

GUIA DE TRABAJOS PRACTICOS:

MECANICA COMPUTACIONAL

TEMA: BARRA y METODO MATRICIAL

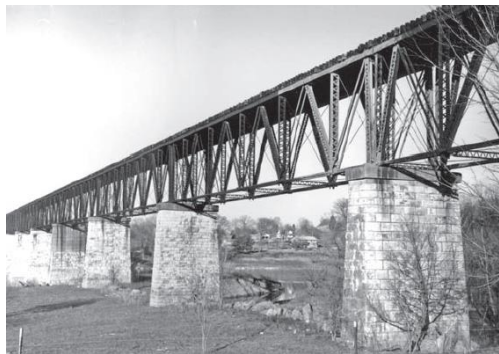
Métodos:

Barras: Matricial y Elementos Finitos

BARRAS METODO MATRICIAL

Mecánica estructural formulada matricialmente: método directo

En esta guía se calcularán por el método directo o matricial estructuras como las mostradas en las figuras siguientes:



En ingeniería estructural, una armadura o celosía es una estructura reticular de barras rectas interconectadas en nudos formando triángulos planos (en celosías planas) o pirámides tridimensionales (en celosías espaciales). En muchos países se les conoce como armaduras o reticulados. El interés de este tipo de estructuras es que las barras trabajan predominantemente a compresión y tracción presentando comparativamente flexiones pequeñas.

EJEMPLOS DE CALCULO:

Las siguientes figuras muestran los diferentes tipos de estructura que se pueden calcular con el método de barras.

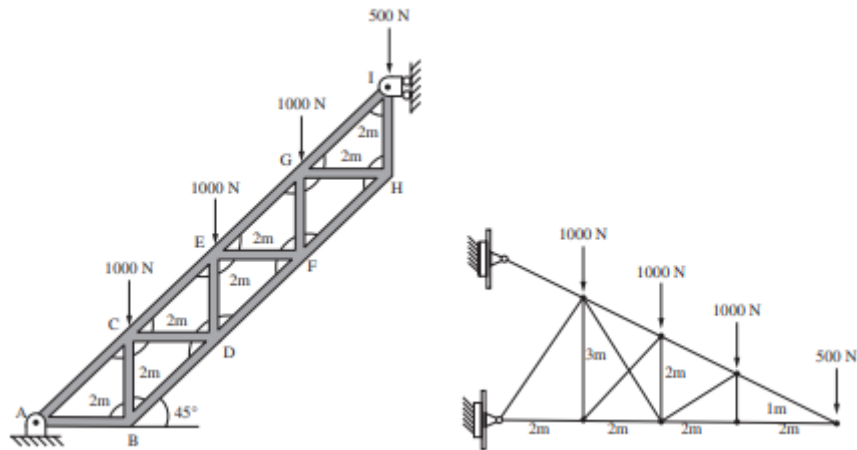


Figura: Izq. Armadura de escalera. Der: cercha en voladizo

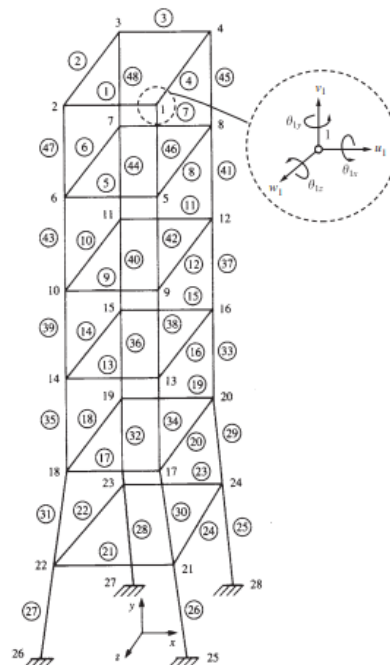


Figura: Torre de control ferroviario discretizada (28 nodos, 48 elementos de barras) con grados de libertad típicos mostrados en el nodo 1, por ejemplo (Gentileza: Daryl L. Logan)

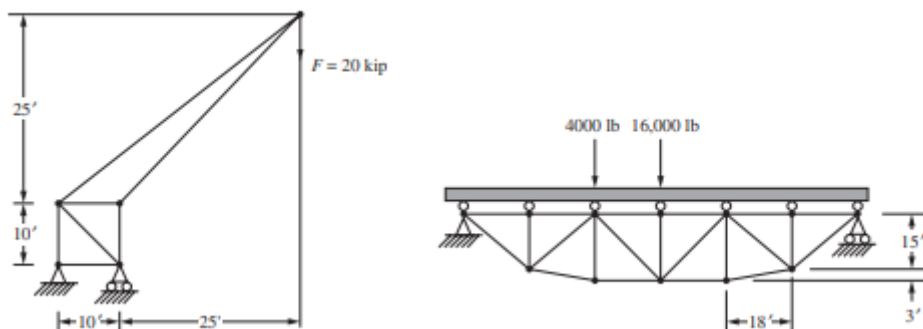
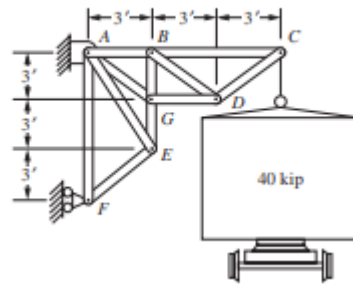


Figura: Izq. Armadura de torre de perforación. Der. Puente en celosía.



TEORIA:

- 3

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + f(x) = 0$$

Donde:

- E es el módulo de elasticidad,
- A es el área de la sección transversal,
- $u(x)$ es el desplazamiento,
- $f(x)$ es la fuerza distribuida.

3. Formulación variacional:

- Convertimos la ecuación diferencial en una forma integral (débil):

$$\int_0^L EA \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^L f(x)v(x)dx$$

Donde $v(x)$ son las funciones de prueba.

4. Interpolación:

- Usamos funciones de forma lineales para aproximar el desplazamiento:

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2$$

Donde $N_1(x)$ y $N_2(x)$ son las funciones de forma.

5. Montaje de la matriz de rigidez global:

- Derivación de la matriz de rigidez local de un elemento:

$$k_e = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Proceso de ensamblaje para obtener la matriz de rigidez global.

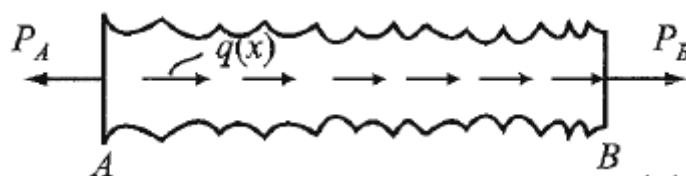
6. Condiciones de contorno:

- Se aplican las condiciones de contorno (desplazamiento impuesto o fuerza aplicada) para resolver el sistema de ecuaciones.

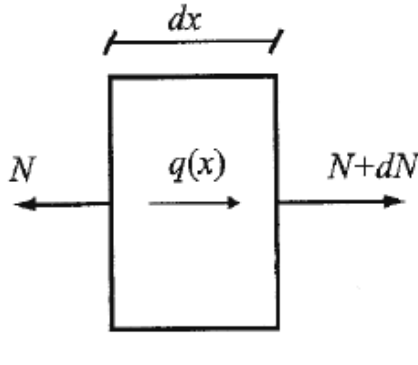
ECUACION DIFERENCIAL DE GOBIERNO

La solución del problema elástico en cualquier estructura hace intervenir las ecuaciones de equilibrio entre fuerzas externas e internas, las relaciones entre esfuerzos y deformaciones y las de compatibilidad de las deformaciones. Al expresar la ecuación de equilibrio de una barra sometida a tracción o compresión en función de los desplazamientos se obtiene su ecuación diferencial de gobierno.

Sea, por ejemplo, una barra de sección transversal de área $A(x)$ y módulo de elasticidad E sometida a tracción o compresión, debido a una carga longitudinal distribuida por unidad de longitud $q(x)$. Ver Figura:



Tomamos un pequeño diferencial (dx), es decir una rebanada de dicha barra, como la de la figura, y planteamos el equilibrio de fuerzas, de la siguiente forma:



$$\sum X = 0,$$

$$-N + (N + dN) + q(x) dx = 0,$$

$$\frac{dN}{dx} + q(x) = 0.$$

Al ser un caso unidimensional, los desplazamientos longitudinales de los puntos de la barra están definidos por el campo de desplazamientos $u(x)$. Si se satisface la hipótesis de Bernoulli-Navier de que las secciones planas permanecen planas durante la deformación, la relación

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx},$$

determina el campo de deformaciones de la barra. Y si la barra es linealmente elástica, el campo de esfuerzos está definido por

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{du}{dx}.$$

De la relación entre sollicitaciones y esfuerzos

$$N = \int_A \sigma_x dA = \int_A \left(E \frac{du}{dx} \right) dA,$$

se deduce la ley de fuerzas normales de la barra

$$N = EA \frac{du}{dx}.$$

Sustituyendo este valor de N en la ecuación de equilibrio, se obtiene la ecuación diferencial de gobierno de una barra que trabaja a tracción o compresión:

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + q(x) = 0.$$

En el caso de que E y A sean constantes, la ecuación diferencial de gobierno se reduce a:

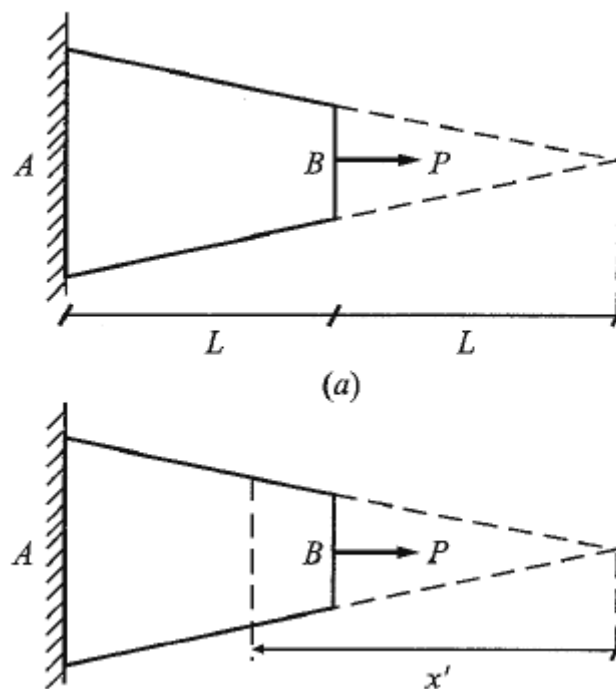
$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + q(x) = 0.$$

Veamos un ejemplo, simple pero interesante para entender el concepto de barras:

Ejercicio:

La barra troncocónica AB representada (Fig. 3.2a), de longitud L y de área A_0 en la sección de empotramiento, está sometida a una carga longitudinal P aplicada en su extremo B. Determinar el campo de desplazamientos y el alargamiento de la barra.

