> *#Снежко М. А. 253505 Вариант 1*
#Задание 1
#Упростите алгебраическое выражение

#Для того, чтобы упростить алгебраическое выражение, нужно использовать процедуру ***simplify****.*

$$expr := \frac{x^4 - x^3 - 11\cdot x^2 + 9\cdot x + 18}{x^4 - 3\cdot x^3 - 7\cdot x^2 + x - 18} \cdot \frac{x^3 - 8\cdot x^2 + 19\cdot x - 12}{x^3 - 9\cdot x^2 + 26\cdot x - 24} :$$

> *simplify(expr);*

$$\frac{x^4 - 10\,x^2 + 9}{x^4 - 3\,x^3 - 7\,x^2 + x - 18} \qquad (1)$$

> *restart*

> *#Задание 2*
#Приведите выражение к многочлену стандартного вида.

#Для того, чтобы привести выражение к стандартному виду, нужно использовать процедуру ***expand****.*

$$expr2 := (2\cdot x - 1)\cdot\left(3\cdot x^2 + 5\right)\cdot(5\cdot x + 2) :$$

> *expand(expr2);*

$$30\,x^4 - 3\,x^3 + 44\,x^2 - 5\,x - 10 \qquad (2)$$

> *restart*

> *#Задание3*
#Разложите многочлен на множители

#Для того, чтобы разложить многочлен на множители, нужно использовать процедуру ***factor****.*

$$expr3 := 14\,x^4 - 46\,x^3 - 82\,x^2 + 138\,x + 120 :$$

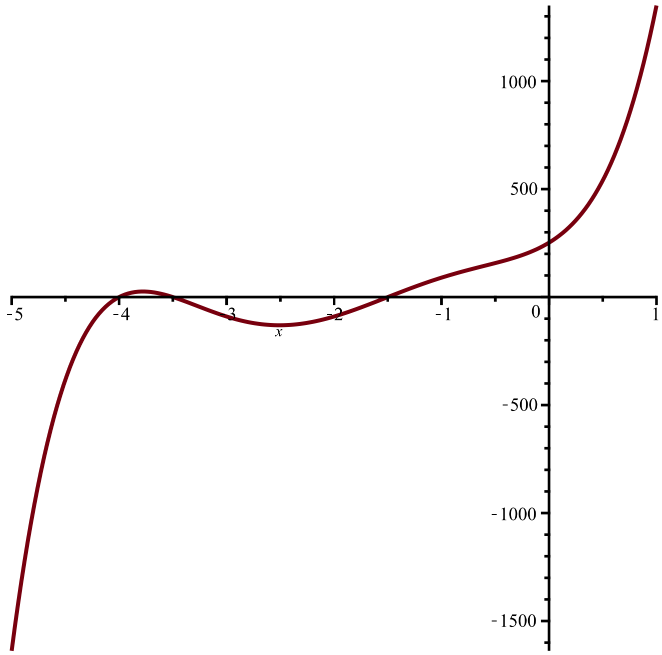
> *factor(expr3);*
restart

$$2\,(7\,x + 5)\,(x - 4)\,\left(x^2 - 3\right) \qquad (3)$$

> *#Задание 4*
#Постройте график многочлена $P_5(x)$ и *найдите все его корти*
#Для того, чтобы построить график, нужно использовать процедуру ***plot****, а чтобы найти все его корни, понадобится процедура* ***fsolve****`.`*

$$P(x) := 12\,x^5 + 108\,x^4 + 315\,x^3 + 360\,x^2 + 303\,x + 252 :$$

> $plot(P(x));$



> $fsolve(P(x) = 0);$

$$-4., \ -3.500000000, \ -1.500000000 \qquad \textbf{(4)}$$

> *restart*

> *#Задание 5*
#Разложите рациональную дробь на сумму простейших дробей.

