EJEMPLO · BARRAS

Consideremos una estructura como la de la figura que corresponde al pilar de un puente de altura $h = 20\,m$. cuya sección se ensancha hacia el extremo superior con el fin de soportar adecuadamente el tablero en toda su sección y en todo su ancho.

El área en la base es de $2\,m^2$ mientras que en el extremo superior es de $4\,m^2$. El ensanchamiento sigue una ley exponencial. El modulo de elasticidad $E = 2.5 \times 10^7 \,(kN/m^2)$. Se trata de encontrar las deformaciones a lo largo de la estructura bajo la acción de una carga concentrada en el extremo de $p = 3{,}000\,(kN)$ $[3\,(kN)]$. $[\sim 300\,\vec{kg}]$ correspondiente al peso del tablero del puente. Se desprecia el efecto del peso propio del pilar.

De acuerdo a los datos, el area del elemento en cualquier punto x está dado por:

$$A(x) = \bar{A} e^{\alpha x} \quad ; \quad \bar{A}\text{: area de la base}$$

$$\bar{A} = 2\,m^2$$

α: se determina con el área del extremo superior

$$4 = \bar{A} e^{\alpha 20} \Rightarrow \alpha = 0.03465 \left(\frac{1}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{A(x) = 2 e^{(0.03465 \cdot x)}}$$

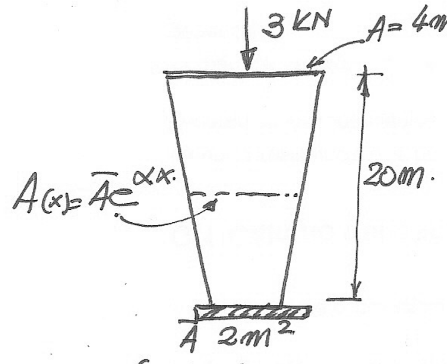
Podemos analizar este problema dividiendo el dominio en elementos finitos, donde cada uno de ellos suponemos que tiene un area constante e igual al promedio del area $A(x)$ correspondiente a los extremos del elemento $\Rightarrow$ la formula general correspondiente a esta discretización es:

$$A(x) = \frac{\bar{A}}{2}\left(\exp\left[\frac{(e-1)\alpha h}{m}\right] + \exp\left[\frac{e\alpha h}{m}\right]\right)$$

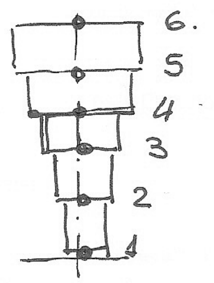
m: nº de elementos; de acuerdo a la figura.

$\boxed{m = 5}$ cantidad de nodos = 6.

De acuerdo a lo visto tenemos:



$A(x) = 2e^{(0.03465)x}$



5 elementos de longitud $l^{(e)}$

Discretizacion en 5 elementos finitos

De acuerdo a lo visto en la teoria, llamamos:

$$k = \left(\frac{EA}{l}\right) \quad e = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (m = 5).$$

nº de elementos

para cada elemento

$$K_{ij} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_i}{dx}(EA)\frac{dN_j}{dx}\,dx$$

$$f_i = \int_{x_1}^{x_2} N_i \cdot b\,dx \quad \text{carga distribuida}$$

$$q = [x_1 \ \ x_2]^T \quad \text{carga concentrada}$$

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{l^{(e)}}$$

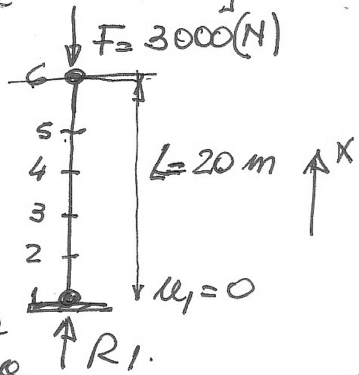
$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{l^{e}}$$

$l^{(e)}$: long. elemento.

El sistema ensamblado para 5 elementos quedará ③

$$K = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & & & & 0 \\ -k^{(1)} & k^{(1)}+k^{(2)} & -k^{(2)} & & & \\ & -k^{(2)} & k^{(2)}+k^{(3)} & -k^{(3)} & & \\ & & -k^{(3)} & k^{(3)}+k^{(4)} & -k^{(4)} & \\ & 0 & & -k^{(4)} & k^{(4)}+k^{(5)} & -k^{(5)} \\ & & & & -k^{(5)} & k^{(5)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} \qquad f = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \end{bmatrix}$$



Ponemos $-F$ porque va en sentido contrario a nuestro sistema

No tenemos carga distribuida a lo largo de la estructura. $(b(x))$

$$10^7 \cdot \begin{pmatrix} 1.094 & -1.094 & & & & \\ -1.094 & 2.396 & -1.302 & & & \\ & -1.302 & 2.849 & -1.548 & & \\ & & -1.548 & 3.389 & -1.841 & \\ & & & -1.841 & 1.841 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3000 \end{pmatrix}$$