Datos: E, A_0 , L.



Solución: Según la ecuación anterior:

$$N = EA \frac{du}{dx}.$$

la ley de fuerzas normales de la barra (ver figura inferior) es:

$$N = EA(x') \frac{du}{dx'} = P.$$

De esta ecuación se deduce que:

$$\int_{x'}^{2L} du = -u(x') = \int_{x'}^{2L} \frac{P dx'}{EA(x')} =$$

$$= \int_{x'}^{2L} \frac{P dx'}{EA_0} \frac{(2L)^2}{x'^2},$$

$$\int_{x'}^{2L} du = \frac{4PL^2}{EA_0} \int_{x'}^{2L} \frac{dx'}{x'^2},$$

e integrando se determina el campo de desplazamientos de la barra

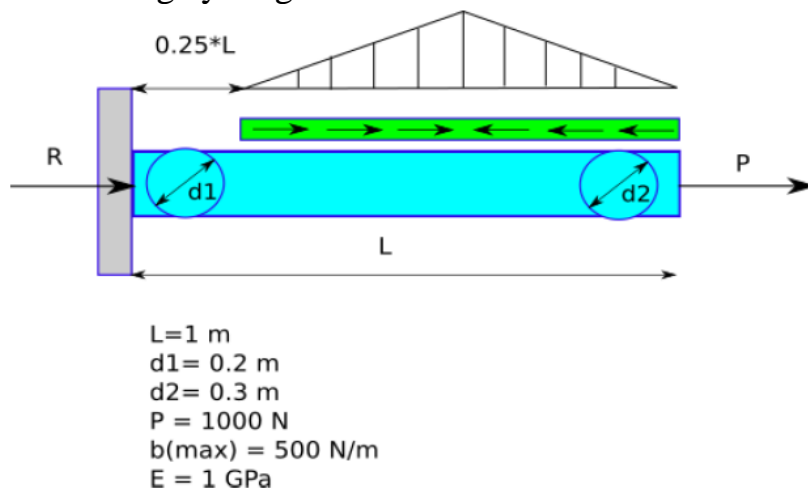
$$u(x') = \frac{2PL}{EA_0} \frac{(2L - x')}{x'},$$

y su alargamiento:

$$u_B = u(x')_{x'=L} = \frac{2PL}{EA_0}.$$

Ejercicio de barras Teórico-Práctico:

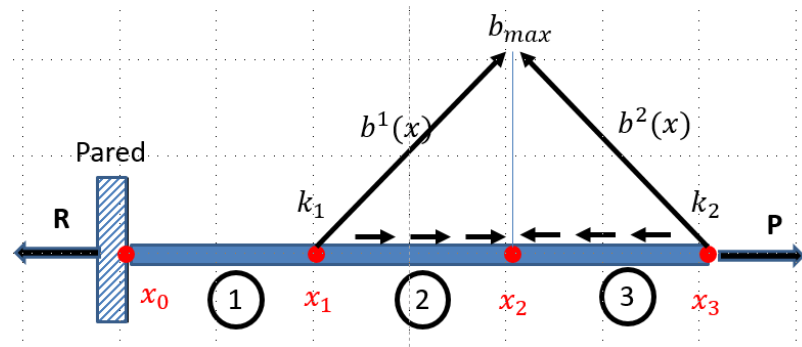
En la siguiente figura vemos una barra de sección circular variable, de diámetro “d1” en el extremo izquierdo donde se halla empotrada y de diámetro “d2” en el otro extremo (con variación lineal desde d1 a d2), de largo L, sometida a una carga concentrada P, una carga repartida que ocupa el 75% de su longitud y que, como se muestra en la figura, su carga por unidad de longitud crece en forma lineal hasta la mitad de la longitud ocupada por esta carga y luego decrece en forma simétrica.



Con los datos que se muestran en la misma calcule:

1. La reacción de la pared
2. El estado de tensiones a lo largo de toda la barra, es decir $\sigma(x)$
3. El estado de deformación a lo largo del eje de la barra, $\varepsilon(x)$
4. El desplazamiento del extremo derecho de la barra

Solución:



$$b^1(x) = b_{max} \left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right) \quad \text{si } x_1 \leq x \leq x_2$$

$$b^2(x) = b_{max} \left(\frac{x_3-x}{x_3-x_2} \right) \quad \text{si } x_2 \leq x \leq x_3 = L$$

$$\sum F = 0$$

Planteamos el equilibrio de fuerzas:

$$R + P + \int_{x_1}^{x_2} b^1(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} b^2(x) dx = 0,$$

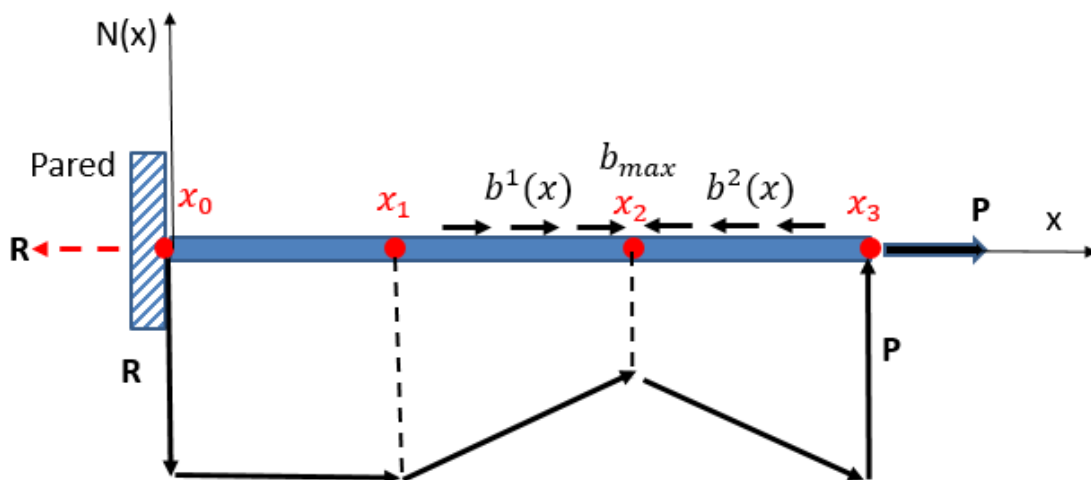
Pero, de acuerdo con el enunciado y a la figura:

$$\int_{x_1}^{x_2} b^1(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} b^2(x) dx = 0 \quad (\text{iguales y opuestas})$$

$$R + P = 0$$

$$R = -P$$

Planteamos el diagrama de cargas o esfuerzos



$$N(x) = \begin{cases} R & \text{si } 0 \leq x \leq x_1 \\ R + \int_{x_1}^{x_2} b^1(x) dx & \text{si } x_1 \leq x \leq x_2 \\ R + \int_{x_1}^{x_2} b^1(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} b^2(x) dx & \text{si } x_2 \leq x \leq x_3 = L \end{cases}$$

Calculamos las Resultantes de las Cargas Distribuidas:

1. Resultante de $b^1(x)$:

$$F_{b1} = \int_{x_1}^{x_2} b^1(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{b_{\max}}{x_2 - x_1} (x - x_1) dx$$

Resolviendo esta integral nos da:

$$F_{b1} = \frac{b_{\max}}{2} (x_2 - x_1)$$

2. Resultante de $b^2(x)$:

$$F_{b2} = \int_{x_2}^{x_3} b^2(x) dx = \int_{x_2}^{x_3} \frac{b_{\max}}{x_3 - x_2} (x_3 - x) dx$$

Resolviendo esta integral nos da:

$$F_{b2} = \frac{b_{\max}}{2} (x_3 - x_2)$$

Posición de las Resultantes distribuidas

1. Posición de F_{b1} : La resultante de F_{b1} estará a un tercio de la distancia entre x_1 y x_2 , medido desde x_1 :

$$x_{F_{b1}} = x_1 + \frac{1}{3} (x_2 - x_1)$$

2. Posición de F_{b2} : La resultante de F_{b2} estará a un tercio de la distancia entre x_2 y x_3 , medido desde x_3 :

$$x_{F_{b2}} = x_3 - \frac{1}{3} (x_3 - x_2)$$

Reacción axial “R” en el empotramiento

Para que la barra esté en equilibrio, la reacción R en el empotramiento debe equilibrar la suma de las fuerzas axiales resultantes F_{b1} , F_{b2} y la carga puntual P :

$$R = F_{b1} + F_{b2} + P$$

Calculo de Tensiones y Deformaciones

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$$

$$A(x) = \pi \frac{\phi^2(x)}{4} = \frac{\pi}{4} (\phi_2 \frac{x}{L} + \phi_1 (1 - \frac{x}{L}))^2$$

Para obtener la deformación:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E}$$

Y los desplazamientos:

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon(x) \text{ entonces } du = \varepsilon(x) dx$$

Integrando:

$$\int_{u_0}^u du = \int_0^x \varepsilon(x) dx$$

Y como $u_0 = u(x = 0) = 0$, porque esta empotrado:

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon(x) dx = \int_0^x \frac{\sigma(x)}{E} dx =$$

$$\int_0^x \frac{1}{E} \frac{N(x)}{A(x)} dx$$

y luego continuar calculando con los datos dados.

PLANTEO POR ELEMENTOS FINITOS EL CALCULO (Ver la teoría)

MATRIZ COMPLETA DE RIGIDEZ

Elemento lineal

Consideremos un elemento finito de barra de longitud L con nodos en sus extremos sometido a tracción/compresión (Fig.1). Al ser de segundo orden la ecuación diferencial de gobierno de una barra sometida a tracción/compresión (ver Ec. anterior), su solución exige 2 parámetros.

