IUT Victor Fotso de Bandjoun

Recherche Opérationnelle (1/2)

CHAPITRE 3

Interprétation et résolution graphiques des programmes linéaires à deux variables.

III.1- Exemples

E-1- résoudre graphiquement les inéquations et les systèmes d'inéquations suivants :

3x+y<=4, -2x+y>=1, $\begin{cases} 6x-2y\leq 1 \\ x+4y\geq 3 \end{cases}$

3x+y>=9, -x+2y<4, $\begin{cases} 5x+4y>1 \\ 4x+3y<2 \end{cases}$

E-2-Un menuisier fabrique des bureaux sous deux modèles : le modèle «Louis14» et le modèle « Standard ». Des études de marché ont montré que, pour l'année à venir, les possibilités de vente s 'élèvent à 300 unités pour le modèle «Louis14» et à 400 unités pour le modèle standard. L'approvisionnement en bois est suffisant pour pouvoir fabriquer annuellement 500 bureaux, quel que soit le type. Par ailleurs, le temps de fabrication d'un bureau louis 14 est double de celui d'un bureau de type standard ; la capacité annuelle de fabrication est telle que, si tous les bureaux fabriqués étaient du type standard, on pourrait en fabriquer 700 au minimum.
La vente d'un bureau sous le modèle louis 14 conduit à une marge unitaire sur coût variable égale à 7, celle d'un bureau de type standard : 5.
Chercher le programme annuel de fabrication conduisant au profil global maximal.

III.1.2 MISE EN EQUATION :

1- désignons pour inconnues du problème des nombres annuels x et y respectifs de bureaux de modèles «Louis14» et de modèle standard à fabriquer.
Ces nombres sont souvent appelés **variables activités**, et ce sont des variables d'action, c'est à dire des variables auxquelles ont peut attribuer à volonté certaines valeurs numériques.
On appelle programme le couple (x, y), quel que soit le contexte. Il dépend de la signification à attribuer à chaque élément.
2- soit z le profit réalisé annuellement, c'est à dire résultat de la réalisation du programme.
Dans le cas présent, z = 7x+5y
Z est une fonction linéaire x et y.
NB : l'objectif est de déterminer l'ensemble des couples (x, y) confèrent au profit z sa valeur maximale.
Z est une fonction économique.
3- x et y devrait respecter certains contraintes notamment : la contrainte de signe, la contrainte de caractère économique.
-contrainte de signe.
En générale, x et y sont positifs. x>=0 et y>=0.

NB : étant donné l'évidence de ces contraintes de signe, elles ne sont pas énoncées dans les problèmes. Elles sont implicites.

- Contraintes de caractères économiques.

Les variables x et y doivent vérifier certaines inégalités au sens large.
x<= 300. possibilités de vente annuelle du modèle Louis 14.
y<=400 possibilités de vente annuelle du modèle standard.
Contraintes d'approvisionnement annuelles en bois imposent
x +y<=500.
La capacité annuelle de fabrication nous donne : 2x+y <= 700
Le problème revient à chercher (x, y) satisfaisant aux contraintes et qui donnent la fonction économique z=7x+5y sa valeur maximale.
La recherche de ce maximum se traduit par :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 300 \\ y \leq 400 \\ x+y \leq 500 \\ 2x+y \leq 700 \\ \max(7x+5y) \end{cases}$$

Une telle écriture est appelée programme linéaire.
$\Rightarrow$ Une contrainte est linéaire lorsqu'elle s'exprime au moyen d'une inégalité ou d'une égalité, dont le premier membre est une fonction linéaire des variables et le second membre un nombre réel.

E-2- un atelier de fabrication des palettes de manutention produit deux types de palettes comportant les éléments suivants :

- Pour une palette de type1 : 0.05m^3 de bois et 100 clous.
- Pour une palette de type2 : 0.03m^3 de bois et 150 clous.

L'atelier peut produire au maximum 1600 palette par jour et dispose quotidiennement d'un stock de 69 m^3 de bois et de 210 000 clous à la vente, les bénéfices sont les suivants :

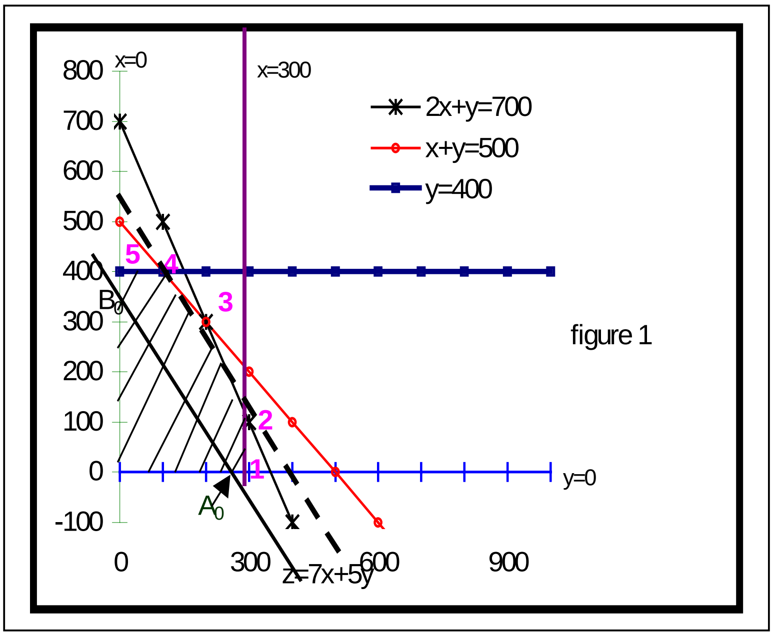
- Palette de type1 : 30 F
- Palette de type2 : 20F

Ecrire le programme linéaire.

