IUT Victor Fotso de Bandjoun

Recherche Opérationnelle (1/2)

CHAPITRE 4
RESOLUTION DES PROGRAMMES LINEAIRES
PAR LA METHODE D.G DANTZIG DITE DU SIMPLEXE

IV.1- Introduction :

En pratique, pour des programmes linéaires, le nombre de variables est en général très élevé.
Les deux méthodes étudiées précédemment deviennent inapplicables. La nécessité d'une méthode beaucoup plus puissante s'impose et qui est applicable quelque soit le nombre de variables. C'est la méthode simplexe qui est plus indiquée. Il est une amélioration de la méthode énumérative. Mais elle consiste à une exploration systématique d'un sous ensemble des sommets. Et un sommet quelconque est considéré comme sommet de départ correspondant à une solution extrême de départ.

Pour se fixer des idées, utilisons également les exemples 2 et 3 du chapitre précédent.
Pour l'exemple 2, soit le sommet 0 le sommet de départ. Les sommets adjacents à 0 sont 1 et 5.

Soit z_0 la valeur de la fonction économique en 0.

L'ensemble des sommets adjacents à 0 peut être répartie en 3 classes dont 2 au plus peuvent être éventuellement vides.

C_0 = sommets pour lequel z> z_0

C'_0 = sommets pour lequel z= z_0

C''_0 = sommets pour lequel z< z_0

Si C_0 est vide, alors $z \leq z_0$, 0 est un sommet optimal, unique si de plus C'_0 est vide.

Sinon, on sélectionne un sommet 1 de la classe C_0 où la fonction économique prend la valeur z_1 / $z_1 \succ z_0$.

Si C_1 est vide, le sommet 1 est optimal, unique si C'_1 est vide, si non on itère la procédure en sélectionnant un sommet 2 dans la classe C_1, etc……

Au bout d'un nombre fini d'itérations, on obtient une solution optimale.

NB :

pour chaque itération, la fonction économique va en croissant.

La méthode des simplexe qui est une méthode itérative consiste à partie d'un sommet quelconque de départ, à cheminer tout au long de certains côtés du domaine hachuré jusqu'à l'obtention d'une solution optimale, une itération faisant passer d'un sommet en améliorant la fonction économique.

IV.2- MISE DU PROGRAMME SOUS LA FORME STANDARD

Pour le faire, on transforme toutes les contraintes autres que celles du signe en égalités. Il faut dans ce cas des variables supplémentaires appelées variables d'écart.
Revenant à l'exemple 2, le programme linéaire s'écrit

$x \quad \geq 0$

$y \geq 0$

$$(I)\begin{cases} x \qquad \leq 300 \\ \qquad y \leq 400 \\ x+y \leq 500 \\ 2x+y \leq 700 \end{cases}$$

cette forme est appelée forme canonique.
Prenons z, u, v, t comme variable d'écarts, la transformation des contraintes en égalités donne la forme suivante dite standard.

$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad w \geq 0 \; u \geq 0 \quad v \geq 0 \quad t \geq 0$

Variables réelles variables d'écart

$$\begin{cases} x \quad + w \quad = 300 \\ \quad y \quad + u \quad = 400 \\ x + y \quad + v \quad = 500 \\ 2x + y \quad + t \quad = 700 \end{cases}$$

MAX(7x + 5y + 0w + 0u + 0v + 0t).
Les variables d'écart sont positives pour toute solution admissible (x, y).
Toutes les variables sont soumises aux mêmes contraintes économiques de la forme économique est associé une variable d'écart.
Comme le profit ne change pas les coefficients des variables d'écarts sont nuls dans la forme standard.

IV.3- DETERMINATION D'UNE SOLUTION EXTREME DE DEPART

Soit le système des contraintes d'égalités de la forme standard précédente.