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) + q(x) = 0.$$

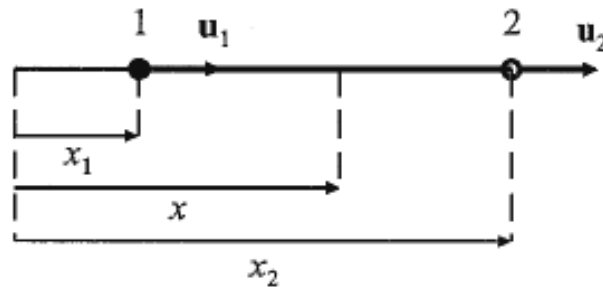


Figura 1

Si se utiliza como función de desplazamientos aproximada $u(x)$ un polinomio de primer grado, tendremos:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x,$$

su representación es una recta (Fig. 2) Y el elemento considerado es un elemento lineal. Siendo los desplazamientos u_1 y u_2 de sus nodos 1 y 2 los únicos parámetros nodales, al particularizar los valores de la función de desplazamientos $u(x)$ en los nodos del elemento, de acuerdo como vimos en elementos finitos 1D, se obtiene

$$u(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2 = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

o bien

$$\{\mathbf{u}_e\} = [\mathbf{N}_e] \{\boldsymbol{\delta}_e\},$$

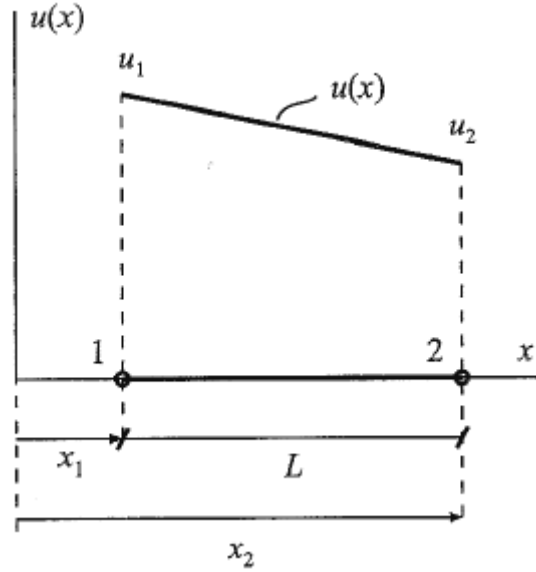


Figura 2

donde $[N_e]$ es la matriz de interpolación o matriz de forma del elemento

$$[N_e] = [N_1 \ N_2] = [N_1 \ N_2].$$

donde,

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{L}, \quad N_2 = \frac{-x_1 + x}{L},$$

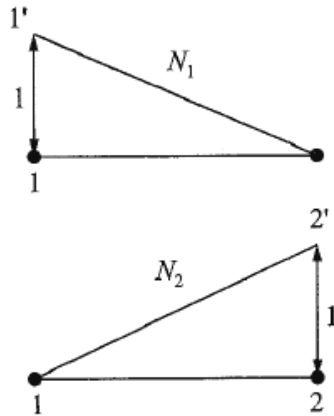


Figura 3

son las funciones de interpolación o de forma del elemento lineal y son polinomios que tienen valor unidad en el nodo correspondiente y valor cero en el otro nodo (Fig. 3), por lo que son polinomios lagrangianos y el elemento será lagrangiano. Cada función de interpolación N_i determina los desplazamientos de los puntos del elemento cuando se le da un valor unidad al desplazamiento del nodo i manteniendo nulo el desplazamiento del otro nodo. Por esta razón, también se les llama funciones piramidales.

Si se adopta como origen de coordenadas el nodo 1, entonces $x_1 = 0$ y $x_2 = L$, las expresiones de las funciones de interpolación se reducen a:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L}, \quad N_2 = \frac{x}{L},$$

Y la matriz de interpolación correspondiente es:

$$[\mathbf{N}_e] = \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right].$$

Teniendo en cuenta:

$$N = EA \frac{du}{dx}.$$

la ley de fuerzas normales de un elemento lineal es:

$$N = EA \left[\frac{d\mathbf{N}_e}{dx} \right] \{\boldsymbol{\delta}\} = EA \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

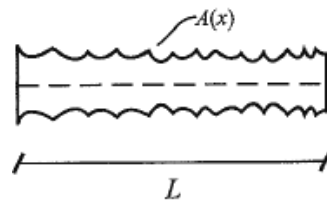
es decir

$$N = EA \frac{u_2 - u_1}{L}.$$

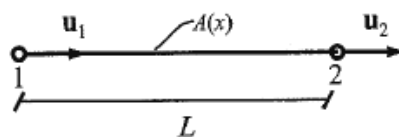
Discretización en un elemento finito

Consideremos una barra sometida a tracción/compresión (Fig. 4a) que se ha discretizado utilizando un elemento lineal cuyos desplazamientos nodales son u_1 y u_2 (Fig. 4b). Según lo visto en elementos finitos 1D, la matriz de rigidez del elemento finito es:

$$[\mathbf{k}_e] = \int_{V_e} [\mathbf{B}_e]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_e] dV_e,$$



(a)



(b)

Figura 4 a y b

siendo $[D]$ la matriz constitutiva (matriz de esfuerzos-deformaciones) y $[B_e]$ la matriz de deformación del elemento, definida por la relación:

$$\{\epsilon\} = [B_e]\{\delta_e\}.$$

Un punto cualquiera situado en una sección transversal del elemento está sometido a un estado uniaxial de esfuerzos $\sigma(x)$ al que corresponde una matriz constitutiva

$$[D] = E,$$

siendo E el módulo de elasticidad del material. Además, el vector de deformaciones se reduce a

$$\{\epsilon\} = \epsilon_x.$$

Sustituyendo en la ecuación de k_e , $[D] = E$ y $dV_e = A(x)dx$, por ser constante el estado de deformaciones en todos los puntos de una sección transversal, se determina la matriz de rigidez de un elemento sometido a tracción/compresión

$$[k_e] = \int_L [B_e]^T E A(x) [B_e] dx.$$

Según lo visto, la deformación lineal en un punto es;

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}$$

Y teniendo en cuenta que:

$$u(x) = [N_e]\{\delta_e\},$$

por lo que

$$\{\epsilon\} = \epsilon_x = \frac{du}{dx} = \left[\frac{dN_e}{dx} \right] \{\delta_e\} = [B_e]\{\delta_e\},$$

y, por tanto, la matriz de deformación de un elemento finito sometido a tracción/compresión es

$$[B_e] = \left[\frac{dN_e}{dx} \right]$$

$$[B_e] = [\partial][N_e].$$

En este caso:

$$[\boldsymbol{\theta}] = \frac{d}{dx}.$$

Por consiguiente

$$[\mathbf{B}_e] = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix},$$

o sea

$$[\mathbf{B}_e] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo esta expresión en $[k_e]$, se obtiene la expresión de la matriz de rigidez del elemento que, por ser un sólo elemento, es también la matriz completa de rigidez de la barra

$$[\mathbf{K}_0] = [\mathbf{k}_e] = \int_L \begin{vmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{vmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} A(x) dx$$

es decir

$$[\mathbf{K}_0] = [\mathbf{k}_e] = \frac{E \int_L A(x) dx}{L^2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Cuando $EA(x)$ es constante

$$[\mathbf{K}_0] = [\mathbf{k}_e] = \frac{EA}{L} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},$$

que coincide con la expresión de la matriz de rigidez de una barra solicitada a tracción/compresión, del método de los desplazamientos. La razón de esta coincidencia es el haber elegido como aproximación para los desplazamientos funciones de forma piramidales o sobrero, que establecen la linealidad de los desplazamientos, como sucede cuando las fuerzas normales actúan únicamente en las secciones extremas de una barra de sección constante.

$$[k]_L = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Matriz que veremos para el caso de barras articuladas.

RESUMEN DE ECUACIONES:

Matriz de rigidez por elemento o barra:

$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación relacionando vectores en el plano en dos sistemas de coordenadas diferentes:

$$[T] = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez global para una barra orientada arbitrariamente en el plano (2D).

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ & S^2 & -CS & -S^2 \\ & & C^2 & CS \\ \text{Simetría} & & & S^2 \end{bmatrix}$$

$$C = \cos \phi$$

$$S = \sin \phi$$

Tensión axial en la barra

$$\{\sigma\} = [C']\{d\}$$

Donde:

$$[C'] = \frac{E}{L} [-C \quad -S \quad C \quad S]$$

Para el caso espacial (3D) la matriz de transformación que relaciona los vectores es:

$$[T^*] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez global para cada elemento de barra 3D es:

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z & -C_x^2 & -C_x C_y & -C_x C_z \\ & C_y^2 & C_y C_z & -C_x C_y & -C_y^2 & -C_y C_z \\ & & C_z^2 & -C_x C_z & -C_y C_z & -C_z^2 \\ & & & C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ \text{Simetría} & & & & C_y^2 & C_y C_z \\ & & & & & C_z^2 \end{bmatrix}$$

Ejercicios prácticos

BARRAS 1D:

Problema N° 1: (Resuelto)

Para las tres barras ensambladas mostradas en la Figura 1, determinar:

- La matriz de rigidez global.
- Los desplazamientos en los nodos 2 y 3
- Las reacciones en los nodos 1 y 4.

Una fuerza de 13500 [N] se aplica en la dirección X, en el nodo 2. La longitud de cada barra es de 700 [mm]. Dado $E = 20$ [GPa] ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$) y $A = 0.0006 \text{ m}^2$ para las barras 1 y 2; para la barra 3: $E = 10$ [GPa] y $A = 0.0012 \text{ m}^2$. Los nodos 1 y 4 están fijos.

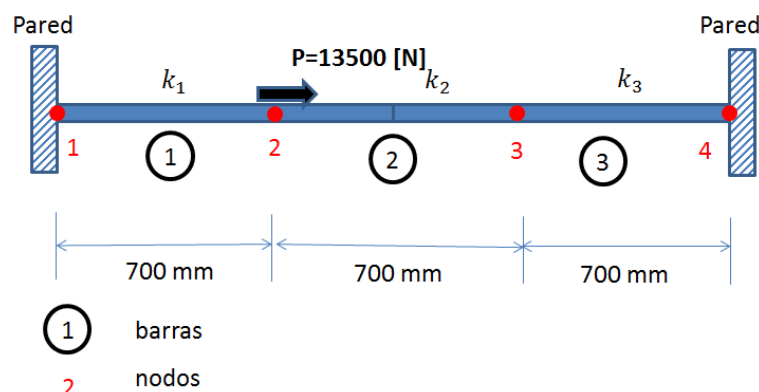


Figura 1: Sistema de tres barras doblamente empotrada con una carga en el nodo 2.

Problema N° 2: (Resolver)

Calcular en forma manual, la siguiente estructura con valores genéricos:

Consideremos el sistema de barras en voladizo de la Figura 2. Determinar los desplazamientos nodales $u(x_i)$, con $x_i = 1, 2, 3$. Asociadas a los grados de libertad $u(x_i)$, se introducen las fuerzas externas $F(x_i)$, con $x_i = 2, 3$. Las constantes ke , con $e = 1, 2$, son las matrices de rigidez correspondientes a cada barra. Suponiendo que las fuerzas aplicadas valen: $F_2 = 3f$ y $F_3 = 5f$, obtener los desplazamientos de los nodos 2 y 3 como así también la reacción en el nodo 1. f es una carga de valor genérico.

