Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей
Кафедра информатики
Дисциплина: Прикладные задачи математического анализа

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
к курсовой работе
на тему

ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

БГУИР КП 1-40 04 01

Студент: гр.253505 Снежко М.А.

Руководитель: кандидат
физико-математических наук,
доцент Рыкова Ольга Васильевна

Минск 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Системой дифференциальных уравнений называется совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимая переменная, искомые функции и их производные. Любая система дифференциальных уравнений описывает с определенной степенью точности реальный физический процесс.

Системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием являются современным направлением в теории дифференциальных уравнений, которое имеет приложения к задачам математического моделирования в механике, технике и математической биологии. Важной проблемой для этого класса систем является проблема устойчивости решений.

Актуальной и важной с практической точки зрения является задача об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критических случаях. Этот принцип, являясь важным инструментом при исследовании критических случаев, фактически сводит изучение системы дифференциальных уравнений к изучению качественного поведения этой системы на центральном многообразии.

Приборы, фиксирующие то или иное физическое явление, не совершенны. Может оказаться, что малая погрешность измерения начальных данных вызывает серьёзные изменения решений уравнений. В этой ситуации нельзя гарантировать, что выбранная математическая модель реально отражает описываемое ею физическое явление. И, наоборот, если малые возмущения начальных условий мало изменяют решения на всем промежутке их существования, то соответствующую математическую модель следует признать удачной.

Так возникает важный для приложений вопрос: при каких условиях, математическая модель, описываемая системой дифференциальных уравнений, будет устойчивой. Устойчивость — свойство решения дифференциального уравнения притягивать к себе другие решения при условии достаточной близости их начальных данных. Здесь важнейшим является выяснение взаимного поведения отдельных решений, незначительно отличающихся начальными условиями, то есть будут ли малые изменения начальных условий вызывать малые же изменения решений. Этот вопрос был подробно исследован А. М. Ляпуновым.

Первым важным техническим вопросом, решенным с помощью теории устойчивости, был вопрос об условиях работы регулятора Уатта. В изобретенной Уаттом паровой машине имеется механизм — центробежный регулятор, который должен поддерживать постоянную скорость работы машины. Но когда стали строить большие паровые машины, регулятор Уатта часто не справлялся с работой. Русский инженер Вышнеградский, чтобы найти причины плохой работы регулятора, составил систему дифференциальных уравнений, описывающую работу паровой машины вместе с регулятором, и исследовал эту систему на устойчивость. Он получил условия устойчивости в виде ограничений на конструктивные параметры регулятора. Регуляторы, изготовленные с учетом этих ограничений, работали хорошо.

Теория устойчивости устанавливает признаки, позволяющие судить о том, будет ли рассматриваемое движение устойчивым или неустойчивым. Поскольку в действительности возмущающие факторы всегда неизбежно присутствуют, задача устойчивости движения имеет очень важное теоретическое и практическое значение.

Во многих задачах механики и техники бывает важно знать не конкретные значения решения при данном конкретном значении аргумента, а характер поведения решения при изменении аргумента и, в частности, при неограниченном возрастании аргумента. Например, бывает важно знать, являются ли решения, удовлетворяющие данным начальным условиям, периодическими, приближаются ли они асимптотически к какой-либо известной функции и т.д. Этими вопросами занимается качественная теория дифференциальных уравнений, а одним из основных её вопросов является вопрос об устойчивости решения или об устойчивости движения.

В настоящее время в связи с автоматизацией производства все шире применяются системы автоматического управления, которые должны обеспечить работу управляемого объекта в заданном режиме. Математическое исследование устойчивости таких систем еще на стадии их проектирования ускоряет и удешевляет создание таких систем, позволяя заранее отбросить многие негодные варианты.

Важная роль в создании и развитии теории устойчивости принадлежит советским и российским ученым, начиная с основоположника этой теоремы Александра Михайловича Ляпунова.

Оригинальность работы (система antiplagiat.ru, см. рис. 1) составляет 66,26%.