R_1: reacción en el nodo 1 y como $u_1=0$ por la condición de contorno podemos simplificar la ecuación matricial que ~~la~~ quedará de la siguiente forma:

$$10^{7}\begin{pmatrix} 2.396 & -1.302 & 0 & 0 \\ -1.302 & 2.849 & -1.548 & 0 \\ 0 & -1.548 & 3.389 & -1.841 \\ 0 & 0 & -1.841 & 1.841 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3000 \end{pmatrix}$$

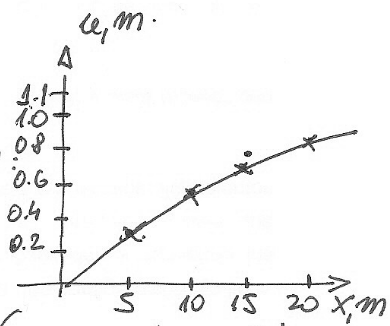
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\underline{\underline{K}}} \qquad \underline{a} = \underline{f}$$

Resolviendolo:

$$\underline{a} = -10^{-3}\begin{pmatrix} 0.274 \\ 0.505 \\ 0.698 \\ 0.861 \end{pmatrix}$$

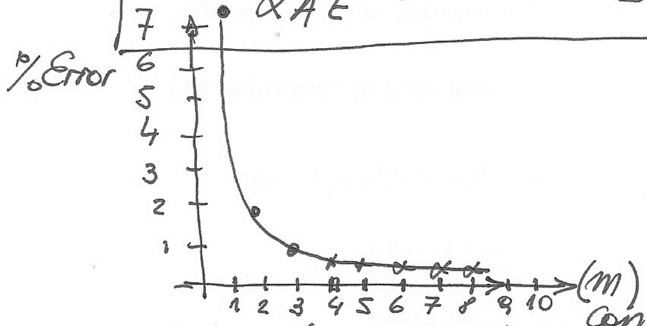
La solución exacta del problema es:

$$\boxed{u_{ex} = -\frac{F}{\alpha \bar{A} E}\left[1 - \exp(-\alpha x)\right].}$$



(no es lineal.)

%Error vs Cant Elem.



Solución con diferentes cant. de elementos.

El incremento en la cantidad de elementos debe conducir a una disminución del error. La pendiente de la curva decrece con el nº de elementos lo que se vuelve poco eficiente para una cantidad dada de elementos. Por más que aumentemos su número no cambia mucho la solución.-

CALCULO DE LAS TENSIONES NORMALES POR ELEMENTO

sabemos que $\varepsilon_x = \dfrac{du}{dx}$ $\quad \underline{\varepsilon} = \underline{B}\, \underline{a}^e$

donde $\underline{B} = \left[\dfrac{dN_1}{dx} \;\; \dfrac{dN_2}{dx} \right]$

$\sigma = [N] = (EA)\varepsilon$ o bien $\sigma = \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{B}} \cdot \underline{a}^e$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{E}{\ell}\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{dN_1}{dx}u_1 + \frac{dN_2}{dx}u_2.$$

$$\varepsilon_x = \left[\frac{dN_1}{dx} \;\; \frac{dN_2}{dx} \right]\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = 10^3 \begin{pmatrix} -1.3704 \\ -1.1524 \\ -0.9691 \\ -0.8149 \end{pmatrix}\left(\frac{kN}{m^2}\right)$$

$$\frac{dN_1}{dx} = -\frac{1}{\ell} \qquad \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{\ell}.$$

——— x ———.

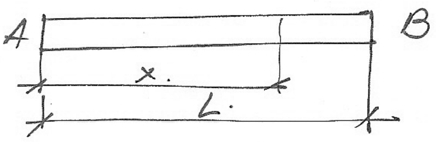
EJERCICIOS.

1.] Una barra AB de módulo de Elasticidad E, sección constante de área A y longitud L sometida a tracción/compresión, tiene un campo de desplazamiento definido por:

$$u(x) = \frac{Q(x^3 + 2xL^2)}{EAL^2}$$

Discretizando la barra en un elemento lineal y adoptando como desplazamientos nodales los reales, determinar la ley de fuerzas normales y compararla con la exacta.-

DATOS: Q ; L

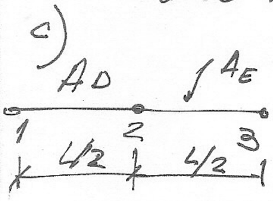


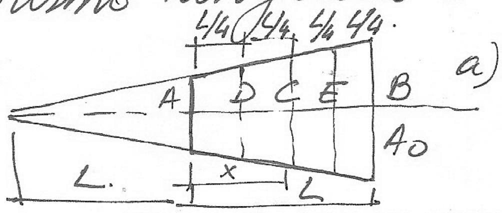
2]. La barra troncocónica AB representada en la Figura, de longitud L y área A_0 en la sección extrema B está sometida a tracción/compresión. Determinar la matriz completa de rigidez de la barra cuando la discretizamos en:

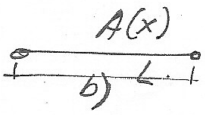
a) Un elemento lineal de sección variable.