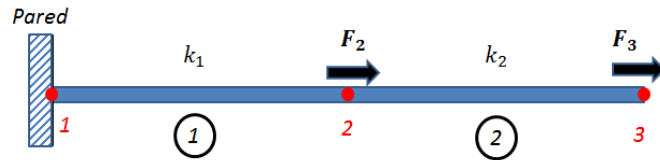


Figura 2: Sistema simple de barras con sustentación en el nodo 1 y cargas en el 2 y 3.

Problema N° 3: (Resolver)

Para los ensambles de barra que se muestran en la Figura 3, determine los desplazamientos nodales, las fuerzas en cada elemento y las reacciones. Use el método de rigidez directa o matricial.

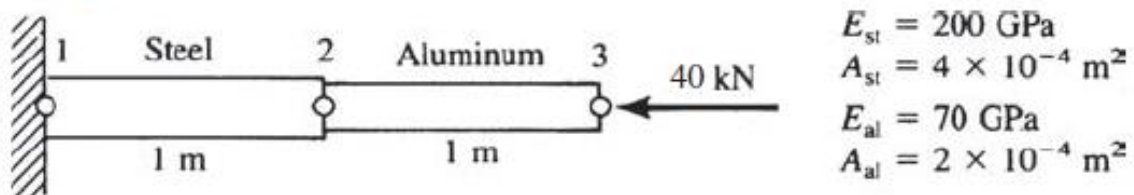


Figura 3: Sistema de dos barras con diferentes materiales y una fuerza de compresión.

BARRAS 2D:

TEORIA:

Transformación de vectores en dos dimensiones:

En muchos problemas es conveniente introducir coordenadas tanto locales (x' e y') como globales (o de referencia) (x e y). Las coordenadas locales siempre se eligen para representar convenientemente el elemento individual. Las coordenadas globales se eligen para que sean convenientes para toda la estructura. Dado el desplazamiento nodal de un elemento, representado por el vector \mathbf{d} en la Figura T1, queremos relacionar los componentes de este

vector en un sistema de coordenadas con los componentes en otro. Para propósitos generales, asumiremos en esta sección que \mathbf{d} no coincide ni con el eje local ni con el global. En este caso, queremos relacionar los componentes del desplazamiento global con los locales. Al hacerlo, desarrollaremos una matriz de transformación que posteriormente se utilizará para desarrollar la matriz de rigidez global para un elemento de barra. Definimos el ángulo θ como positivo cuando se mide en sentido anti horario desde x hasta x' . Podemos expresar el desplazamiento del vector \mathbf{d} tanto en coordenadas globales como locales mediante:

$$\mathbf{d} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} = u'\mathbf{i}' + v'\mathbf{j}'$$

Donde \mathbf{i} y \mathbf{j} son vectores unitarios o versores en las direcciones x e y globales, \mathbf{i}' y \mathbf{j}' son los correspondientes a las direcciones x' e y' locales. En la Figura T1 relacionamos ambos sistemas:

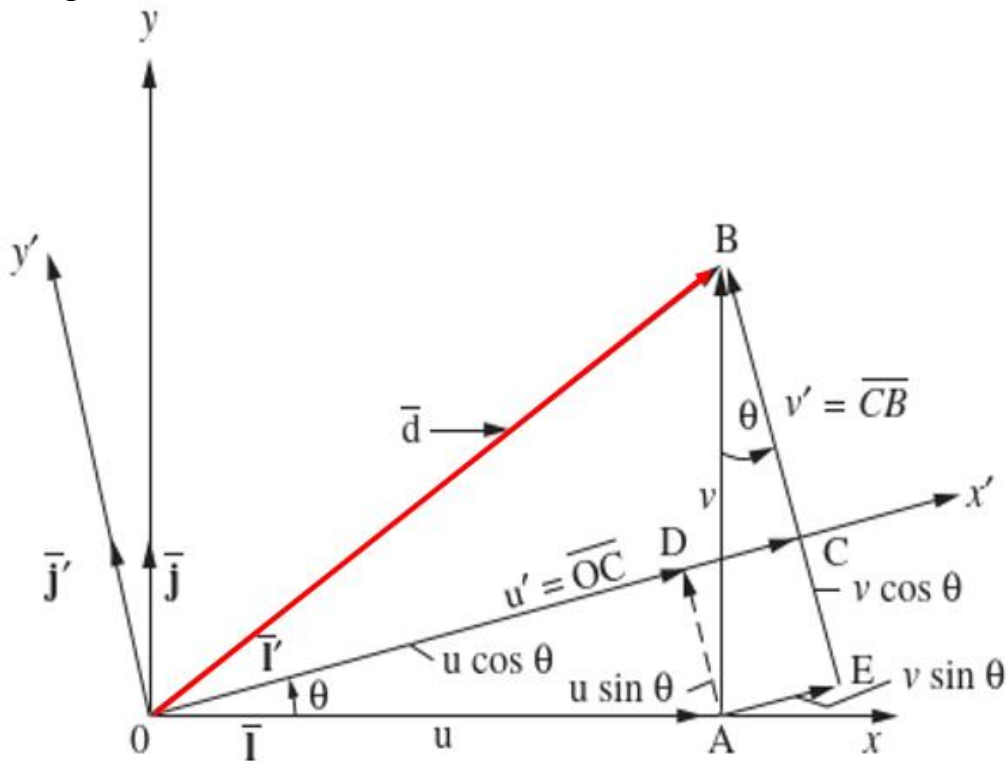


Figura T1: Vector de desplazamiento \mathbf{d} en dos dimensiones.

Las componentes del vector desplazamiento \mathbf{d} (**componentes**) en términos de cada una de las direcciones u, u', v y v' , son las siguientes (ver Figura T1)

$$\bar{u} = \overline{OA}, \bar{v} = \overline{AB}, \bar{u}' = \overline{OC}, \bar{v}' = \overline{CB} \quad (1)$$

En la dirección x' , tenemos la relación:

$$\overline{OC} = \overline{OD} + \overline{DC} \quad (2)$$

Utilizando relaciones trigonométricas y de acuerdo a las relaciones anteriores en la ecuación (1)

$$\overline{OD} = \overline{OA} \cos \theta = \bar{u} \cos \theta \text{ and } \overline{DC} = \overline{AE} = \bar{v} \sin \theta \quad (3)$$

Dada la ecuación (1) y incorporando (3) en (2):

$$u' = u \cos \theta + v \sin \theta \quad (4)$$

En forma similar y para el vector en la dirección y' , nos da la relación siguiente:

$$\overline{CB} = -\overline{AD} + \overline{BE} \quad (5)$$

Nuevamente utilizando relaciones trigonométricas y de acuerdo a las relaciones anteriores en la ecuación (1)

$$\overline{AD} = \overline{OA} \sin \theta = \bar{u} \sin \theta \text{ and } \overline{BE} = \overline{AB} \cos \theta = \bar{v} \cos \theta \quad (6)$$

Usando (1) para v' , y las relaciones (6) en (5), nos queda:

$$v' = -u \sin \theta + v \cos \theta \quad (7)$$

Expresando la (4) y la (7) juntas en forma matricial nos queda:

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Donde:

$$C = \cos(\theta) \\ S = \sin(\theta)$$

$$\{d'\} = [T]\{d\}$$

La (8) relaciona las componentes globales con las locales:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \{d'\} = \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix}$$

La matriz $[T]$ se denomina **matriz de transformación o rotación**

Con esta idea ahora estableceremos la matriz de rigidez global para una barra orientada arbitrariamente en el plano, que usaremos posteriormente para el cálculo de sistemas en el plano 2D y que luego será utilizado para el espacio 3D.

Ejemplo: (resolver) Los desplazamientos nodales globales en el nodo 2, fueron determinados con los valores $u_2 = 0.1$ y $v_2 = 0.2$ pulgadas, determinar el desplazamiento local u'_2 en el nodo 2. (Ver Figura de abajo)

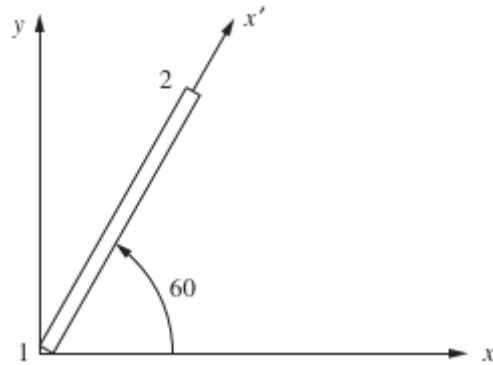


Figura Ejemplo: el eje x' es el local.

Matriz de rigidez global para una barra orientada en forma arbitraria en el Plano:

Consideremos una barra inclinada con un ángulo θ , desde el eje global x , identificado por el eje local x' , dirigido desde el nodo 1 al nodo 2 a la largo de la dirección de la barra, tal como se muestra en la Figura T2. El valor positivo del ángulo θ , es tomado en sentido contrario a las agujas del reloj, es decir desde x a x' .

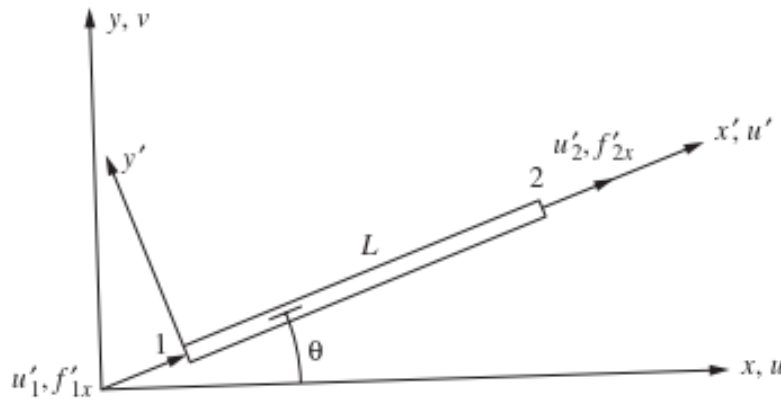


Figura T2: barra orientada arbitrariamente en el plano xy .