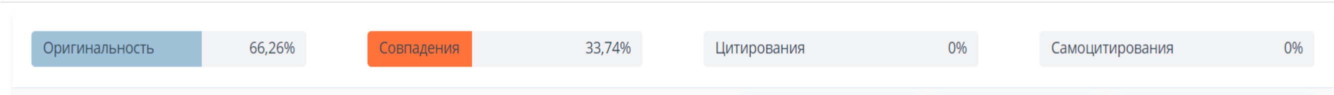

Рисунок 1- Проверка на оригинальность

1 Теоретическая часть

1.1 Устойчивость по Ляпунову

Пусть имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \qquad (i = 1,2, \dots, n), \tag{1}$$

где $\frac{\partial f_i}{\partial y_k} (i, k = 1,2, \dots, n)$ существуют и непрерывны, и пусть $\varphi_i(t)\,(i = 1,2, \dots, n)$ есть решение этой системы, удовлетворяющее при $t = t_0$ условиям

$$\varphi_i(t_0) = \varphi_i^0 \;\; (i = 1,2, \dots, n).$$

Решение $\varphi_i(t)$ $(i = 1,2, \dots, n)$ системы (1) называется устойчивым по Ляпунову при $t \to +\infty$, если для любого ε > 0 можно подобрать δ(ε) > 0 такое, что для всякого решения $y_i(t)$ $(i = 1,2, \dots, n)$ той же системы (1), начальные значения которого удовлетворяют неравенствам

$$\left| y_i(t_0) - \varphi_i^0 \right| < \delta(\varepsilon) \;\; (i = 1,2, \dots, n),$$

для всех $t \geq t_0$ справедливы неравенства

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \;\; (i = 1,2, \dots, n), \tag{2}$$

то есть близкие по начальным значениям решения остаются близкими для всех $t \geq t_0$.

Иными словами, решение $\varphi_i(t)\,(i = 1,2, \dots, n)$ устойчиво, если достаточно близкое к нему в начальный момент $t = t_0$ решение $y_i(t)$ $(i = 1,2, \dots, n)$ для всех $t \geq t_0$ содержится в сколь угодно узкой ε-трубке, построенной вокруг решения $\varphi_i(t)$ $(i = 1,2, \dots, n)$.

Если при сколь угодно малом δ > 0 хотя бы для одного решения $y_i(t)$ $(i = 1,2, \dots, n)$ неравенства (2) не выполняются, то решение $\varphi_i(t)$ $(i = 1,2, \dots, n)$ называется неустойчивым. Неустойчивые решения лишь в редких случаях представляют интерес в практических задачах.

Геометрически это означает, что интегральные кривые y = y(t), близкие в момент $t = t_0$ к интегральной кривой y = φ(t), остаются близкими к ней и на всем промежутке $[t_0, \infty)$.

Интегральные кривые и фазовые траектории, отвечающие устойчивым решениям, тоже называются устойчивыми.

Если решение $\varphi_i(t)$ $(i = 1,2, \dots, n)$ не только устойчиво, но, кроме того, удовлетворяет условиям

$$\lim_{t \to \infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0 \;\; (i = 1,2, \dots, n), \tag{3}$$

если $\left| y_i(t_0) - \varphi_i^0 \right| < \delta$, то решение $\varphi_i(t)$ называется асимптотически устойчивым.

Существуют определённые разновидности асимптотической устойчивости:

1. Эквиасимптотически устойчивым, если оно устойчивое и эквипритягивающее (y(t) не зависит от y_0).

2. Равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчивое и равномерно притягивающее (y(t) не зависит от t_0 и y_0).

3. Асимптотически устойчивым в целом, если оно устойчивое и глобальнопритягивающее (отсутствует ограничение на y_0).

4. Равномерно асимптотически устойчивым в целом, если оно равномерно устойчивое и равномерно и глобальнопритягивающее.

1.2 Простейшие типы точек покоя

Вопрос об устойчивости решения $\varphi_i(t)$ системы (1) может быть сведен к вопросу об устойчивости нулевого решения $x_i(t) \equiv 0$ некоторой новой системы уравнений, получающейся из (1) линейной заменой искомой функций

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t) \quad (i = 1,2, \dots, n), \qquad (4)$$

где $x_i(t)$ – новые неизвестные функции, равные отклонениям прежних неизвестных функций $y_i(t)$ от функций $\varphi_i(t)$, определяющих исследуемое решение. Поэтому в дальнейшем будем считать, что на устойчивость исследуется именно нулевое решение $x_i(t) \equiv 0$ или, что то же самое, расположенная в начале координат точка покоя системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \psi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \ (i = 1,2, \dots, n). \qquad (5)$$

Вместо термина “нулевое решение” будем употреблять термин тривиальное решение.