#Для того, чтобы разложить рациональную дробь на сумму простейших дробей, нужно использовать процедуру ***convert***. *Нужно туда передать параметр* ***parfac***, *который дробит рациональную функцию.*

$$expr := \frac{5x^4 + 7x^3 + 5x - 4}{(x^2+4)\cdot(x-2)^2\cdot(x^2-1)} :$$

> $convert(expr, parfrac, x);$

$$\frac{13}{10\,(x-1)} + \frac{71}{12\,(x-2)^2} + \frac{11}{90\,(x+1)} - \frac{17}{36\,(x-2)} + \frac{-19\,x-23}{20\,(x^2+4)} \qquad \textbf{(5)}$$

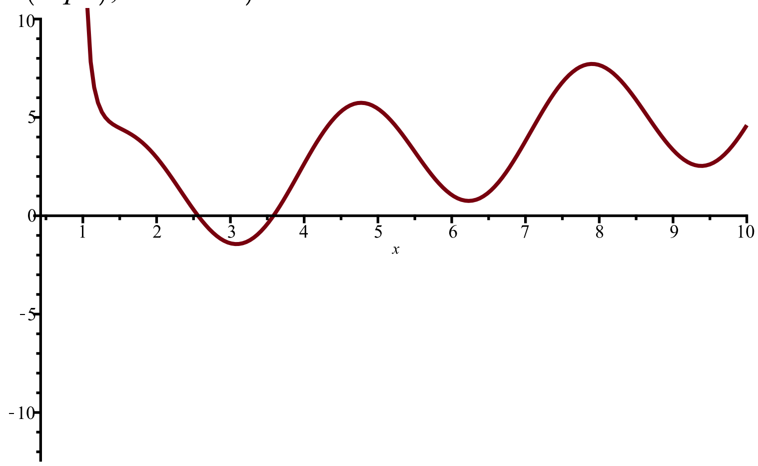
> *restart*

> *#Задание 6*
#Решите графически уравнение и найдите его приближенные корни с точностью до 10^{-5}

#Для того, чтобы построить график, нужно использовать процедуру ***plot***, *а чтобы задать точность корня, нужно использовать* ***Digits*** и *указать точность вычесления.*

$$\ln^2(x-1) = 3\cdot\cos(2\,x) - 1 :$$

> $expr := \ln^2(x-1) = 3\cdot\cos(2\,x) - 1$:
$plot(lhs(expr) - rhs(expr), x = 0\,..10)$



> $fsolve(expr, x = 2\,..3)$;
$fsolve(expr, x = 3\,..4)$; $Digits := 6$

$$2.561721559$$
$$3.583824240$$
$$Digits := 6 \qquad (6)$$

> *restart*

> *#Задание 7*
#Доказать, что $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$. *определив номер* n_ϵ ,
начиная с *которой все члены последовательности попадут* в
#ϵ*−окростность точки а. Построить чертёж, положив* ϵ*=0.1*

> $f := \dfrac{5\cdot n - 2}{2\cdot n - 1}$:
$e := \dfrac{1}{10}$:
$solve\left(\dfrac{5}{2} - e < f < \dfrac{5}{2} + e, n\right)$;

$$(-\infty, -2), (3, \infty) \qquad (7)$$

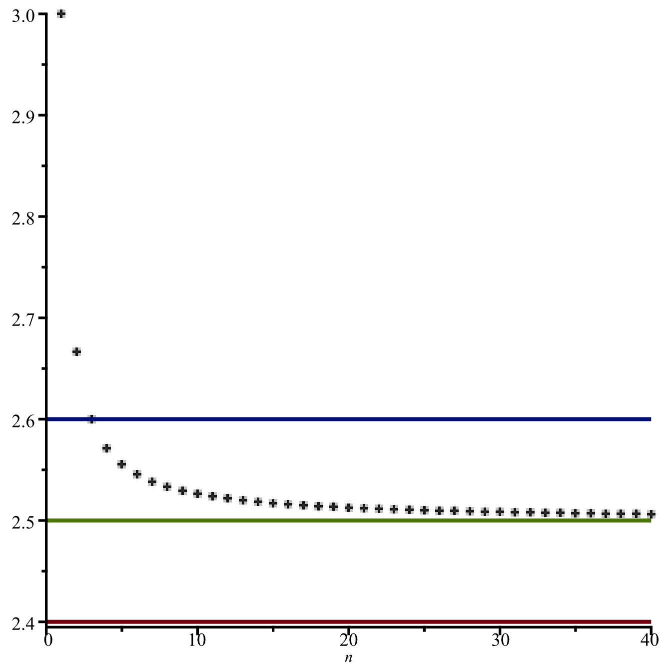
> $f1 := piecewise(-infinity < n < -2, f, 3 < n < +\text{infinity}, f)$