Usaremos lo visto en la teoría 1D para establecer la relación entre las fuerzas nodales locales $[f']$, con los desplazamientos nodales locales $[d']$, a través de la matriz de rigidez $[k']$:

$$\begin{Bmatrix} f'_{1x} \\ f'_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\{f'\} = [k']\{d'\} \quad (10)$$

Lo que queremos es relacionar las fuerzas globales nodales $[f]$, con los desplazamientos nodales globales $[d]$, a través del matriz global de la barra $[k]$ para la barra de la Figura T2 orientada en forma arbitraria, es decir queremos encontrar la matriz $[k]$, entonces:

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

O en forma matricial:

$$\{f\} = [k]\{d\} \quad (12)$$

Observamos de la Ecuación (12) que un total de cuatro componentes de fuerza y cuatro de desplazamiento surgen cuando se utilizan coordenadas globales. Sin embargo, un total de dos componentes de fuerza y dos de desplazamiento aparecen para la representación de coordenadas locales de un resorte o una barra, como se muestra en la Ecuación (10). Mediante el uso de relaciones entre componentes de fuerza local y global y entre componentes de desplazamiento local y global, podremos obtener la matriz de rigidez. Sabemos que la relación de transformación de la Ecuación (4) anterior establece que:

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_1 \cos \theta + v_1 \sin \theta \\ u'_2 &= u_2 \cos \theta + v_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (13)$$

Colocando en forma matricial nos queda:

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

O bien:

$$\{d'\} = [T^*]\{d\} \quad (15)$$

Donde:

$$[T^*] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \quad (16)$$

En forma similar, como las fuerzas se transforman de la misma manera que los desplazamientos en la ecuación (14), tendremos la relación entre esfuerzos globales y locales

$$\begin{Bmatrix} f'_{1x} \\ f'_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Luego en forma matricial nos quedará de la siguiente manera, similar a (15):

$$\{f'\} = [T^*]\{f\} \quad (18)$$

Sustituyendo (15) en (10), obtenemos:

$$\{f'\} = [k'][T^*]\{d\} \quad (19)$$

Y usando (18) en (19):

$$[T^*]\{f\} = [k'][T^*]\{d\} \quad (20)$$

Sin embargo, para escribir la expresión final que relaciona las fuerzas nodales globales con los desplazamientos nodales globales de un elemento, debemos invertir $[T^*]$ en la ecuación (20). Esto no es posible de inmediato porque $[T^*]$ no es una matriz cuadrada. Por lo tanto, debemos expandir $\{d'\}$, $\{f'\}$ y la matriz $[k']$ en el orden que sea consistente con el uso de coordenadas globales aunque f'_{1y} y v'_{2y} sean cero. Usando la ecuación (8) anterior para cada desplazamiento nodal, obtenemos:

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Es decir:

$$\{d'\} = [T]\{d\} \quad (22)$$

Donde:

$$[T] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \quad (23)$$

De igual manera podemos escribir para las fuerzas:

$$\{f'\} = [T]\{f\} \quad (24)$$

Debido a que junto a los desplazamientos son vectores. Además $[k']$ deberá ser expandida, en consecuencia la ecuación (9) quedará:

$$\begin{Bmatrix} f'_{1x} \\ f'_{1y} \\ f'_{2x} \\ f'_{2y} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Es decir, como f'_{1y} y f'_{2y} son nulas, filas de ceros aparecerán en la matriz $[k']$, correspondientes a esas componentes. Usando (22) y (24) en (10)

$$[T]\{f\} = [k'] [T]\{d\} \quad (26)$$

La ecuación (26) es por lo tanto la (20) expandida. Pre multiplicando ambos lados de la ecuación (26) por $[T]^{-1}$, tendremos:

$$\{f\} = [T]^{-1} [k'] [T]\{d\} \quad (27)$$

Se puede demostrar que para esta matriz:

$$[T]^{-1} = [T]^T \quad (28)$$

Las propiedades de matrices cuadradas tales como la (28) define a $[T]$ como una **matriz ortogonal**. La matriz de transformación $[T]$, entre sistemas de coordenadas rectangulares es ortogonal, propiedad que usaremos. Sustituyendo (28) en (27), obtenemos la matriz de rigidez global para un elemento de barra orientado arbitrariamente en el plano

$$\{f\} = [T]^T [k'] [T] \{d\} \quad (29)$$

Igualando las ecuaciones (12) con la (29), nos da la matriz de rigidez global para un elemento de barra:

$$[k] = [T]^T [k'] [T] \quad (30)$$

Sustituyendo la ecuación (23) de $[T]$ y la forma expandida de $[k']$, dada en la ecuación (25), en la ecuación (30), obtenemos $[k]$ dada en forma explícita:

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ & S^2 & -CS & -S^2 \\ \text{Symmetry} & & C^2 & CS \\ & & & S^2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Es decir es la matriz de rigidez global de una barra orientada en forma arbitraria en el plano xy (global).

Ahora, debido a que la función de desplazamiento en elementos finitos y de acuerdo con la Figura T3 se supuso elemento por elemento continuo por partes, la matriz de rigidez para cada elemento se puede ensamblar utilizando el **método de rigidez directa** para obtener:

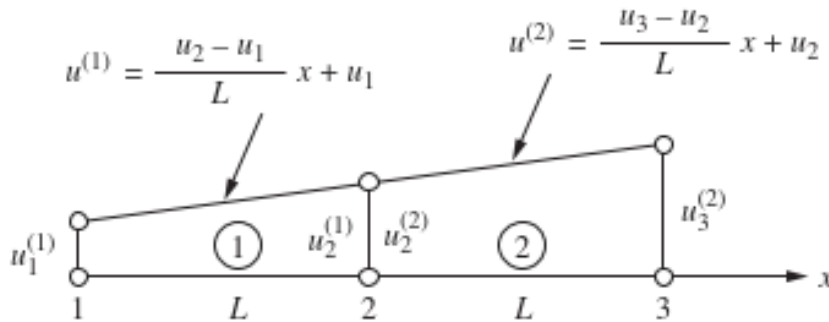


Figura T3: continuidad entre elementos para una estructura de dos barras.

$$\sum_{e=1}^N [k^{(e)}] = [K] \quad (32)$$

Donde $[K]$ es la matriz de rigidez total y N es el número total de elementos. De manera similar, cada matriz de fuerza nodal global de elemento se puede sumar de manera que:

$$\sum_{e=1}^N \{f^{(e)}\} = \{F\} \quad (33)$$

Entonces $[K]$ relaciona las fuerzas nodales globales con los desplazamientos nodales globales $[d]$ a través de:

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad (34)$$

Veamos un ejemplo:

Dada la barra de la Figura T4, evaluar la matriz de rigidez global con respecto al sistema coordenado xy . La barra tiene una área de sección transversal de $2 \text{ [in}^2\text{]}$, cuya longitud es de 60 [in] y módulo de Elasticidad de $30 \times 10^6 \text{ [psi]}$. La barra forma un ángulo de $\theta = 30^\circ$.

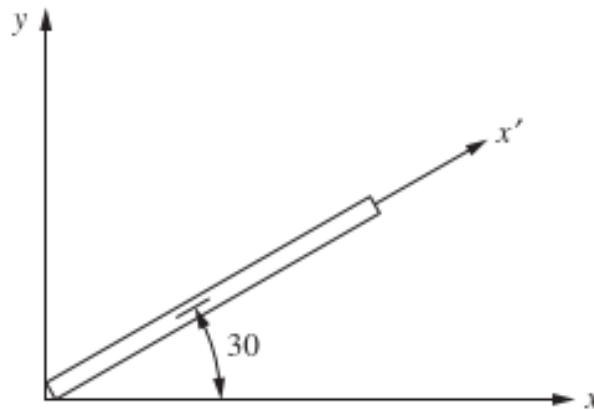


Figura T4: elemento de barra para evaluar la matriz de rigidez.

Solución:

$$\theta = 30^\circ \quad C = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad S = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$[k] = \frac{(2)(30 \times 10^6)}{60} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} \\ & \frac{1}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{4} \\ & & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \text{Symmetry} & & & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}}$$

$$[k] = 10^6 \begin{bmatrix} 0.75 & 0.433 & -0.75 & -0.433 \\ & 0.25 & -0.433 & -0.25 \\ & & 0.75 & 0.433 \\ \text{Symmetry} & & & 0.25 \end{bmatrix} \frac{\text{lb}}{\text{in.}}$$

Calculo de las tensiones para una barra en el plano xy:

Veremos en este caso como determinar las tensiones en un elemento de barra:

En una barra las fuerzas locales se relacionan con los desplazamientos locales por las ecuaciones vistas anteriormente, a saber:

$$\begin{Bmatrix} f'_{1x} \\ f'_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

La definición usual de tensión de tracción axial, es la fuerza axial dividida por el área de la sección transversal de la barra:

$$\sigma = \frac{f'_{2x}}{A} \quad (36)$$

Donde f'_{2x} es la fuerza que “empuja”, es decir tracciona (puede comprimir también) sobre la barra como se muestra en la Figura T5

$$f'_{2x} = \frac{AE}{L} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

Por lo tanto, combinando (36) y (37) producirá:

$$\{\sigma\} = \frac{E}{L} [-1 \quad 1] \{d'\} \quad (38)$$

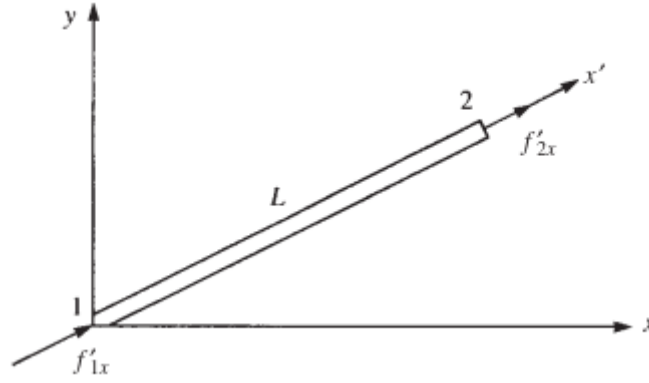


Figura T5: Elemento de barra con fuerzas nodales positivas.

Usando la ecuación (15), obtenemos:

$$\{\sigma\} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} [T^*] \{d\} \quad (39)$$

Que expresada en forma más simple:

$$\{\sigma\} = [C'] \{d\} \quad (40)$$

Donde ahora usamos la ecuación (16) para $[T^*]$:

$$[C'] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \quad (41)$$

Que multiplicando en la anterior nos quedará:

$$[C'] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -C & -S & C & S \end{bmatrix} \quad (42)$$

Veamos con un ejemplo como lo calculamos:

Ejemplo. Para la barra de la Figura T6, determinar las tensiones axiales. Dado $A = 4 \times 10^{-4} [m^2]$, $E = 210 [GPa]$ y $L = 2 [m]$, y tomamos un ángulo entre los ejes x y x' de 60° . Los desplazamientos globales fueron determinados previamente con los siguientes valores: $u_1 = 0.25 [mm]$, $v_1 = 0.0 [mm]$, $u_2 = 0.50 [mm]$ y $v_2 = 0.75 [mm]$.

