Домашнее задание. Математический Анализ.

Выполнил: **Гаджиев Саид М3115**

14 Марта 2023

Задание №2187

Вычислить определённые интегралы, рассматривая их как пределы соответсвующших интегральных сумм и производя разбиение промежутка интеграции надлежащим образом: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$.

Решение:

$\triangle x = \frac{\frac{\pi}{2}}{n} = \frac{\pi}{2n}$
$x_0 = 0, x_1 = 0 + \frac{\pi}{2n}, ..., x_k = \frac{\pi}{2}$

Берём произвольные точки ($\xi_1 = \frac{\pi}{2n}; \xi_2 = \frac{\pi}{n}$) наших блоков, чтобы посчитать их площадь:

$$f(\xi_i) = \sin(\frac{\pi}{2n})$$

Используя формулу: $\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sin(x) + \sin(2x) + ... + \sin(nx) = \frac{\cos(\frac{x}{2}) - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{x}{2})}$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i = \frac{\pi}{2n}(\sin(\frac{\pi}{2n}) + \sin(\frac{\pi}{n}) + ... + \sin(\frac{\pi}{2}))$$

$$\lim_{n\to\propto} S_n = \frac{\pi}{2n}\frac{\sin(\frac{\pi}{4})\sin(n\frac{\pi+\pi}{4n})}{\sin(\frac{\pi}{4n})} = \frac{\pi}{2n}\frac{\sin(\frac{\pi}{4})\sin(n\frac{\pi+\frac{\pi}{n}}{4})}{\sin(\frac{\pi}{4n})} = \frac{\pi}{2n}\frac{4n\sin(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{4})}{\pi} =$$

$$= 2\sin^2(\frac{\pi}{4}) = 2\frac{2}{4} = 1$$

Ответ: 1

Задание №2189

Вычислить определённые интегралы, рассматривая их как пределы соответсвующших интегральных сумм и производя разбиение промежутка интеграции надлежащим образом: $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$, (0 < a < b).

Решение:

$\triangle x = \frac{b-a}{n}$

$x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_n = b$

$$\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \triangle x_i = \frac{b-a}{n}(\frac{1}{\sqrt{a(a+\frac{b-a}{n})}^2} + \frac{1}{\sqrt{a+2\frac{b-a}{n}}^2} + ... + \frac{1}{\sqrt{b}}) =$$

$$\frac{b-a}{n}(\frac{1}{a(a+\frac{b-a}{n})} + \frac{1}{(a+\frac{b-a}{n})(a+\frac{b-a}{n}\cdot 2)} + ... + \frac{1}{(a+\frac{b-a}{n}(n-1))b})$$

$$k = \frac{b-a}{n}$$

$$k\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a^2+(2i+1)ak+(i^2+i)k^2} = \frac{1}{(a+\frac{b-a}{n}i)(a+\frac{b-a}{n}(i+1))} = -\frac{n(n+1)}{a(a-b(n+1))}$$

$$\lim_{n\to\propto} \frac{(a-b)(n+1)}{a(a-b(n+1))} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = a^{-1} - b^{-1}$$

Ответ: $a^{-1} - b^{-1}$

Задание №2190

Вычислить определённые интегралы, рассматривая их как пределы соответсвующших интегральных сумм и производя разбиение промежутка интеграции надлежащим образом: $\int_a^b x^m dx$, (0 < a < b; m $\neq -1$).

Решение:

$$d = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$$
$$b = a \cdot d^n$$

$$\triangle x_i = a \cdot d^i - a \cdot d^{i-1}$$
$$f(\xi_i) = (a \cdot d^i)^m$$

$$\sum_{i=0}^{n} a^{m+1}(d-1)\cdot d^{im+i-1} = (d-1)\cdot a^{m+1}(\frac{d^m(d^{(m+1)n}-1)}{d^{m+1}-a}) =$$

$$= a^{m+1}((\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}-1)\cdot\frac{(\frac{b}{a})^{\frac{m}{n}}\cdot((\frac{b}{a})^{m+1}-1)}{(\frac{b}{a})^{\frac{m+1}{n}}-1} = a^{m+1}(\frac{1}{n}\ln|\frac{b}{a}|\cdot\frac{(\frac{b}{a})^{\frac{m}{n}}-1}{\frac{1}{n}\cdot\ln|\frac{b}{a}|^{m+1}}) = \frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}$$

Ответ: $\frac{b^{m+1}}{m+1} - \frac{a^{m+1}}{m+1}$