В применении к точке покоя $x_i(t) \equiv 0 \ (i = 1,2, \dots, n)$ условие устойчивости выглядит так: точка покоя $x_i(t) \equiv 0 \ (i = 1,2, \dots, n)$ системы (5) устойчива по Ляпунову, если для каждого ε > 0 можно подобрать δ(ε) > 0 такое, что из неравенства $|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \ (i = 1,2, \dots, n)$ следует $|x_i(t)| < \varepsilon \ (i = 1,2, \dots, n)$ при всех $t \geq t_0$.

1.2 Методы Ляпунова

Метод выяснения устойчивости или неустойчивости решения системы дифференциальных уравнений, в котором надо знать общее решение системы (обычно получаемое в виде некоторого ряда), называется первым методом Ляпунова.

Для системы с постоянными коэффициентами достаточно знать не общее решение системы, а лишь знаки вещественных частей характеристических чисел.

Второй метод Ляпунова (метод функций Ляпунова) основан на использовании подходящим образом подобранной функции Ляпунова. Во втором методе не требуется знать ни общего решения системы, ни какой-либо его характеристики.

Примечание. Общего метода нахождения функции Ляпунова не существует. В простейших случаях ее следует искать в виде $v = ax^2 + by^2$, $v = ax^4 + by^4$, $v = ax^2 + by^4$ и т. п., подбирая надлежащим образом постоянные a и b.

1.3 Второй метод Ляпунова (метод функций Ляпунова)

Метод функций Ляпунова позволяет исследовать устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с помощью специально построенных функций, так называемых функций Ляпунова, не находя самих решений системы.

Функция $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется положительно определённой в H-окрестности ($\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq H$) начала координат, если она положительна во всех точках этой окрестности, за исключением начала координат, где она равна нулю:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0, \text{если } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0,$$
$$v(0,0, \dots ,0) = 0.$$

Например, функция $v = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ будет положительно определенной функцией в пространстве переменных x_1, x_2, x_3. Функция $u = x_1^2 + x_2^2$ будет лишь знакопостоянной в этом пространстве, но не положительно определенной, ведь она обращается в ноль на всей оси O_{X_3} , а не только в точке (0, 0, 0), она же будет положительно определенной в пространстве x_1, x_2.

Если $v(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$ при $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ и $v(0,0, \dots ,0) = 0$, то функция $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется отрицательно определённой.

Функция $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется положительно определенной в H-окрестности начала координат при $t \geq t_0$, если существует такая не зависящая t положительно определенная функция $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что $v(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при всех указанных значениях аргументов и $v(t, 0,0, \dots ,0) = 0$.

Пусть имеет систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1,2, \dots, n), \tag{6}$$

и пусть

$$v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

есть непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Полная производная по t функции $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, вычисленная в силу системы (6) (вдоль интегральных кривых), равна

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{dv}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \qquad (7)$$

Если правые части системы (1) не содержат явно t, то такая система называется автономной или стационарной.

1. Теорема А. М. Ляпунова об устойчивости. Если система дифференциальных уравнений (6) такова, что существует функция $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, положительно определенная при $t \geq t_0$ в некоторой Н-окрестности начала координат, производная которой $\frac{dv}{dt}$, вычисленная в силу системы (6), неположительна, то тривиальное решение системы (6) устойчиво.

2. Теорема А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости (случай автономных систем). Если автономная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1,2, \dots, n), \qquad (8)$$

такова, что существует функция $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, положительно определенная в некоторой Н-окрестности начала координат, производная которой $\frac{dv}{dt}$, вычисленная в силу системы (8), отрицательно определена, то тривиальное решение $x_i \equiv 0 \;\; (i = 1,2, \dots, n)$ асимптотически устойчиво.

Функции $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$, фигурирующие в приведенных выше теоремах, называются функциями Ляпунова.

Назовем областью $v > 0$ какую-нибудь область окрестности

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq H$$

начала координат пространства переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, ограниченную поверхностью $v = 0$, в которой функция v принимает положительные значения.