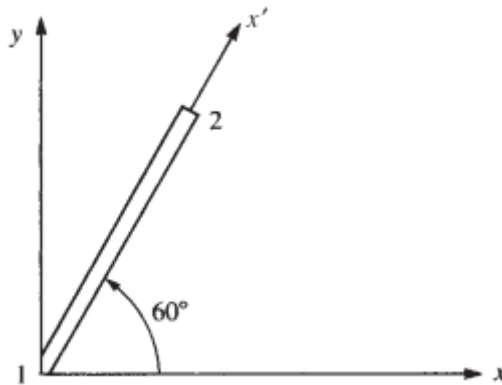


Figura T6: barra para el cálculo de tensiones

Usaremos la ecuación (40) para calcular la tensión axial, por consiguiente primero calcularemos la matriz $[C']$ de (41):

$$[C'] = \frac{210 \times 10^6 \text{ kN/m}^2}{2 \text{ m}} \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Usando:

$$C = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ and } S = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

En la ecuación (43)

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.25 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 0.0 \\ 0.50 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 0.75 \times 10^{-3} \text{ m} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

Luego con (43) y (44) en (40), obtenemos las tensiones axiales en la barra:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{210 \times 10^6}{2} \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.25 \\ 0.0 \\ 0.50 \\ 0.75 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \\ &= 81.32 \times 10^3 \text{ kN/m}^2 = 81.32 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Que es la solución de nuestro problema

(NOTA: PROGRAMAR EL EJERCICIO)

=====

Problema N° 4: (Resuelto) EJERCICIO GUIA

Para la armadura plana (2D) compuesta por los tres elementos que se muestran en la Figura 4 sometidos a una fuerza hacia abajo de 10,000 [lb] aplicada en el nodo 1, determine los desplazamientos X e Y en el nodo 1 y las tensiones en cada elemento. Sea $E = 30 \times 10^6$ [psi] y $A = 2$ [in²] para todos los elementos o barras. Las longitudes de los elementos se muestran en la figura.

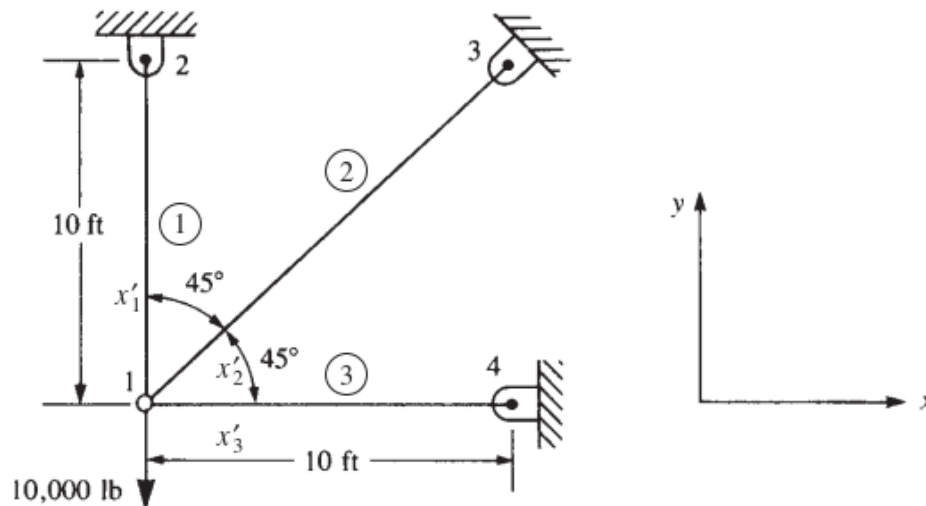


Figura 4: Sistema de tres barras en el plano.

Element	θ°	C	S	C^2	S^2	CS
1	90°	0	1	0	1	0
2	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	0°	1	0	1	0	0

Tabla 1: datos para las barras de la estructura de la Figura 4

SOLUCION

Primero, determinamos las matrices de rigidez global para cada elemento usando la ecuación 31 ya vista

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ & S^2 & -CS & -S^2 \\ & & C^2 & CS \\ \text{Simetría} & & & S^2 \end{bmatrix}$$

Esto requiere la determinación del ángulo θ entre el eje x global y el eje x' local para cada elemento. En este ejemplo, la dirección del eje x' para cada elemento se toma en la dirección del nodo 1 al otro nodo como se muestra en la Figura 4. La numeración de nodos es arbitraria para cada elemento. Sin embargo, una vez que se elige la dirección, el ángulo θ se establece como positivo cuando se mide en sentido anti horario desde eje x positivo hasta eje x' . Para el elemento 1, el eje x'_1 local se dirige desde el nodo 1 al nodo 2; por lo tanto, $\theta^{(1)} = 90^\circ$. Para el elemento 2, el eje x'_2 local se dirige desde el nodo 1 al nodo 3, $\theta^{(2)} = 45^\circ$. Para el elemento 3, el eje x'_3 local se dirige desde el nodo 1 al nodo 4 y $\theta^{(3)} = 0^\circ$. Es conveniente construir la Tabla 1 para ayudar a determinar la matriz de rigidez de cada elemento.

Hay un total de ocho componentes nodales de desplazamiento, o grados de libertad, para la cercha antes de que se impongan las restricciones de contorno. Por tanto, el orden de la matriz de rigidez total debe ser 8×8 . Entonces podríamos expandir la matriz $[k]$ para cada elemento al orden de 8×8 agregando filas y columnas de ceros como se explica en la teoría. Alternativamente, podríamos etiquetar las filas y columnas de cada matriz de rigidez de elemento de acuerdo con los componentes de desplazamiento asociados con ella. Usando este último enfoque, construimos la matriz de rigidez total $[K]$ simplemente agregando términos de las matrices de rigidez de los elementos individuales en sus ubicaciones correspondientes en $[K]$.

Analizar con la teoría.

De acuerdo con lo dicho, tomamos el elemento/barra 1 y de acuerdo con la Tabla 1 para la dirección de los cosenos, obtenemos:

$$[k^{(1)}] = \frac{(30 \times 10^6)(2)}{120} \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

De igual manera para el elemento 2:

$$[k^{(2)}] = \frac{(30 \times 10^6)(2)}{120 \times \sqrt{2}} \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

y para el elemento 3:

$$[k^{(3)}] = \frac{(30 \times 10^6)(2)}{120} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para todas las ecuaciones el factor $(30 \times 10^6) \cdot 2 / 120 = 500000$, puede ser tomado de las ecuaciones anteriores, donde cada término en la matriz cuadrada del segundo elemento es multiplicado por $\sqrt{2}$. Después agregando términos desde las matrices de rigidez individuales de cada barra en su correspondiente localización en $[K]$, obtendremos la matriz de rigidez global o total:

$$[K] = (500,000) \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 1.354 & 0.354 & 0 & 0 & -0.354 & -0.354 & -1 & 0 \\ 0.354 & 1.354 & 0 & -1 & -0.354 & -0.354 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.354 & -0.354 & 0 & 0 & 0.354 & 0.354 & 0 & 0 \\ -0.354 & -0.354 & 0 & 0 & 0.354 & 0.354 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz relacionará las fuerzas globales a los desplazamientos globales. Por lo tanto, escribiremos el sistema global total con las restricciones en los nodos 2 y 4 y con la carga en el nodo 1, de la siguiente forma

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -10,000 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = (500,000) \begin{bmatrix} 1.354 & 0.354 & 0 & 0 & -0.354 & -0.354 & -1 & 0 \\ 0.354 & 1.354 & 0 & -1 & -0.354 & -0.354 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.354 & -0.354 & 0 & 0 & 0.354 & 0.354 & 0 & 0 \\ -0.354 & -0.354 & 0 & 0 & 0.354 & 0.354 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \\ u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \end{Bmatrix}$$

Ahora podríamos usar el esquema de partición descrito en teoría para obtener las ecuaciones usadas para determinar los desplazamientos desconocidos u_1 y v_1 , es decir, particionar las dos primeras ecuaciones de la tercera a la octava en la ecuación anterior. Alternativamente, podríamos eliminar filas y

columnas en la matriz de rigidez total correspondiente a cero desplazamientos como se describió previamente. Aquí usaremos el último enfoque; es decir, eliminamos las filas y la columna 3-8 en la ecuación anterior porque esas filas y columnas corresponden a cero desplazamientos. Entonces obtenemos

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -10,000 \end{Bmatrix} = (500,000) \begin{bmatrix} 1.354 & 0.354 \\ 0.354 & 1.354 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

Este sistema de ecuaciones se puede resolver de la manera usual, obteniendo el valor de los desplazamientos faltantes:

$$u_1 = 0.414 \times 10^{-2} \text{ in.} \quad v_1 = -1.59 \times 10^{-2} \text{ in.}$$

El signo negativo en la componente v_1 , nos indica que dicho desplazamiento está en la dirección negativa del eje y , de acuerdo con el sistema global que asumimos, es decir el nodo 1 se desplaza hacia abajo.

Usando la Tabla 1 anterior calculamos las tensiones en cada barra (ver ecuaciones 40-41):

$$\sigma^{(1)} = \frac{30 \times 10^6}{120} [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1] \begin{Bmatrix} u_1 = 0.414 \times 10^{-2} \\ v_1 = -1.59 \times 10^{-2} \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \end{Bmatrix} = 3965 \text{ psi}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(2)} &= \frac{30 \times 10^6}{120\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0.414 \times 10^{-2} \\ v_1 = -1.59 \times 10^{-2} \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{Bmatrix} \\ &= 1471 \text{ psi} \end{aligned}$$

$$\sigma^{(3)} = \frac{30 \times 10^6}{120} [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{Bmatrix} u_1 = 0.414 \times 10^{-2} \\ v_1 = -1.59 \times 10^{-2} \\ u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \end{Bmatrix} = -1035 \text{ psi}$$

Ahora verificamos nuestros resultados examinando el equilibrio de fuerzas en el nodo 1; es decir, sumando fuerzas en las direcciones x e y globales, obtenemos:

$$\sum F_x = 0 \quad (1471 \text{ psi})(2 \text{ in}^2) \frac{\sqrt{2}}{2} - (1035 \text{ psi})(2 \text{ in}^2) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad (3965 \text{ psi})(2 \text{ in}^2) + (1471 \text{ psi})(2 \text{ in}^2) \frac{\sqrt{2}}{2} - 10,000 = 0$$

(NOTA: PROGRAMAR ESTE EJEMPLO Y QUE SIRVA COMO ALGORITMO PARA EL RESTO)

PROBLEMAS A RESOLVER Y PROGRAMAR:

Problema N° 5: (Resuelto)

PAG 3

Una estructura de tres elementos de barras está cargada por dos fuerzas de puntuales (P y $2P$), ver la Figura 4. El módulo elástico, el área de la sección transversal y la longitud de cada barra se muestran en la figura. Analizar la estructura mediante el uso de un método matricial y determinar las fuerzas de reacción en todos los nodos.

