UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

Mecánica Computacional - Ingeniería en Informática

Primer Parcial - 6 de octubre de 2021

Autores:
Dr. Ing. Norberto NIGRO
Ing. Carlos GENTILE
Ing. Diego SKLAR
MSc. Ing. Gerardo FRANCK

FICH UNL

1. TEORIA

Este primer parcial contiene una evaluación de los temas de Diferencias Finitas y Volúmenes Finitos.

1.1. Ejercicio 1

Sea una función analítica:

$$\phi = e^{(5(x^2+y^2))}(2x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2) \tag{1}$$

y sea $\hat{\phi}$ una aproximación por Diferencias Finitas Centradas. Evalúe numéricamente las siguientes derivadas en torno al punto de coordenadas (0,0) y verifique que las mismas convergen con una tasa orden O($\Delta x^2, \Delta y^2$) a la solución analítica. Elija la discretización espacial que usted considere adecuada para hacer estos cálculos con el agregado que emplee la misma discretización en ambas direcciones.
Las derivadas a evaluar son:

1. $\frac{\partial \phi}{\partial x}$
2. $\frac{\partial \phi}{\partial y}$
3. $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$
4. $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$
5. $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \, \partial y}$
6. $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}$

siendo η una dirección representada por el vector (1,1) normalizado.

1.2. Ejercicio 2

Sea una celda P de Volumenes Finitos, correspondiente a una discretización con forma hexagonal regular, es decir un hexágono regular de lado y espesor unitario, tal como lo muestra la Figura 1

Calcule:

1. *La divergencia de un campo constante de valor f.*
2. *Si el campo $f = 1$, ¿Qué representa geométricamente el resultado anterior en términos de la normales a las seis (6) caras del hexágono regular?.*
3. *Supongamos que esta celda pertenece a una malla mas extensa la cula mantiene su forma hexagonal regular (tipo panel de abejas), sobre la cual se representa la función ϕ analítica del ejercicio anterior. Si asumimos que en cada uno de los siete (7) vértices de esta celda hexagonal, asi como en los centroides de las celdas vecinas la solución equivale a reemplazar dicha función en dichos puntos, determinar cuanto valen:*
   a) *La solución ϕ_f en cada uno de los centroides de las seis (6) caras.*
   b) *el gradiente $(\nabla\phi)_P$ de la celda*

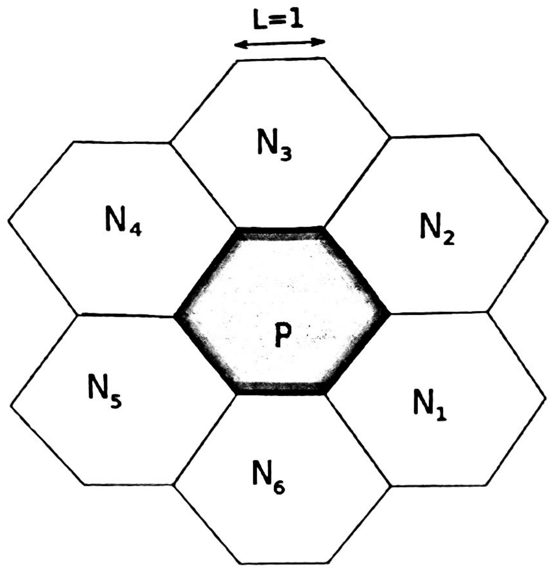

Figura 1: Celdas hexagonales regulares de una discretizacion por Volúmenes Finitos

2. PRACTICA

2.1. Ejercicio 1

El *script* proporcionado por la cátedra describe el siguiente problema de transferencia de calor (ver Figura 2):

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + G \quad (2)$$

$$\Gamma_T = \overline{T}, [0 \leq x \leq 1], y = 1 \quad (3)$$

$$\Gamma_q = \overline{q}, x = 0, x = 1, [0 \leq y \leq 1] \quad (4)$$

$$\Gamma_h = -k\frac{\partial T}{\partial \eta} = h(T - T_{\text{inf}}), [0 \leq x \leq 1], y = 0 \quad (5)$$

con los siguientes datos:

$$Datos = \begin{cases} \rho c_p & = 1 \\ k & = 20\left[\dfrac{W}{mC}\right] \\ \overline{T} & = 70C \\ \overline{q} & = 0\left[\frac{W}{m^2}\right] \\ h & = 20\left[\frac{W}{m^2C}\right] \\ T_{\text{inf}} & = 25C \end{cases} \quad (6)$$

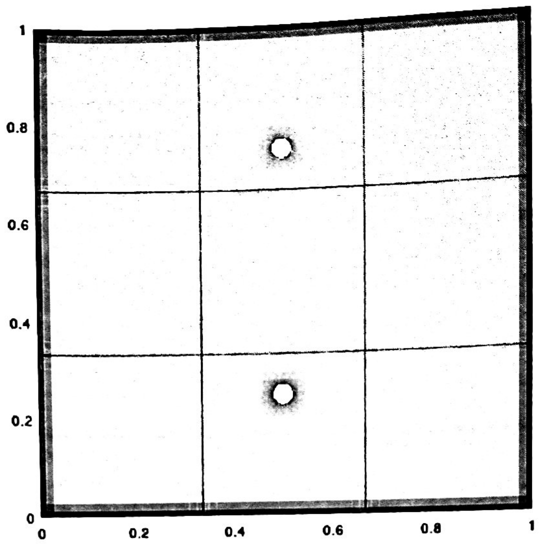

Figura 2: Dominio computacional a simular.

Se pide:

1. Calcular por los métodos de Diferencia Finitas y Volumenes Finitos determinando:
2. El campo térmico en todo el dominio, asumiendo:

$$G(t) = 100\, sen(50t) \tag{7}$$

   utilizando el esquema temporal que considere adecuado, justificando su elección.
3. Graficar la solución en los puntos indicados en la figura, siendo:
   - $x = 0{,}50, y = 0{,}25$ (punto amarillo)
   - $x = 0{,}50, y = 0{,}75$ (punto cian)
4. Indicar en qué instante de tiempo el sistema converge a una solución estacionaria. Justifique su respuesta.
5. En cada caso utilizar dos tipos diferentes de discretización y comparar los resultados obtenidos con cada método.