CHAPITRE 1 Graphes, graphes orientés, machines

1.1 INTRODUCTION

En mathématiques, le terme graphe possède différents sens. Il a déjà été introduit dans l'étude d'une fonction ou d'une relation. Dans ce chapitre, nous allons utiliser ce terme dans un autre sens- auquel nous avons fait allusion au paragraphe 6.3 quand nous avons parlé du graphe orienté d'une relation.

Les graphes, en particulier les graphes arborescents et les graphes orientés, apparaissent en de nombreux chapitres dans les sciences de l'information et de l'informatique
(exemples : La gestions des réseaux, le routage dans les circuit VLSI ou les problèmes de routages généraux et de recherche de plus courts chemins, Les problèmes d'ordonnancement de tâches dans les systèmes parallèles et enfin, d'un point de vue plus théorique, nombre de structures de données peuvent être modélisées par les graphes.). Les organigrammes par exemples sont des graphes orientés. Nous introduirons d 'autres exemples ici. Nous terminerons ce chapitre, enfin , par la définition d'une machines à états finis dont l'ordinateur est un exemple.

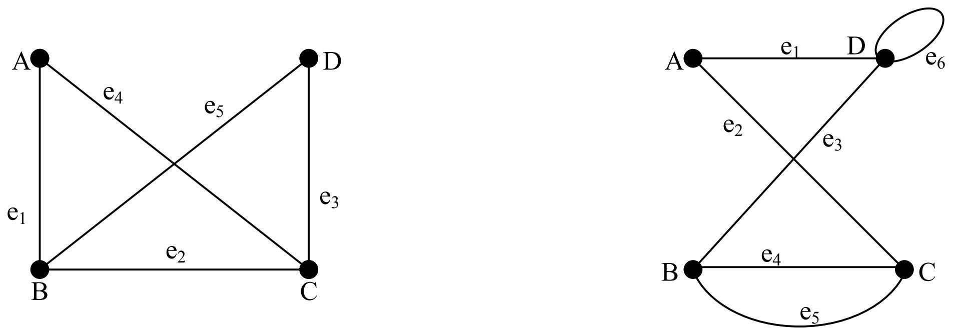
1.2 GRAPHES ET MULTIGRAPHES

Un graphe G consiste en deux éléments :
(i) Un ensemble V dont les événements sont appelés sommets ou nœuds (on utilise aussi le terme vertex).
(ii) Un ensemble E de paire non ordonnées de sommets distincts, appelés arcs.
On notera le graphe par G (V, E) lorsqu'on voudra attirer l'attention sur les deux composants de G.
Les sommets u et v sont dits adjacents s'il existe un arc {u , v}.
On représentera les graphes par des diagrammes dans le plan d'une manière toute naturelle, c'est-à-dire que chaque sommet v et V est représenté par un point (ou un petit cercle) et chaque arc $e = \{v_1, v_2\}$ par une courbe qui connecte entre eux les deux sommets extrêmes v_1 et v_2.

Exemple 1.1
(a) la fig. 1-1 (a) représente le graphe G à 4 sommets, A , B, C et D et 5 arcs $e_1 = \{ A,B\}$, $e_2 = \{ B,C \}$,$e_3 =\{C,D\}$ $e_4 = \{A,C\}$, $e_5 = \{B,C\}$. Généralement, nous représentons un graphe par son diagramme plutôt que par la liste de ces sommets et de ses arcs.

(b) la fig. 1-1 (b) n'est pas un graphe, mais un multigraphe. La raison en est que e_4 et e_5 sont des arcs multiples, c'est –à- dire des arcs connectant les mêmes extrémités et e_6, une boucle, c'est–à–dire un arc dont les extrémités sont le même sommet. La définition d'un graphe n'autorise ni les arcs multiples, ni les boucles. En d'autres termes, nous pouvons définir un graphe comme un multigraphe sans arcs multiples et sans boucles. Un multigraphe est dit fini s'il possède un nombre fini de sommets et un nombre fini d'arcs.
Dans ce cours, et à moins de spécifications, tous les multigraphes considérés seront finis. Notons qu'un graphe à nombre fini de sommets doit avoir, automatiquement, un nombre fini d'arcs et doit donc être fini.

Soit G (V,E) un graphe. Soient V' un sous- ensemble de V, et E' un sous-ensemble de E dont les extrémités appartiennent à V'.G(V', E') est alors un graphe et est appelé sous graphe de G (V, E). Si E' contient tous les arcs de E dont les extrémités appartiennent à V', G (V', E') est appelé le sous- graphe généré par V'.



(a) Graphe (b) Multigraphe

Figure 1.1

1.3 DEGRE D'UN SOMMET

Si v est l'extrémité d'un arc e, nous disons que e est incident sur v. Le degré d'un sommet v, deg (v), est égal au nombre d'arcs incidents sur v. (un sommet de degre 0, c'est–à–dire qui n'appartient à aucun arc, est dit sommet isolé). Dans la mesure où chaque arc est compté deux fois quand on fait la somme des degrés des sommets d'un graphe, il en résulte le résultat simple, mais important :

Théorème 1.1 : *la somme des degrés des sommets d'un graphe est égale au double du nombre de ses arcs.*

Exemple 1.2 : Sur la Fig ; 1-1 (a) : deg (A) = 2, deg (B) = 3, deg (C) = 3 et deg (D) = 2

la somme des degrés est égale à 10, ce qui est , comme on pouvait s'y attendre, le double du nombre d'arcs. Un sommet est pair ou impair selon que son degré est pair ou impair . Ainsi, A et D sont des sommets pairs, alors que B et C sont des sommets impairs.

Le théorème 1.1 est aussi valide dans le cas des multigraphes si une boucle est comptée deux fois en relation avec le degré de son extrémités. Ainsi, sur la Fig. 1.1 (b), deg (D) = 4, puisque l'arc e_6 est compté deux fois ; il en résulte que D est un sommet pair

1.4 CONNECTIVITE

Dans un multigraphe, un chemin est une séquence alternée de sommet et d'arcs de la forme : $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$

Où chaque arc e_i est incident sur v_{i-1} et v_i . Le nombre n d'arc constitue la longueur du chemin.
Quand il n'y a pas ambiguïté, nous représentons un chemin par la suite de ses arcs ($e_1, e_2, \ldots, e_n$) ou celle de ses sommets (v_o , v_1 , …, v_n). Un chemin dont l'extrémité initiale est aussi l'extrémité finale $v_0 = v_n$ est un chemin ferme, sinon nous disons que le chemin joint v_o à v_n ou connecte v_o à v_n.

Un chemin pour lequel tous les sommets sont différents est dit chemin élémentaire. Un circuit est un chemin fermé tel que tous ses sommets sont différents à l'exception de $v_0 = v_n$.
Un circuit de longueur k est parfois appelé un k–circuit. Dans un graphe, tout cycle peut avoir des longueurs (nombre d'arc ou de sommets) trois au plus.

EXEMPLE 1.3 Soit le graphe de la Fig 1.2. La séquence, (P_4, P_1, P_2, P_5, P_1, P_2, P_3, P_6)

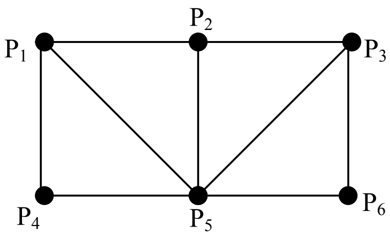


Figure 1-2

est un chemin de P_4 à P_6. Ce n'est pas un chemin élémentaire car l'arc $\{P_1,P_2\}$ a été utilisé deux fois. La séquence (P_4, P_1, P_5, P_2, P_6) n'est pas un chemin parce qu'il n'existe pas d'arc $\{P_2, P_6\}$. la séquence (P_4, P_1, P_5, P_2, P_3, P_5, P_6) n'est pas un chemin élémentaire parce que le sommet P_5 est utilisé deux fois. La séquence (P_4, P_1, P_5, P_3, P_6) est un chemin élémentaire de P_4 à P_6. Le plus court chemin (relativement à la longueur, telle qu'elle a été définie plus haut) de P_4 à P_6 est (P_4, P_5, P_6), la longueur 2.

Par définition, un chemin qui passe une fois et une seule par tous les sommets d'un graphe est un chemin hamiltonien.

Un circuit qui englobe tous les sommets d'un graphe, chacun n'étant pris qu'une seule fois, est un circuit hamiltonien.

Il faut noter que la terminologie est différente selon qu'on traite des graphes orientés et non orientés. Voici donc un tableau comparatif des terminologie utilisées dans les deux cas :

Graphe orienté	Graphe non orienté
Arc	arête
Chemin	chaîne
Circuit	cycle
Boucle	boucle
Chemin élémentaire	chaîne élémentaire
Chemin hamiltonien	chaîne eulérienne
Circuit hamiltonien	cycle eulérien

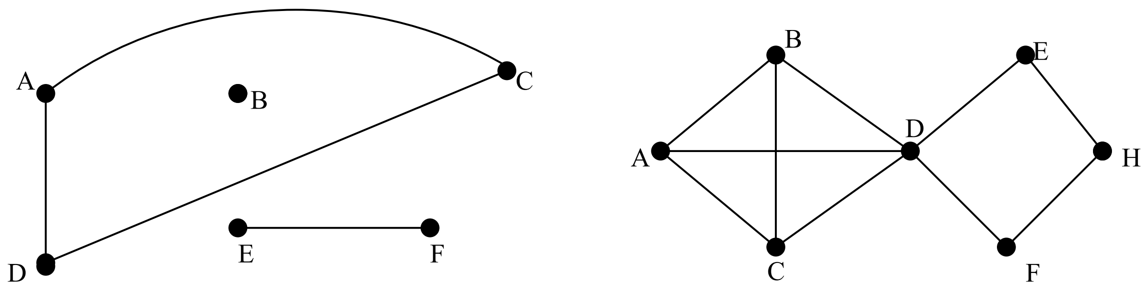
En éliminant les arcs non nécessaires, il n'est pas difficile de montrer que tout chemin d'un sommet u à un sommet v peut être remplacé par un chemin élémentaire entre u et v.
Soit, formellement :

Théorème 1.2 : *Il n'y a de chemin entre un sommet u et un sommet v que si et seulement s'il existe un chemin élémentaire entre u et v.*

Un graphe est dit connexe s'il existe un chemin élémentaire entre deux sommets quelconques. Le graphe de la fig. 1.2 est connexe, mais pas celui de la Fig. 1.3 (a) parce que, par exemple, il n'existe pas de chemin élémentaire entre D et E. Un sous- graphe connexe d'un graphe G est composant de G s'il n'est pas contenu dans un sous- graphe connexe plus grand. Intuitivement, il est clair qu'un graphe quelconque peut être partagé en ses composants connexes. Tout graphe connexe est lui-même son unique composant connexe.

La distance entre les sommets u et v d'un graphe connexe G est notée d (u, v) et représente la longueur du plus court chemin entre u et v. le diamètre d'un graphe connexe G est la distance maximum entre deux quelconques de ses sommets. Sur la Fig. 1.3 (b), d(A, F) = 2
Et le diamètre du graphe est 3 (bien que les chemins {A,D} et {B,C} se croisent sur la Fig. 1.3 (b), ils ne se rencontrent pas en un sommet).