b) Un elemento lineal de sección constante. (por ejemplo igual a la sección central A_C).

c) En dos elementos lineales de sección variable de la misma longitud.-





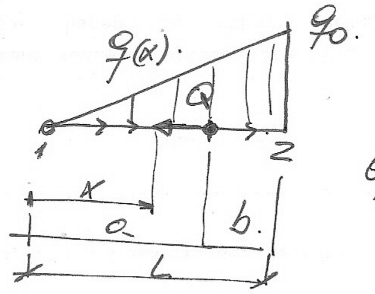


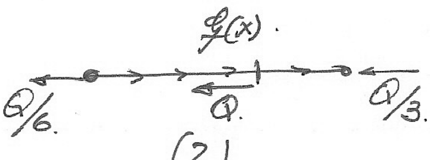
3] Un elemento lineal está sometido a una carga triangular distribuida longitudinalmente y a la carga concentrada longitudinal Q. Determinar el vector de fuerzas nodales equivalentes.

DATOS: q_0, Q, L $Q = q_0 L$

$a = 2L/3$ $b = L/3$.

(1)





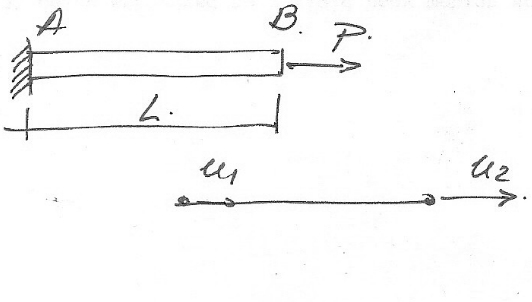
(2)

4] La barra AB de sección uniforme tiene el extremo A empotrado y en el extremo B actúa la carga longitudinal P. Discretizando la barra en un elemento lineal finito, determinar:

a) El alargamiento de la barra y la reacción de empotramiento

b) Las deformaciones y los esfuerzos en la barra

DATOS P, L, EA.



5] La barra AB de la figura de sección uniforme tiene el extremo A empotrado y está sometida a una carga longitudinal uniformemente distribuida q. Si la discretizamos en un elemento finito lineal determinar:

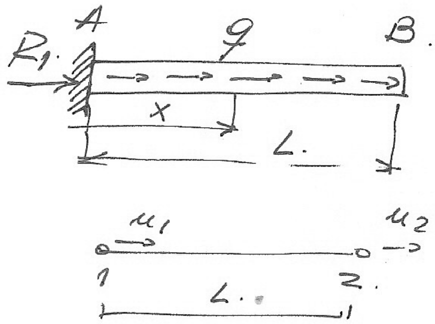
a) El alargamiento de la barra y la reacción en el empotramiento.-

b) La función desplazamientos

c) Las deformaciones y esfuerzos en la barra.

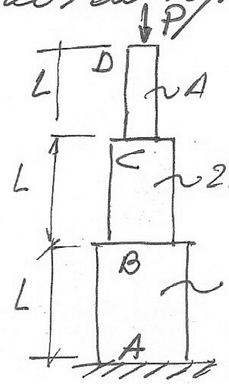
d) El grado de aproximación de los resultados obtenidos.-

DATOS: q, L, EA.

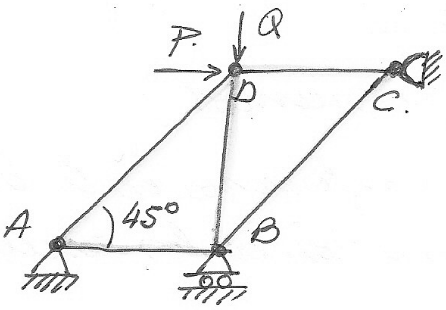


6] Un soporte ABCD de sección variable de áreas 4A, 2A y A, empotrado en el extremo A; está sometido a su propio peso y a la carga de compresión P aplicada en su extremo D. Determinar los esfuerzos y desplazamientos del soporte.

DATOS: E, A, L, peso específico γ,
$P = 2\gamma AL$.



7) La estructura articulada ABCD que tiene todas sus barras del mismo material y de la misma sección transversal (ver figura) está sometida a la carga horizontal P y a la vertical Q. Determinar los desplazamientos en los nodos de la estructura.-



$P = 6\,[t]$

$Q = 15\,[t]$

$EA = 2 \times 10^{7}\ Kg$.