$$f1 := \begin{cases} \dfrac{5\,n-2}{2\,n-1} & -\infty < n < -2 \\ \dfrac{5\,n-2}{2\,n-1} & 3 < n < \infty \end{cases} \qquad (8)$$

> $y1 := plots[pointplot](\{seq([n, f], n = 1\,..40)\})$:

> $y2 := plot\left(\left[\dfrac{5}{2} - e, \dfrac{5}{2} + e, \dfrac{5}{2}\right], n = 0\,..40\right)$:

> $plots[display](y1, y2)$;



> *restart*

> *#Задание 8*
#Вычислить предел числовой последовательности.

#Для того, чтобы вычислить предел числовой последовательности, нужно использовать процедуру
***limit**. Нужно передеать туда 2 параметра: выражение и к чему стремится числовая последовательность.*

$$\lim_{n \to \infty} \left(n \cdot \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1} \right) \right) :$$

> $limit\left(n \cdot \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right), n = \text{infinity}\right)$

$$1 \tag{9}$$

> *restart*

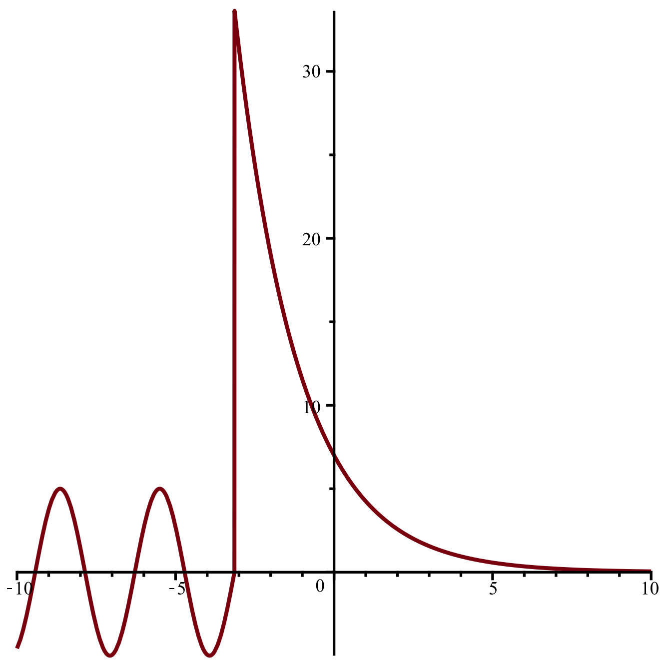
> *#Задание 9*
#Для заданной кусочно-непрерывной функции выполните следующие действия:
#1. Определите ее через функциональный оператор и постройте график.
#2. В точке разрыва и на бесконечности найдите односторонние пределы.
#3. Найдите производную и неопределенный интеграл на каждом из промежутков непрерывности.
#4. Постройте в одной системе координат графики функции, производной и *какой − нибудь первообразной.*
#5. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции и прямыми x = 1, x = 5, y = 0. Сделайте чертёж.

