Домашнее задание.
Специальные разделы высшей математики.

Выполнил: **Гаджиев Саид М3115**

19 мая 2023

Задания: №329, №340, №345

Задание №329

$$y''(x+2)^5 = 1$$

Решение:

Подстановка: $u = x + 2$; $x = u - 2$

$$y''u^5 = 1$$

$$y'' = \frac{1}{u^5}$$

$$\frac{d(y')}{du} = \frac{1}{u^5}$$

$$\int d(y') = \int \frac{1}{u^5} du$$

$$y' = -\frac{1}{4u^4} + C_1$$

$$\frac{dy}{du} = -\frac{1}{4u^4} + C_1$$

$$dy = (-\frac{1}{4u^4} + C_1)du$$

$$\int 1dy = \int -\frac{1}{4u^4} du + C_1$$

Вычислим правый интеграл:

$$\int -\frac{1}{4u^4} du + C_1 = C_1 \cdot \int 1du - \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{u^4} du = \frac{12C_1 \cdot u^4 + 1}{12 \cdot u^3} + C_2$$

Обратная замена:

$$y = \frac{1}{12(x+2)^3} + C_1 x + C_2 + 2 \cdot C_2$$

$$y = \frac{1}{12(x+2)^3} + C_1 x + C_2$$

$$y = \frac{1}{12(x+2)^3}$$

Ответ: $y = \frac{1}{12(x+2)^3}$

Задание №340

$$xy''' - y'' = 0$$

Решение:

$$d(xy'' - 2y') = 0$$

$$xy'' - 2y' = C$$

$$xy'' - 2y' - C = 0$$

$$d(xy' - 3y - Cx) = 0$$

$$xy' - 3y - Cx = C_1$$

$$y' - \frac{3y}{x} - C = \frac{C_1}{x}$$

$$y' - \frac{3y}{x} = \frac{C_1}{x} + C$$

Уравнение Бернулли с $a = -\frac{3}{x}$ и $b = \frac{C_1}{x} + C$:
Подстановка: $y = uv$; $y' = uv' + u'v$

$$uv' + u'v - \frac{3uv}{x} = \frac{C_1}{x} + C$$

$$u'v + u(v' - \frac{3v}{x}) = \frac{C_1}{x} + C$$

Первое уравнение:

$$v' - \frac{3v}{x} = 0$$

$$v' = \frac{3v}{x}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{3v}{x}$$

$$dv = \frac{3vdx}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{3dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{v} dv = \int \frac{3}{x} dx$$

$$\ln(v) = 3 \cdot \ln(x)$$

$$u = x^3$$

Второе уравнение:

$$u'v + u(v' - \frac{3v}{x}) = \frac{C_1}{x} + C$$

при $u = x^3$ и $(v' - \frac{3v}{x}) = 0$

$$u'x^3 = \frac{C_1}{x} + C$$

$$u' = \frac{Cx + C_1}{x^4}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{Cx + C_1}{x^4}$$

$$du = \frac{(Cx + C_1)dx}{x^4}$$

$$\int 1du = \int \frac{Cx + C_1}{x^4}dx$$

Правый интеграл:

$$\int \frac{Cx + C_1}{x^4}dx = C \cdot \int \frac{1}{x^3}dx + C_1 \cdot \int \frac{1}{x^4}dx = -\frac{3Cx + 2C_1}{6x^3}$$

$$u = C_2 - \frac{3Cx + 2C_1}{6x^3}$$

$$u = -\frac{C}{2x^2} - \frac{C_1}{3x^3} + C_2$$

Обратная замена: $u = \frac{y}{v}$; $v = x^3$

$$y = \frac{6C_2x^3 - 3Cx - 2C_1}{6}$$

$$y = C_2x^3 + Cx + C_1$$

Ответ: $C_2x^3 + Cx + C_1$

Задание №345

$$y'' = \sqrt{1 + y'}$$

Решение:

Подстановка: $y' = u$; $y'' = uu'$

$$uu' = \sqrt{u + 1}$$

$$\frac{u \cdot du}{dy} = \sqrt{u+1}$$
$$u \cdot du = \sqrt{u+1}dy$$
$$\frac{u \cdot du}{\sqrt{u+1}} = dy$$
$$\int \frac{u}{\sqrt{u+1}}du = \int 1dy$$
$$\frac{2u\sqrt{u+1}}{3} - \frac{4\sqrt{u+1}}{3} = y + C, u = -1$$

Обратная замена: $u = y'$

$$\frac{2y'\sqrt{y'+1}}{3} - \frac{4\sqrt{y'+1}}{3} = y + C$$
$$2y'\sqrt{y'+1} - 4\sqrt{y'+1} = 3y + 3C$$

По методу введения параметра: $p = y' = \frac{dy}{dx}$; $dy = p \cdot dx$

$$y = \frac{2p\sqrt{p+1}}{3} - \frac{4\sqrt{p+1}}{3} - C$$
$$dy = \frac{p \cdot dp}{\sqrt{p+1}}$$
$$p \cdot dx = \frac{p \cdot dp}{\sqrt{p+1}}$$
$$dx = \frac{dp}{\sqrt{p+1}}$$
$$\int 1dx = \int \frac{1}{\sqrt{p+1}}dp$$
$$x = 2\sqrt{p+1} + C_1$$

Выразим параметр p:

$$p = \frac{x^2 - 2C_1x + C_1^2 - 4}{4}$$
$$y = \frac{2p\sqrt{p+1}}{3} - \frac{4\sqrt{p+1}}{3} - C$$
$$y = \frac{(x^2 - 2C_1x + C_1^2 - 12) \cdot \sqrt{x^2 - 2C_1x + C_1^2} - 12C}{12}$$
$$y = \frac{x^3}{12} - \frac{C_1x^2}{4} + \frac{C_1^2x}{4} - x + C$$
$$y = \frac{x^3}{12} - x + C$$

Ответ: $y = \frac{x^3}{12} - x + C$