$\overline{AB} = 10\,[m]$.-

EJERCICIO - RESOLUCION. (I)

Nº3

$$\{F\} = \{F_q\} + \{F_Q\}$$

$N_1 = 1-\frac{x}{L}$ $N_2 = \frac{x}{L}$

porque:

$$= \begin{bmatrix} \int_0^L q_0 \frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)dx \\ \int_0^L q_0 \frac{x}{L}\frac{x}{L}dx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{Qb}{L} \\ -\frac{Qa}{L} \end{bmatrix} \Rightarrow \{F_q\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_L N_1\, q(x)\, dx \\ \int_L N_2\, q(x)\, dx \end{bmatrix}$$

y el vector de fuerzas nodales equivalente (fig (2))

$$\text{es } \{F\} = \begin{bmatrix} \frac{q_0 L}{6} \\ \frac{q_0 L}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{Q}{3} \\ \frac{2Q}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Q}{6} \\ -\frac{Q}{3} \end{bmatrix}$$

(1)

porque $Q = q_0 L$

y $a = \frac{2}{3}L$ $b = L/3$.

$$\{F_q\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int q(x)\left(1-\frac{x}{L}\right)dx \\ \int_L q(x)\frac{x}{L}dx \end{bmatrix}$$

$q(x)$ sigue una ley lineal.

$$\boxed{q(x) = q_0 \frac{x}{L}}$$

(1) $N_1 = 1-\frac{x}{L}$

$N_2 = \frac{x}{L}$

$x = 2/3\, L$

$\Rightarrow N_1/_Q = \frac{1}{3}$

$N_2/_Q = \frac{2}{3}$

Vector Equivalente carga concentrada

$$\begin{bmatrix} Q/3 \\ 2Q/3 \end{bmatrix}$$

Nº4

$$[K_0] = [k_e] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\{\delta_0\} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \{F_0\} = \begin{bmatrix} R_A \\ P \end{bmatrix}}_{\text{Cond. de contorno}}$$

La ecuac. Matricial Completa será:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A \\ P \end{bmatrix}$$

De aquí deducimos el desplazamiento en el extremo B.

$$u_2 = \frac{PL}{EA} \Rightarrow \underbrace{R_A = \frac{EA}{L}(-u_2)}_{\text{Reacción del empotramiento}}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_A = -P.}$$

Como era de prever ~~se~~ utilizamos una función de forma lineal $\Rightarrow$ la función elegida coincide con la real. porque los valores obtenidos son exactos.-

b). Las deformaciones en la barra son:

$$\varepsilon_x = \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{PL}{EA\,L} = \frac{P}{EA}$$

y los esfuerzos: $\sigma_x = E\,\frac{u_2-u_1}{L} = E\,\frac{PL}{EA\,L} = \frac{P}{A}$

Los valores también son exactos por haber utilizado una función de desplazamiento $u(x)$ coincidente con la real.-

———x———

5]. $[K_0] = [k_e] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Cond. de contorno $\delta_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix}$

En este caso el vector de fuerzas nodales es la suma del vector de fuerzas aplicadas directamente a los nodos $\{F_p^0\}$ y del vector de fuerzas nodales equivalente a las fuerzas distribuidas en el volumen de la estructura $\{F_q^0\}$.

$$\{F_0\} = \{F_p^0\} + \{F_q^0\}$$

$$\{F_p^0\} = \{P_0\} = \begin{bmatrix} R_A \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\{F_q^0\} = \{F_q\} = \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{2} \end{bmatrix}$$ se calcula como en el problema anterior

$$\{F_0\} = \begin{bmatrix} R_A + \frac{qL}{2} \\ qL/2 \end{bmatrix}$$

Solución Ejercicios

La ecuac. Matricial quedará:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_A+\frac{qL}{2}\\ \frac{qL}{2}\end{bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ u_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{qL}{2}\\ \frac{qL}{2}\end{bmatrix}$$

$$u_2=\frac{qL^2}{2EA}$$

$$R_A=\frac{EA}{L}(-u_2)-\frac{qL}{2}$$

$$\frac{EA}{L}\left(-\frac{qL^{2}}{2EA}\right)-\frac{qL}{2}=-\frac{qL}{2}-\frac{qL}{2}=-\frac{2qL}{2}$$

reemplazando u_2 en R_A =>

$$\boxed{R_A=-qL}$$

b) La función desplazamiento será:

$u(x)=N_1u_1+N_2u_2=N_2u_2$. ya que $u_1=0$

$$\Rightarrow u(x)=\underbrace{\frac{qL^2}{2EA}}_{u_2}\cdot\underbrace{\frac{x}{L}}_{N_2}=\boxed{\frac{qL}{2EA}\cdot x}$$

c) Las deformaciones en la barra son:

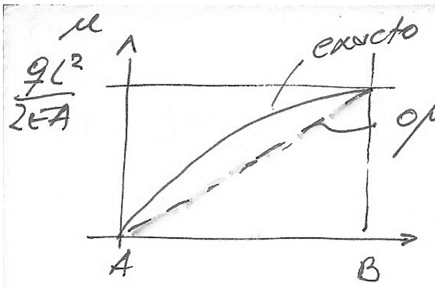
$$\varepsilon_x=\frac{u_2-u_1}{L}=\frac{qL^2}{2EA\cdot L}=\frac{qL}{2EA}$$

$$\sigma_x=E\,\frac{u_2-u_1}{L}=\frac{qL}{2A}$$

d) Las soluciones exactas se obtienen a partir de la ley de esfuerzos normales de la barra:

$$N=q(L-x)=EA\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow u(x)=\int_0^x du(x)=\int_0^x\frac{q(L-x)}{EA}\,dx=\frac{q}{EA}\left(L-\frac{x}{2}\right)\cdot x$$