Допустим, что функция v обладает следующими свойствами:

– при сколь угодно больших значениях t в сколь угодно малой окрестности начала координат существует область $v > 0$;
– в области $v > 0$ функция v ограничена;

– в области $v > 0$ производная $\frac{dv}{dt}$, составленная в силу системы уравнений (7), положительно определена.

3. Теорема Н. Г. Четаева о неустойчивости. Если для системы дифференциальных уравнений (7) можно найти функцию, удовлетворяющую условиям 1, 2, 3, то тривиальное решение этой системы неустойчиво.

Замечание. Если в системе (7) все f_i не зависят явно от t, то функцию Ляпунова нужно искать как не зависящую явно от t.

Вследствие трудностей при выборе функции Ляпунова возникает вопрос о ее существовании – вопрос, когда можно пытаться подбирать функцию $v(x)$ или $v(t, x)$, удовлетворяющую условиям теорем, а когда нет. Было доказано, что для систем вида $x' = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, в окрестности асимптотически устойчивого положения равновесия всегда существует функция Ляпунова $v(x)$, а для систем $x' = f(t, x)$ с периодической по t функцией f – периодическая функция Ляпунова $v(t, x)$. Для устойчивого положения равновесия системы $x' = f(t, x)$ существует функция Ляпунова $v(t, x)$, а функция $v(x)$ может не существовать даже для системы $x' = f(x)$.

1.4 Устойчивость по первому приближению

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \ \ (i = 1,2, \dots, n), \tag{9}$$

где f_i – дифференцируемые в окрестности начала координат функции, $f_i(t, 0,0, \dots ,0) \ \equiv 0$.

Исследуем на устойчивость точку покоя $x_i \equiv 0 \ \ (i = 1,2, \dots, n)$ системы. Представим систему в окрестности начала координат в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \ \ (i = 1,2, \dots, n), \tag{10}$$

где R_i имеют порядок выше первого относительно $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (то есть фактически разложим правые части исходной системы по формуле Тейлора по степеням x в окрестности начала координат).

Само понятие устойчивости мы относим к изучению свойств решений системы в сколь угодно малой окрестности начала координат, то есть рассматриваем малые $x_1, x_2, \dots, x_n$. Естественно считать, что добавки $R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ как бесконечно малые высшего порядка малости по сравнению с линейными слагаемыми $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n$ не очень сильно или даже совсем не влияют на устойчивость или неустойчивость тривиального решения $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Поэтому кажется весьма правдоподобным, что если найденные нелинейные добавки $R_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ отбросить и заменить систему (9) на

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j \ \ (i = 1,2, \ldots, n), \tag{11}$$

называемой системой уравнений первого приближения или линеаризованной системой для исходной системы. Решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ исходной системы (9) будет устойчивым тогда, когда оно устойчиво для линеаризованной системы (11). Исследование устойчивости решений для линейной системы (11) является задачей значительно более лёгкой, чем для нелинейной, и в частном случае линейной системы с постоянными коэффициентами.

До исследования А.М. Ляпунова это простое и естественное рассуждение не вызывало серьёзных сомнений, хотя строгого обоснования законности выводов не было.Заслугой Ляпунова является, в частности, то, что он показал, в каких случаях по устойчивости тривиального решения системы первого приближения можно сделать вывод об устойчивости тривиального решения нелинейной системы, а в каких случаях требуется дополнительное исследование, так как в общем случае малые добавки $R_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существенно влияют на поведение решений системы (9) в окрестности начала координат. Может оказаться, что тривиальное решение системы первого приближения (11) устойчиво, а для исходной системы (9) оно неустойчиво, то есть проведенное выше рассуждение, несмотря на кажущуюся правдоподобность, в общем случае неверно.

Ляпунов пришел к следующим выводам: систему (9) можно заменить системой (11), исследуя устойчивость по первому приближению, если:

1. Все корни характеристического уравнения для системы первого приближения (11) имеют отрицательные вещественные части; тогда тривиальная точка покоя $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ нелинейной системы (9) асимптотически устойчива.

2. Хотя бы один корень характеристического уравнения системы (11) имеет положительную вещественную часть; тогда точка покоя $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ нелинейной системы (9) неустойчиво.