III.1.3 INTERPRETATION GRAPHIQUE

Comme le programme est le couple (x, y) susceptible d'être représenté par un point du plan R^2 rapporté à deux axes, il est possible de donner une interprétation et de recourre graphiquement les programmes linéaires à 2 variables.
Chaque équation du type ax+by=c est une droite du plan.
Chaque inéquation du type ax+by<=c est un demi-plan fermé, limité par la droite ax+by=c.
Les contraintes de l'exemple2 representent 6 demi-plans fermés respectivement limités par les 6 droites d'équations.

x=0, x=300, x+y=500
y=0, y=400, 2x+y=700



Cette figure montre l'intersection des 6 demi-plans fermés représentant des six contraintes. C'est la partie hachurée, c'est un domaine polygonal fermé (hexagone). On dit qu'il est convexe. Elle est l'image de l'ensemble des solutions admissibles, c'est à dire l'ensemble des couples (x, y) vérifiant l'ensemble des contraintes. Les équations des côtes s'obtiennent en saturant une à une les contraintes, c'est à dire en remplaçant $\leq, \geq$ j par =.

C – RESOLUTION GRAPHIQUE

On veux déterminer un programme réalisant le maximum de la fonction économique. Résoudre le programme linéaire revient à en quels points de l'ensemble hachuré la fonction économique atteint sa valeur maximale.

Pour l'exemple 2 $z=7x+5y$

Soit $z_0=7x+5y$ le niveau du profit supposé fixé. Ce niveau représente une droite du plan et est appelé courbe de niveau (ou d'interférence) de la fonction économique, relative à la valeur Z_0.

En prenant Z_0 = 1750

$$A_0=(x=\frac{Z_0}{7},250,y=0)$$

$$B_0=(x=0,y=\frac{Z_0}{5}=350)$$

La droite A_0B_0 représente l'ensemble de toutes les solutions admissibles pour lesquelles la fonction économique prend la valeur Z_0=1750

NB : la recherche du domaine hachuré conférant à la fonction économique sa valeur maximale consiste donc à déterminer la courbe de niveau correspondant à la plus grande valeur possible de Z0 et ayant des points communs avec ce domaine.

$z=7x+5y$ Représente une famille de droite parallèles et de coefficient directeur m=-7/5

NB :

Toutes les courbes de niveau sont les droites parallèles.
Pour une valeur quelconque de z on a :
OA = 1/7 z OB= 1/5z
A et B étant les points d'intersection de $z=7x+5y$ avec les axes des abscisses.
On constate qu'il existe une position de la droite correspondant à $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$ maximum, c'est-à-dire de z, c'est la droite D^* qui n'a qu'un seul point d'intersection avec le domaine hachuré. C'est le sommet 3.
C'est donc au sommet 3 que apparaît une solution optimale à ce sommet on a deux contraintes saturées.
On dira qu'une solution d'un programme linéaire sature une contrainte inégalité, lorsque pour cette solution l'inégalité devient une égalité.

En 3 on aura $\begin{cases} x + y = 500 \\ 2x + y = 700 \end{cases} \Rightarrow$ x=200   y=300

Par conséquent le programme annuel optimal de fabrication est (200,300) et
Z=7x + 5y = 400 + 1500 = 2900

Exo 03 : déterminer le programme (x, y) qui rend optimal la fonction des palettes.

D- solution extrêmes et cas dégénérés.

a- Solution extrêmes

on admet le résultat suivant.
S'il existe au moins une solution optimale, il existe nécessairement un sommet de domaine hachuré correspondant à une solution optimale.
Une solution extrême est toute solution admissible (optimale ou non) correspondant à un sommet du domaine hachuré
Dans le cas de l'exemple 2 on a 6 solutions extrêmes

b- Cas dégénérés

On dit qu'une solution est non dégénérée lorsqu'elle est la seule solution optimale.
Par contre si dans l'exemple 2, la fonction économique était plutôt z=x+y, alors les droites de niveau deviennent // au côté du domaine hachuré passant par les sommets 3 et 4.
Dans ce cas, si le sommet 3 est une solution optimale, alors tous les points du segment défini par les sommets 3 et 4 représentent l'ensemble des solutions optimales. On dit dans ce cas qu'il est dégénéré, il y a dont une infinité de solutions qui rendent optimal le programme et parmi lesquels on a 2 solutions extrêmes 3 et 4.

$\Rightarrow$ ***Des contraintes sont incompatibles lorsque l'ensemble des solutions admissibles d'un programme linéaire est vide.***

E – METHODE ENUMERATIVE

Etant donné qu’une solution optimale est une solution extrême ou bien, dans le cas dégénéré, l’ensemble des solutions optimales comprend une et même deux solutions extrêmes. On peut d’abord chercher la ou les solutions extrêmes.
Pour le faire, une méthode est possible est appelé méthode énumérative. Elle consiste à calculer la valeur que prend la fonction économique en chacun des sommets et à retenir celui ou ceux qui correspondent à l’optimum. Cette méthode ne peut dont s’appliquée que si le domaine hachuré possède un faible nombre de sommets.
Pour <u>l’exemple 1</u>

Sommets	Programme		Fonction économique	
	X	y		
0	0	0	0	
1	300	0	2100	
2	300	100	2600	
3	200	300	2900	Solution optimale
4	100	400	2700	
5	0	400	2000	