Soit v un sommet du graphe G. Par G – v, nous entendons le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet v ainsi que tous les arcs incidents sur v. Si G – v est déconnecté, un sommet v du graphe est dit point de coupure, c'est le cas de D sur la Fig. 1.3 (b)



(a) (b)

Figure 1-3

1.5 TYPES PARTICULIES DE GRAPHES

Il existe de nombreux types différents de graphes ; nous n'en mentionnerons que quatre.

a- Graphes complets

Un graphe est dit complet si chacun de ses sommets est relié à chacun des autres. Le graphe complet a n sommets est noté K_n. La Fig.1.4 représente les graphes K_1, K_2, …, K_6.Le graphe K_1, un sommet isolé, est appelé graphe trivial .

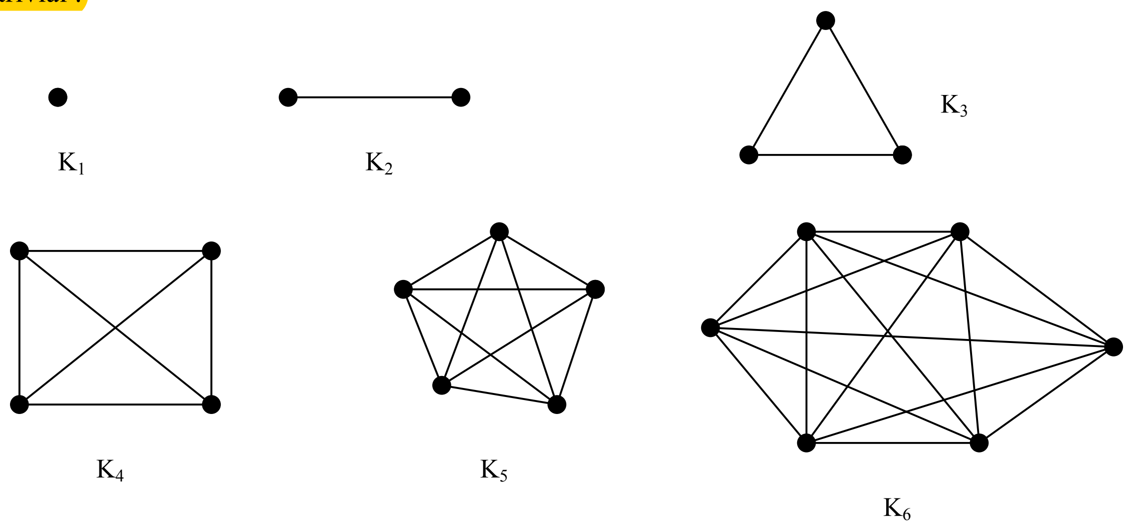
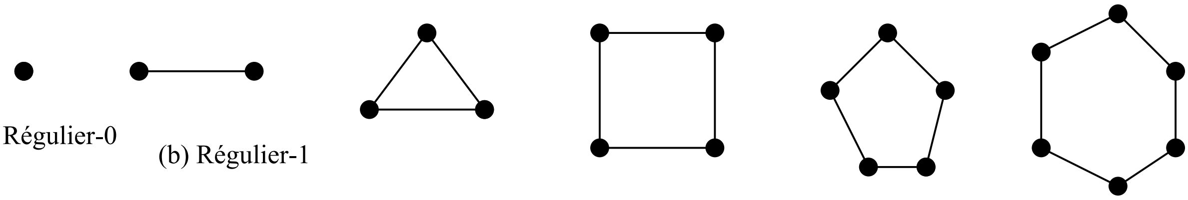


Figure 1-4

b- Graphes réguliers

Un graphe ou un multigraphe est dit régulier de degré k ou k-régulier si chacun de ses sommets est de degré k. les graphes réguliers connexes de degrés 0, 1 ou 2 sont aisément décrits. Le graphe connexe 0- régulier est le graphe trivial. Le graphe connexe 1– régulier est le graphe de 2 sommets reliés par un arc. Le graphe connexe 2– régulier avec n > 2 sommets est le graphe constitué d'un seul n-circuit (le 2- circuit est multigraphe). Cf. Fig. 1.5



(a) Régulier-0 (b) Régulier-1 (c) régulier-2

Figure 1-5

Le graphe 3-régulier doit, selon le théorème 1.1, présenter un nombre pair de sommets. La Fig. 1.6 représente deux exemples de graphes connexes 3–réguliers à 6 sommets. En général, les graphes réguliers peuvent être très complexes. Par exemple, il existe 19 graphes 3–réguliers à 10 sommets. Notons qu'un graphe complet à n sommets, K_n, est régulier de degré n – 1.

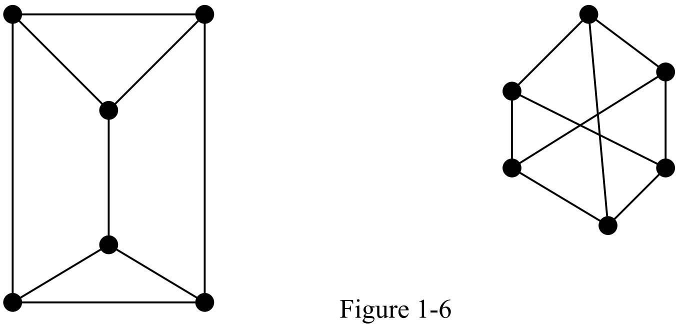
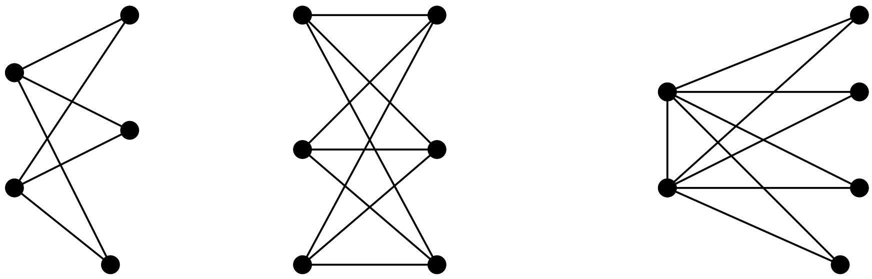


Figure 1-6

c- Graphes bipartites

Un graphe G est bipartite si l'ensemble V de ses sommets peut être partagé en deux sous-ensembles M et N tels que chaque arc de G relie un sommet de M à un sommet de N. par graphe complet bipartite nous entendons que chaque sommet de M est relié à chaque sommet de N; ce graphe, noté $K_{m,n}$ où m est le nombre de sommets de M, et n le nombre de sommets de N (pour normaliser, nous supposerons que $m \leq n$), est représenté fig. 1.7 dans les cas $K_{2,3}$, $K_{3,3}$ et $K_{2,4}$. Il est clair que $K_{m,n}$ comporte mn arcs.



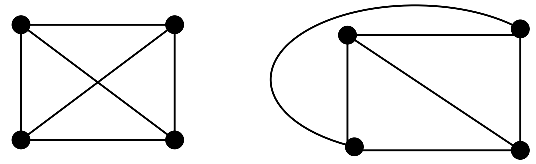
$K_{2,3}$ $K_{3,3}$ $K_{2,4}$

Figure 1.7

d- Graphes planaires

Un graphe ou un multigraphe qui peuvent être tracés dans le plan de manière à ce que ses arcs ne se croisent pas est dit graphe planaire. Bien que le graphe complet à 4 sommets, K_4, soit généralement représenté avec des arcs qui se coupent (cf. Fig. 1.8 (a)), il peut être, également, tracé de manière à ce que ses arcs ne se coupent pas (cf. Fig. 1.8 (b)). Dans ce cas, K_4 est un graphe planaire.

Une représentation particulière d'un multigraphe planaire fini est dite carte. On dira qu'une carte est connexe si le multigraphe donné est connexe. Une carte donnée divise le plan en diverses régions. Par exemple, la carte de la Fig. 1.9 divise le plan en 5 régions. Notons que si 4 d'entre elles sont bornées, la cinquième ne l'est pas. Dans ces conditions, il n'y a aucune perte de généralité si on suppose que notre carte est une partie d'un rectangle assez grand, plutôt qu'elle n'est constituée de tout le plan.



(a) (b)

Figure 1.8

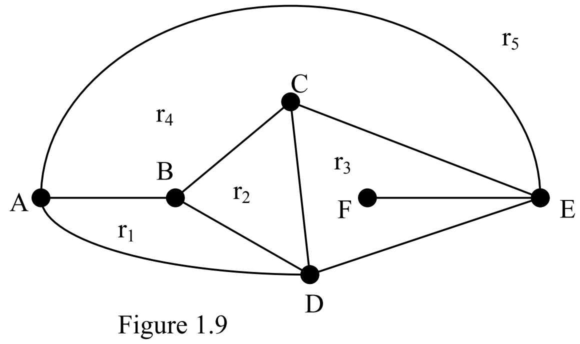


Figure 1.9

Euler a donné une expression qui relie le nombre de sommets V, le nombre d'arcs E et le nombre de région R d'une carte connexe quelconque :

Théorème 1.3 (Euler) : *$V – E + R = 2$*

Exemple 1.4 Sur la Fig. 1.9, V = 6, E = 9, R = 5 ; et , en accord avec l'expression d'Euler :

La formule d'Euler est valide pour des cartes non connexes dans la mesure où la constante 2 est remplacée par v+1, où v est le nombre de composants connexes de la carte.

1.6 GRAPHES VALUES

Un graphe G est un graphe valué si ses sommets et/ou ses arcs sont affectés de données de quelque sorte. En particulier, si chaque arc e de G est affecté d'un nombre non négatif *l*(e), *l*(e) est appelé longueur ou poids de e. La figure 1-10 représente un graphe valué où le poids de chaque arc est indiqué de manière évidente. Il est souvent important de déterminer le chemin de poids minimum entre deux sommets donnés d'un graphe valué. Le chemin minimum entre P et Q de la figure 1-10 est donné par la séquence : (P, A_1, A_2, A_5, A_3, A_6, Q). Le chemin a pour poids 15.

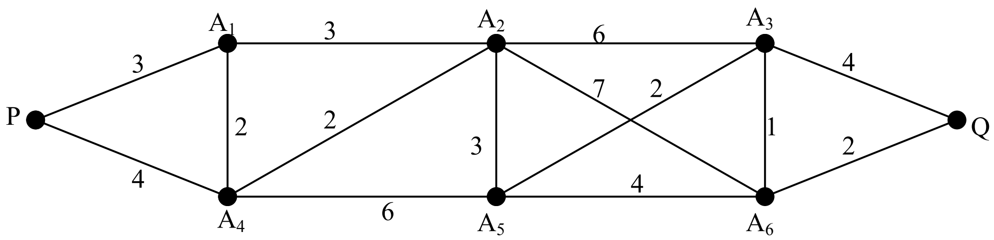


Figure 1-10

1-7 ARBRES

Un graphe G est dit acyclique s'il ne comporte aucun cycle. Un arbre est un graphe acyclique connexe. Une forêt est un graphe sans cycles ; il en résulte que les composants connexes d'une forêt sont des arbres. La Fig. 1.11 (a) représente tous les arbres possibles à 6 sommets et la Fig. 1.11 (b), 8 des arbres à 7 sommets.