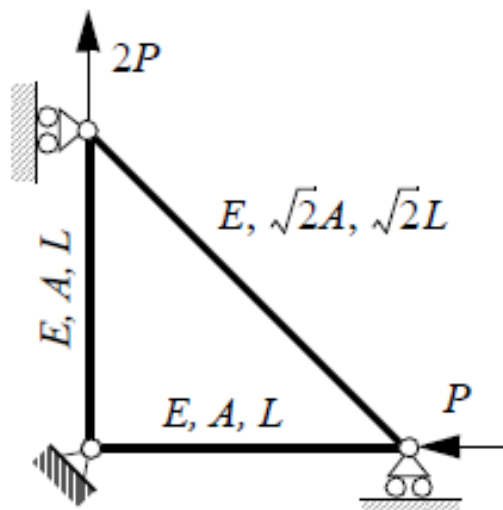


Figura 5: Sistema de barras con restricciones y cargas puntuales

Problema N° 6: (Resolver)

Se desea obtener los desplazamientos nodales, los esfuerzos en las barras y las reacciones en la estructura de la Figura 6, con las dimensiones y características mecánicas de cada barra que están indicadas en la misma. Planteando el equilibrio en cada barra se obtienen las correspondientes matrices de rigidez en ejes locales \mathbf{k}^e . Por ejemplo para la barra 3, en la Figura 6.1 se muestran las fuerzas nodales P , las fuerzas internas N y los desplazamientos nodales u con sus componentes en los ejes locales $\{x', y'\}$. Calcular desplazamientos, reacciones, deformaciones y tensiones en cada barra, bajo el sistema coordenado global $\{x, y\}$. Plantear el problema en

forma matricial, calculando en forma manual. Luego de ello con el programa desarrollado calcular el mismo en forma computacional y corroborar resultados.

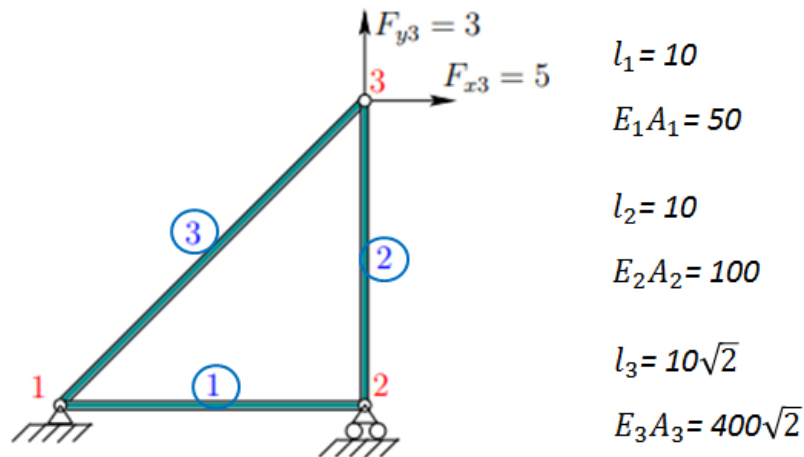


Figura 6: Geometría y características mecánicas de la estructura de barras.

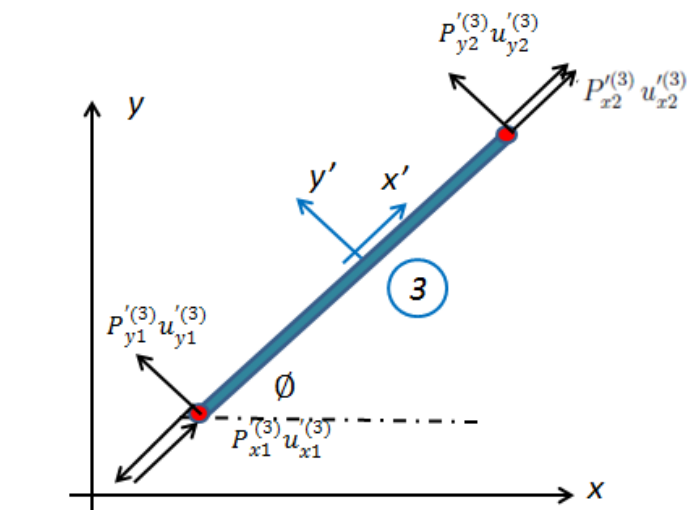


Figura 6.1: Análisis de equilibrio de la barra 3

Problema N° 7: (Resuelto) [PAG 5](#)

Para el sistema de armadura de la Figura 7.1, determinar los desplazamientos nodales, las fuerzas por cada barra y las tensiones en las mismas. Asimismo, las reacciones en los soportes. Todas las barras tienen $E=70$ [GPa] y un área $A=0.0003$ [m²]. Verificar las fuerzas de equilibrio en los nodos 2 y 4. Usar simetría en el modelo

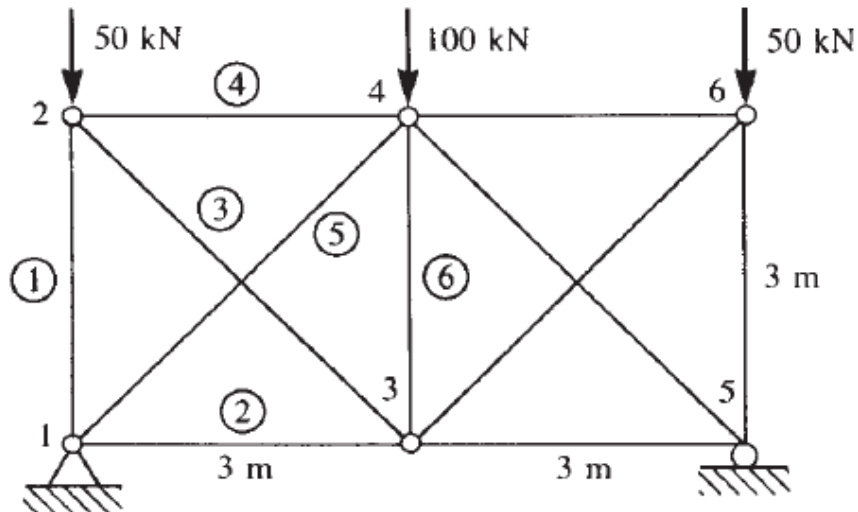


Figura 7.1: Armadura con sistema de barras en 2D (plano)

Problema N° 8: (Resolver con el código desarrollado por cada uno y en forma manual)

Determine los desplazamientos y las fuerzas de reacción en los nodos de la Figura 8.

Node	x/L	y/L
1	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$
2	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$
3	0	1
4	0	0

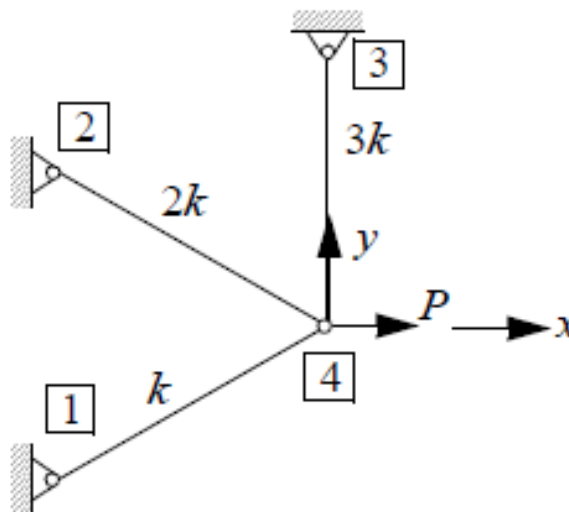


Figura 8: Sistema de barras en 2D.

Problema N° 9: (Resolver con el código desarrollado)

La estructura de armadura plana de la Figura 9, se compone de cuatro elementos de barra, cada una de longitud L y con constante de rigidez k . Todos las barras están orientadas con un ángulo de 45° con respecto al plano horizontal. Determinar todos los desplazamientos y fuerzas de reacción en los nodos.

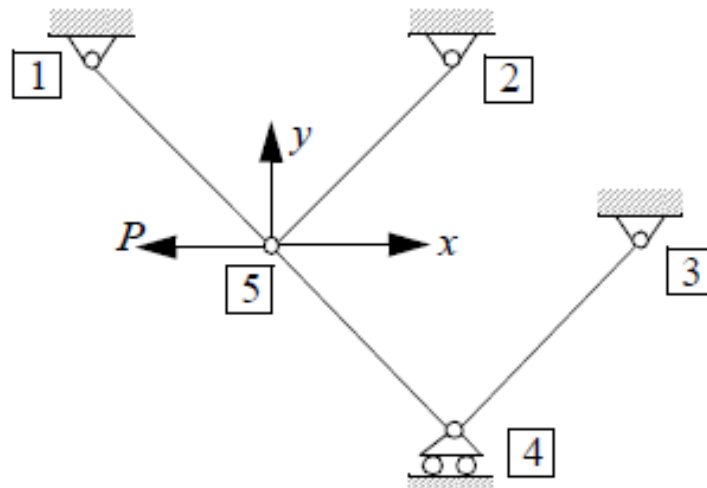


Figura 9: Estructura de armadura en 2D.

Nota: Utilizar este ejemplo para aplicar al programa de barras con cálculo matricial, desarrollado.

Para ver resultados, establecer los datos de cálculo:

Coordenadas de los nodos

Longitud de las barras

Rigidez de las mismas y Área de sección transversal

Fuerzas sobre la estructura.

Problema N° 10: (Resolver con el código desarrollado)

Implementar con el código realizado la estructura de armadura de seis barras como se muestra a continuación.

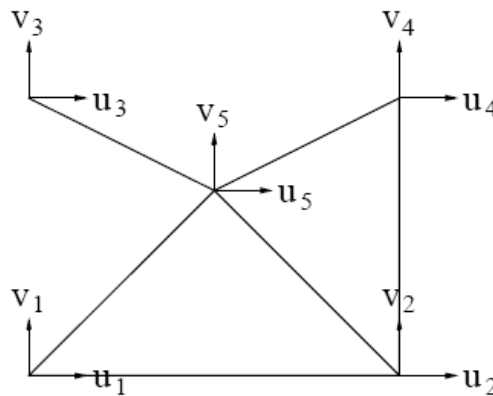
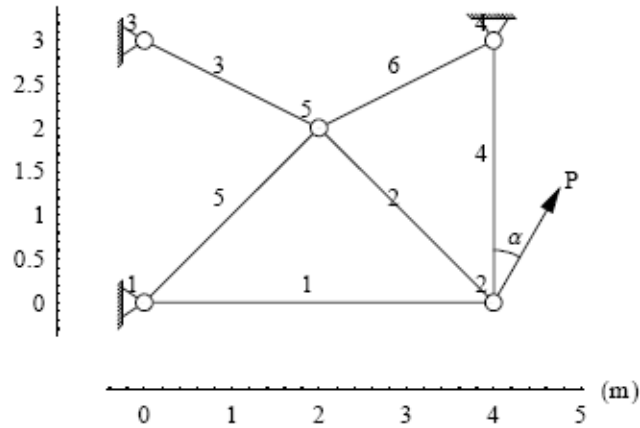


Figura 10: Para calcular con el código desarrollado

Para todos los elementos de barra: $E = 200 \text{ GPa}$ y $A = 0.001 \text{ m}^2$. La carga $P = 20 \text{ kN}$ y actúa en un ángulo $\alpha = 30^\circ$. Las dimensiones en metros se muestran en la Figura 10. Es necesario calcular los desplazamientos nodales, las fuerzas de reacción en los nodos con restricciones de desplazamiento y las fuerzas / tensiones en cada elemento de la armadura.