> *#1*

> $f := x \rightarrow piecewise\left(x < -\pi, 5 \cdot sin(2 \cdot x), x \geq -\pi, 7 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot x}\right);$

$$f := x \mapsto \begin{cases} 5 \cdot \sin(2 \cdot x) & x < -\pi \\ 7 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & -\pi \leq x \end{cases} \qquad (10)$$

> $plot(f);$



> #2

> $limit(f(x), x = -\pi, left);$

$$0 \qquad (11)$$

> $limit(f(x), x = -\pi, right);$

$$7\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} \qquad (12)$$

> $limit(f(x), x = \text{infinity});$

$$0 \qquad (13)$$

> $limit(f(x), x = -\text{infinity});$

$$-5..5 \qquad (14)$$

> #3

> $int(f(x), x);$

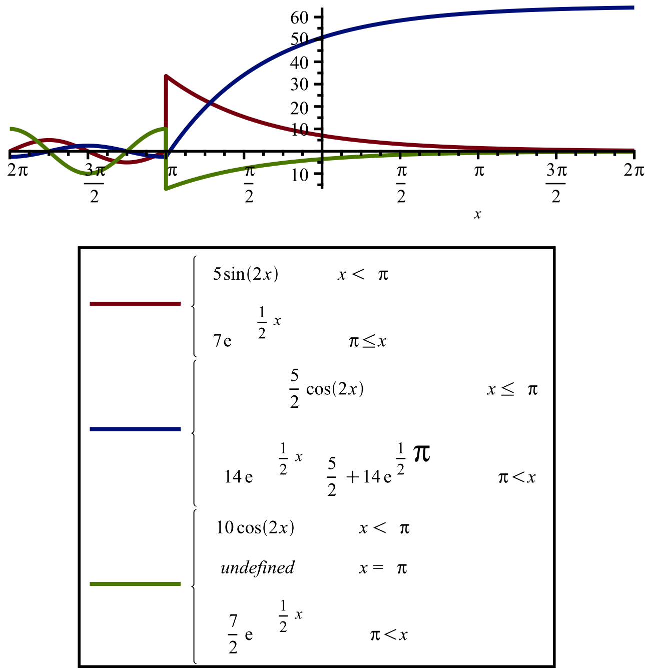
$$\begin{cases} -\frac{5\cos(2\,x)}{2} & x \leq -\pi \\ -14\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \frac{5}{2} + 14\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} & -\pi < x \end{cases} \qquad (15)$$

> $diff(f(x), x);$

$$\begin{cases} 10\cos(2\,x) & x < -\pi \\ \mathit{undefined} & x = -\pi \\ -\dfrac{7\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2} & -\pi < x \end{cases} \tag{16}$$

> *#4*

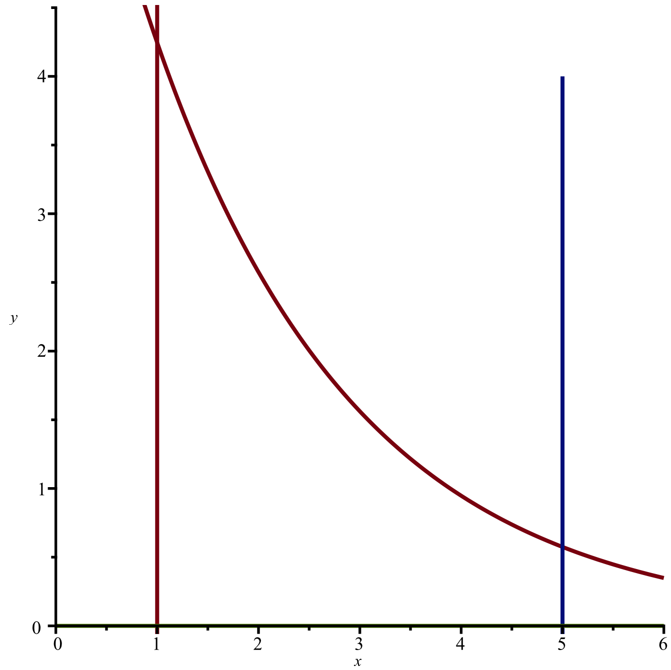
> *plot*([*f*(*x*), *int*(*f*(*x*), *x*), *diff*(*f*(*x*), *x*)], *legend* = [*f*(*x*), *int*(*f*(*x*), *x*) , *diff*(*f*(*x*), *x*)]);