Il existe plusieurs manières équivalentes de définir un arbre comme l'indiquent les théorèmes suivants :

Théorème 1.4 : *Soit G un graphe à plus d'un sommet. Les propositions suivantes sont, alors équivalentes :*

(i) G est un arbre.

(ii) Chaque paire de sommets sont reliés par un seul et unique chemin.

(iii) G est connexe, mais si l'on supprime un arc quelconque, le graphe résultant n'est pas connexe.

(iv) G ne possède pas de cycle, mais si l'on ajoute un arc à ce graphe, le graphe résultant , possède un cycle unique.

Dans le cas où les graphes que nous considérons sont finis, nous pouvons ajouter d'autres manières de définir les arbres :

Théorème 1.5 : *Soit G un graphe fini à n > 1sommets. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) G est un arbre

(ii) G ne possède pas de cycles et possède n–1 arcs.

(iii) G est connexe et présente n–1 arcs.

En particulier, le théorème 1.5 indique qu'un arbre fini possède un sommet de plus que d'arcs. (cela est valable aussi pour le graphe trivial, n–1.)

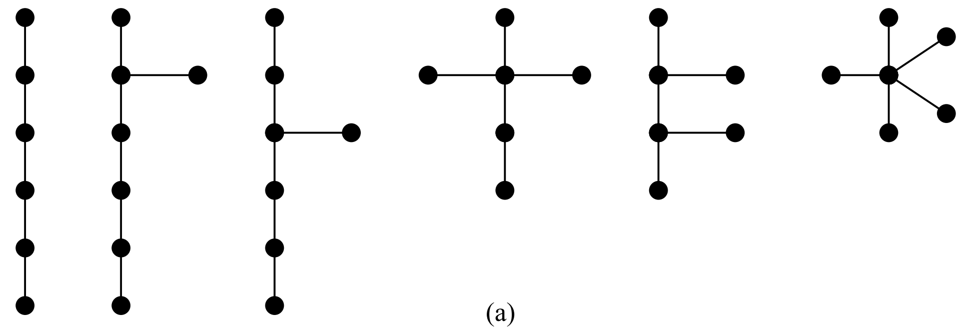
Voici quelques propriétés générales des arbres :

(1) Un arbre est un graphe bipartite.

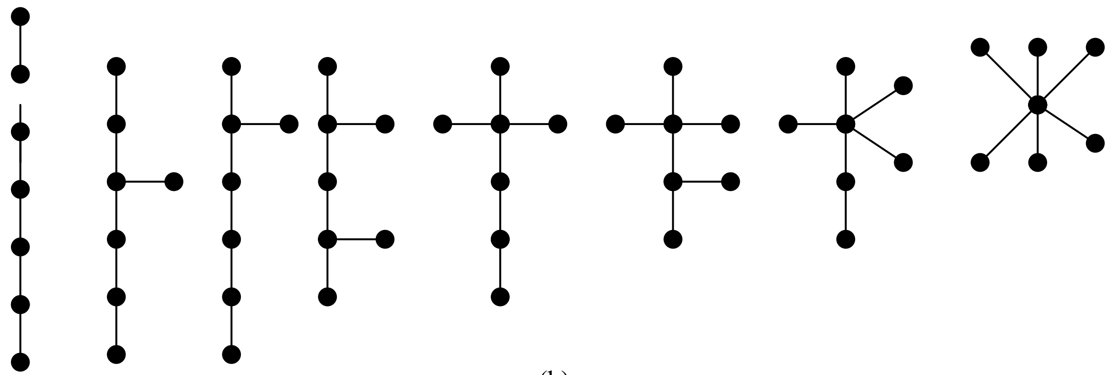
(2) Un arbre est un graphe planaire.

(3) Un arbre fini non trivial possède au moins deux extrémités (sommets de degré 1).

(4) Un arbre fini non trivial est tel que chaque sommet est un point de coupure ou une extrémité .



(a)



(b)

Figure 1.11

Arbres partiels

Un sous-graphe T d'un graphe G est un arbre partiel de G si T est un arbre et si T comporte tous les sommets de G. La Fig. 1.12 représente un graphe G et les arbres partiels T_1, T_2 et T_3 de G. Si G est un graphe dont les arcs sont pondérés, un arbre partiel minimum de G est un arbre partiel de G tel que la somme des poids de ses arcs est minimum relativement à tous les arbres partiels de G.

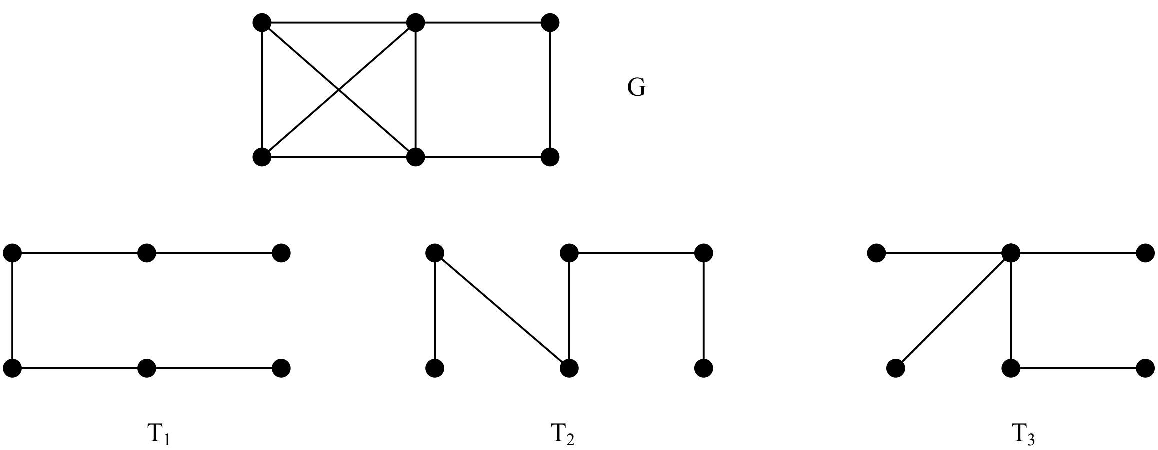


Figure 1-12

Nous allons donner deux algorithmes de recherche de l'arbre partiel minimum d'un graphe connexe valué fini G de m sommets.

1- ordonner les arcs de G selon les poids décroissants,
2- ensuite en procédant de manière séquentielle, supprimer chaque arc qui ne rende pas le graphe non connexe jusqu'à ce qu'il en reste m–1. Ces arcs formeront un arbre partiel minimum de G.

Cet algorithme est subordonné à l'information relative au fait que G est ou n'est pas connexe, ce qui, en général, n'est pas facilement programmable.

En ce qui concerne le second algorithme, les arcs sont ordonnés par poids croissants, puis en commençant uniquement avec des sommets de G, additionner arc après arc là où chaque arc a un poids minimum et ne forme pas de cycle. Après l'addition de m–1 arcs nous obtenons un arbre partiel minimum.

Il faut insister sur le fait que, puisque certains arcs peuvent avoir le même poids, il est possible d'obtenir différents arbres partiels minimum. La Fig. 1.13 représente un graphe connexe valué G et un arbre partiel minimum M.

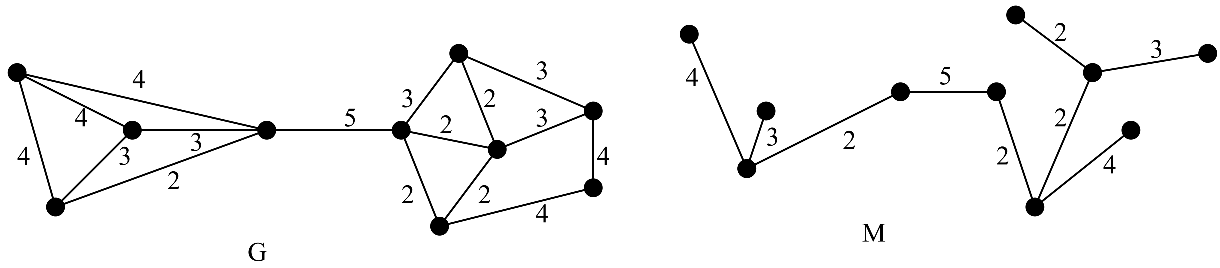
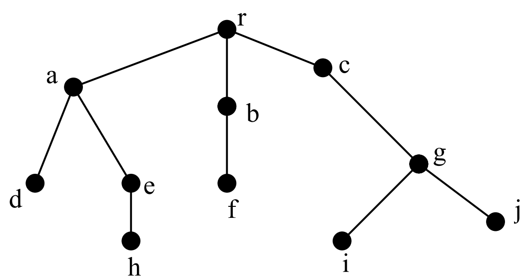


Figure 1-13

1.8 ARBORESCENCES

Une arborescence R est un arbre possédant un sommet particulier r, dit racine de l'arbre. La longueur du chemin unique qui va de la racine r à un autre sommet quelconque v est appelé niveau ou profondeur de v. les extrémités de R (à l'exception de r si c'est une extrémité) sont appelées feuilles de l'arborescence. La Fig.:1.14 représente une arborescence où la racine r est placée en haut du dessin. L'arborescence comporte 5 feuilles, d, f, h, i et j. le niveau de a est 1, celui de f, 2 et celui de j, 3. Insistons sur le fait que tout arbre peut devenir une arborescence, simplement en choisissant n'importe lequel de ses sommets comme racine.

Figure 1-14



Le fait qu'il y ait un chemin unique de la racine à n'importe quel sommet de R induit une orientation des arcs de R. un chemin continûment orienté allant d'un sommet v, ou que v suit u (u et v sont, respectivement, appelés un précédant et un suivant) si le chemin de la racine à v inclut u.

En particulier, nous disons que v suit immédiatement u si v suit u et lui est adjacent. Sur la Fig. 1.14, le sommet j suit le sommet c, mais il suit immédiatement g. Notons que chaque sommet autre que la racine r suit immédiatement un sommet unique mais peut être immédiatement suivi par plus d'un sommet ; par exemple, les sommets i et j suivent immédiatement g.

Arborescences ordonnés

Une arborescence R où les arcs issus de chaque sommet sont linéairement ordonnés est appelé arborescence ordonnée. Soient e et e' des arcs de R issus d'un sommet v en direction des sommets a et b, respectivement. Si e précède e' dans l'ordre de R, nous représenterons e à gauche de e' (cf. Fig. 1.15). Nous affectons alors le même ordre aux sommets a et b; c'est–à-dire que a précédera b. (Notons que cet ordre sur les sommets de R n'a aucun rapport avec l'ordre sur les branches que nous avons décrit précédemment)

Les arborescences ordonnées interviennent en de nombreux chapitres de l'informatique, comme nous allons l'illustrer sur deux exemples.

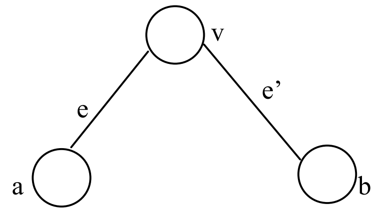


Figure 1-15

EXEMPLE 1.5 (expressions arithmétiques). Toute expression arithmétique relative à des opérations binaires, addition, soustraction, multiplication et division, par exemple, peut être représenté par une arborescence ordonnée. Ainsi , l'expression arithmétique :

(a–b)/(c * d)+e)

peut être représenté par l'arborescence ordonnée de la Fig. 1.16 (a). Notons que les variables a, b, c, d et e apparaissent comme des feuilles, et les opérations comme des sommets. L'arborescence doit être ordonnée; a – b et b – a donnent la même arborescence, mais pas la même arborescence ordonnée.

