Домашнее задание. Спец. Разделы Высшей Математики.
Вариант № 6. Гаджиев Саид М3115.

Задания для варианта: №51, №52, №70, №106, №130, №162.

№51. Проинтегрировать уравнения:

$x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2} = 0, \quad y|_{x=0} = 1$

$\sqrt{1-x^2}\,y\,dy = -x\sqrt{1-y^2}\,dx$

Делим обе части на $\sqrt{1-x^2}$ и $\sqrt{1-y^2}$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Решим по отдельности интегралы:

$\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$

Подставим: $t = 1-y^2$; $-\frac{1}{2}dt = y\,dy$.

$\int -\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} = -\sqrt{t}$

Обратная подстановка:

$-\sqrt{1-y^2}$

$\int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Подставим: $t = 1-x^2$; $-\frac{1}{2}dt = x\,dx$.

$\int -\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} = \sqrt{t}$

Обратная подстановка:

$\sqrt{1-x^2}$

$\sqrt{1-y^2} = C - \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$

Подставим x и y $\Rightarrow \sqrt{1-1^2} = C - \sqrt{1-0^2} \Rightarrow C = 1$

Ответ: $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1$

№52. Проинтегрировать уравнение.

$e^{-y}(1+y')=1$

$1+y'=\frac{1}{e^{-y}}$

$1+\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{1}{e^{y}}}$

$1+\frac{dy}{dx}=e^{y}$

$\frac{dy}{dx}=e^{y}-1 \quad \Big| \cdot \frac{dx}{(e^{y}-1)}$

$\frac{dy}{(e^{y}-1)}=dx$

$\int\frac{dy}{e^{y}-1}=\int dx, \; y\neq 0$

$\int\frac{dy}{e^{y}-1}=\left[\begin{matrix} t=e^{y} \\ dt=e^{y}dy \end{matrix}\right]=\int\frac{dt}{t^2-t}=\int\frac{dt}{(t-1)t}=\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t}=\ln|t-1|-\ln|t|=$

$=\ln|e^{y}-1|-y$

$\ln|e^{y}-1|-y=x+C$

$y-\ln|e^{y}-1|=-x+C, \; y=0$

Ответ: $y-\ln|e^{y}-1|=-x+C$

№70. Решить задачу.

$m\frac{dV}{dt}=-kV \qquad \frac{dV}{V}=-\frac{k}{m}dt$

$\ln V=-\frac{k}{m}t+C$

$V=e^{-\frac{k}{m}t+C}=C\cdot e^{-\frac{k}{m}t}$

Тогда, при $t=0$:

$V=10 \Rightarrow 10=C\cdot e^{0}=C \Rightarrow C=10$

$V=10\cdot e^{-\frac{k}{m}t}=10\cdot e^{k_0 t} \quad (k_0=-\frac{k}{m})$

при $t=5$ $V=8 \Rightarrow 8=10\cdot e^{k_0\cdot 5} \Rightarrow \frac{4}{5}=e^{5k_0} \rightarrow \ln\frac{4}{5}=5k_0 \quad k_0=\frac{1}{5}\ln\frac{4}{5}$

$\Rightarrow V=10\cdot e^{\ln(\frac{4}{5})^{\frac{1}{5}}\cdot t}=10\cdot(\frac{4}{5})^{\frac{1}{5}\cdot t}$

$V=1 \Rightarrow 1=10\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{5}\cdot t}$

$\frac{1}{10}=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{t}{5}} \quad \ln_{\frac{4}{5}}\frac{1}{10}=\frac{t}{5}$

$t=5\cdot\ln_{\frac{4}{5}}\frac{1}{10}=-5\cdot\ln_{\frac{4}{5}}10=-5\cdot\frac{\lg 10}{\lg\frac{4}{5}}\approx 51$ с. Ответ: 51с

№106. Проинтегрировать уравнение.

$(4x-3y)dx+(2y-3x)dy=0$

$\underbrace{(2y-3x)}_{P(x,y)}dy=\underbrace{(3y-4x)}_{Q(x,y)}dx$

$\left.\begin{aligned}P(\lambda x,\lambda y)&=(\lambda y+\lambda x)dy=\lambda(y+x)dy\\Q(\lambda x,\lambda y)&=(\lambda x-\lambda y)dx=\lambda(x-y)dx\end{aligned}\right\}\Rightarrow$ уравнение однородное

Подставим: $u=\frac{y}{x}$; $y=ux$; $dy=udx+xdu$

$(2u-3)x\cdot(udx+xdu)=(3u-4)xdx \quad |:x$

$(2u-3)(udx+xdu)=(3u-4)dx$

$(2ux-3x)du=(-2u^2+6u-4)dx$

$(2u-3)x\,du=(-2u^2+6u-4)dx$

Делим обе части уравнения на x и $-2u^2+6u-4$

$-\frac{(2u-3)du}{2u^2-6u+4}=\frac{dx}{x}$

$\int-\frac{2u-3}{2u^2-6u+4}du=\int\frac{1}{x}dx$

Решим по отдельности интегралы:

$\int-\frac{2u-3}{2u^2-6u+4}du$

$-\int\frac{4u-6}{2(2u^2-6u+4)}du$

Подставим: $t=2u^2-6u+4$; $dx=(4u-6)du$

$-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx=-\frac{1}{2}\cdot\ln|x|=-\frac{\ln|x|}{2}$