$$\begin{cases} x+y=300 \\ y+u=400 \\ x+y+v=500 \\ 2x+y+t=700 \end{cases}$$

système de 4 équations à 6 inconnues(x, y, z, u, v, t). dans la forme générale on parle d'un programme canonique comportant un système de contraintes égalités de m équations linéaires indépendantes à n+m inconnues.
Dans le cas présent, m=4 n=2
La forme du système précédent permet de calculer 4 inconnues en fonction de 2 préalablement choisies de manière arbitraire et convenable.
L'ensemble solution admissible du programme standard est hachuré ; toute solution extrême sature simultanément 2 contraintes au moins (cas des sommets)
Si la contrainte saturées est une des 4 contraintes économiques la variable d'écart correspondant est nulle.
Si la contrainte saturée est une contrainte de signe, la variable d'activité correspondante est nulle.
Par conséquent pour ce problème, 2 inconnues sont nulles et les 4 autres sont positives ou nulles .et l'obtention de tous les sommets du domaine hachuré par mis lesquels figures toutes les solutions extrêmes optimales passer par le résolution de tous les systèmes de 4 équations à 4 inconnues possibles et en retenant que les solutions à coordonnées positives ou nulles .
Pour l'exemple si v et t =0 on a

$$\begin{cases} x+y=300 \\ y+u=400 \\ x+y=500 \\ 2x+y=700 \end{cases} \quad \Rightarrow x=200;\ w=300;\ z=100\ ;\ u=100$$

solution admissible car x,y,z,u sont positives.
Or on a C_6^2 façon de choisir 2 variables nulles par mis 6; on aura C_6^2 systèmes de 4*4 à résoudre .
NB :
Dans le cas générale on aura C_{n+m}^{n} systèmes de format (m, n) à résoudre.

⇒ **Choix de la solution de départ.**

Pour notre exemple si x et y =0 z,u,v,t sont positives, égales aux second membres. La solution admissible extrême est x=0 ;y=0 ; w=300 u=400 v=500 t= 700 dans ce cas z_0=0.

En théorie des systèmes linéaires z,u,v,t sont des inconnues principales et x, y non principales (on vient de leur attribuer la valeur arbitraire 0)

On dit aussi que w,u,v,t sont des variables dans la base et x ,y des variables hors base, car les vecteurs de $\Re^4$

Quand x=y=0 de la matrice du système standard constitue une base la solution extrême admissible(0) dite solution de base.

NB :

le choix de variables hors base correspond donc, dans le système au choix de variables en fonction desquelles on cherche à résoudre le système ,et ,pour une solution de base, correspond au choix des variables qui seront nulles de façon à trouver en un sommet du domaine polydral hachuré des solutions admissibles.

On peut énoncer :

$\Rightarrow$ Soit un programme standard associé à u programme canonique à n variables et m contraintes. e programme standard comporte donc n+m variables et m contraintes égalités.

Pour toute solution de base(extrême)

- Le nombre de variables dans la est égale au nombre m de contraintes, qui sont linéairement indépendantes.
- Les variables hors base sont nulles.
- Pour toute solution, m est le maximum de variables non nulles n est le nombre minimum de variables nulles.
- Aussi une solution est degenerée lorsque pour une solution de base certaines variables dans la base sont nulles.
- De plus une solution de base non degenerée ,le nombre de variable non nulles est exactement égale au nombre de contraintes .

Ainsi le système des contraintes montre que :

- Pour tout programme standard associé à un programme canonique de type exemple 2, il existe toujours une solution de base de départ évidente : celle qui consiste à choisir les variables d'écart comme variables dans la base ; dont les valeurs sont celles des seconds membres, les autres variable , hors base ,prenant la valeur zéro. cette solution correspond à la solution nulle du programme canonique .
- Pour exposer les fondements de la méthode de simplexe, nous utilisons l'exemple 2 et 3 du chapitre 1.
-

IV.4- ETUDE ALGEBRIQUE DE LA METHODE DU SIMPLEXE

Partons de l'exemple 2 la solution de base (extreme) de deaprt du programme standard correspond au sommet (0) pour le programme canonique. On a

- Variables hors base x=0 ;y=0
- Variables dans la base

W=300 u=400
V=500 t=700

- Valeur de la fonction économique $z_0=0$

Pour se fixer les idées, nous considérons que les variables w, u, v, t sont les niveaux de production de produits P,Q,R,T qui ne rapporte rien.

PREMIERE ITERATION

- **Variables entrantes et variables sortantes :**

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x+w=300 \\ y+u=400 \\ x+y+v=500 \\ 2x+y+t=700 \\ 7x+5y-z=0 \end{cases}$$

la solution initial donne comme solution(x=0,y=0w=300,u=400,v=500,t=700,z=0) l'objectif est d'étudier jusqu'à quel niveau on peut porter les solutions reels x te y de façon à avoir un profit maximum.