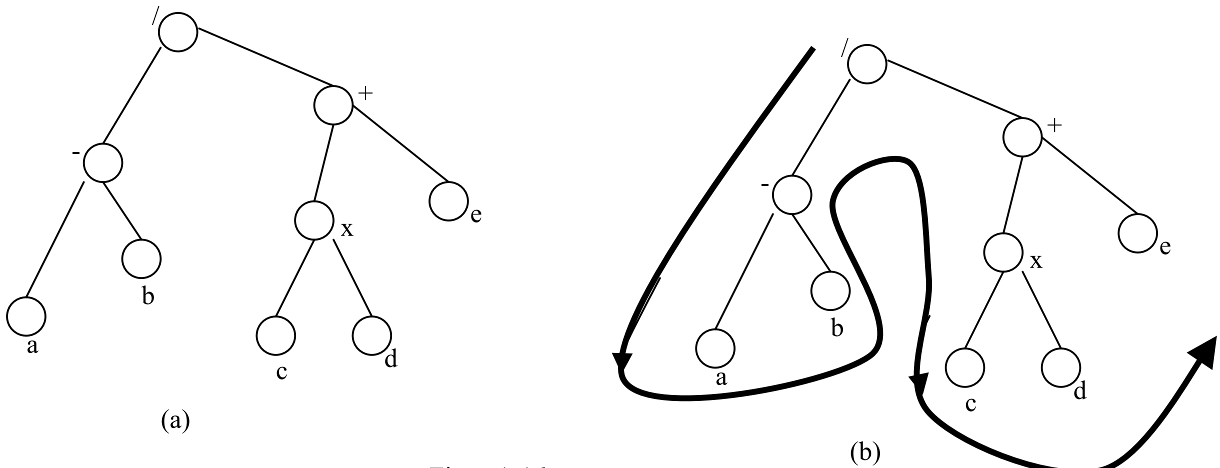
Le mathématicien polonais Lukasiewiez a remarqué qu'en plaçant le symbole d'opération binaire avant les arguments de cette opération; soit

+ab au lieu de a + b et /c d au lieu de c / d

on évite l'utilisation de parenthèses. Cette notation est dite notation polonaise préfixée. (De la même manière, il est impossible de placer le symbole après ses arguments, ce qui donne la notation polonaise post fixée). En réécrivant l'expression arithmétique précédente, il vient :

/-ab + x c d e

Notons qu'il s'agit exactement des sommets relatifs à l'arbre parcourue comme sur la Fig. 1.16 (b)



Figue 1-16

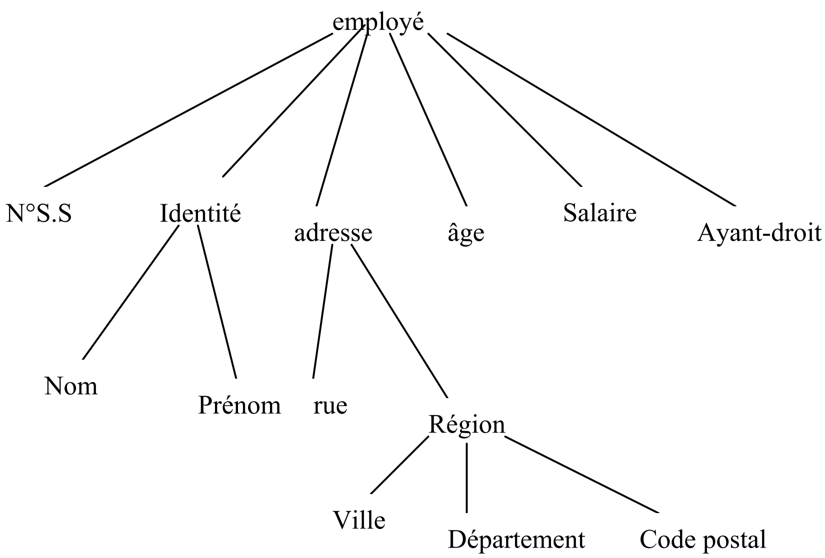


Figure 1-17

EXEMPLE 1.6 (structure d'enregistrement). Les informations sont souvent organisées en une hiérarchie de champ, d'enregistrement et de fichiers de la manière suivante : un enregistrement est une collection de données reliées, appelées également champs, qui sont traitées comme une unités; un fichier est un ensemble d'enregistrements similaires. Par exemple, l'enregistrement personnel relatif à un employé peut contenir les données : Numéro de Sécurité Sociale, Identité, Adresse, Age, Salaire, Ayants- droit
Et le fichier employés de l'entreprise serait la liste des enregistrements des employés. Bien que, généralement, un fichier soit une liste linéaire d'enregistrements, les données d'un enregistrement constituent usuellement une arborescence. La raison en est que certaines données forment des groupes comportant deux ou plusieurs informations. Cf. par exemple, la représentation donnée Fig : 1.17. notons qu'Identité est un groupe de données, de même qu'Adresse. Il y a en tout 10 informations élémentaires: les feuilles de l'arborescence.

L'arborescence précédente peut également être décrite en fonction du niveau des sommets :

00 Employé
 01 Numéro S.S
 01 Identité
  02 Nom
  02 Prénom
 01 Adresse
  02 Rue
  02 Région
   03 Ville
   04 Département
   05 Code Postal
 01 Age
 01 Salaire
 01 Ayants- droit

ce listage est équivalent à l'exploration de l'arborescence comme sur la Fig. 1.16 (b) ; de cette manière, nous pouvons lire l'enregistrement dans son entier linéairement dans l'ordinateur.

1 . 9 GRAPHES ORIENTES

a- Définition

Nous venons de voir dans le paragraphe précédent qu'une arborescence présente un sens naturel défini le long de chaque arc ; ces arborescences peuvent être considérées comme orientées. D'une manière générale, un graphe orienté, également dit digraphe, est un multigraphe dont chaque arc possède un sens . Les arcs orientés seront notés a = <u, v>, u étant l'origine et v, l'extrémité de l'arc.

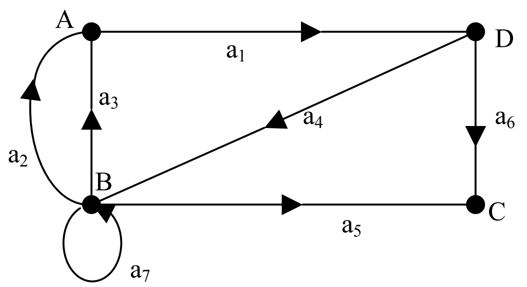


Figure 1-18

EXEMPLE 1.7 La Fig. 1.18 représente un graphe orienté qui possède 4 sommets et 7 arcs. Remarquons la boucle orienté a_7 = <B, B>. Des arcs tels que a_2 et a_3, qui ont même origine et même extrémité sont dits parallèles;

Soit D un graphe orienté. Un arc a = <u, v> est dit commençant à son origine u et se terminant à son extrémité v. les degrés externe et degré interne d'un sommet v sont respectivement égaux aux nombres d'arcs commençant et se terminant en v. dans la mesure où chaque arc commence et termine en un sommet, nous constatons que la somme des degrés internes des sommets est égale à la somme des degrés externes des sommets, et égale au nombre d'arcs. Un sommet de degré interne nul est appelé source et un sommet de degré externe nul est appelé puits. Sur la Fig. 1.18, le sommet c'est un puits, mais le graphe orienté représenté n'a pas de sources. De plus, le degré externe de D est 2 ? son degré interne 1.

Si les arcs et/ou les sommets d'un graphe orienté sont valués, nous avons un graphe orienté valué. Ce type de graphes est souvent utilisé à la représentation de situations dynamiques. Par exemple, les organigrammes sont des graphes orientés où les sommets (cartouches) sont valués, ainsi que les arcs issus d'un symbole de décision. En voici, un autre exemple :

EXEMPLE 1.8 : 3 garçons, A, B et C, se jettent un ballon de manière telle que A fait une passe à B régulièrement, mais que B et C peuvent aussi bien faire une passe à A que de passer le ballon entre eux. La Fig. 1.19 illustre cette situation dynamique où les arcs sont valué avec leurs probabilités respectives, soient : A passe la balle à B avec une probabilité 1, B envoie la basse à A et à C avec une probabilité de 0,5 pour chaque cas, et C envoie la balle à A et B, avec une probabilité de 0,5 pour chaque cas.

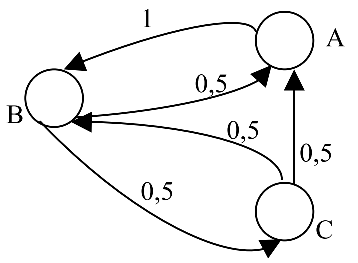


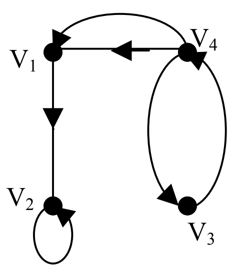
Figure 1-19

b- Graphes orientés et relations

Soit un graphe orienté sans arcs parallèles, D; soient V l'ensemble des sommets et B l'ensemble de ses arcs. Dans la mesure où les arcs représentent des paires ordonnées distinctes de sommets, A est simplement un sous – ensemble de V x V et, par conséquent, A est une relation sur V. Réciproquement, si R est une relation sur un ensemble V, V peut être considéré comme un ensemble de sommets et R comme l'ensemble d'arcs d'un graphe orienté, D(V,R) sans arcs parallèles. Il en résulte que les notions de relations sur un ensemble et de graphes orientés sans arcs parallèles sont les mêmes.

c- Graphes orientés et matrices

Soit D un graphe orienté de sommets $v_1, v_2, \ldots, v_m$. La matrice de D est la matrice m x m $M_D = (m_{i\,j})$, où $m_{i\,j}$ = le nombre d'arcs commençant à v_i et se terminant à v_j.
Si D ne comporte pas d'arcs parallèles, les facteurs de M_D ne seront que des 0 et des 1; dans tous les autres cas, des nombres non négatifs. Réciproquement, toute matrice m x m, M avec des termes non négatifs définit de manière unique un graphe orienté à m sommets. La fig 1.20 représente un graphe orienté D et sa matrice M correspondante.



$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \\ M = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) : D Figure 1.20

1.10 GRAPHES ORIENTES CONNEXES

Les différents notions de chemin, chemin élémentaire et cycles, sont valables aussi bien dans le cas de graphes non orientés que dans le cas de graphes orientés, à part que la terminologie n'est pas exactement la même (paragraphe 1.4), à cela près que le sens du chemin doit être en accord avec le sens des arcs. Plus précisément, un chemin (orienté) W dans un graphe orienté D est une séquence alternée de sommets et d'arcs :

$$W = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, a_n, v_n)$$

Telle que chaque arc a_i commence à v_{i-1} et se termine à v_i. un semi-chemin est la même chose qu'un chemin, à cela près que l'arc peut aussi bien commencer en v_{i-1} ou v_i; en d'autres termes, un semi-chemin est la même chose qu'un chemin sur le graphe D non orienté.