Обратная подстановка: $-\frac{\ln|2u^2-6u+4|}{2}$

$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|$

$$-\frac{\ln(u^2-3u+2)}{2}=\ln(x)+C$$

$$\frac{1}{\sqrt{u^2-3u+2}}=e^C x$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{y}{x}-2}\sqrt{\frac{y}{x}-1}}=Cx$$

$$Cx\sqrt{y-2x}\sqrt{y-x}=x$$

$$Cx\sqrt{y^2-3xy+2x^2}=x$$

Ответ: $Cx\sqrt{y^2-3xy+2x^2}=x$

№130. Решить линейное уравнение.

$$xy'-2y=x^3\cos x \quad |:x$$

$$y'-\frac{2y}{x}=x^2\cos x$$

$$y'+a(x)y=b(x)$$

$$a=-\frac{2}{x} \qquad b=x^2\cos x$$

Подстановка: $y=uv$; $y'=uv'+u'v$

$$uv'+u'v-\frac{2uv}{x}=x^2\cos x$$

$$u'v+u\left(v'-\frac{2v}{x}\right)=x^2\cos x$$

Решим первое уравнение:

$$v'-\frac{2v}{x}=0$$

$$v'=\frac{2v}{x}$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{2v}{x}$$

$$dv=\frac{2v\,dx}{x}$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x}$$

$$\int\frac{1}{v}dv=\int\frac{2}{x}dx$$

Решим по отдельности интегралы:

$\int \frac{1}{v} dv = \ln|v|$ | $\int \frac{2}{x} dx = 2\ln|x|$

$\ln|v| = 2\ln|x|$

$v = x^2$

Решим второе уравнение:

$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = x^2 \cos x$

$v = x^2$ и $\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 0$

$u'x^2 = x^2 \cos x \quad | : x^2$

$u' = \cos x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$du = \cos x\, dx$

$\int du = \int \cos x\, dx$

Решим по отдельности интегралы:

$\int du = u$ | $\int \cos x\, dx = \sin x$

$u = \sin x + C$

Обратная замена:

$y = x^2(\sin x + C)$

$y = Cx^2 + x^2 \sin x$

Ответ: $Cx^2 + x^2 \sin x$

№162

$$2y'\ln x+\frac{y}{x}=y^{-1}\cos x$$

$$2y'\ln x+\frac{y}{x}=\frac{\cos x}{y} \quad \Big| \cdot 2\ln x$$

$$y'+\frac{y}{2x\ln x}=\frac{\cos x}{2\ln x\, y}$$

$$y'+a(x)y=b(x)y^n,\ n\neq 1$$

$$a=\frac{1}{2x\ln x};\ b=\frac{\cos x}{2\ln x};\ n=-1$$

$$yy'+\frac{y^2}{2x\ln x}=\frac{\cos x}{2\ln x}$$

Подстановка: $u=y^2;\ y=\sqrt{u};\ u'=2yy';\ y'=\frac{u'}{2y}$

$$\frac{u'}{2}+\frac{u}{2x\ln x}=\frac{\cos x}{2\ln x} \quad \Big| \cdot 2x\ln x$$

$$u'x\ln x+u=x\cos x \quad \Big| : x\ln x$$

$$u'+\frac{u}{x\ln x}=\frac{\cos x}{\ln x}$$

$$u'+a(x)u=b(x)$$

$$a=\frac{1}{x\ln x} \qquad b=\frac{\cos x}{\ln x}$$

Подстановка: $u=tv;\ u'=tv'+t'v$

$$tv'+t'v+\frac{tv}{x\ln x}=\frac{\cos x}{\ln x}$$

$$tv'+v\left(t'+\frac{t}{x\ln x}\right)=\frac{\cos x}{\ln x}$$

Решим первое уравнение:

$$t'+\frac{t}{x\ln x}=0$$

$$t'=-\frac{t}{x\ln x}$$

$$\frac{dt}{dx}=-\frac{t}{x\ln x} \quad \Big| \cdot dx$$

$$dt = -\frac{t\,dx}{x\ln x} \quad \Big|:t$$

$$\frac{dt}{t} = -\frac{dx}{x\ln x}$$

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \int -\frac{1}{x\ln x}\,dx$$

Решим по отдельности интегралы:

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| \qquad \int -\frac{1}{x\ln x}\,dx = -1\cdot\ln(\ln x) = -\ln(\ln x)$$

$$\ln t = -\ln(\ln x)$$

$$t = \frac{1}{\ln x}$$

Решим второе уравнение:

$$v't + v\left(t' + \frac{t}{x\ln x}\right) = \frac{\cos x}{\ln x}$$

$$t = \frac{1}{\ln x} \qquad \left(t' + \frac{t}{x\ln x}\right) = 0$$

$$\frac{v'}{\ln x} = \frac{\cos x}{\ln x} \quad \Big|:\ln x$$

$$v' = \cos x$$

$$\frac{dv}{dx} = \cos x \quad \Big|\cdot dx$$

$$dv = \cos x\,dx$$

$$\int dv = \int \cos x\,dx$$

Решим по отдельности интегралы:

$$\int dv = v \qquad \int \cos x\,dx = \sin x$$

$$v = \sin x + C$$

Обратная замена: $v = \frac{u}{t}$; $t = \frac{1}{\ln x}$

$$u = \frac{\sin x + C}{\ln x}$$

Обратная замена: $u = y^2$

$$y^2 = \frac{\sin x + C}{\ln x} \quad \Big| \cdot \ln x$$

$$y^2 \ln x = C + \sin x$$

Ответ: $y^2 \ln x = C + \sin x$