Définition

On appelle variable entrante la variable (x ou y) choisie parmi x et y hors base dans la solution de départ et qui passe de 0 à une valeur positive.

On appelle variable sortante une variable de la base qui prend la valeur 0 quand la une des variables hors base passe de 0 à une valeur positive.

Ainsi, le passage du somment de départ à un sommet (1)adjacent à (0) fait passer une variable dans la base et fait sortir une variable dans la base. En mathématique générale on parle de changement de base.

- **Critère de sélection de la variable entrante**

En générale, le seul critère réside dans l'augmentation de la fonction économique.

Etant donné qu'il faut donner un caractère systématique à la sélection dans cette méthode ,un critère d'ordre marginal est utilisé et est connu sous le nom de :**deuxième critère de sélection de Dantzig de la variable entrante** qui consiste dans la fonction économique exprimée exclusivement en fonction des variables hors base, à sélectionner la variable affectée du coefficient positif le plus élevé(LE PLUS POSITIF dit on souvent). Si plusieurs variables sont dans cette condition on choisit au hasard un par mis celles ci.

Pour l'exemple 2 et suivant ce critère la variable entrante est x, il en est de même pour l'exemple 3.

- **critère de sélection de la variable sortante**

Soit le système suivant obtenu en exprimant les variables dans la base et la fonction économique en fonction des variables hors base.

$$(2)\begin{cases} w=300-x-0y \\ u=400-0x-y \\ v=500-x-y \\ t=700-2x-y \\ z=0+7x+5y \end{cases}$$

x étant la variable entrante, y reste hors base $\Rightarrow$ y=0

le système devient :

$$(3)\begin{cases} w=300-x \\ u=400-0x \\ v=500-x \\ t=700-2x \end{cases}$$

cherchons la plus grande valeur possible de x compatible avec ses contraintes. Il est à noter que les contraintes de signes sont :

$w \geq 0$, $u \geq 0$, $v \geq 0$, $t \geq 0$

d'après le système (3), x peut prendre toute valeur positive vérifiant le système suivant

$$(4)\begin{cases} 300-x\geq 0 \\ 400-0x\geq 0 \\ 500-x\geq 0 \\ 700-2x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq \dfrac{300}{1} \\ x\leq \dfrac{400}{0} \\ x\leq \dfrac{500}{1} \\ x\leq \dfrac{700}{2} \end{cases} (5)$$

la valeur maximale de x est la plus grande solution du système (4) c'est à dire le plus petit rapport du système (5).

$$X=MIN\left(\frac{300}{1},\frac{400}{0},\frac{500}{1},\frac{700}{2}\right) \leftarrow$$ écriture symbolique qui montre que.

La deuxième contrainte est toujours respecté. $\forall x$ (contrainte en fait absente).

Géographiquement x chemine sur l'axe 0x. l'absence de x dans la contrainte (2) se traduit par le parallélisme de ce cheminement avec le segment (5) (4).

Pour l'exemple (2) x =300 y=0. on dit alors qu'on bute sur la contrainte N° 1, pour cette valeur w =0. ainsi x devient une variable dans la base et w une variable hors base . w est donc la variable sortante dans ce cas w sature la première contrainte.

La première contrainte itération aboutit alors à :

Variables hors base : y=0 , w=0

Variables dans la base : x=300 , u=400, v=200, t=100 dans ce cas z_1=2100.

Deuxième itération :

Le nouveau système s'écrit à partir du premier et en fonction des nouvelles variables hors base.

$$(6)\begin{cases} w=300-x-0y \\ u=500-0x-y \\ v=400-x-y \\ t=700-2x-y \\ t=0+7x+5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=300-0y-w \\ u=400-y-0w \\ v=200-y+w \\ t=100-y+2w \\ z=2100+5y-7w \end{cases}$$

équation d'échange

pour passer du sommet (0) au sommet (1), x est la variable entrante et w la variable sortante et on a butés sur la contrainte 1 dans (6) l'équation d'échange est l'équation 1. le système équivalent est :

$$(7)\begin{cases} x+w=300 \\ y+u=400 \\ y-w+v=200 \\ y-2w+t=100 \\ 5y-7w-z=-2100 \end{cases}$$

a- sélection de la variable entrante

z=2100+5y-7w

w n'a pas d'intérêt car toute augmentation de w $\Rightarrow z\downarrow$ on achemine de nouveau sur le segment (1)-(0) et on revient au départ.