Sur un graphe orienté D, il existe trois types de connexions. Nous disons que D est faiblement connexe au faible s'il existe un semi–chemin entre deux sommets u et v quelconques de D; que D est unilatéralement connexe ou unilatéral si, pour toute paire de sommets u et v, il existe dans D un chemin élémentaire de u à v ou de v à u. Enfin, nous dirons que D est fortement connexe ou fort si, pour toute paire de sommets u et v de D, il existe

un chemin élémentaire de u à v et un chemin élémentaire de v à u. Notons que la connexion forte implique la connexion unilatérale et que la connexion unilatérale implique la connexion faible.
Nous disons que D est strictement unilatéral s'il est unilatéral mais pas fort, et que d est strictement faible s'il est faible mais pas unilatéral. Par exemple, la Fig. 1.21 représente un graphe (a) strictement faible, (b) strictement unilatéral et (c) fort.

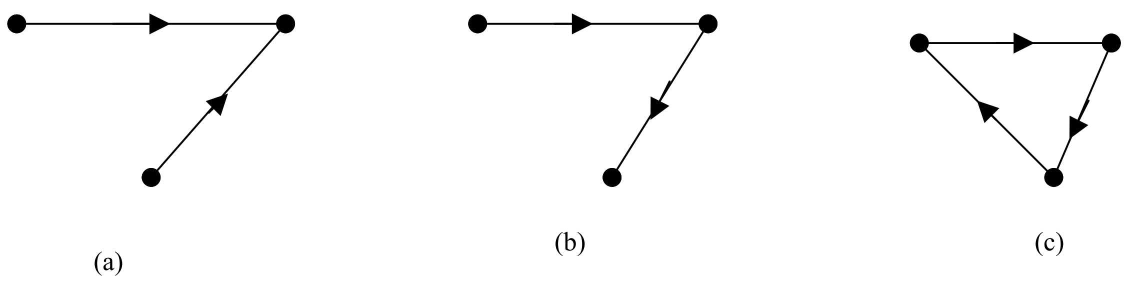


Figure 1.21

En fonction de chemins contenant tous les sommets d'un graphe orienté, la connectivité peut être définie de la manière suivante :

Théorème 1.6 : *soit D un graphe orienté fini :*
(a) *D est faible si et seulement si D possède un semi- chemin partiel.*
(b) *D est unilatéral si et seulement si D possède chemin partiel*
(c) *D est fort si et seulement si D possède un circuit partiel*

La matrice M d'un graphe orienté D est utile au comptage des sommets D. En fait :

Théorème 1.7 : *soit la matrice du graphe orienté D. Le terme (i, j) de la matrice M^n donne le nombre de chemins de longueur n du sommet v_i au sommet* v_j .

Les graphes orientés comportant des sources et des puits sont courants. La condition suivante est suffisante pour l'existence de sommets de ce type :

Théorème 1.8 : *si un graphe orienté D ne contient pas de circuits, D comporte au moins une source et au moins un puits.*

1.11 MACHINES A ETATS FINIS

nous pouvons considérer un ordinateur numérique comme une machine se trouvant dans un certain « état interne » à tout moment . L'ordinateur lit un symbole d'entrée, puis imprime un symbole de sortie et change son état. Le symbole de sortie ne dépend que du symbole d'entrée et de l'état interne de la machine, et cet état interne ne dépend que de l'état précédent de la machine et du symbole d'entrée précédent. Les nombres d'états, de symboles d'entrée et de sortie sont supposés finis. Ces idées sont résumés dans la définition suivante :

une machine a état finis (ou machine séquentielle totale) M est constitué de cinq éléments :
(1) un ensemble fini A de symboles d'entrée.
(2) un ensemble fini S d'états internes.
(3) Un ensemble fini Z de symboles de sortie.
(4) Une fonction d'état suivant f de S x A dans S.
(5) Une fonction de sortie g de S x A dans Z.

La machine M est notée M = < A, S, Z, f, g >, ce qui permet de désigner les 5 parties. Parfois l'état initial q_0 dans S est donné, dans ce cas la machine est représentée par $M=\langle A,S,Z,q_0,f,g\rangle$

EXEMPLE 1.9 L'énoncé suivant définit une machine à état finis avec deux symboles d'entrée, trois états internes, et trois symboles de sortie :
(1) $A = \{a, b\}$
(2) $S = \{q_0, q_1, q_2\}$
(3) $Z = \{x, y, z\}$
(4) La fonction d'état suivant $f : S \times A \rightarrow S$ est définie par :

$$f(q_0,a) = q_1 \qquad f(q_1,a) = q_2 \qquad f(q_2,a) = q_0$$
$$f(q_0,b) = q_2 \qquad f(q_1,b) = q_1 \qquad f(q_2,b) = q_1$$

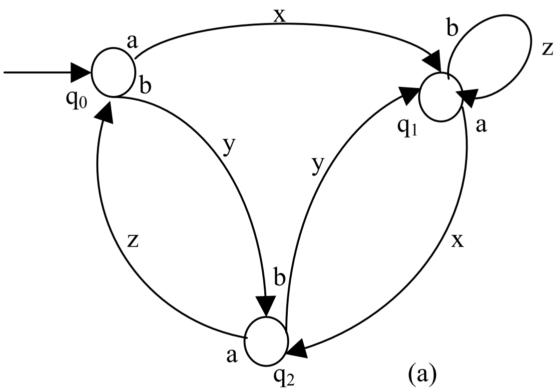
(5) La fonction de sortie g : S x A $\longrightarrow$ Z est définie par :

$$g(q_0,a) = x \quad g(q_1,a) = x \quad g(q_2,a) = z$$
$$g(q_0,b) = y \quad g(q_1,b) = z \quad g(q_2,b) = y$$

il est traditionnel de désigner les états de la machine par q, q_0 indiquant l'état initial.

Il y a deux manières de représenter une machine à états finis sous forme compacte. Le diagramme d'état D d'une machine à états finis, M = < A, S, Z, f, g > est un graphe orienté valué D. les sommets de D sont les états S de M et, si $f(q_i, a_j) = q_k$ et $g(q_i, a_j) = z_r$

il existe un arc de q_i à q_k repéré par la paire q_j, z_r. Généralement nous mettons le symbole a_j à la base de la flèche représentant l'arc (au voisinage de q_i) et le symbole de sortie z_r au voisinage du milieu de la flèche.. Dans le cas où un état initial, q_o, est donné nous repérons le sommet q0 en traçant un e flèche supplémentaire vers q_0. par exemple la Fig. 1.22 (a) pour le diagramme d'état de la machine de l'exemple 1.9 où l'état initial est q_0.



(a)

	a	b
q_0	q_1,x	q_2,y
q_1	q_2,x	q_1,z
q_2	q_0,z	q_1,y

(b)

Figure 1.22

Alternativement, la machine peut être représenté par sa table d'états où, pour chaque combinaison d'état et d'entrée, l'état suivant et la sortie sont donnés. La Fig. 1.22 (b) représente la table d'états de la machine de l'exemple 1.9

1.12 CHAINES. BANDES D'ENTREE ET DE SORTIE

Dans le paragraphe précédent, nous n'avons pas introduit les propriétés dynamiques d'une machine. Soit, une machine M possédant une chaîne de symboles d'entrée :

$$U = a_1,a_2\dots a_n$$

Nous visualisons ces symboles sur une bande d'entrée ; la machine M lit ces symboles d'entrées, un par un et, simultanément, passe par une chaîne d'états :

$$V = s_0s_1s_2\dots s_n$$

Où s0 est l'état initial, tout en imprimant une chaîne de symboles de sortie :

$$W = z_1z_2\dots z_n$$

Sur une bande de sortie. Formellement, l'état initial s_0 et la chaîne d'entrée U déterminent les chaînes V et W par :

$$s_i = f(s_i\text{-}1, a) \text{ et } z_i = g(s_i - 1, a_1)$$

Où i = 1,2,…,n. (Notons que le terme chaîne est utilisé pour décrire une séquence finie au lieu d'une liste ou d'un n-tuplet).

Exemple 1.10 soient q_0 l'état initial de la machine de l'exemple 1.9 et abaab, sa chaîne d'entrée. nous déterminons la chaîne des états et la chaîne des symboles de sortie d'après le diagramme d'états commençant au sommet q0 en suivant les flèches repérées par les symboles d'entrée :

$$q_0 \longrightarrow q_1 \longrightarrow q_1 \longrightarrow q_2 \longrightarrow q_0 \longrightarrow q_2$$

ce qui donne les chaînes suivantes d'états et de symboles de sortie.

$$q_0q_1q_1q_2q_0q_2 \text{ et } xzxzy$$

nous souhaitons maintenant décrire une machine qui peut effectuer des additions binaires. En ajoutant des 0 au début de nos nombres, nous pouvons nous assurer qu'ils ont tous le même nombre de chiffres. Si la machine reçoit en entrée :

$$\begin{array}{r} 1101011 \\ \underline{+\,0111011} \end{array}$$

nous souhaitons obtenir la somme binaire : 10100110

plus précisément, l'entrée est dite chaîne de paire à additionner : 11, 11, 00, 11, 01, 11, 10, b

où b représente les espaces, et la sortie doit être constituée de la chaîne : 0,1,1,0,0,1,0,1
nous désirons également que la machine entre un état appelé stop, une fois terminé l'addition
les symboles d'entrée sont : A = {00, 01, 10, 11, b}
et les symboles de sortie Z = { 0, 1, b }
la machine que nous sommes en train de construire aura trois états :
S = { retenue (c) pas de retenu (n), stop (s) }
Ici, n est l'état initial et le diagramme de la machine est représenté Fig. 1.23.
Pour indiquer les limitations de nos machines, nous énonçons la proposition suivante :

Théorème 1.9 : *il n'existe pas de machine à états finis qui puisse effectuer une multiplication binaire. Cependant, si nous limitons la taille des nombres à multiplier de telles machines peuvent exister. Les ordinateurs sont des exemples importants de machines à états finis qui multiplient des nombres restreints.*

1.13 AUTOMATES FINIS

Un automate fini est semblable à une machine à l'exception du fait que l'automate possède des états d'acceptation et de rejet et non des états de sortie. Plus précisément, un automate fini M est constitué de cinq éléments :

(1) un ensemble fini A de symboles d'entrée.
(2) un ensemble fini S d'états internes.
(3) Un sous-ensemble T et S (dont les éléments son appelés états d'acceptation).
(4) Un état initial q0 dans S.
(5) Une fonction d'état suivant f de S x A dans S.

L'automate M est noté M = < A, S, T, q0, f > quand nous souhaitons désigner ses cinq éléments ;

Exemple 1.11 les propositions suivantes définissent un automate à 2 symboles d'entrée et 3 états :

(1) A = {a,b}, symbole d'entrée
(2) B = {q_0,q_1, q_2}, états.
(3) T= {q_0,q_1}, états d'acceptation ;
(4) q0, l'état initial.
(5) Fonction d'état suivant, f : S x A $\rightarrow$ S, définie par la table ci-contre

	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_2
q_2	q_2	q_2

Nous pouvons décrire un automate fini M de manière abrégée par son diagramme d'états, comme nous l'avons fait pour des machines à états finis, à cela près que nous utiliserons une paire de cercles concentriques pour les états d'acceptation et que les arcs ne seront valué que par symbole d'entrée. plus précisément, le diagramme d'états D de M est un graphe orienté value ou les sommets sont les états de S ; les états d'acceptation sont notés par une paire de cercles concentriques et, si f (q_j, a_j) = q_k, il existe un arc de q_j à q_k valué par ai. De plus, l'état initial q0 est indiqué par une flèche dirigée vers q0. par exemple, le diagramme d'état de l'automate de l'exemple 1.11 est représenté fig.1.24.