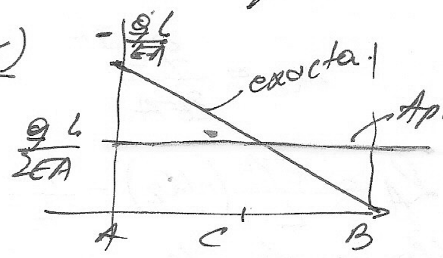
Lo reacción en el empotramiento será:

$$R_A = -(N)_{x=0} = -qL.$$

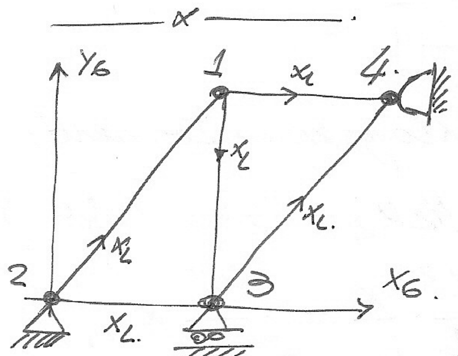
q' coincide con lo aprox.

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{N}{EA} = \frac{q(L-x)}{EA}$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{q(L-x)}{A}$$



EJERCICIO Nº 7.



Vemos la numeración de los nodos y los sistemas de ejes globales y locales.
El nro de grados de libertad es $n_g = 8$.
Que será el orden de la matriz completa de rigidez.
$[K_0]$

$$[K_0] = \begin{bmatrix} k_{11}^{12}+k_{11}^{13}+k_{11}^{14} & k_{12}^{12} & k_{13}^{13} & k_{14}^{14} \\ k_{21}^{12} & k_{22}^{12}+k_{22}^{23} & k_{23}^{23} & 0 \\ k_{31}^{13} & k_{32}^{23} & k_{33}^{13}+k_{33}^{23}+k_{33}^{34} & k_{34}^{34} \\ k_{41}^{14} & 0 & k_{43}^{34} & k_{44}^{14}+k_{44}^{34} \end{bmatrix}$$

barra

k_{ij}^{ml} componente de la matriz

Sabemos que $EA/L = 20000$ (kg/cm), se hallan las submatrices de rigidez de las barras en coordenadas globales:-

III

Barra 1-2 ($\alpha = 225°$).

$$[k_{11}^{12}] = [k_{22}^{12}] = -[k_{12}^{12}] = -[k_{21}^{12}] = \begin{bmatrix} 10000 & 10000 \\ 10\,000 & 10\,000 \end{bmatrix}$$

Barra 1-3 ($\alpha = 270°$).

$$[k_{11}^{13}] = [k_{33}^{13}] = -[k_{13}^{13}] = -[k_{31}^{13}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 20\,000 \end{bmatrix}$$

Barra 1-4 2-3. ($\alpha = 0°$).

$$[k_{11}^{14}] = [k_{44}^{14}] = -[k_{14}^{14}] = -[k_{41}^{14}] = \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{22}^{23}] = [k_{33}^{23}] = -[k_{23}^{23}] = -[k_{32}^{23}] = \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Barra 3-4 ($\alpha = 45°$).

$$[k_{33}^{34}] = [k_{44}^{34}] = -[k_{34}^{34}] = -[k_{43}^{34}] = \begin{bmatrix} 10000 & 10000 \\ 10\,000 & 10000 \end{bmatrix}$$

Sumamos las submatrices de la diagonal principal

$$[k_{11}^{12}] + [k_{11}^{13}] + [k_{11}^{14}] = \begin{bmatrix} 10000 & 10000 \\ 10000 & 10000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30\,000 & 10\,000 \\ 10\,000 & 30\,000 \end{bmatrix}$$

$$[k_{22}^{12}] + [k_{22}^{23}] = \begin{bmatrix} 10000 & 10000 \\ 10\,000 & 10000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30000 & 10000 \\ 10\,000 & 10\,000 \end{bmatrix}$$

$$[k_{33}^{13}] + [k_{33}^{23}] + [k_{33}^{34}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20\,000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10000 & 10000 \\ 10000 & 10000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30000 & 10000 \\ 10\,000 & 30000 \end{bmatrix}$$

$$[k_{44}^{14}] + [k_{44}^{34}] = \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10000 & 10000 \\ 10000 & 10000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30000 & 10000 \\ 10000 & 10000 \end{bmatrix}.$$

De aquí armamos la matriz $[\underline{\underline{K}}]$.

Al imponer las cond. de sustentación

$$\delta_x^2 = 0 \quad \delta_y^2 = 0 \quad \delta_y^3 = 0 \quad \delta_x^4 = 0 \quad \delta_y^4 = 0$$

Suprimimos las filas y columnas 3, 4, 6, 7 y 8.
de la matriz completa de rigidez de la estructura.
$[\underline{\underline{K}}]$. Ver como queda la matriz reducida....

Deberá ser de orden 3, que es el número de grados de libertad activos, es decir, considerando el efecto de los enlaces externos.

