Домашнее задание.
Специальные разделы высшей математики.

Выполнил: **Гаджиев Саид M3115**

10 мая 2023

Вариант №10. Задания для варианта: №184(174+10) и №284(274+10)

Задание №184

Проинтегрировать уравнение в полных дифференциалах:

$$(\sin(y) + y \cdot \sin(x) + \frac{1}{x}) \cdot dx + (x \cdot \cos(y) - \cos(x) + \frac{1}{y}) \cdot dy = 0$$

Решение:

$f(x, y) = \sin(y) + y \cdot \sin(x) + \frac{1}{x}$

$g(x, y) = x \cdot \cos(y) - \cos(x) + \frac{1}{y}$

Чтобы проверить, является ли дифференциальное уравнение уравнением в полных дифференциалах, найдём $\frac{\delta f}{\delta y}$ и $\frac{\delta g}{\delta x}$

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x, y) = \cos(y) + \sin(x)$$

$$\frac{\delta g}{\delta x}(x, y) = \cos(y) + \sin(x)$$

Частные производные равны => дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

$$\frac{\delta u}{\delta x}(x, y) = f(x, y) = \sin(y) + y \cdot \sin(x) + \frac{1}{x}$$

$$\frac{\delta u}{\delta y}(x, y) = g(x, y) = x \cdot \cos(y) - \cos(x) + \frac{1}{y}$$

$$u(x, y) = \int \sin(y) + y \cdot \sin(x) + \frac{1}{x} dx$$

$$\int \sin(y)dx + \int y \cdot \sin(x)dx + \int \frac{1}{x}dx$$

$$\sin(y) \cdot x - y \cdot \cos(x) + \ln(|x|)$$

$$u(x,y) = \sin(y) \cdot x - y \cdot \cos(x) + \ln(|x|) + C(y)$$

$$\frac{\delta u}{\delta y}(x,y) = \frac{\delta}{\delta y}(\sin(y) \cdot x - y \cdot \cos(x) + \ln(|x|) + C(y))$$

Найдём производную:

$$\frac{\delta u}{\delta y}(x,y) = x \cdot \cos(y) - \cos(x) + \frac{\delta}{\delta y}(C(y))$$

Сравним $\frac{\delta u}{\delta y}(x,y)$ с определённой ранее частной производной

$$\frac{\delta u}{\delta y}(x,y) = x \cdot \cos(y) - \cos(x) + \frac{\delta}{\delta y}(C(y))$$

$$\frac{\delta u}{\delta y}(x,y) = x \cdot \cos(y) - \cos(x) + \frac{1}{y}$$

Поскольку оба выражения верны, приравняем их друг к другу

$$x \cdot \cos(y) - \cos(x) + \frac{\delta}{\delta y}(C(y)) = x \cdot \cos(y) - \cos(x) + \frac{1}{y}$$

$$\frac{\delta}{\delta y}(C(y)) = \frac{1}{y}$$

Интегрируем по y от обеих частей

$$C(y) = \int \frac{1}{y}dy$$

$$C(y) = \ln(|y|) + C, C \in R$$

Подставим $\ln(|y|)+C$ вместо y в выражение $u(x,y) = \sin(y) \cdot x - y \cdot \cos(x) + \ln(|x|) + C, C \in R$

$$u(x,y) = \sin(y) \cdot x - y \cdot \cos(x) + \ln(|x|) + \ln(|y|) + C, C \in R$$

Подставим $\sin(y) \cdot x - y \cdot \cos(x) + \ln(|x|) + \ln(|y|) + C$ вместо $u(x,y)$ в общее решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах, $u(x,y) = D, D \in R$

$$\sin(y) \cdot x - y \cdot \cos(x) + \ln(|x|) + \ln(|y|) + C = D, C \in R, D \in R$$

Поскольку обе константы C и D являются произвольными числами, заменим их на константу C

$$\sin(y) \cdot x - y \cdot \cos(x) + \ln(|x|) + \ln(|y|) = C, C \in R$$

$$x \cdot \sin(y) - y \cdot \cos(x) + \ln(|xy|) = C, C \in R$$

Ответ: $x\sin(y) - y\cos(x) + \ln(|xy|) = C, C \in R$

Задание №284

Проинтегрировать уравнение:

$$x^2 + xy' = 3x + y'$$

Решение:

$$(x-1)y' = 3x - x^2$$

Делим обе части уравнения на $x - 1$

$$y' = -\frac{x^2 - 3x}{x - 1}$$

Преобразование: $y'(x) = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - 3x}{x - 1}$$

Умножаем обе части уравнения на дифференциал dx

$$dy = -\frac{(x^2 - 3x)dx}{x - 1}$$

$$\int 1dy = \int -\frac{x^2 - 3x}{x - 1}dx$$

Вычислим полученные интегралы:

Левый интеграл:

$$\int 1dy = y + C$$

Правый интеграл:

$$\int -\frac{x^2 - 3x}{x - 1}dx$$

Подстановка: $u = x - 1; x = u + 1; dx = du$

$$-\int \frac{(u+1)^2 - 3(u+1)}{u}du$$

$$-(\int \frac{(u+1)^2}{u}du - 3\int \frac{u+1}{u}du)$$

1.

$$\int \frac{(u+1)^2}{u} du$$

$$\int \frac{u^2+2u+1}{u} du$$

$$\int u + \frac{1}{u} + 2du$$

$$\int u \cdot du + \int \frac{1}{u} \cdot du + 2\int 1 \cdot du = \ln(|u|) + \frac{u^2}{2} + 2u$$

2.

$$\int \frac{u+1}{u} \cdot du$$

$$\int \frac{1}{u} + 1 \cdot du$$

$$\int \frac{1}{u} \cdot du + \int 1 \cdot du = \ln(|u|) + u$$

$$-(\int \frac{(u+1)^2}{u} du - 3\int \frac{u+1}{u} du) = 2\ln(|u|) - \frac{u^2}{2} + u$$

Обратная замена: $u = x - 1; x = u + 1$

$$-\frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln(|x-1|) - \frac{3}{2}$$

$$-\frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln(|x-1|) + C$$

$$y + C = 2x - \frac{x^2}{2} + 2\ln(|1-x|)$$

Ответ: $y + C = 2x - \frac{x^2}{2} + 2\ln(|1-x|)$