Etant donné une chaîne finie w = a_1,a_2,a_3,…a_n de symboles d'entrée d'un automate M, nous obtenons une séquence $s_0s_1s_2…s_n$, d'états initial et s_i = f(s_i-$_1$, a_i) i >0.
Nous disons que M reconnaît ou accepte la chaîne W si l'état final s_n est un état d'acceptation, c'est-à-dire si s_n ε T. soit, alors, L(M) l'ensemble de toutes les chaînes reconnues par M. par exemple, nous pouvons montrer que l'automate M de l'exemple 1. Reconnaîtra les chaînes qui ne comportent pas deux b successifs.

L'automate considéré comme une machine à états finis

Nous pouvons considérer également un automate fini M comme une machine à états finis à deux symboles de sortie, disons OUI et NON, où la sortie est OUI si M passe en état d'acceptation, et la sortie est NON si M se met en état de rejet. En d'autres termes, nous transformons M en une machine à états finis en définissant une fonction de sortie g de S x A dans Z = { OUI , NON } de la manière suivante :

OUI si f (qi, aj) accepte (appartient à T)
G (qi, aj) = NON si f (qi, aj) n'accepte pas

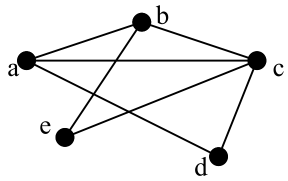
Réciproquement, une machine à états finis à deux symboles de sortie peut être considérée, de manière analogue, comme un automate.

Problèmes résolus

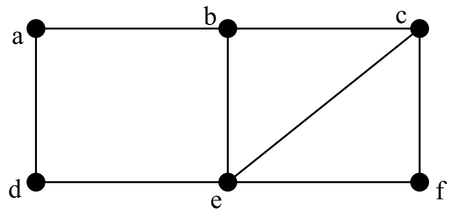
GRAPHES, CONNECTVITE

Exercice 1 : Tracer le digramme du graphe g avec : (a) les sommets A, B, C D et les arcs {A, B}, {A, C}, {B,C}, {B,D},{C, D}, (b) les sommets a, b, c, d, e et les arcs {a, b}, {a, c}, {b, c}, {d, e}. lequel de ces graphes, s'il y a lieu, est connexe ?

Exercice 2 : Soit le graphe ci-dessous. Déterminer le degré de chaque sommet et vérifier dans ce cas particulier, le théorème 1.1.

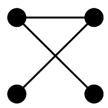


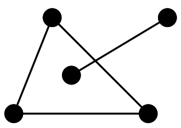
Exercice 3 : 1-Soit le graphe ci-dessous. Déterminer :
(a) Tous les chemins hamiltoniens du sommet a au sommet f,
(b) Tous les chemins élémentaires de a à f,
(c) La distance de a à f,
(d) Le diamètre du graphe.

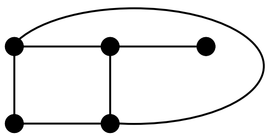


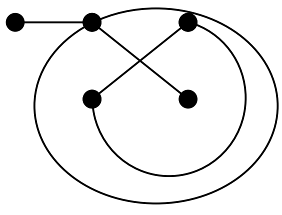
2- Soit le graphe précédent. Déterminer les sous- graphes obtenus quand chaque sommets est supprimé. Ce graphe possède - t- il des points de coupure ?

Exercice 4 : Quels sont, parmi les graphes suivants ceux qui sont :(a) connexes, (b) sans boucles et (c) des graphes ?


(i)


(ii)


(iii)


(iv)

Exercice 5 : 1- Tracer le graphe $K_{2,5}$

2- Quels graphes connexes sont à la fois réguliers et bipartites ?

Exercice 6 : Euler a donné une expression qui relie le nombre de sommets V, le nombre d'arcs E et le nombre de région R d'une carte connexe quelconque qui est : $V - E + R = 2$ Démontrer cette relation.

ARBRES

Exercice 7 : Tracer tous les graphes de 5 nœuds au plus.

Exercice 8 :a) Déterminer tous les arbres partiels du Graphe G représenté par la figure (a)

b) Déterminer un arbre partiel minimum dans le graphe valué représenté par la figure (b)

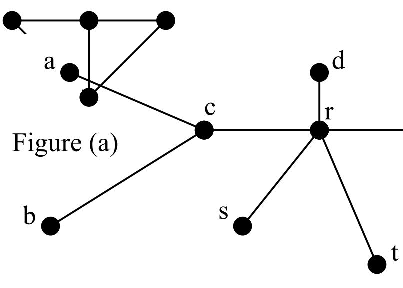


Figure (a)

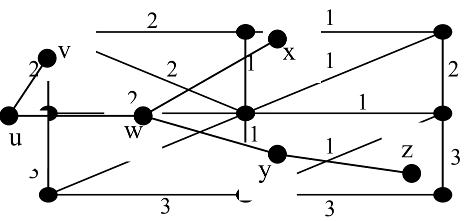


Figure (b)

Exercice 9 : Soit l'arbre représenté la figure suivante :

a) Quels sont les sommets, s'il y en a, qui sont des points de coupure ?
b) Déterminer tous les sommets de niveau 3 si le sommet pris comme racine est (i)-u, (ii)- w ;

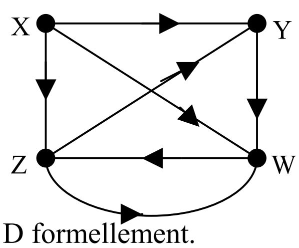
Exercice 10 : Soit l'expression algébrique (2x+y) $(5a-b)^{3.}$
a) Tracer l'arborescence ordonnée correspondante.
b) Déterminer l'étendue de l'opération d'exponentiation. (l'étendue d'un sommet v dans une arborescence est le sous – arbre de racine v, généré par v et les sommets qui suivent v dans l'arborescence).
c) Ecrire l'expression donnée en notation polonaise préfixée.

Exercice 11 : La figure suivante représente les termes d'un enregistrement d'étudiant dans un fichier.
00 Etudiants
- 01 Numéro
- 01 Identité
  - 02 Nom
  - 02 Prénom
- 01 Sexe
- 01 Date de naissance
  - 02 Jour
  - 02 Mois
  - 02 Année
- 01 Résultat du TEST
  - 02 Anglais
  - 02 Architecture
- 01 Admission (date)

a) Tracer l'arborescence ordonnée correspondante .
b) Quelles sont les données qui sont des données de groupe ?
c) Les quelles sont élémentaires ?

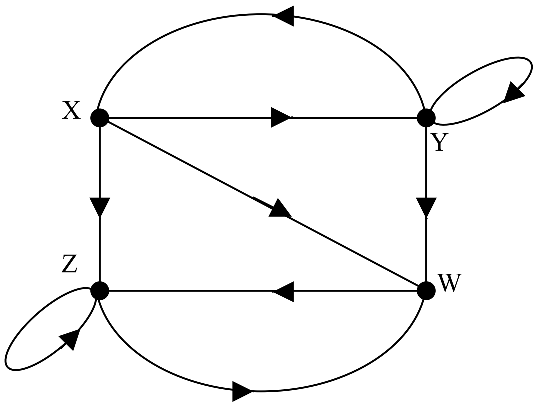
GRAPHES ORIENTES

Exercice 12 : Soit le graphe orienté D de la figure suivante.



a) Décrire D formellement.
b) Déterminer le nombre de chemins élémentaires de X à Z.
c) Déterminer le nombre de chemins de Y à Z.
d) Y a-t-il des sources ou des puits ?
e) Déterminer la matrice M_D du graphe orienté D.
f) D est-il, faiblement, unilatéralement ou fortement connexe ?

Exercice 13 : Soit un graphe orienté de la figure suivante :
a) Comporte t-il source et puits ?
b) Déterminer la matrice M de D.
c) D est –il fortement ou unilatéralement connexe ?



Exercice 14 : A) Soient v = {2, 3, 4, 5, 6} et R une relation sur V définie par : x R y si x est inférieur à y et x premier relativement à y (c'est-à-dire que x et y n'ont pas d'autre diviseur commun que 1).

a) Ecrire R sous la forme d'un ensemble de paires ordonnées.

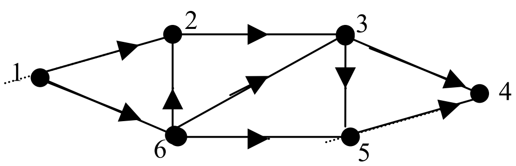
b) Tracer le graphe ordonné relatif à R.

B) Tracer le graphe orienté relatif à la matrice M ci-après (M comprend des nombres non négatifs) :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M est une matrice 4 x 4 . D a donc 4 sommets, v_1,v_2, v_3,v_4. pour chaque terme m_{ij}, nous traçons m_{ij} arcs entre les sommets v_i, et v_j,.

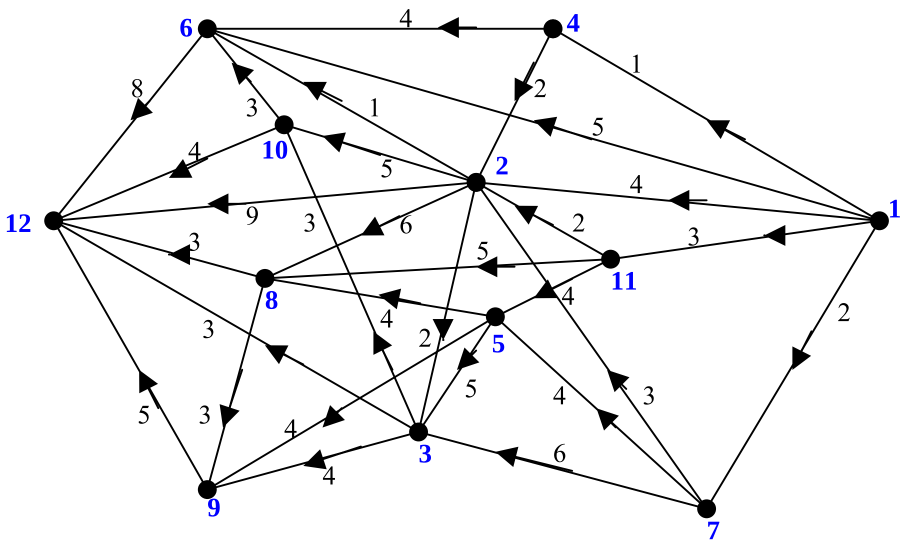
Exercice 15 : On considère le graphe orienté (X,U) suivant et soit M sa matrice booléenne.



Déterminer M et Calculer M², M^3, M^4, M^5, M^6

Exercice 16 :

On considère le graphe orienté et valué G=(X,U) : la longueur d'un arc est inscrite sur l'arc lui-même.