> *#5*

> *with*(*plots*) :
p1 ≔ *plot*([[[1, 4], [1, 5]], [[5, 4], [5, 4]], 0], *x* = 0 ..6, *y* = 0 ..4.5);
p2 ≔ *plot*(*f*(*x*), *discont* = *true*, *x* = 0 ..6, *y* = 0 ..4.5);

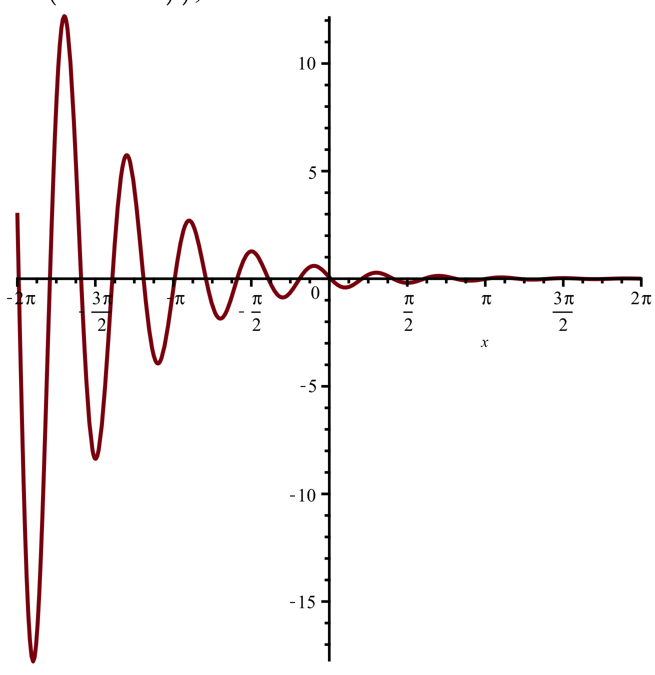
> *display*({ *p1*, *p2* });
evalf (*int*(*f*(*x*), *x* = 1 ..5)); *#вычисление точной площади криволинейной трапеции*



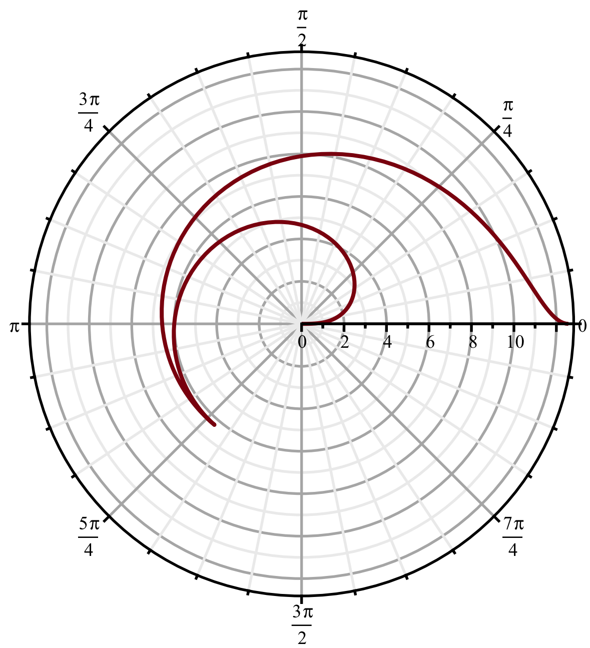
7.342239255 **(17)**

> *#Задание 10*
> *#Построить кривые на плоскости. Для кривой 2 -го порядка найдите каноническое уравнение* с *помощью ортогонального преобразования.*