le 2eme critère de DANTZIP conduit à y comme variable entrante comme w reste hors base (w=0) le cheminement se fait plutôt sur (1) – (2). La première contrainte reste saturée. Et comme w ≥0 v ≥0 t ≥0 on a

$$\begin{cases} 300-x\geq 0 \\ 200-y\geq 0 \\ 200-y+w\geq 0 \\ 100-y-2w\geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y=\mathrm{MIN}\left(\frac{300}{0},\frac{400}{1},\frac{200}{1},\frac{100}{1}\right)$$

Ce résultat montre qu'on bute sur la 4e contrainte et par conséquent la variable t s'annule, t est donc la variable sortante. Aussi on constate que la première contrainte restera toujours satisfaite ∀ le niveau donné à y avec w=0. En effet y étant absent le cheminement se fait parallèlement à oy, tout le long de la frontière de saturation de cette contrainte.
La deuxième itération donne comme résultat
Variable hors-base : w=0, t=0
Variable dans la base : x=300, y=100
U=300, v=100
Dans cette solution z=2600.

Troisième itération
On part du système

$$(8)\quad \begin{cases} x=300-oy-w \\ u=400-y-ow \\ v=200-y+w \\ y=100-y+2w \\ z=2100+5y-7w \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=300-w-ot \\ u=300-2w+t \\ v=100-w+t \\ y=100+2w-t \\ z=2600+3w-5t \end{cases} \quad (9)$$

l'équation d'échange est la 4e

(9) peut encore s'écrire

$$(10)\begin{cases} x+w=300 \\ 2w+u-t=300 \\ w+w-t=100 \\ y-2w+t=100 \\ 3w-5t-z=2600 \end{cases}$$

en fonction des variables hors-base z = 2600+3w-5t
w = 0 et sera considère comme variable entrante ; comme il devient non nulle on desature la 1e contrainte et le cheminement se fait sur (2)-(3) t = 0 on a le système suivant :

$$(11)\begin{cases} x=300-w \\ u=300-2w \\ v=100-w \\ y=100+2w \end{cases}$$

comme $x \geq 0$, $u \geq 0$, $v \geq 0$, $y \geq 0$
on obtient :

$$(12)\begin{cases} 300-w\geq 0 \\ 400-2w\geq 0 \\ 100-w\geq 0 \\ 100+2w\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w\leq 300/1 \\ w\leq 300/2 \\ w\leq 100/2 \\ w\geq -100/2 \end{cases} (13)$$

comme le critère de sélection de la variable sortante ne tient jamais compte des valeurs négatives .
w = Min (300/1, 300/2, 100/1) $\Rightarrow$ w = 100
on bute sur la contrainte (3) $\Rightarrow$ v = 0, v est donc la variable sortante.
Cette 3^e itération conduit alors à :
Variable hors-base v = 0, t = 0
Variable dans la base w = 0, x = 200, u = 100, y = 300
Et z_3 = 2900.

Quatrième itération

(en se rappelant des résultats obtenu dans le chapitre 1 cette 4^e itération n'aura pas lieu).

$$(14)\begin{cases} x=300-w-ot \\ u=300-2w+t \\ w=100-v+t \\ y=100+2w-t \\ z=2600+3w-5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=200+v-t \\ u=100+2v-t \\ w=100-v+t \\ y=300-2v+t \\ z=2900-3v-2t \end{cases} (15)$$

(15) peut également s'écrire :

$$(16)\begin{cases} x-v+t=200 \\ u-2v+t=100 \\ w+v-t=100 \\ y+2v-t=300 \\ -3v-2t-z=-2900 \end{cases}$$

z = 2900-3v-2t
les coefficients des variables hors-base étant négatif montre que toutes valeurs de v ou de t positive conduirait à une diminution de z.
la solution optimal est donc la précédente des valeurs réelles ont pour valeurs optimales :
x* = 200 : 200 bureaux modèles « louis 14 »
y* = 300 : 300 bureaux modèles « standard »
w* = 100 : il reste une impossibilité de marché de 100 bureaux du modèle « louis 14 »
u* = 100 : il reste une impossibilité de marché de 100 bureaux du modèle « louis 14 »
v* = 0 : tout le bois disponible est utilisé
t* = 0 : tout le temps disponible est utilisé
le profit Max est z* = 2900 cette solution est unique.