Критический случай:

3. Если существуют корни характеристического уравнения с нулевой вещественной частью, а остальные корни (если они есть) имеют отрицательную вещественную часть, то исследование устойчивости по первому приближению невозможно, так как на устойчивость начинают влиять нелинейные добавки $R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Исследование устойчивости решений для линейной системы является задачей значительно более лёгкой, чем для нелинейной системы, а для линейной системы с постоянными коэффициентами, которая является частным случаем, задача еще более легкая.

1.5 Устойчивость линейных систем (условия отрицательности всех вещественных частей корней уравнения)

Большое практическое значение имеют необходимые и достаточные условия того, чтобы все корни алгебраического уравнения с вещественными коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{11}$$

имели отрицательные вещественные числа, $a_0 > 0$.

Положительность всех коэффициентов – необходимое, но не достаточное условие для того, чтобы все корни уравнения лежали в левой полуплоскости. В случае $n \leq 2$ это условие является и достаточным. Необходимые и достаточные условия отрицательности вещественных частей корней уравнения (9) дали Раус и независимо от него Гурвиц.

Условия Рауса-Гурвица. Необходимым и достаточным условием отрицательности действительных частей всех корней многочлена (9) является положительность всех главных диагональных миноров матрицы Рауса-Гурвица:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Многочлен $f(\lambda)$ степени $n \geq 1$ называют устойчивым многочленом, если всего его корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ имеют отрицательные действительные части, то есть все корни устойчивого многочлена расположены в левой полуплоскости.

Матрица Гурвица устроена следующим образом: на ее главной диагонали стоят все коэффициенты многочлена, начиная с a_1, в столбцах стоят коэффициенты с номерами соответствующей четности, именно: в первом – нечетные, во втором – четные и т.д. Когда нужные коэффициенты заканчиваются, оставшиеся места в столбце заполняются нулями. Таким образом, в последней строке матрицы Рауса-Гурвица только один ненулевой элемент a_n.

Главными диагональными минорами матрицы Γ являются

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots, \quad \Delta_n = \Delta\Gamma .$$

Заметим, что так как $\Delta_n = \Delta_{n-1} * a_n$, то последнее из условий $\Delta_n > 0$ может быть заменено требованием $a_n > 0$.

Вычисления можно вести так. Сначала составляем минор Δ_n, затем вычисляем миноры $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Если встретился отрицательный минор, то система неустойчива и дальнейшие вычисления излишни.

Если коэффициенты уравнения (9) заданы как числа, то условия легко проверяются. Если же коэффициенты уравнения (10) содержат буквенные параметры, то вычисление определителей будет затруднительно.

Критерий Рауса-Гурвица не очень удобен для исследования корней многочлена достаточно высокой степени, так как требует вычисления, как минимум, $(n-2)$ главных диагональных миноров матрицы n-го порядка (без первого и последнего, знак которых очевиден). Более удобным является эквивалентный ему критерий Льенара-Шипара.

Условия Льенара-Шипара. Для того, чтобы многочлен

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \qquad (11')$$

имел все корни с отрицательными действительными частями, необходимо и достаточно, чтобы:

1. все коэффициенты многочлена $f(\lambda)$ были положительны:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$$

2. имели место детерминантные неравенства

$$\Delta_{n-1} > 0, \Delta_{n-3} > 0, \ldots$$

(здесь, как и раньше, Δ_k – определитель Гурвица k-го порядка).

Эти условия равносильны условиям Рауса-Гурвица, но удобнее, так как содержат меньше детерминантов.

2 Практическая часть

Пример 1. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y^2 + x. \end{cases}$$

Решение. Возьмем в качестве $v(x, y)$ функцию

$$v = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3.$$

Здесь областью $v > 0$ является, например область $x > 0, y > 0$.

В области $v > 0$ имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (x^2 + y)^2 + (x + y^2)^2 > 0.$$

Согласно теореме Н. Г. Четаева о неустойчивости решение $x \equiv 0, y \equiv 0$ неустойчиво.