> $plot(0.5\cdot\exp(-0.6\cdot x)\cdot\sin(5\cdot x+3));$



> $plots[polarplot]([2(t+\sin(t)), 2(1-\cos(t)), t=0..2\,\mathrm{Pi}]);$



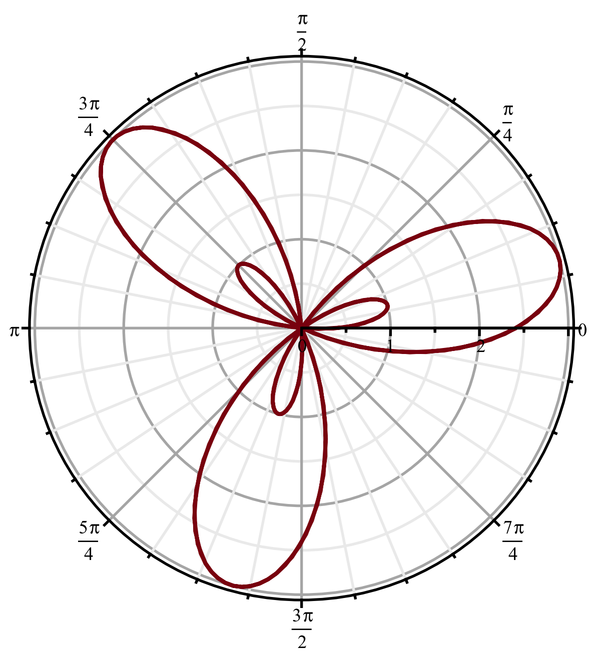
> *restart*;

> $expr3 := 1 + 2\sin\left(3\cdot x + \frac{\text{Pi}}{4}\right)$;

$f3 := unapply(expr3, x)$:

 # unapply позволяет создавать пользовательские функции из математических выражений

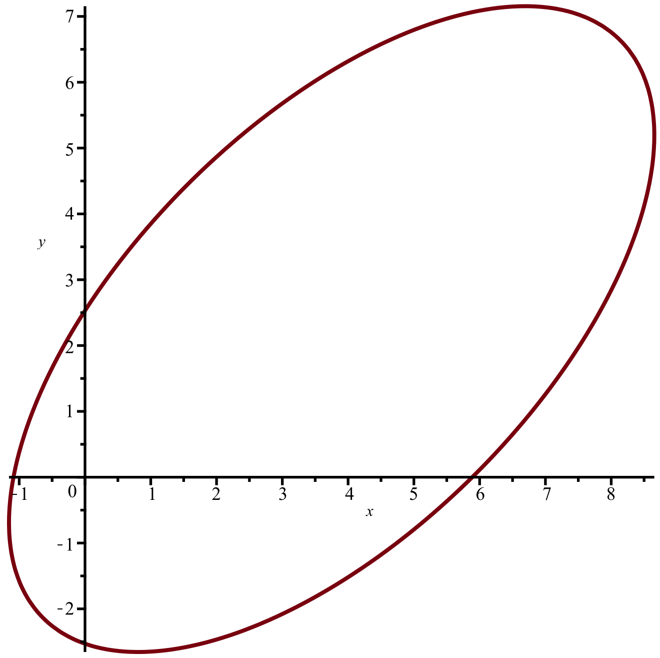
plots[*polarplot*]($f3(x)$, $x = 0\,..4\ \text{Pi}$) :



> *restart*;

> $f4 := 5\cdot x^2 - 6\cdot x\cdot y + 5\cdot y^2 - 24\cdot x - 32 = 0$:

> *plots*[*implicitplot*]($f4$, $x = -5\,..10$, $y = -5\,..10$);



> $M := Matrix([[5,-3], [-3, 5]]);$ # *матрица коэфицентов*

$$M := \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad (18)$$

> $u := Eigenvectors(M);$

$$u := \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

> $first := Normalize(\langle 1, 1\rangle, Euclidean) :$

> $second := Normalize(\langle -1, 1\rangle, Euclidean) :$

> $normalized\_matrix := Matrix([first, second]); Determinant(normalized\_matrix) ;$
#Определитель нащей нормированной матрицы должен равняться 1, ибо линейные преобразования должны соответствовать формулам поворота, а это справедливо, если det = 1

$$normalized\_matrix := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$1 \qquad (20)$$

