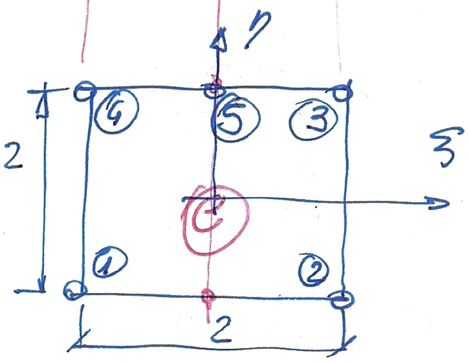
Funciones de Interpolación

Consideremos el elemento de 5 nodos de la fig.



Usando funciones de interpolación cuadráticas y lineales a lo largo de los ejes ξ y η derivar las funciones de interpolación para el elemento.

Notemos que este elemento se puede usar como un elemento de transición q.c. conecta elementos de 4 nodos con otros de 8 ó 9 nodos

Solución:

1) Construimos las funciones de interpolación asociadas al nodo 5. Sabemos que la función de este nodo debe desaparecer en $\xi = 1$ y $\xi = -1$ al igual que en $\eta = -1$. $\Rightarrow$ deberá tener la sig. forma:

$$\psi_5(\xi,\eta) = C_5(1-\xi)(1+\xi)(1+\eta).$$ para que desaparezca

La cte C_5 la determinamos de: $\psi_5(0,1) = 1$.

$C_5 \Rightarrow ?$ $\psi_5(0,1) = C_5 \cdot 2 = 1 \Rightarrow C_5 = 1/2$.

$$\boxed{\psi_5(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta).}$$

Para cualquier nodo de las esquinas del elemento bilineal. las funciones son de la forma:

$$\hat{\psi}_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta).$$

(ξ_i, η_i) coord. locales de los nodos de la esquina

$\Rightarrow (\xi_1,\eta_1) = (-1,1)$; $(\xi_2,\eta_2) = (1,-1)$; $(\xi_3,\eta_3) = (1,1)$

$(\xi_4,\eta_4) = (-1,1)$.

Por teoría de FEM las func. de interpolación serán de tal forma que valgan 1 en el nodo j cero en el resto $\Rightarrow$.

$\hat{\psi}_1$ y $\hat{\psi}_2$ deben desaparecer en el nodo 5

$\Rightarrow (\xi_5, \eta_5) = (0, 1)$ de acuerdo con la figura

$\Rightarrow$ De acuerdo a la fórmula anterior

Nodo 1. $(\xi_1, \eta_1) = (-1, -1)$

$$\hat{\psi}_1(\xi, \eta) = (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$$

$$= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \qquad (\xi_2, \eta_2) = (1, -1)$$

$$\Rightarrow \psi_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta).$$

tanto $\hat{\psi}_1(\xi, \eta)$ como $\hat{\psi}_2(\xi, \eta)$ desaparecen en el nodo 5. (Ok)!!

Solo me falta calcular $\hat{\psi}_3$ y $\hat{\psi}_4$ y que lo hagan $\Rightarrow$. $\psi_3 \Rightarrow (\xi_3, \eta_3) = (1, 1)$

$\psi_4 \Rightarrow (\xi_4, \eta_4) = (-1, 1)$

$$\psi_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta).$$

ψ_4 y ψ_3 toman un valor de 0.5 en el nodo 5.

y ψ_5 toma un valor unitario

$\Rightarrow 0.5 \times \psi_5 = \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta)$. y lo restamos de $\hat{\psi}_3$ y $\hat{\psi}_4$ para obtener la función requerida

$$\psi_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta)$$

$$= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)[\cancel{1} - \cancel{1} + \xi] \Rightarrow \boxed{\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)\xi = \psi_3}.$$

$$\psi_4 = +\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) - \left[\frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta)\right].$$

$$\psi_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)[\cancel{1} - 1 - \xi] \Rightarrow \boxed{\psi_4 = -\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)\xi}.$$

Parra silvestre
Parra virgen
Pasionaria azul
Pasionaria roja
Pastel de risco
Pata de vaca
Pataca
Patata trepadora
Paulonia
Pavía
Pelambrera de Florida
Pendientes de la reina
Pensamiento
Pequeño falmboyant
Pera mejicana
Peral
Peral de hoja de almendro
Peral de hoja de sauce
Peral silvestre
Perpetua
Perpetua de monte
Pervinca
Petunia
Peyote
Picea azul
Picea blanca
Picea de Afganistán
Picea de Engelmann
Picea de las montañas
Picea de Oriente
Picea de Saghalin
Picea de Serbia
Picea de Sitka
Picea de Torano
Picea del Colorado
Picea llorona
Picea negra
Picea roja
Pichi
Pico de paloma
Picón
Pinabete
Pinanga de corona
Pinito de flor
Pino abeto
Pino albar
Pino amarillo

$\Rightarrow$ Entonces para este elemento las funciones serán:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \psi_1 = \frac{1}{4}(1-\eta)(1-\xi) & \psi_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\xi . \\ \psi_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta). & \psi_4 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\xi . \\ \multicolumn{2}{c}{\psi_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta).} \end{array}}$$

$N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi)$.

$N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$

lineales.