Пример 2. Устойчиво ли нулевое решение системы

$$x' = ax + by - y^2,\ y' = cx + dy - x^2$$

$$(a, b, c, d > 0)$$

Решение. При малых x, y в 1-ой четверти имеем $x' > 0, y' > 0$, значит, там решения удаляются от точки (0, 0). Возьмем $v = xy$ в области D ($x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < \varepsilon^2$). Тогда

$$\frac{dv}{dt} = x'y + xy' = axy + by^2 - y^3 + cx^2 + dxy - x^3 = \omega(x, y).$$

При малом ε и $0 < x < \varepsilon, 0 < y < \varepsilon$ сумма $by^2 - y^3 + cx^2 - x^3$ положительна, поэтому в D $\omega(x, y) > 0$. По теореме Четаева об неустойчивости решение неустойчиво.

Пример 3. Устойчиво ли нулевое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = -4y, \frac{dy}{dt} = x$$

Решение. Поделив второе уравнение на первое, получим $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}$. Общее решение $x^2 + 4y^2 = c > 0$. Эти линии есть эллипсы. Если $x^2(0) + y^2(0) < \delta^2$, то при t > 0 решение x(t), y(t) находится внутри эллипса $x^2 + 4y^2 = 4\delta^2$, описанного около круга $x^2 + 4y^2 = \delta^2$. Так как кривые, изображающие решения, не пересекаются, то решение x(t), y(t) остается внутри этого эллипса (рис. 2), значит, и внутри круга $x^2 + 4y^2 = \varepsilon^2$, $\varepsilon = 2\delta$, описанного около эллипса.

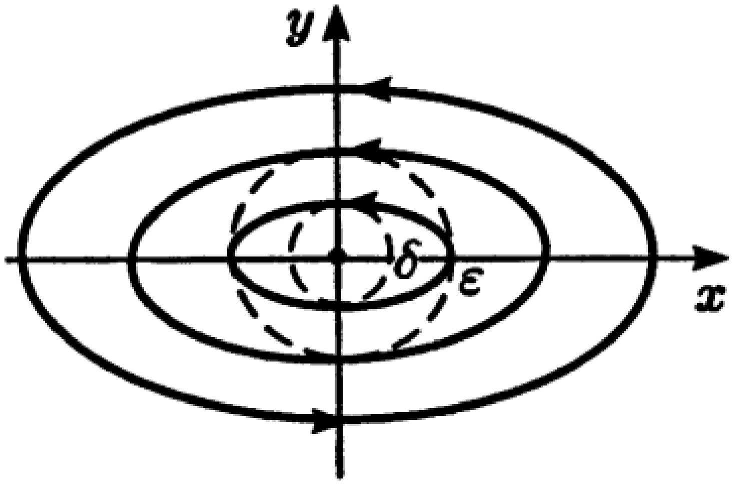

Рисунок 2 – графики функций

Таким образом, нулевое решение устойчиво. При этом асимптотической устойчивости нет, т. к. каждое решение остается на своем эллипсе $x^2 + 4y^2 = c$ и не стремится к нулю при $t \to \infty$.

Пример 3. Исследовать устойчивость системы $x'''' + 6x''' + 26x'' + 46x' + 65x = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение сопоставляя производным соответствующие степени переменной λ:

$$\lambda^4 + 6\lambda^3 + 26\lambda^2 + 46\lambda + 65 = 0$$

$$\to a_4 = 1, a_3 = 6, a_2 = 26, a_1 = 46, a_0 = 65$$

Составляем матрицу Гурвица и вычисляем ее угловые миноры:

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 65 & 0 & 0 \\ 6 & 26 & 46 & 65 \\ 0 & 1 & 6 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = 46 > 0, \Delta_2 = 46 * 26 - 65 * 6 = 806 > 0, \Delta_3 = \Delta_4 = 6\Delta_2 - 2116 > 0$$

Все миноры положительны, поэтому положение равновесия асимптотически устойчиво.

Пример 4. Исследовать устойчивость системы $x'''' + 3x''' - 2x'' + 4x' + 2x = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение сопоставляя производным соответствующие степени переменной λ:

$$\lambda^4 + 3\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$$

$$\to a_4 = 1, a_3 = 6, a_2 = -2, a_1 = 4, a_0 =$$

Составляем матрицу Гурвица и вычисляем ее угловые миноры:

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = 4 > 0, \Delta_2 = -14 < 0$$

Второй минор оказался отрицательным, и можно сделать вывод о неустойчивости без дальнейших вычислений.