- **critère de fin de calcul**

si relativement à une solution extrême, les coefficients de la fonction économique exprimée exclusivement en fonction des variables hors-base sont négatives ou nuls. Cette solution est optimale lorsque optimal signifie maximal.

IV.5- DISPOSITION PRATIQUE DES CALCULS :LES TABLEAUX

Le travail que nous venons de présenter est très lourd, il est très souhaitable de donner une présentation plus synthétique, économisant les calculs et les écritures . on peut donc traduire les systèmes précédent par des tableaux.
Tableau (1) traduit le système initial

$$\begin{cases} x+w=300 \\ y+u=400 \\ x+y+v=500 \\ 2x+y+t=700 \\ 7x+5y-z=0 \end{cases}$$

B \ HB	1 2 ….	C
3	1 0 1 0 0 0	300
4	0 1 0 1 0 0	400
5	1 1 0 0 1 0	500
6	2 1 0 0 0 1	700
Δ	7 5	0

La partie centrale reproduit la matrice du système (1), la colonne C est celle des seconds membres de (1). La colonne repérée B (dans la base), 3 exprime la variable N°dans la première équation dans la base en fonction des variables hors-base.

HB(hors-base) donne les numéros des variables hors-base les colonnes étant numéroté dans l'ordre croissant des N° des variables pour les variables dans la base, il est préférable de remplacer dans la base numéros qui figures dans B.

Δ , ligne donnant les coefficients de la fonction économique exprimée seulement en fonction des variables hors-base.

Les coefficients sur les variables dans la base normalement nuls, sont représentés par des points, ainsi on a toujours les points sous les points.

Enfin la case située en bas et à droite contient le nombre 0 valeur numérique que prend la fonction économique pour la solution de base.

Variable Numéro	valeur
3 4 5 6	300 400 500 700
Fonction économique	0

Solution de base associée au tableau (1)

Le système (1) et (2) donne cette solution en attribuant la valeur nulle aux variables hors-base.

1ère itération. Règle pratique de pivotage.

On reprend le tableau(1) en ajoutant une colonne repérée (R) servant à la sélection de la variable sortante.

HB / B	1 2 . . .	C	R
3 4 5 6	1 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 2 1 0 0 0 1	300 400 500 700	300 ∞ 500 350
Δ	7 5 . . .	0	

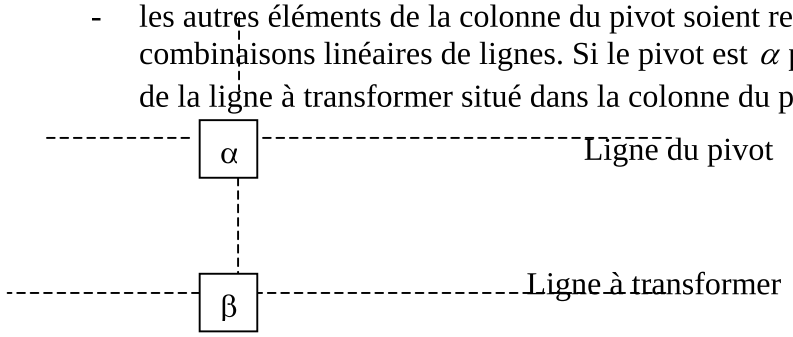
Sélection de la variable entrante se fait suivant le 2e critère de Dantzig, critère appliqué en cerclant le coefficient le positif dans la ligne Δ.
La sélection de la variable sortante est obtenu en repérant le rapport le plus petit et positif des seconds membre aux coefficients de la variable entrante. Ces rapports sont consignés dans la colonne R.La sélection de la variable N°3est indiquée en cerclant le rapport correspondant.

Le passage du tableau (1) et (2) au tableau (3). Le système obtenu en fin de première itération ,traduit relativement à la nouvelle solution de base ,l'expression des nouvelles variables dans la base et de la fonction économique en fonction des nouvelles variables hors-base.

