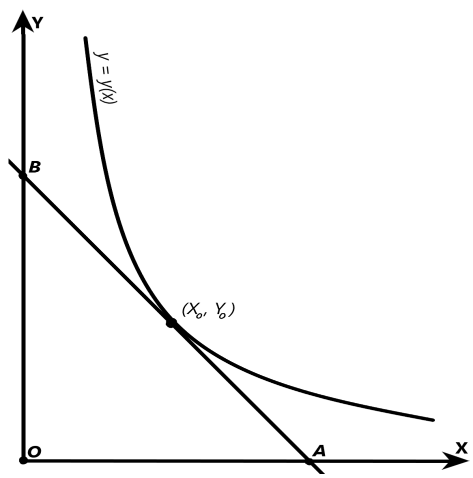
Домащнее задание СРВМ

Выполнил: **Гаджиев Саид М3115**

16 Марта 2023

1 Геометрическая задачка

Найти кривую, проходящую через точку (2, 3) и обладающую тем свойством, что отрезок произвольной ее касательной, концы которого лежат на осях координат, делится точкой касания пополам.
Решение:



Отметим точки A и B как точки, где кривая пересекает оси координат. Согласно условию задачи, точка касания делит отрезок AB на две равные части. Это означает, что абсцисса x_A точки A вдвое больше, чем абсцисса x_0 по абсолютной величине. Чтобы составить дифференциальное уравнение кривой, нам необходимо определить значение x_A. Для этого мы можем записать уравнение касательной.

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

]$y = 0$

$$0 = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Выразим x:

$$x = x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}$$

Заметим, что значение x в точке A должно быть больше в два раза(из условия):

$$x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)} = 2x_0$$

$$y'(x_0) = -x_0 \cdot y_0$$

$$y' = -xy$$

Решим наше уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

$$dy = -xy \cdot dx$$

$$\frac{dy}{y} = -x \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -xdx$$

$$ln|y| = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$|y| = e^{-\frac{x^2}{2}+C}$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}+C}$$

$$y = \frac{C}{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$3 = \frac{C}{e^{\frac{2^2}{2}}}$$

$$C = 3e^2$$

Формула кривой: $y = \frac{3e^2}{e^{\frac{x^2}{2}}}$

2 Разделяющиеся переменные

Задание №1

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x - y)$$

Решение:

$$dy = -\sin(y - x)dx$$

Пусть $u = y - x$, тогда:

$$du = dy - dx$$

$$y = x + u$$

$$dy = dx + du$$

$$dx + du = -sin(u)dx$$

$$du = (-\sin(u) - 1)dx$$

$$-\frac{du}{sin(u) + 1} = dx$$

$$\int -\frac{1}{\sin(u) + 1}du = \int 1dx$$

$$\operatorname{tg}(\frac{u}{2} - \frac{\pi}{4}) = -x + C$$

Ответ: $\operatorname{tg}(\frac{u}{2} - \frac{\pi}{4}) = -x + C$

Задание №2

$$e^{y'} = x$$

Решение:

$$e^{y'} = x$$

$$y' = \ln(x)$$

$$\frac{dy}{du} = \ln(x)$$

$$dy = \ln(x)dx$$

$$\int 1dy = \int ln(x)dx$$

$$y = x \cdot \ln(x) - x + C$$

Ответ: $y = x \cdot \ln(x) - x + C$

Задание №3

Найти частное решение в уравнении $x^2y'cosy + 1 = 0$, удовлетворяющее условию $\lim_{x\to\infty} y = \frac{16\pi}{3}$

Решение:

$$y' \cos(y) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}cosy = -\frac{1}{x^2}$$

$$\int \cos(y)dy = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\sin(y) = \frac{1}{x} + C$$

$$y = \arcsin(\frac{1}{x} + C)$$

$$\frac{16\pi}{3} = \arcsin(C)$$
$$c = \sin(\frac{16\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = \arcsin(\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

Ответ: $y = \arcsin(\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{3}}{2})$

3 Однородные уравнения

Задание №1

$$x(y-x)dy = y^2dx$$

Решение:

]$x(y-x)$ = P(x, y), y^2 = Q(x, y)

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda x(\lambda y - \lambda x) = \lambda^2(xy - x^2) = \lambda^2 P(x,y)$$
$$Q(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y)^2 = \lambda^2 y^2 = \lambda^2 Q(x,y)$$
$$x(y-x)dy = y^2dx$$
$$x(y-x)y' = y^2$$
$$(xy - x^2)y' = y^2$$
$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$$

]$y = ux$, $u = \frac{y}{x}$, $y' = u'x + u$:

$$u'x + u = \frac{u^2}{u-1}$$
$$\frac{du}{dx}x + u = \frac{u^2}{u-1}$$
$$\frac{(u-1)du}{u} = \frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{u-1}{u}du = \int \frac{1}{x}dx$$
$$u - ln|u| = ln|x| + C$$
$$\frac{y}{x} - ln(\frac{y}{x}) = lnx + C$$

Ответ: $\frac{y}{x} - ln(\frac{y}{x}) = lnx + C$

Задание №2

$$2x^2y' = x^2 + y^2$$

Решение:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$$

$$y' = \frac{1}{2} + \frac{y^2}{2x^2}$$

]$y = ux$, $u = \frac{y}{x}$, $y' = u'x + u$:

$$u'x + u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^2$$

$$u'x = \frac{u^2 - 2u + 1}{2}$$

$$u' = \frac{u^2 - 2u + 1}{2x}$$

$$\frac{du}{(u^2 - 2u + 1)dx} = \frac{1}{2x}$$

$$\frac{du}{u^2 - 2u + 1} = \frac{dx}{2x}$$

$$\int \frac{du}{u^2 - 2u + 1} = \int \frac{dx}{2x}$$

$$\int \frac{du}{(u-1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{du}{t^2} = \frac{ln|x|}{2} + C$$

$$-\frac{1}{t} = \frac{ln|x|}{2} + C$$

$$-\frac{1}{u-1} = \frac{ln|x|}{2} + C$$

$$-\frac{1}{\frac{y}{x} - 1} = \frac{lnx}{2} + C$$

Ответ: $-\frac{1}{\frac{y}{x}-1} = \frac{lnx}{2} + C$

Задание №3

$$xy' = y(\ln(y) - \ln(x))$$

Решение:

$$y' = \frac{y(\ln(y) - \ln(x))}{x}$$

]$y = ux$, $u = \frac{y}{x}$, $y' = u'x + u$:

$$y' = \frac{y}{\ln(\frac{y}{x})}$$

$$u'x + u = \frac{u}{\frac{1}{u}}$$

$$u'x = u^2 + u$$

$$u' = \frac{u^2 + u}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u^2 + u}{x}$$

$$\frac{du}{u^2 + u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u^2 + u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} du = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{u+1} du = ln|x| + C$$

$$\ln|u| - \ln|u+1| = \ln|x| + C$$

$$\ln(\frac{y}{x}) - \ln(\frac{y}{x} + 1) = \ln(x) + C$$

$$\ln(\frac{y}{y+x}) = \ln(x) + C$$

Ответ: $\ln(\frac{y}{y+x}) = \ln(x) + C$