El vector de fuerzas nodales conocidas $\{F_c\}$ es igual al vector de fuerzas aplicadas en los nodos $\{F_p\}$.

$$\{F_c\} = \{F_p\} = \begin{bmatrix} F_x^1 \\ F_y^1 \\ F_x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P \\ -Q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 \\ -15000 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} K_{\text{reducido}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x^1 \\ \delta_y^1 \\ \delta_x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 \\ -15000 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

y de acá sacamos δ_x^1,
δ_y^1
δ_x^3.

—— x ——

VECTOR DE FUERZAS NODALES EQUIVALENTE

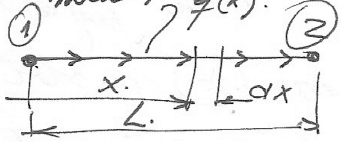
CARGA DISTRIBUIDA.

Consideremos ahora que sobre un elemento lineal actúa una fuerza o carga longitudinal cualquiera $q(x)$ distribuida por unidad de longitud (ver figura) / sale de la fórmula (A2) pág VI

$$\boxed{\{F_q\} = \int_{V_e} [N_e]^T \{q_e\}\, dV_e}$$

$\{u_e\} = [N_e]\{\delta_e\}$ desplaz nodales

desplaz de los ptos del elemento



Si el elemento es unidimensional $\Rightarrow \{q_e\}\, dV = q(x)\, dx$.

χ: coord. con $\chi = 0$ en $x = x_1$, $\chi = L$ en $x = x_2$.

$\chi = x - x_1$

$$\{F_q\} = \int_L [N_e]^T q(\chi)\, d\chi$$

$$[N_e]^T = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\chi}{L} \\ \frac{\chi}{L} \end{bmatrix}$$

en coord cartesianas sería $\frac{L - (x - x_1)}{L} = \frac{x_2 - x}{L}$; $\frac{x - x_1}{L}$

$\Rightarrow$ el vector de fuerzas nodales equivalente será:

$$\{F_q\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_L N_1\, q(x)\, dx \\ \int_L N_2\, q(x)\, dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_L q(x)\left(1 - \frac{x}{L}\right) dx \\ \int_L q(x)\left(\frac{x}{L}\right) dx \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Si $q(x)$ está uniformemente distribuida $\Rightarrow$

$$q(x) = q \Rightarrow \{F_q\} = \begin{bmatrix} \int_L q\left(1 - \frac{x}{L}\right) dx \\ \int_L q\left(\frac{x}{L}\right) dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qL/2 \\ qL/2 \end{bmatrix}$$

CARGA CONCENTRADA.

Supongamos que el elemento tiene una carga concentrada Q. Consideramos a esta como la resultante de una carga distribuida "q" sobre una longitud de elemento $dx \Rightarrow$

$$\boxed{\int q\,dx = Q}$$ carga total ~~concentrada~~ ~~distribuida~~

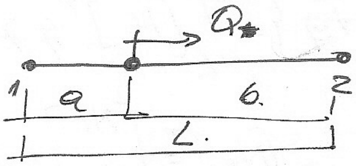
Luego de hacer las integraciones anteriores a lo largo de todo el elemento, el producto $q\,dx$ es igual a Q únicamente para el punto $x=a$, siendo nulo en los restantes puntos del elemento, lo que significa que:

$$\int_0^L N q\,dx = (N)_{x=a}\, q\,dx = Q\,N\big|_{x=a}$$

pág. anterior

y teniendo en cta la ecuación (*) se obtienen las fuerzas nodales equivalentes F_1 y F_2

$$F_1 = \int_0^L N_1 q\,dx = Q (N_1)_{x=a}$$



$$F_2 = \int_0^L N_2 q\,dx = Q (N_2)_{x=a}$$

$$N_1\big|_{x=a} = \left(1 - \frac{a}{L}\right) = \frac{b}{L}\,; \quad N_2\big|_{x=a} = \frac{a}{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_1 = \frac{Q\,b}{L} \qquad F_2 = \frac{Q\,a}{L}}$$

"VECTOR DE FUERZAS NODALES EQUIVALENTE"

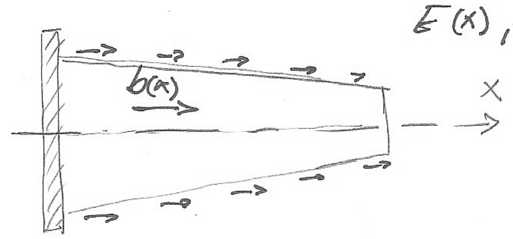
Si la carga está aplicada en un punto medio del elemento $a = L/2$ y el vector de fuerzas nodales equivalente es:

$$\{F_Q\} = \begin{bmatrix} Q/2 \\ Q/2 \end{bmatrix}$$

FEM 1D. Barras - (Truss)

