Осми български фестивал на младите математици

Първи кръг, Тема за 6 – 7 клас

Задача 1. За четирицифреното число $\overline{abcd}$ е изпълнено равенството

$$\overline{abcd} = a.\overline{bcd} + \overline{abc}.d$$

Да се намери най-малката възможна стойност на $\overline{abcd}$.

Решение. Отговор: 1258**.** Тъй като търсим най-малката стойност на $\overline{abcd}$ първо се опитваме да намерим решение, за което $a = 1$. Равенството става:

$$\overline{1bcd} = \overline{bcd} + \overline{1bc}.d \iff 1000 + \overline{bcd} = \overline{bcd} + (100 + \overline{bc}).d$$

или $1000 = (100 + \overline{bc}).d$. Следователно d дели 1000, като ако $d \leq 5$ имаме

$$(100 + \overline{bc}).d \leq (100 + 99).5 < 1000.$$

Единственият делител на 1000, който е по-голям от 5 е 8, т.е. $d = 8$.

Сега от $1000 = (100+\overline{bc}).8$ намираме $\overline{bc} = 25$, т.е. $b = 2$ и $c = 5$. Решението е $\overline{abcd} = 1258$.

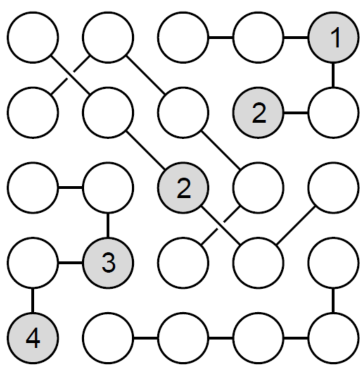
Задача 2. Да се намери най-малкото естествено число, което се записва само с цифрите 1 и 2 (не е задължително да се използват и двете цифри) и което се дели на 99.

Решение. Отговор: $11\underbrace{22\ldots2}_{8}$**.** Да означим с $a \geq 0$ и $b \geq 0$ съответно броя на единиците и двойките в търсеното число. Тъй като $99 = 9.11$, то търсеното число се дели на 9 и 11. Тогава $a + 2b$ се дели на 9.

1. Да допуснем, че $a+2b = 9$. Да означим с x и y съответно сбора на цифрите на четни и нечетни позиции в търсеното число. Понеже $x+y = a+2b = 9$, то за да се дели търсеното число на 11, трябва да е изпълнено $x - y = 0$, т.е. $x = y$. Това равенство е невъзможно поради $x + y = 9$.

2. Да допуснем, че $a + 2b = 18$. Тогава a е четно число и ако $a = 0$ получаваме числото $\underbrace{22\ldots22}_{9}$, което не се дели на 11. При $a = 2$ получавме $b = 8$ и най-малкото число е $D = 11\underbrace{22\ldots2}_{8}$, което се дели на 99. При $a > 2$ числото има повече от 10 цифри и е по-голямо от D.

Задача 3. По колко различни начина могат да се попълнят празните кръгчета на схемата така, че във всеки ред, във всеки стълб и по всяка от означените линии да са записани числата 1, 2, 3, 4 и 5 (в някакъв ред)?



Решение. Да номерираме редовете отгоре надолу и стълбовете отляво надясно с числата от 1 до 5. Всяко кръгче се определя с координати (ред, стълб).

Числата (5, 2), (5, 3), (5, 4) и (5, 5) са свързани в линия и са различни от 4, значи в тази линия може да се запише 4 само в (4,5). Тогава в петия стълб числото 2 може да се запише само в (5, 5), а в четвъртия ред – само в (4, 1). Последното число 2 е в (1, 2). Числото 4 в третия ред може да е само в (3, 4), оттам във втория ред 4 е в (2, 2) и накрая в първия ред е в (1, 3). Числото 1 в линията, която започва от (1, 1), може да е само в (4, 4), откъдето последното число на четвъртия ред е 5 в (4, 3). Тази петица участва в линия с липсващи 1 и 3, като и двете са на втория ред. Следователно числото в (2, 5) е 5. Оттук попълваме 3 в (1, 4) и (3, 5), 5 в (5, 4) и (1, 1). В първия стълб 3 е в (2, 1) и нататък числата се попълват еднозначно. Попълването е единствено.

Задача 4. В трапеца $ABCD$ ($AB||CD$) диагоналите AC и BD се пресичат в точката O. Правата през O, успоредна на AD, пресича AB в точката M, а правата през O, успоредна на BC, пресича AB в точката N. Да се докаже, че $AM = BN$.