> $x1 := \frac{\mathrm{sqrt}(2)}{2} \cdot x - \frac{\mathrm{sqrt}(2)}{2} \cdot y;$

$$x1 := \frac{\sqrt{2}\, x}{2} - \frac{\sqrt{2}\, y}{2} \qquad (21)$$

> $y1 := \frac{\mathrm{sqrt}(2)}{2} \cdot x + \frac{\mathrm{sqrt}(2)}{2} \cdot y;$

(22)

$$y1 := \frac{\sqrt{2}\,x}{2} + \frac{\sqrt{2}\,y}{2} \quad \textbf{(22)}$$

> $new\_f4 := subs(\{x = x1, y = y1\}, factor(f4)) :$

> $pseudocanon\_expr := Student[Precalculus][CompleteSquare](new\_f4);$

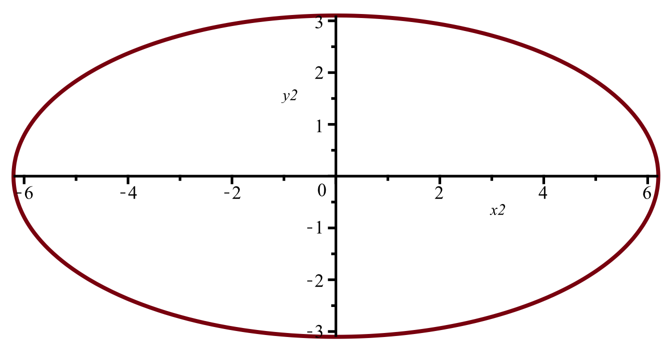
$$pseudocanon\_expr := 8\left(y + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 2\left(x - 3\sqrt{2}\right)^2 - 77 = 0 \quad \textbf{(23)}$$

> $canon\_expr := subs\left(x = x2 + 3\cdot\mathrm{sqrt}(2), y = y2 - \frac{3\cdot\mathrm{sqrt}(2)}{4}, pseudocanon\_expr\right);$

$$canon\_expr := 2\,x2^2 + 8\,y2^2 - 77 = 0 \quad \textbf{(24)}$$

> $\#canon = \frac{2}{77}x_2^2 + \frac{8}{77}y_2^2 = 1$ #каноническое уравнение

$plots[implicitplot](canon\_expr = 0, x2 = -20..20, y2 = -20..20);$

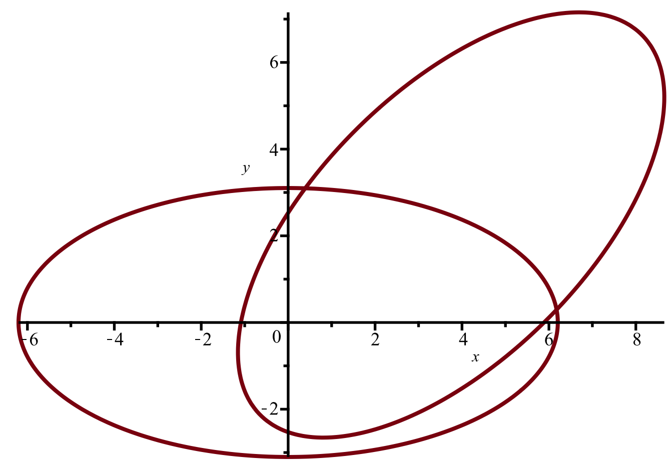


> $graph1 := implicitplot\left(5\cdot x^2 - 6\cdot x\cdot y + 5\cdot y^2 - 24\cdot x - 32 = 0, x = -20..20, y = -20..20\right) :$

> $graph2 := plots[implicitplot](canon\_expr = 0, x2 = -20..20, y2 = -20..20) :$

> $with(plots) :$

> $display(\{graph1, graph2\});$



y
x
6
4
2
-2
-6
-4
0
8