Pour passer du tableau (1) ou (2) aux tableaux (6) et (7) se fait en utilisant la règle de pointage.

- **pivot ou élément distingué**
  On appelle pivot ou élément distingué le coefficient de la variable entrante dans l'équation d'échange. Il est à l'intersection de la ligne et de la colonne des éléments cerclés après sélection de la variable entrante et de la variable sortante.

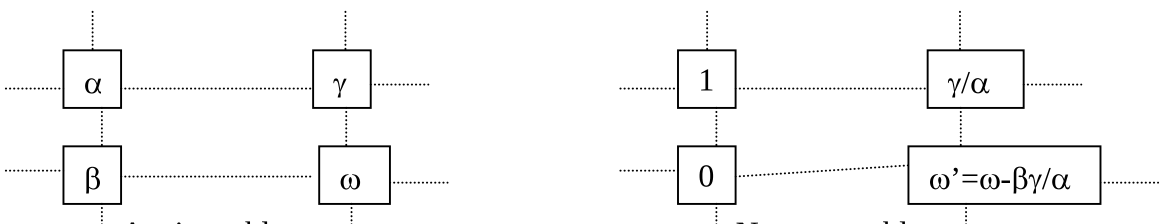
- **règles de pivotage**
  On commence par diviser la ligne du pivot par le pivot. L'élimination de la variable entrante , consiste visiblement à transformer le tableau (0) de telle façon que :
  - le pivot soit remplacer par 1, par division de la ligne du pivot par celui-ci
  - les autres éléments de la colonne du pivot soient remplacés par des zéros , et ceci par combinaisons linéaires de lignes. Si le pivot est α par exemple ($\alpha \neq 0$). Soit β un élément de la ligne à transformer situé dans la colonne du pivot.



Par souci de simplification , affection de la ligne à transformer du coefficient 1 .soit θ le coefficient affecté à la ligne du pivot, θ est tel que la nouvelle ligne définie par :.

1. ligne à transformer $+\theta$. ligne du pivot présente 0 dans la colonne du pivot , il faut et il suffit que $\beta+\theta\bullet\alpha$ soit $\theta=-\beta/\alpha$ et par conséquent pour transformer une ligne autre que celle du pivot il faut ;

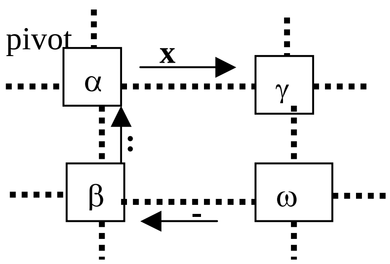
Retrancher de la ligne considérée le produit de la ligne du pivot par $\beta\div\alpha,\alpha$ étant le pivot , β l'élément de la ligne à transformer dans la colonne du pivot.



Ancien tableau Nouveau tableau

$\Rightarrow$ La ligne du pivot à été divisée par le produit de la ligne α , donc γ se change en $\gamma\div\alpha$, β se change en 0 (c'est l'objectif d'élimination)

$\Rightarrow$ D'après la règle précédente , ω change en $\omega'=\omega-(\beta\div\alpha)\gamma$. Le moyen le plus rapide pour retenir cette règle est la règle du rectangle pour transformer un élément non situé dans la ligne du pivot.



$\omega'=\omega-\beta\gamma/\alpha$

Pour passer d'un tableau au suivant :

1- diviser la ligne du pivot par le pivot
2- Appliquer la règle du rectangle à tous les autres éléments .

- **règles simplificatrices**

Aussi la règle des rectangles est très lourde ; il faut procédé autrement .

1. **Cas d'invariance d'une ligne ou colonne**

Soit ω un élément non situé sur la ligne du pivot , ω' sont transformer . ω est invariant si et seulement si $\omega'=\omega \Leftrightarrow \beta\gamma=0 \Leftrightarrow \beta=0 ou \gamma=0$

a. si $\beta=0$, non seulement ω mais tous les éléments de la ligne de d , sont invariant .En d'autres terme si une ligne différente de celle du pivot, coupe la colonne du pivot selon 0, elle reste invariante .
b. si $\gamma=0$, non seulement ω, mais aussi tous les éléments de la colonne de la ligne de ω sont invariants : c'est à dire si une colonne différente de celle du pivot rencontre la ligne du pivot selon 0, elle reste invariante.