1] VARIABLES y DISCRETIZACION DE LA ESTRUCTURA

$E(x)$, $A(x)$



Desplazamientos

$u = u(x)$

Deformaciones

$\varepsilon = \varepsilon(x) = \dfrac{\delta u}{\delta x}$

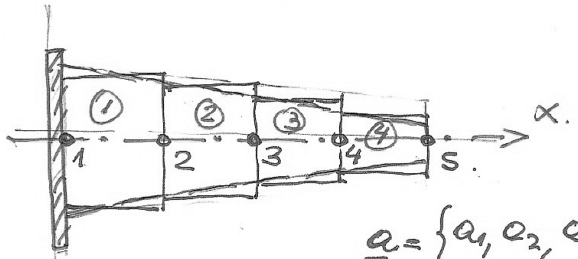
E: Módulo de Elasticidad

Tensiones $\sigma = \sigma(x)$

Relación Tensión - Deformación

1) Discretizamos con elementos simples de 2 nodos y tomamos tramos constantes de la sección

$\sigma = E\varepsilon$



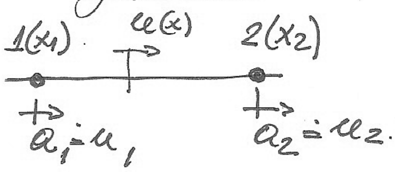
$\underline{a} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}^T$ desplaz.

$\vec{F} = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\}^T$

Conectividad.

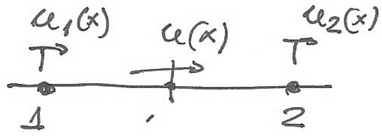
Elemento	Nodos (1,2)
1	1 2
2	2 3
3	3 4
4	4 5

genérico



FUNCIONES DE FORMA.

1) Formulamos el elemento siempre a nivel local.
2) Funciones de forma (N_i) : Interpolan el campo de desplazamientos a partir de los valores nodales
3) Con dos (2) nodos sólo podemos asumir una variación lineal de los desplazamientos.

$\Rightarrow$ 

L: long. elemento

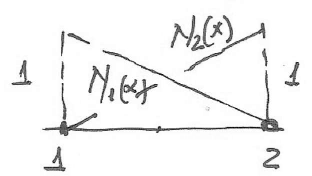
$$u(x) = \sum_{i=1}^{2} N_i a_i = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2$$

$u(x) = c_1 + c_2 x$. variación lineal.

El movimiento en los nodos debe coincidir con los valores nodales $u_i(x)$

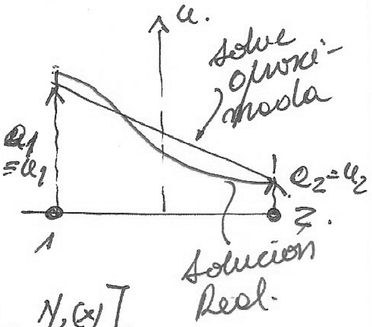
$$\Rightarrow \begin{matrix} u(x=x_1) = a_1 \\ u(x=x_2) = a_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = c_1 + c_2 x_1 \\ a_2 = c_1 + c_2 x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{a_1 - a_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{a_2 - a_1}{L} \\ c_2 = \dfrac{a_1 x_2 - a_2 x_1}{L} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ por consiguiente:



$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{L} \qquad N_2(x) = \frac{x - x_1}{L}$$

es decir:



en forma matricial $u = \underline{\underline{N}}\,\underline{a}^e$ — $\underline{\underline{N}}$: Matriz func. de forma; $\underline{a}^e$: vector desplaz.

$$\underline{\underline{N}} = [N_1(x), N_2(x)].$$

$$\underline{a}^e = [a_1, a_2]^T$$

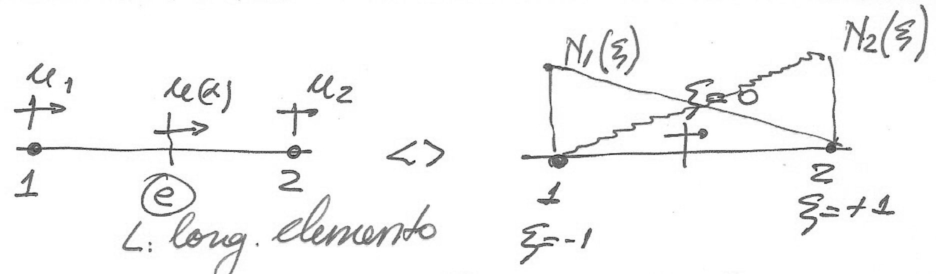
<u>FORMULACION ISOPARAMETRICA.</u>

1) Las funciones de forma siempre valen 1 en el nodo y cero en el resto. Soporte local.

2) En el caso de usar coordenadas cartesianas. son diferentes en c/elemento.-

3) Es conveniente normalizarlas para todos los elementos de una misma tipología.-

$\Rightarrow$.



$$① \begin{cases} N_1(\xi) = \dfrac{1-\xi}{2} \\ N_2(\xi) = \dfrac{1+\xi}{2} \end{cases}$$

La relación entre x y ξ es la siguiente.

$$\xi = \frac{2}{L}(x - x_1) - 1$$

sale de $x = \sum_{i=1}^{2} N_i x_i = N_1(\xi)\, x_1 + N_2(\xi)\, x_2$

De donde salen ① de utilizar Lagrange

$$N_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \right)$$

y $N_1(\xi)$ en el nodo 1 $\xi_1 = -1$.

