Домашнее задание. Математический Анализ.

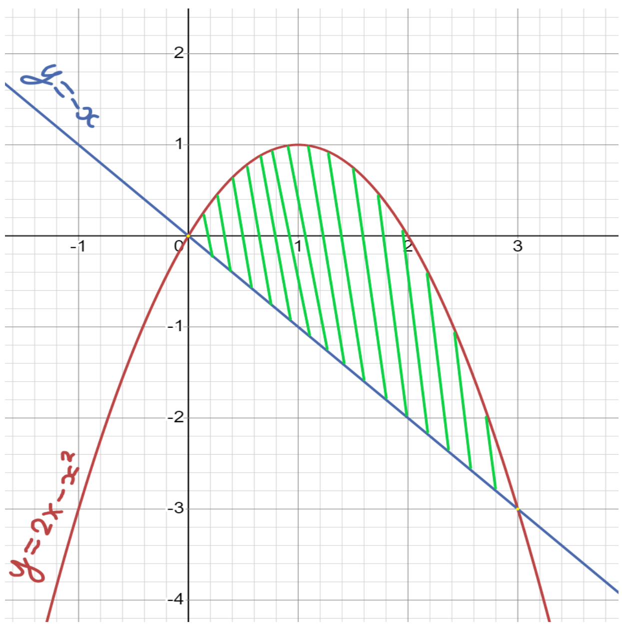
Выполнил: **Гаджиев Саид М3115**

27 апреля 2023

Найти площади фигур, ограниченных данными линиями:

а) $y = 2x - x^2$**,** $y = -x$

Решение:



Мы знаем, что если на отрезке $[a, b]$ некоторая непрерывная функция $f(x) >= g(x)$, площадь фигуры, ограниченной графиками данных функций и прямыми $x = a; x = b$, можно найти по формуле:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

где $f(x) = 2x - x^2$, а $g(x) = -x$

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = (\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3})|_a^b = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - 0 + 0 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Ответ: $4\frac{1}{2}$

б) осью Ox **и одной аркой циклоиды** $\begin{cases} x = 2(t - \sin(t)) \\ y = 2(1 - \cos(t)) \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin(t)) \\ y = 2(1 - \cos(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2t - 2\sin(t) \\ y = 2 - 2\cos(t) \end{cases}$$

Уравнение циклоиды с $r = 2$

Сперва необходимо вычислить площадь первой арки циклоиды, т.к. из условия мы знаем, что фигура ограничена осью Ox. В данной арке t принимает значения в пределах $(0 <= t <= 2\pi)$

$x = 2t - 2\sin(t) - x(t)$
$y = 2 - 2\cos(t) - y(t)$

$$S = \int_0^{2\pi} y(t) \cdot x'(t) dt$$

$$S = \int_0^{2\pi} (2 - 2\cos(t)) \cdot (2t - 2\sin(t))' \cdot dt = \int_0^{2\pi} (2 - 2\cos(t)) \cdot (2 - 2\cos(t)) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 - 2\cos(t))^2 dt = (6t - 8\sin(t) + \sin(2t))|_0^{2\pi} = 12\pi - 8\cdot 0 + \sin(4\pi) - (0 - 8\cdot 0 + \sin(0)) = 12\pi$$

Ответ: 12π

в) одним лепестком "розы"$\rho = a\cos(2\phi), a > 0$

Решение:

Поскольку форма лепестка симметрична относительно Ox **и повторяется дважды в пределах интервала** $[0; \pi]$**, то для вычисления его площади достаточно проинтегрировать до половины периода, то есть в пределах** $[0; \frac{\pi}{2}]$

S криволинейного сектора:

$$S = \frac{1}{2} \int_a^B \rho^2(\phi) d\phi$$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos(2\phi))^2 d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2(2\phi)d\phi = ...$$

$[t = 2\phi, d\phi = \frac{dt}{2}, \phi = \frac{t}{2}]$

$$... = \frac{a^2}{2}\cdot\int \frac{\cos^2(t)\cdot dt}{2} = \frac{a^2}{4}\cdot\int \frac{\cos(2t)+1}{2}\cdot dt = \frac{a^2}{4}\cdot(\frac{1}{2}\int \cos(2t)\cdot dt + \frac{1}{2}\int 1dt) =$$
$$= \frac{a^2}{4}\cdot(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(2t)}{2} + \frac{t}{2})$$

$$F = \frac{a^2\sin(4\phi)}{16} + \frac{a^2\phi}{4}$$

$$S = (\frac{a^2\sin(4\phi)}{16} + \frac{a^2\phi}{4})|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{8} - 0 = \frac{\pi a^2}{8}$$

Ответ: $\frac{\pi a^2}{8}$