2. **Cas de simplification de la transformation d'une ligne ou d'une colonne.**

a. si $\beta=\alpha$ on a $\omega'=\omega-\gamma$ la ligne de ω se transforme en lui soustrayant celle du pivot.
si $\beta=-\alpha$ on a $\omega'=\omega+\gamma$ la ligne de ω se transforme en lui ajoutant celle du pivot.

b. si $\gamma=\alpha$ on a $\omega'=\omega-\gamma$ la colonne de ω se transforme en lui soustrayant celle du pivot excepté pour l'élément de la colonne de ω sur la ligne du pivot.

si $\gamma=-\alpha$ on a $\omega'=\omega+\beta$ la ligne de ω se transforme en lui ajoutant celle du pivot.

3. **Marche à suivre pratique.**

Pour transformer un tableau :

1. Diviser la ligne du point par le pivot.
2. Remplacer la colonne du pivot par une colonne unité, le nombre 1 remplaçant le pivot.
3. Recopier toute ligne coupant la colonne du pivot selon un zéro.
4. Recopier toute colonne coupant la colonne du pivot selon un zéro.
5. Inspecter les colonnes coupant la ligne du pivot selon un élément égal(respectivement opposé) au pivot, leur soustraire (resp ajouter) la colonne du pivot exception faite des éléments de ces colonnes situés sur la ligne du pivot.
6. Inspecter les lignes coupant la colonne du pivot selon un élément égal (resp opposé) au pivot leur soustraire (resp ajouter la ligne du pivot) .

7. Appliquer la règle du rectangle à tout élément dont la transformation ne peut être obtenue par une des opérations précédente.

En appliquant dans l'exemple 2 on a après la première itération :

(1)

HB / B	. 2 3 . . .	C	R
1	1 0 1 0 0 0	300	∞
4	0 1 0 1 0 0	400	400
5	0 1 -1 0 1 0	200	200
6	0 (1) -2 0 0 1	100	(100)
Δ	. (5) -7 . . .	-2100	

Deuxième itération:

(2)

HB / B	. . 3 . . 6	C	R
1	1 0 1 0 0 0	300	300
4	0 0 2 1 0 -1	300	150
5	0 0 (1) 0 1 -1	100	(100)
6	0 1 -2 0 0 1	100	-50
Δ	. . (3) . . 5	-2600	

Troisième itération:

(3)

HB / B	. . . . 5 6	C	R
1	1 0 0 0 -1 1	200	
4	0 0 0 1 -2 1	100	
3	0 0 1 0 1 -1	100	
2	0 1 0 0 2 -1	300	
Δ	. . . . -3 -2	2900	

IV.6- INTERPRETATION DES COEFFICIENTS DE LA LIGNE Δ :

Les taux marginaux de substitution.

Soit le tableau (2) :

$\Rightarrow$ **interprétation des colonnes relatives aux variables hors-base**

La partie centrale de ce tableau correspond aux 4 premières équations du système (10).Les éléments de la 3ème colonne , non situé sur la ligne Δ considérons la solution admissible non extrême pour laquelle $\omega \neq 0$,t=0,le système est :

$$\begin{cases} x + \omega = 300 \\ 2\omega + u = 300 \\ \omega + \upsilon = 100 \\ y - 2\omega = 100 \end{cases}$$

On veut chercher le niveau maximal que peut atteindre ω si on la choisit comme variable entrante.

Si ω diminue d'une unité :

x augmente de 1

u augmente de 2
υ augmente de 1
y diminue de +2

Les variations des variables dans la base, dans ces conditions, peuvent donc se lires directement dans le tableau (2) ;ce sont les éléments de la 3èmè colonne.

En considérant que les variables d'écarts désignent des niveaux de fabrication de produits fictifs P3,P4 ,P5,P6. On peut dire que :

- La non fabrication d'une unité de P3 produit hors-base doit être compensée par la fabrication cumulée de :
  1 unité de P1
  2 unités de P4
  1 unité de P5
  -2 unités de P2

Des produits dans la base –2 signifient une non fabrication . On peut alors dire que le nombre de colonne N°3 :1,2,1,-3 donnent l'équivalent en produits de base d'une unité de produits hors-base P3. On parle de substituabilité des produits selon la règle d'équivalence précédente.