Пример 5. Исследовать устойчивость тривиального решении $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_1^3 x_2^2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_2 + x_1^2 x_2^5. \end{cases}$$

Решение. Исследуем устойчивость тривиального решения системы при $x_1 = 0, x_2 = 0$. Пусть функция Ляпунова V = $x_1^2 + x_2^2$. Для неё производная в силу теоремы

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_1(x_2, x_2) =$$

$$= 2x_1(-x_1 + x_1^3 x_2^2) + 2x_2\left(-2x_2 + x_1^2 x_2^5\right) = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1^4 x_2^2 + 2x_1^2 x_2^6.$$

В некоторой окрестности точки покоя знак $\frac{dV}{dt}$ определяется знаком квадратичной формы $-2x_1^2 - 4x_2^2 < 0$ (действительно, последующие слагаемые содержат переменные в высших степенях, что для чисел из окрестности нуля лишь уменьшает результирующую величину). Поэтому в данной окрестности точки (0, 0) $\frac{dV}{dt}$ строго меньше нуля за исключением начала координат, где $\frac{dV}{dt} = 0$. Сама функция Ляпунова в этой окрестности положительно определена. Выполнены условия второй теоремы Ляпунова, то есть особая точка (0, 0) асимптотически устойчива.

Пример 6. Исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -(x - 2y)(1 - x^2 - 3y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = -(y + x)(1 - x^2 - 3y^2). \end{cases}$$

Решение. Возьмем в качестве υ функцию $v = x^2 + 2y^2$. Она является положительно определенной, а также, ее производная $\frac{dv}{dt}$, взятая в силу системы, равна

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} =$$

$$= 2x(2y - x)(1 - x^2 - 3y^2) - 4y(x + y)(1 - x^2 - 3y^2) =$$
$$= -2(1 - x^2 - 3y^2)(x^2 + 2y^2) \leq 0$$

при достаточно малых x и y.

Мы обнаруживаем, что выполняются все условия теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости. А это значит то, что тривиальное решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ устойчиво.

Пример 7. Исследовать на устойчивость решения дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} + xe^t = 0$.

Решение. Это линейное однородное уравнение, оно имеет тривиальное решение $x(t) = 0$, которое удовлетворяет начальному условию $x(0) = 0$.

Исследуем устойчивость этого решения. Изменим начальное условие: $x(0) = x_0$ и найдем соответствующее ему решение.

$$\int \frac{dx}{x} = -\int e^t dt \Rightarrow x = Ce^{-e^t} \Rightarrow x(0) = Ce^{-1} = x_0 \Rightarrow C = ex_0 \Rightarrow x(t) =$$
$$= x_0 e^{-e^t+1}.$$

Так как $\lim\limits_{t\to\infty} x_0 e^{-e^t+1} = 0$, то тривиальное решение асимптотически устойчиво в целом, а это означает, что асимптотически устойчивы в целом и все частные решения данного дифференциального уравнения.

Пример 8. Исследовать по первому приближению устойчивость тривиального решения $x = y = 0$ системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{4 + 4y} - 2e^{x+y}, \\ \frac{dy}{dt} = \sin ax + \ln(1 - 4y), \end{cases} \quad a = \text{const}.$$

Решение. Система первого приближения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - y + R_1(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = ax - 4y + R_2(x, y). \end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ a & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + (8+\mathrm{a}) = 0;$$

Характеристические числа:

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1-a}.$$

Рассмотрим частные случаи в зависимости от значения параметра a:

1.Если a > 1, то получаются комплексные характеристические числа с отрицательной вещественной частью (-3); тривиальное решение асимптотически устойчиво.

2. Если -8 < a ≤ 1, то $\lambda_{1,2}$ вещественны и отрицательны; тривиальное решение асимптотически устойчиво.

3. a = -8; тогда получаются вещественные $\lambda_{1,2}$ разных знаков. Тривиальное решение неустойчиво.

4. a = -8; тогда одно из характеристических чисел обращаются в нуль. Это критический случай, когда первое приближение неприменимо.

Пример 9. Исследовать устойчивость тривиального решения x = y = 0 системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y - xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y - x^2 y. \end{cases}$$

Решение. Здесь система первого приближения имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$ – критический случай. По системе первого приближения нельзя сделать каких-либо выводов об устойчивости тривиального решения исходной системы.