2 $\xi_2 = +1$.

$$N_1(\xi) = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{1}{2}(1-\xi).$$

Igual para $N_2(\xi) = \dfrac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \dfrac{1}{2}(1+\xi)$

$$\boxed{N_i(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)}$$

Si llamamos $x_c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ centro del elemento $\Rightarrow$

$$\boxed{\xi = \frac{2(x - x_c)}{L^{(e)}}}$$

Es más fácil expresarlo con las coordenadas del centro del elemento.-

$$x = \frac{1}{2}(1-\xi)\, x_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)\, x_2 = \frac{1}{2}\left[x_1 - \xi x_1 + x_2 + \xi x_2 \right].$$

$$x = \frac{1}{2}\left[x_1 + x_2 + \xi (x_2 - x_1) \right] = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{\xi}{2}(x_2 - x_1)$$

$$\boxed{x = x_c + \frac{L}{2}\xi.}$$

Como $\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{B}}\,\underline{a}$ $\quad \delta\varepsilon^T = \delta a^T B^T$

$\underline{u} = \underline{\underline{N}} \cdot \underline{a}$ $\quad \delta u^T = \delta a^T N^T$

$\Rightarrow$ Reemplazando en 2

$$\delta \underline{a}^T \left[\int_L B^T \sigma A\,dx - \int_L N^T b(x) A\,dx - \oint_L N^T t\,dx - N^T p \right] = 0$$

Como los δa^T son arbitrarios $\Rightarrow$

$$\int_L \underline{\underline{B}}^T \sigma \cdot A\,dx - \int_L \underline{\underline{N}}^T b(x) A\,dx - \oint_L \underline{\underline{N}}^T t\,dx - \underline{\underline{N}}^T p = 0$$

MATRIZ DE RIGIDEZ

Descomponemos las integrales en sumas (ensamble) de las contribuciones de cada elemento.

total elementos
$$\sum_{e=1}^{E} \int_{L^e} \underline{\underline{B}}^T \sigma A\,dx - \sum_e \int_{L^e} \underline{\underline{N}}^T b(x) A\,dx - \sum_e \int_{L^e} \underline{\underline{N}}^T t\,dx - \sum_e \underline{\underline{N}}^T p$$

A nivel elemental. K^e:

$$\int_{L^e} \underline{\underline{B}}^T \sigma A\,dx = \int_{L^e} \underline{\underline{B}}^T \underbrace{\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{a}^e}_{\sigma} A\,dx = \left(\int_{L^e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{B}} A\,dx \right) \underline{a}^e$$

$$= \underline{\underline{K}}^e \cdot \underline{a}^e$$

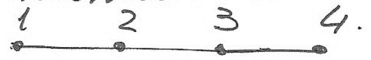
$\underline{\underline{D}}$: Matriz constitutiva
en este caso $\underline{\underline{D}} = E$ (Modulo elástico)

$$\Rightarrow \underline{\underline{K}}^e = \int_{L^e} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{B}} A\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{E A L^e}{2} \frac{1}{L^{e2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} d\xi$$

Con $\boxed{dx = \frac{L^e}{2} d\xi}$ $\Rightarrow$ $\boxed{K^e = \frac{EA}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$

$B = \frac{1}{L} [-1, 1]$.

→ En forma global suponiendo una barra con 3 elementos.



$$K_{global} = E \begin{bmatrix} \frac{A_1}{L_1} & -\frac{A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{A_1}{L_1} & \left(\frac{A_1}{L_1}+\frac{A_2}{L_2}\right) & -\frac{A_2}{L_2} & 0 \\ 0 & -\frac{A_2}{L_2} & \left(\frac{A_2}{L_2}+\frac{A_3}{L_3}\right) & -\frac{A_3}{L_3} \\ 0 & 0 & -\frac{A_3}{L_3} & \frac{A_3}{L_3} \end{bmatrix}$$

K: simétrica, banda y definida positiva

CALCULO MIEMBRO DERECHO

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{a}^e = f^e$$

a) <u>De volumen</u>:

$$f_b^e = \int_{L^e} N^T b(x)\, dx \cdot A = \frac{A^e L^e b(x)}{2} \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} N_1\, d\xi \\ \int_{-1}^{1} N_2\, d\xi \end{bmatrix} = \frac{A^e L^e b(x)}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Siempre $\int_{-1}^{1} N_i(\xi)\, d\xi = 1.$ (probar)

b) <u>De superficie</u>

$$f_t^e = \int_{L^e} \underline{N}^T \underline{t}\, dx = \frac{L^e t}{2} \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} N_1\, d\xi \\ \int_{-1}^{1} N_2\, d\xi \end{bmatrix} = \frac{L^e t}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) <u>Puntuales</u> $f_p^e = N^T P = P\, [N_1\ N_2]^T$

<u>NOTA</u>

Suponemos fuerzas de volumen y superficie ($b(x)$ y $t(x)$) constantes, sino hay que integrar