$\Rightarrow$ **interprétation des coefficients de le ligne Δ**

Pour la colonne N°3

- une unité de P3 fabriquée rapporte 0
  P3 correspond à une variable d'écart :profit unitaire nul.
- La non fabrication d'une unité de P3 remplacée par celle de l'équivalent en produit de base rapporte $1.7+2.0+1\times0-2\times5=-3$. 7 ;0 ;0 ;5 étant les profits unitaires respectifs de P1,P4,P5,P2 . Le coefficient 3 de la ligne Δ est donc la différence entre ce que rapporte la fabrication d'un produit P3 et ce que rapporte la non fabrication de cette unité ,remplacée par celle de l'équivalent en produit de base . 3 mesures le profit obtenu en fabriquant une unité de P3 c'est-à-dire en faisant entrer dans la base ω-variable hors-base . Il mesure donc le profit marginal de P3 dans le cas de cette solution extrême .

NB : La fonction économique peut être :un coût ,un chiffre d'affaire ,l'effectif du personnel, …). 3 est donc le taux marginale de substitution(TMS).

Remarque : Etant donné une solution de base ,les coefficients de la fonction économique exprimée exclusivement en fonction des variables hors-base s'appellent taux marginale de substitution .

Si au départ ,la fonction économique n'est pas exclusivement exprimée en fonction des variables hors-base, elle permet le calcul direct sur le tableau initial des T.M.S.

IV.7- GENERALISATION AU CAS D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES

Soit un programme canonique quelconque comportant n variables et m contraintes autres que celles de signe.

a- Espace vectorielles des programmes.

-Si n=2,toute solution peut être considérée comme un point du plan de $\Re^2$ rapporté à deux axes $(x, y) \in \Re^2$.

- Si n = 3, toute solution peut être considéré comme un point de l'espace vectoriel $\Re^3$ rapporté à 3 dimensions (x, y, z) par exemple.
- Si n >3, toute solution peut être considéré comme élément de l'espace vectoriel $\Re^n = (x_1,x_2, \ldots,x_n) \in\Re^n$, la résolution graphique est impossible .

b- contraintes – inégalités

- Si n = 2 toute contrainte – inégalité du type $ax + by \substack{\leq c \\ \geq c}$ est un demi-plan formé de $\Re^2$, limité par la droite ax+by=c.
- Si n=3 toute contrainte – inégalité du type ax+by+cz $\substack{\leq d \\ \geq d}$ est un demi-espace fermé de $\Re^3$,limité par le plan d'équation ax+by+cz=d.
- Si n > 3 toute contrainte – inégalité du type $a_1x_1+a_2x_2+\ldots..+a_nx_n \substack{\leq d \\ \geq d}$ est un demi-espace fermé de $\Re^n$,limité par le plan d'équation $a_1x_1+a_2x_2+\ldots..+a_nx_n=c$

c- Solutions admissibles

- l'ensemble des solutions admissibles pour n=2 représente dans $\Re^2$ est le domaine polygonal hachuré, intersection des 2+m demi-plan définis par les m contraintes autres que celles des signes.
- Si n = 3,l'ensemble des solutions admissibles est représenté dans $\Re^3$ par le domaine polyédral, intersection de 3+m des mi-espaces définis par les m contraintes autres que celles des signes.
- Si n>3 l'ensemble des solutions est alors représenté dans $\Re^n$ par le domaine polyedral intersection de n+m demis espaces.

  La compatibilité des contraintes se traduisant par le fait que l'ensemble des solutions admissibles est non vide.

- **Remarque** : Soit un programme canonique, de domaine polyedral considéré comme ensemble des solutions admissibles non vide. Supposons que ce programme admette au moins une solution optimale ;alors il existe nécessairement un sommet du domaine polyedral correspondant à une solution optimale.

  - **Exemple de représentation en dimension 3** -Voir exercice 3

d- Fonction économique

Elle se présente sous la forme $z = b_1x_1+b_2x_2+\ldots\ldots..+b_nx_n$, z étant fixé, cette équation représente :

- Si n = 2 une droite de $\Re^2$,dite droite de niveau
- Si n = 3 un plan de $\Re^3$ dit plan de niveau
- Si n > 3 un hyperplan de $\Re^n$ dit hyperplan de niveau.