Воспользуемся вторым методом Ляпунова. Пусть функция Ляпунова $V = x^2 + y^2$. Производная в силу системы

$$\frac{dV}{dt} = -2(x-y)^2 - 4x^2y^2$$

определена отрицательно, тогда как сама функция V – положительно определённая. Значит, тривиальное решение исходной системы асимптотически устойчиво.

Легко проверить, что система первого приближения имеет общее решение

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-2t},$$
$$y(t) = C_1 + C_2 e^{-2t},$$

где $C_{1,2}$ – произвольные постоянные. Отсюда следует, что тривиальное решение этой системы устойчиво, но не асимптотически.

Итак, решение нелинейной системы устойчиво асимптотически, а решение лениаризованной системы – не асимптотически. Нелинейные добавки $-xy^2$ и $-\,x^2y$ изменили характер устойчивости.

Пример 10. Исследовать устойчивость системы $y^{(5)} + y^{(4)} + 7y^{(3)} + 4y^{(2)} + 10y^{(1)} + 3y = 0$ с помощью критерия Льенара-Шипара.

Решение. Здесь

$$a_0 = a_1 = 1 > 0,\ a_2 = 7 > 0, \quad a_3 = 4 > 0, \quad a_4 = 10 > 0,$$
$$a_5 = 3 > 0,$$

то есть первое условие критерия Льенара-Шипара выполнено.

Далее

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 8 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

то есть выполнено второе условие.

Таким образом, тривиальное решение уравнения асимптотически устойчиво.

Заключение

В ходе данной курсовой работы мы глубоко исследовали понятие устойчивости решения системы дифференциальных уравнений, раскрывая его фундаментальное значение как в теоретическом, так и в практическом контексте. Устойчивость — это ключевая характеристика динамических систем, которая позволяет нам предсказывать и понимать их поведение при различных условиях. Был рассмотрен теоретический материал по теме «Понятие об устойчивости системы дифференциальных уравнений», а именно устойчивость по Ляпунову, метод функций Ляпунова, устойчивость линейных систем (условия отрицательности всех вещественных частей корней уравнения), а также устойчивость по первому приближению.

В результате выполнения данной курсовой работы были выполнены следующие задачи:

1. Обобщены теоретические данные, связанные с устойчивостью систем дифференциальных уравнений.

2. Рассмотрены основные методы определения устойчивости систем дифференциальных уравнений.

3. Изучены особенности определения устойчивости систем дифференциальных уравнений.

4. Решены примеров с использованием методов, разобранных в теоретическом материале.

В заключение, следует подчеркнуть важность изучения устойчивости решения системы дифференциальных уравнений как ключевого элемента в анализе и моделировании динамических процессов. Устойчивость помогает предсказать и предотвратить возможные катастрофические изменения в системах, что имеет критическое значение в множестве областей, включая инженерию, прикладную математику и научные исследования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Устойчивость систем дифференциальных уравнений [Электронный ресурс], – Режим доступа: https://www.km.ru/referats/7BCE5BE18CDF4421B49FD227211A4699

[2] Wikipedia [Электронный ресурс], – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki

[3] УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ [Электронный ресурс], – Режим доступа: http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/odesys/ODEsystab_08100000.html

[4] Николаева Н.И. Дифференциальные уравнения. Элементы теории устойчивости. Конспект лекций. Часть 5 / Н.И. Николаева. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2011. – 88 с.

[5] Краснов М.Л., Киселев А.И.., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Теория устойчивости: задачи и примеры с подробными решениями : учебное пособие. - Изд. 3-е, испр. и доп. - М. : Едиториа УРСС, 2003. – 176 с.

[6] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М. : Наука, 1967. – 472 с.

[7] Беллман, Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: Издательство иностранной литературы, 1954.

[8] Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами Г.В.Демиденко,И.И.Матвеева

[9] ЗЕНКОВ А.В. Системы дифференциальных уравнений и элементы теории устойчивости: Учебник для студентов физических специальностей / А.В. Зенков. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2010. 54 с.; ил.

[10] Филиппов, А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Изд. 2-е. — Эдиториал УРСС, 2007.

[11] ivanov-a.p.-reshenie-zadach-na-ustoychivost

[12] studfile.net [Электронный ресурс], – Режим доступа: https://studfile.net/preview/9466793/page:7/

[13] Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 176 стр.