоёмкости и точности методы численного вычисления производных и методы численного интегрирования. Составлена компьютерная программа, на тестовых примерах проверена правильность её работы. Для функции заданного варианта найдено численное значение первой и второй производной в точке, вычислены с заданной точностью интегралы по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона.

Сравнивая полученные результаты численного интегрирования можем сделать вывод, что все методы дают примерно одинаковою точность, однако формула Симпсона обеспечивает гораздо меньшее количество операций для получения значения.

Алгоритм решения