NOTA: Tener en cuenta que la numeración de los nodos y elementos que se muestran en la Figura puede ser diferente. Cada grupo puede asignar otros valores y dimensiones si lo considera conveniente a modo de ensayo.

Problema N° 11: (Resolver con el código desarrollado)

Para la armadura de un hipotético techo que se muestra en la Figura 11, usar la simetría para determinar los desplazamientos de los nodos y las tensiones en cada elemento de barra. Todos los elementos tienen: $E = 210 \text{ [GPa]}$ y $A = 10 \times 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}$.

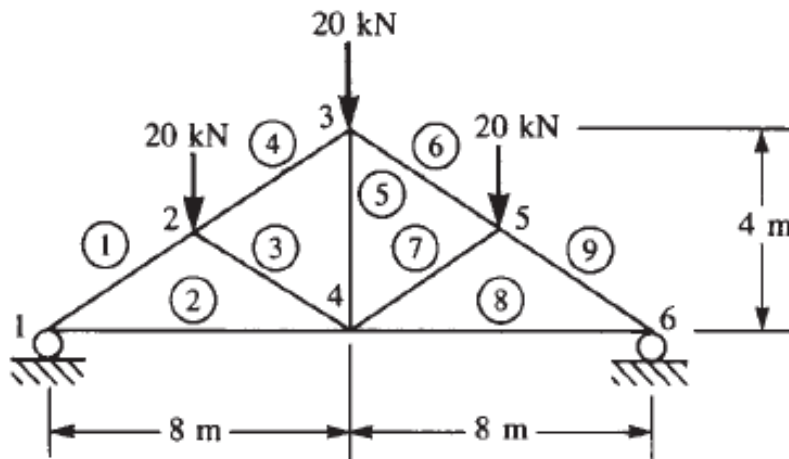


Figura 11: Armadura para el sostén de techos en galpones de la zona.

ESPACIAL (3D): Optativo

Problema N° 12: (Resolver con el código desarrollado)

Considere la armadura espacial que se muestra en la Figura 12. Los soportes en los nodos 1, 2 y 3 son articulaciones esféricas que permiten la rotación pero no la traslación. Dado $E = 200\text{GPa}$, $A_{14} = 0.001\text{m}^2$, $A_{24} = 0.002\text{m}^2$, $A_{34} = 0.001\text{m}^2$ y $P = 12\text{kN}$, determine:

- La matriz de rigidez global de la estructura.
- Los desplazamientos en el nodo 4
- Las reacciones en los nodos 1, 2 y 3
- Las tensiones en cada barra.

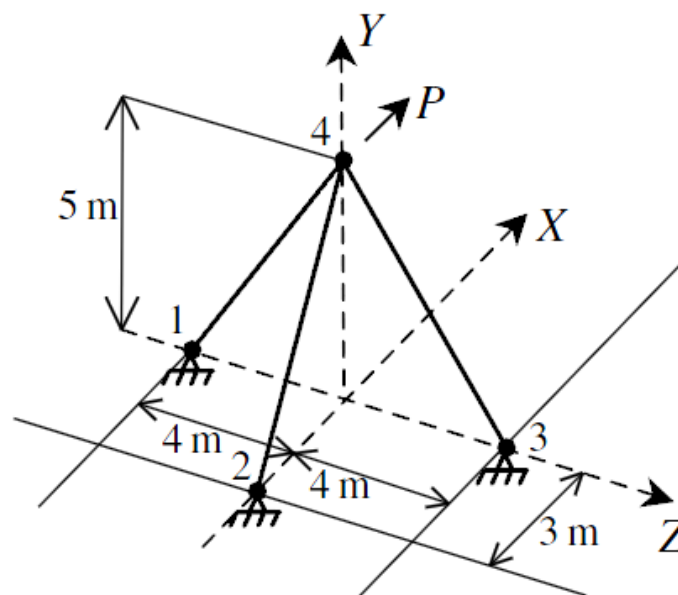


Figura 12: Armadura espacial con tres elementos

NOTA: Calculo de barras espaciales

Ecuaciones Básicas

El elemento de armadura espacial es un elemento finito tridimensional con coordenadas locales y globales. Se caracteriza por funciones de forma lineal. El elemento de armadura espacial tiene un módulo de elasticidad E , área de sección transversal A y longitud L . Cada elemento de armadura espacial tiene dos nodos y está inclinado con ángulos $\theta_x, \theta_y, \theta_z$, medidos a partir de los ejes global: (X, Y, Z) , respectivamente, al eje x local como se muestra en la Figura 12.2. Sea $C_x = \cos(\theta_x)$, $C_y = \cos(\theta_y)$, $C_z = \cos(\theta_z)$. En este caso, la matriz de rigidez del elemento viene dada por:

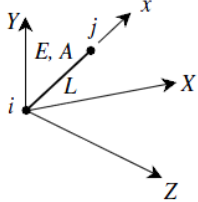
$$k = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z & -C_x^2 & -C_x C_y & -C_x C_z \\ C_y C_x & C_y^2 & C_y C_z & -C_y C_x & -C_y^2 & -C_y C_z \\ C_z C_x & C_z C_y & C_z^2 & -C_z C_x & -C_z C_y & -C_z^2 \\ -C_x^2 & -C_x C_y & -C_x C_z & C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ -C_y C_x & -C_y^2 & -C_y C_z & C_y C_x & C_y^2 & C_y C_z \\ -C_z C_x & -C_z C_y & -C_z^2 & C_z C_x & C_z C_y & C_z^2 \end{bmatrix}$$


Figura 12.2: Elemento de barra espacial

Está claro que el elemento de armadura espacial tiene seis grados de libertad, tres en cada nodo. En consecuencia, para una estructura con n nodos, la matriz de rigidez global K será de tamaño $3n \times 3n$ (ya que tenemos tres grados de libertad en cada nodo). La matriz de rigidez global K se ensambla haciendo llamadas a la función de ensamble, que deberá ser escrita específicamente para este propósito.

Una vez que se obtiene la matriz de rigidez global K , tenemos la siguiente ecuación de estructura:

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\}$$

donde $\{u\}$ es el vector de desplazamiento nodal global y $\{F\}$ es el vector de fuerza nodal global. En este paso, las condiciones de contorno se aplican manualmente a los vectores U y F . Luego, la matriz anterior se resuelve mediante partición y eliminación gaussiana. Finalmente, una vez que se encuentran los desplazamientos y reacciones desconocidas, se obtiene la fuerza para cada elemento de la siguiente manera:

$$f = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -C_x & -C_y & -C_z & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \{u\}$$

donde, f es la fuerza en el elemento (un escalar) y u es el vector de desplazamiento del elemento de dimensión 6×1 . La tensión del elemento se obtiene dividiendo la fuerza del elemento por el área de sección transversal A .

(NOTA: Se analizará en clase la manera de generar el código para el cálculo de armaduras por el método directo o matricial).

Anexo: matriz ortogonal

Una matriz ortogonal es una matriz cuadrada que tiene propiedades muy interesantes, especialmente en el contexto del álgebra lineal y la geometría.

Definición de una matriz ortogonal

Una matriz Q es ortogonal si su inversa es igual a su traspuesta. Es decir:

$$Q^T = Q^{-1}$$

Esto implica que cuando multiplicas una matriz ortogonal por su traspuesta, obtienes la matriz identidad:

$$Q^T Q = Q Q^T = I$$

donde I es la matriz identidad.

Propiedades de una matriz ortogonal

1. Conservación de la norma:

- Si Q es una matriz ortogonal y x es cualquier vector, entonces la transformación Qx no cambia la longitud (o norma) del vector x . Esto se debe a que:

$$\|Qx\| = \|x\|$$

En otras palabras, una matriz ortogonal preserva distancias.

2. Preservación del producto interno:

- La matriz ortogonal también conserva el producto interno entre dos vectores x y y :

$$(Qx)^T(Qy) = x^T y$$

Esto significa que las relaciones angulares entre los vectores se mantienen inalteradas, es decir, los ángulos entre los vectores no cambian al aplicar una matriz ortogonal.

3. Columnas ortogonales y normalizadas:

- Las columnas de una matriz ortogonal son vectores ortogonales entre sí y tienen norma 1, es decir, forman una **base ortonormal**. Esto implica que:

$$q_i^T q_j = \delta_{ij} \quad (\text{donde } \delta_{ij} \text{ es la delta de Kronecker})$$

donde q_i y q_j son columnas de Q , y δ_{ij} es 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$.

4. Determinante:

- El determinante de una matriz ortogonal es siempre 1 o -1 :

$$\det(Q) = \pm 1$$

Si $\det(Q) = 1$, la matriz describe una rotación pura; si $\det(Q) = -1$, la matriz incluye una reflexión.

5. Propiedad de estabilidad bajo multiplicación:

- Si Q_1 y Q_2 son matrices ortogonales, el producto de ambas también es una matriz ortogonal:

$$(Q_1 Q_2)^T = Q_2^T Q_1^T = Q_2^{-1} Q_1^{-1} = (Q_1 Q_2)^{-1}$$

6. Involutiva en transformaciones geométricas:

- En aplicaciones geométricas, como rotaciones o reflexiones, una matriz ortogonal es importante porque al aplicar Q y luego su inversa, se recupera el vector original. Esto es útil en transformaciones como rotaciones y simetrías en el espacio euclidiano.

Ejemplos de matrices ortogonales

- Rotación en 2D:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Esta matriz rota un vector en el plano xy por un ángulo θ sin cambiar su norma.

- Reflexión en 2D:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz refleja un vector respecto al eje x .

Estas son las principales propiedades de una matriz ortogonal, que la hacen muy útil en áreas tales como la computación gráfica, el análisis numérico y la física.