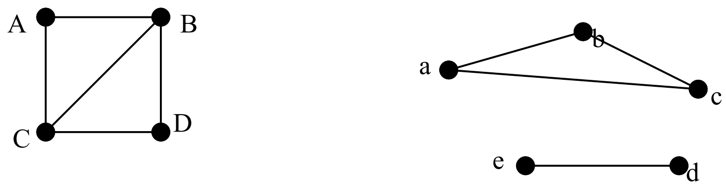
1- En utilisant le dictionnaire des précédents, ordonnancer ce graphe en niveaux, dessiner le graphe ainsi ordonnancé.

2- Tracer le graphe 1-minimal du graphe donné. En déduire un plus court chemein reliant le sommet 1 au sommet 12. Est-il unique?
3- Tracer le graphe 1-maximal du graphe donné. En déduire un plus long chemin reliant le sommet 1 au sommet 12. Est – il unique ?
4- Préciser les longueurs des chemins trouvés en b) et an c), ainsi que les longueurs des chemins extrémaux reliant 1 et tout autre sommet.

Résolution des Problèmes

Exercice 1 :

Traçons un point représentatif de chacun des sommets et, pour chaque arc {x,y},traçons une courbe entre les sommets x et y.



Le graphe (a) est connexe, mais pas le graphe (b) puisque, par exemple, il n'y a pas de chemin entre les sommets a et d.

Exercice 2 : Le degré d'un sommet est le nombre d'arc auxquels il appartient, soit deg(a) = 3 puisque a appartient aux trois arcs {a, b}, {a, c}, {a, d}. De même, deg (b) = 3, deg (c) = 4, deg (d) = 2, deg (e) = 2 ;

La somme des degrés des sommets est 3 + 3 + 4 + 2 + 2 =14 qui est égale au double du nombre des arcs (2 x 7).

Exercice 3 :

1-

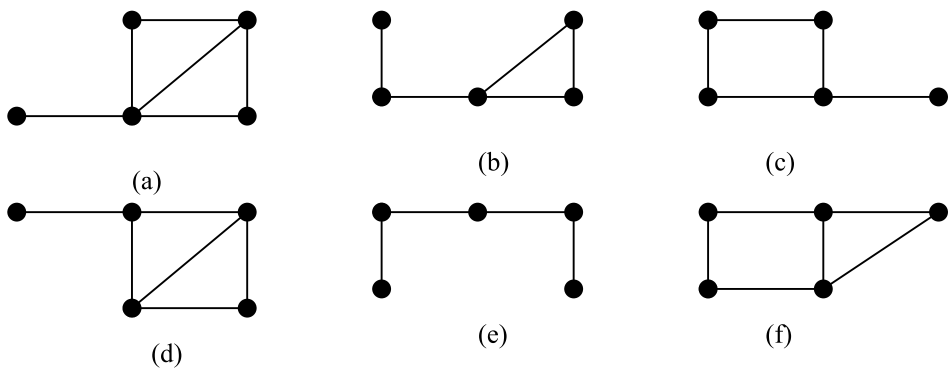
(a) un chemin hamiltonien est un chemin où un sommet n'est pas utilisé deux fois (par conséquent il en est de même pour les arcs). Il existe 7 de ces chemins : (a,b,c,f) ; (a,b,c,e,f), (a,b,e,f) ; (a,d,e,f) ; (a,d,e,c,f) ; (a,b,e,c,f) ; (a,d,e,b,c,f).

(b) un chemin élémentaire est un chemin où chaque arc n'a été emprunté qu'une seule fois. Il en existe 9, les 7 de (a) et (a, d, e, b, c, e, f) et (a, d, e, c, b, e, f)

(c) la distance de a à f est 3, puisqu'il existe un chemin (a, b, c) de a à f de longueur 3 qui est le plus court ;

(d) la distance entre une paire quelconque de sommets ne peut être supérieur à 3, et la distance entre a et f est 3 ; d'où 3 est le diamètre du graphe.

2- Quand nous supprimons un sommet, nous supprimons également tous les arcs qui y sont rattachés. Les 6 graphes obtenus par la suppression de chacun des sommets du graphe sont représentés ci-dessous; les 6 sont connexes, il n'existe donc aucun point de coupure.



Exercice 4 :

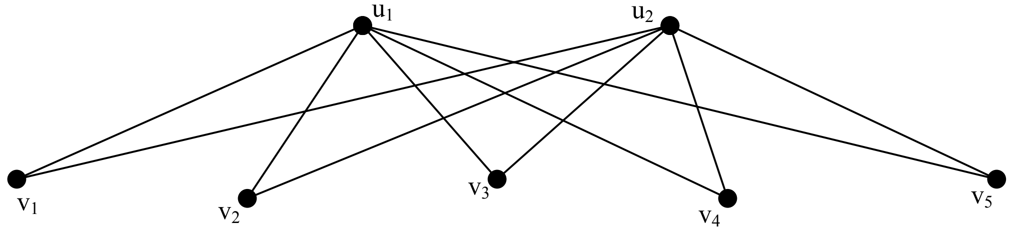
(a) seuls(i) et (iii) sont connexes.

(b) seul (iv) comporte une boucle (arc avec extrémités).

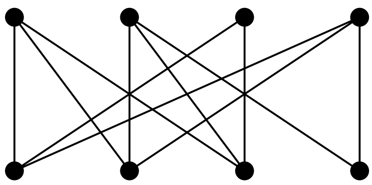
(c) Seuls (i) et (ii) sont des graphes, le multigraphe (iii) a des arcs et une boucle

Exercice 5 :

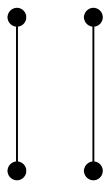
1- $K_{2,5}$ est constitué de 5 sommets partitionnés en un ensemble M de deux sommets, soient u_1 et u_2, et un ensemble N de 5 sommets, soient v_1, v_2, v_3, v_4, et v_5, et de tous les arcs possibles entre des sommets u_i et u_j. voir graphe ci-dessous



2- Le graphe bipartite K m, m est connexe et régulier de degré m puisque chaque sommet est connecté à m autres sommets; Si nous supprimons m sommets disjoints dans K m, m, le graphe résultant, Gm-1, est nécessairement bipartite et régulier de degré m – 1, mais pas obligatoirement connexe. Par exemple, le sous – graphe K4,4 (graphe (a) ci-dessous) est 3 – régulier et connexe, tandis que le sous – graphe K 2,2 (grphe (b) ci-dessous) est 1 – régulier et non connexe. De toute manière, les composants connexes de Gm-1, présentent toutes les propriétés requises.



(a)



(b)

Le processus peut être poursuivi en supprimant m arcs disjoints dans Gm-1, en obtenant des composés connexes, bipartites et réguliers de degré m – 2, et ainsi de suite.

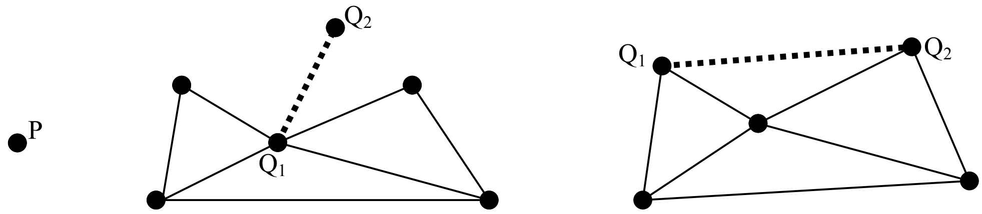
Exercice 6

Si notre carte connexe M est constituée d'un seul sommet (figure (a) , V= 1, E = 0, et il n'existe qu'une région, soit r = 1. Dans ce cas, V – E + R = 2 . Autrement M peut être construite à partir d'un sommet unique par les deux constructions suivantes :

(1) Ajouter un nouveau sommet Q_2 et le connecter à un sommet existant Q_1 par un arc ne coupant aucun des arcs existants (figure (b)).

(2) Connecter deux sommets existants, Q_1 et Q_2 par un arc qui ne coupe aucun des arcs existants (figure (c)).

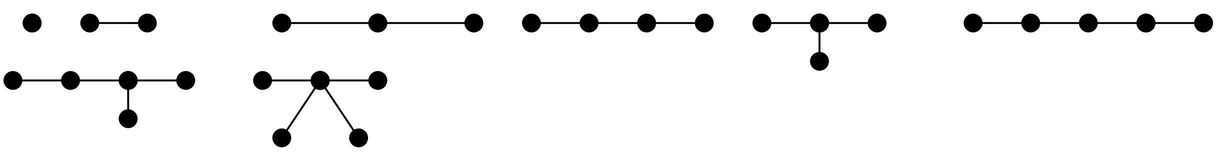
La première opération ne modifie pas la valeur de V–E+R, puisque V et R sont tous les deux incrémentés de 1 et le nombre R de régions n'est pas modifié, la deuxième opération ne change pas non plus de valeur de V–E+R, puisque V n'est pas modifié, E incrémenté de 1 et (cela peut être montré) le nombre de R de régions est, également, augmenté de 1. Il en résulte que M doit avoir la même valeur de V –E + R que la carte constitué d'un seul sommet ; soit V- E +R = 2, et le théorème est démontré.



(a) (b) (c)

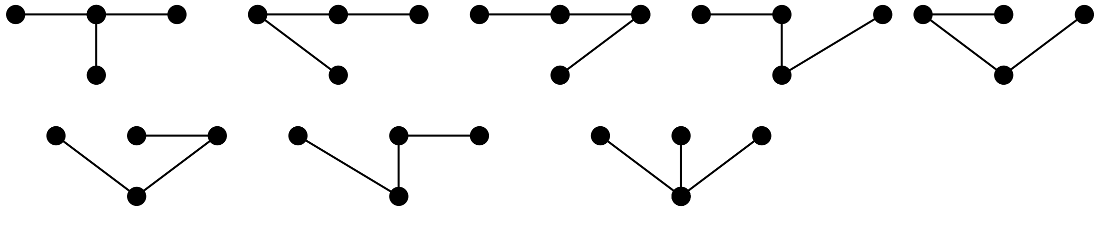
ARBRES

Exercice 7 : Il existe 8, tous représentés

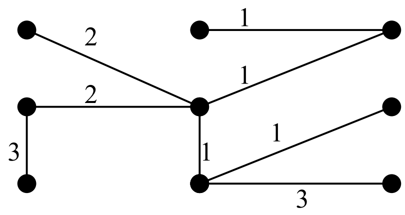


Exercice 8 :

a) Comme le montre la figure ci-dessous, il existe 8 arbres partiels. Chacun d'entre eux doit comporter 4-1= 3 arcs puisque G a 4 sommets. Dans ces conditions, chaque arbre partiel peut être obtenu en supprimant deux des 5 arcs de g, ce qui peut être fait de 10 manières, à cela près que deux d'entre elles conduisent à des graphes non connexes. D'où le résultat.



b) Il faut supprimer les arcs de poids maximum sans rendre le graphe non connexe ou, si l'on veut, commencer avec les 9 sommets et ajouter des arcs de poids minimum sans former de cycles. Les deux méthodes donnent un arbre partiel minimum représenté la figure ci-dessous



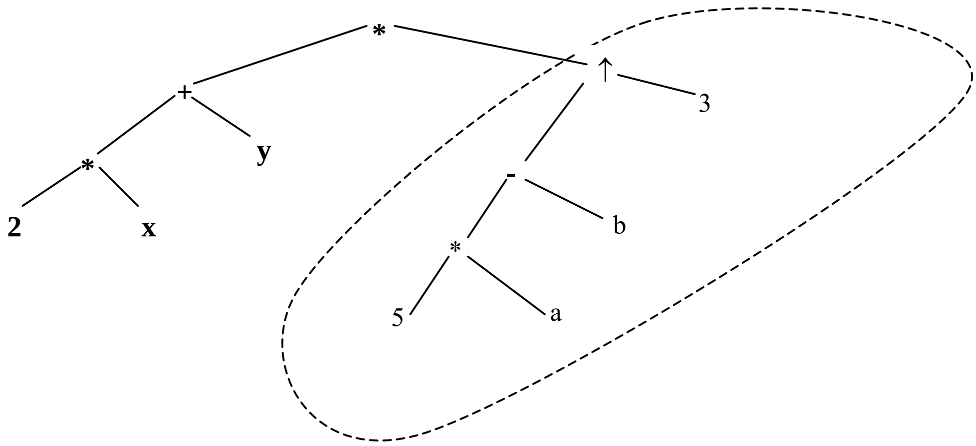
Exercice 9 :

(a) Chaque sommet de degré supérieur à 1 est un point de coupure dans le cas d'une arborescence, d'où c, r, u, w et y.