Решение. В трапеца $ABCD$ имаме $S_{AOD} = S_{BOC}$; в трапеца $AMOD$ имаме $S_{AOD} = S_{AMD}$ и в трапеца $NBCO$ имаме $S_{BOC} = S_{BNC}$. Следователно $S_{AMD} = S_{BNC}$. Тъй като височините съответно към страните AM и BN в тези триъгълници са равни, то $AM = BN$.

Задача 5. Иван иска да оцвети всички естествени числа в няколко цвята, един от които е син. Оцветяването трябва да удовлетворява следните условия:

1. Всяко нечетно число трябва да е синьо.
2. Всяко число n има същия цвят като числото $4n$.
3. Цветът на всяко число n съвпада или с цвета на числото $n+2$ или с цвета на числото $n+4$.

Да се докаже, че всички числа са сини.

Решение. Да допуснем, че има число n, което не е синьо и нека n е червено. От 1. следва, че $n = 2m$, и като използваме 2. намираме, че $8m$ е червено.

От 3. следва, че поне едно от двете числа $8m+2$ и $8m+4$ е червено. Но $2m+1$ е синьо и от 2. и $8m+4 = 4(2m+1)$ следва, че $8m+4$ е синьо. Следователно $8m+2$ е червено.

От 3. и от това, че $8m$ и $8m+2$ са червени следва, че $8m-2$ е също червено.

От 3. и от това, че $8m-2$ и $8m$ са червени следва, че $8m-4$ е също червено.

Но $2m-1$ е синьо и от 2. и $8m-4 = 4(2m-1)$ следва, че $8m-4$ трябва да е синьо, противоречие. Следователно всички числа са сини.

Задача 6. Представяне на числото $\dfrac{19}{40}$ във вида

$$\frac{19}{40} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

се нарича *добро*, ако a_i-тата са различни естествени числа и най-много едно от тях не е степен на двойката.

а) Да се намери най-малката стойност на k, при която съществува добро представяне от k събираеми.

б) Да се докаже, че съществуват безбройно много добри представяния.

Решение. Отговор: а) $k = 3$**.** а) Ясно е, че $k > 1$. Нека $k = 2$ и без ограничение $a_1 > a_2$. Ако $a_2 \geq 4$, то

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20} < \frac{19}{40},$$

противоречие. Случаите $a_2 = 1, 2, 3$ също не водят до решение. Остава да забележим, че $\dfrac{19}{40} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{10}$ и следователно търсената стойност е $k = 3$.

б) Примерът за $k = 3$ в а) и тъждеството

$$\frac{1}{2^a.5} = \frac{1}{2^{a+3}} + \frac{1}{2^{a+4}} + \frac{1}{2^{a+4}.5}$$

дават исканото (започвайки от $a = 1$).

Задача 7. Дадени са 2017 картички. На всяка картичка са записани по няколко (поне две) различни естествени числа. Две картички се наричат *съседни*, ако най-голямото число от едната картичка е равно на най-малкото число от другата картичка. Да се докаже, че ако няма съседни картички, то всички числа могат да се разделят на две групи така, че всяка картичка съдържа поне едно число от всяка от групите.

Решение. Нека A е групата от най-малките числа от всяка картичка, а B е групата от всички останали числа. Да разгледаме произволна картичка и нека a и b са съответно най-малкото и най-голямото число върху нея. Според избора на A имаме, че $a \in A$. Освен това тъй като няма съседни картички, то $b \notin A$, т.е. $b \in B$.

Задача 8. Пипи, Томи и Аника имат общо 12 топчета. Всяко от топчетата е оцветено в един от n дадени цвята. Както и да разпределят топчетата поравно, някой ще има топчета от поне три цвята. Намерете най-малката възможна стойност на n.

Решение. Отговор: 5. Ако има 8 бели топчета и по 1 топче от още 4 цвята, то винаги у някого ще има най-много 2 бели топчета, а значи и топчета от поне три цвята. Ако има не повече от 4 цвята, винаги можем да разпределим топчетата така, че всеки да има само два цвята: първо даваме на Пипи всички от цвят 1, на Томи от цвят 2 (ако има такива) и на Аника от цвят 3 (ако има такива). Ако някой има повече от 4 топчета, то друг има по-малко от 4; да допълним притежанието на втория до 4 топчета с топчета от първия (при това първият може да се окаже с по-малко от 4 топчета) и да пуснем втория да си ходи. Ако някой от останалите има повече от 4 топчета, то друг има по-малко от 4; да допълним притежанието на втория до 4 топчета с топчета от първия (при това първият може да се окаже с по-малко от 4 топчета) и да пуснем втория да си ходи. Ако в някакъв момент всички останат с по-малко от 4 топчета, то допълваме притежанието на всеки до 4 с топчета от четвъртия цвят.