(b) Trouvons d'abord tous les chemins de longueur 3 à partir de la racine pour obtenir les sommets de niveau 3, d'où (i)- a, b et z ; (ii)- c, d, et t.

Exercice 10 :

(a) utilisons une flèche (↑) pour l'exponentiation et un astérisque (*) pour la multiplication ; ce qui donne la figure suivante :

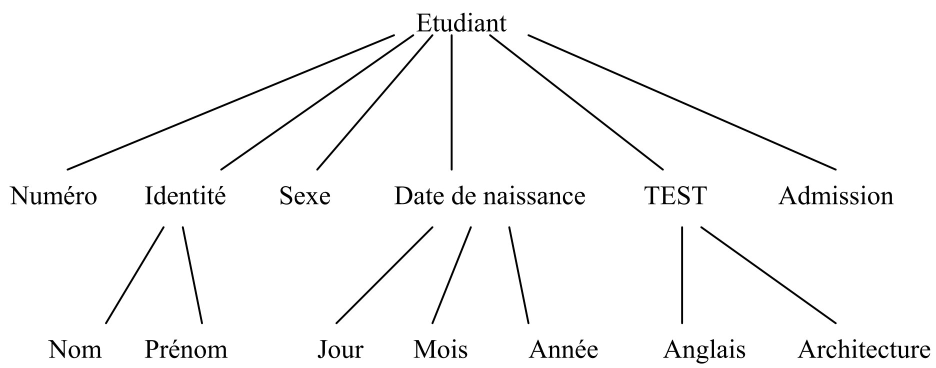


b) L'étendue de(↑) est l'arbre entouré de la figure ci-dessus qui correspond à l'expression $(5a - b)^3$

c) Suivons l'arbre (figure 1.16 (b) du cours) pour obtenir : * +* 2xy ↑- * 5ab3.

Exercice 11 :

a) voir figure ci- contre



b) Les données de groupes sont celles qui comportent une ou plusieurs sous-données : identité, date de naissance et test.

c) Les données élémentaires sont celles qui ne donnent pas lieu à partition : nom, prénom, sexe, jour, mois, année, math, verbal, admission,. Il constituent les feuilles de l'arborescence.

Exercice 12 :

(a) il y a 4 sommets : X, Y, Z, W, et 7 arcs : < X ,Y>, < X,W>, < X, Z > < Y ,W>, < Z,Y>, < Z, ZW>, <w,Z>.

(b) il y a 3 chemins élémentaires de X à Z : (X,Z), (X,W,Z) et (X, Y, W, Z).

(c) il n'y a qu'un chemin élémentaire entre Y et Z : (Y, W, Z).

(d) X est une source, car il n'est pas extrémité d'un arc. Il n'y a pas de puits puisque chaque sommet a un degré externe non nul, c'est-à-dire que chaque sommet est l'extrémité initiale d'un arc quelconque

(e) $M_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ici les lignes et colonnes sont repérées par X,Y,Z et W' respectivement). Le terme m_{ij} représente le nombre d'arcs du sommet i au sommet j.

(f) Le graphe n'est pas fortement connexe parce que X est une source et qu'il n'existe pas de chemin élémentaire entre un autre sommet, Y par exemple, et X. cependant, D est connecté unilatéralement, car le chemin (X, Y, Z, W) passe par tous les sommets et il existe, donc, un sous-chemin reliant n'importe quelle paire de sommets.

Exercice 13 :

(a) Ni sources, ni puits

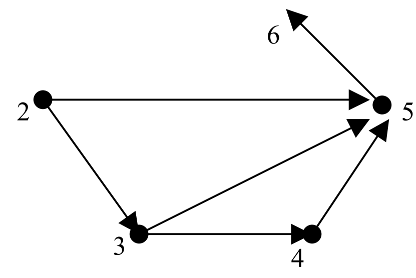
(b) $M_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) D est unilatéralement connexe, pas fortement car il n'existe pas de chemin élémentaire de Z à X.

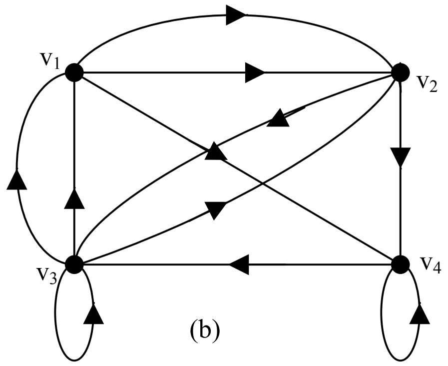
Exercice 14 :

A) a) R = {(2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5),(5, 6)}

b) voir figure (a)



(a)



(b)

B) voir figure (b)

Autres exercices

1.15 Soient deux chemins élémentaires disjoints P1 et P2 entre deux sommets u et v, respectivement, d'un graphe G. Démontrer que G contient un cycle.

Soit w un sommet sur P1 et P2, tel que les sommets suivants sur P1 et P2 soient distincts. Soit w' le premier sommet suivant w et situé à la fois sur P1 et P2 (cf. fig. 1.41) ; les sous – chemins élémentaires de P1 et P2 entre w et w' n'ont pas de sommets communs à l'exception de w et w' ; il en résulte que les deux sous – chemins forment un cycle.

1.16 Dans le cas d'un graphe G connexe, démontrer : (a) Si G comporte un cycle qui contient un arc e, G- e est encore connexe. (b) Si e = { u, v}est un arc tel que G – e n'est plus connexe, u et v appartiennent à deux composants connexes de G différents de G – e.

(a) Puisque G est connexe, toute paire de sommets u et v sont reliés par un chemin P ; nous pouvons toujours supposer que P ne comporte pas e, parce qu'autrement, nous pourrions construire un tel chemin à partir de sous- chemins de P et un sous- chemin de C – e (cf. fig. 1.42). par conséquent, la suppression de e ne peut rendre G non connexe.

(b) Supposons, au contraire, que u et v appartiennent au même composant connexe de G –e. il existe alors un chemin élémentaire P dans G- e qui relie u à v. Pris ensembles, P et e forment un cycle C de G. Mais dans ce cas, d'après (a) ci-dessus, G est connexe. Cette contradiction entraîne la démonstration.

1.17 Démontrer le théorème 1.4 : soit G un graphe comportant plus d'un sommet. Dans ces conditions, les propositions suivantes sont équivalentes : (i) G est un arbre. (ii) chaque paire de sommets est connectée par un seul chemin élémentaire. (iii) G est connexe, mais si n'importe quel arc est supprimé, le graphe résultant n'est pas connexe ;(iv) G ne comporte pas de cycle, mais si l'on ajoute à ce graphe n'importe quel arc, le graphe résultant comporte exactement un cycle.

(i)implique (ii). Soient u et v deux sommets de G, puisque G est un arbre, G est connexe et il existe au moins un chemin élémentaire entre u et v. il ne peut y en avoir qu'un sinon G comporte un circuit (cf. problème 1.15)

(ii) implique (iii). Supposons que nous supprimons un arc e = { u, v} du graphe connexe G. Puisque e est le seul chemin élémentaire de u à v, G – e n'est pas connexe.

(iii) implique (iv). D'après le problème 1.16(a), G ne comporte pas de cycle. Soient x et y des sommets de G et H, le graphe obtenu en ajoutant l'arc e = { x, y}à g. puisque G est connexe, il existe un chemin élémentaire de xà y dans G, par conséquent, C =Pe forme un cycle dans H. supposons que H contienne un autre cycle C', puisque G est sans cycle, C' doit comporter l'arc e, soit C' = P'e. par conséquent, P et P' sont deux chemins élémentaires allant de x à y (cf ; fig.1 ;43). D'après le problème 1.15, G comporte un cycle ce qui est contradictoire avec notre hypothèse, donc h ne comporte qu'un seul cycle.

(iv) { A, B}, implique (i). puisque l'addition d'un arc quelconque e = { x, y} à G produit un cycle, les sommets x et y doivent déjà être connectés dans G.G est donc connexe et, par hypothèse, G ne comporte pas de cyce, donc G est un arbre.

MACHINES A ETATS FINIS

1.22 soit une machine à états finis m de symboles d'entrée a etb, de sortie, x, y et z et munie du diagramme d'états de la fig : 1.48. (a) déterminer l'état stable de M. (b) Déterminer la sortie si l'entrée est la chaîne de symbole : W = aababaabbab,

(a) nous valuons les lignes de la table par q0, q1, q2, q3 et les colonnes par les symboles d'entrée a,b.
en utilisant le diagramme d'états (cf. fig. 1. 48), nous déterminons les termes du tableau de la manière suivante : De l'état q0, nous pointons une flèche a vers l'état q1 qui valué du symbole de sortie x. q1,x est mis dans le tableau dans la position correspondant à la ligne q0 et la colonne a. les autres termes du tableau sont obtenus de manière analogue.

	a	b
q0	q1, x	q2, y
q1	q3, y	q1, z
q2	q1, z	q0, x
q3	q0, z	q2, x

(b) En commençant à l'état initial q0, nous allons d'état à l'aide de flèches repérées respectivement par les symboles données de sortie :

q_0 q_1 q_3 q_2 q_1 q_1 q_3 q_0 q_2 q_0 q_1 q_1

les symboles de sortie sur les flèches ci-dessus, sont respectivement xyxzzyzyxxz.

1.23 soient a et b des symboles d'entrée. construire un automate fini m qui acceptera, parmi toutes les chaînes, celles qui comporteront un nombre pair de a.

nous n'avons besoin que deux états, q0 et q1. nous supposons que M est dans l'état q0 ou q1, selon que les nombre de a au moment donné est pair ou impair (dans ce cas, q0 est l'état d'acceptation et q1, de rejet). Seul a modifiera l'état. De plus, qo est l'état initial. Le diagramme d'états de M est représenté fig .1.49