PROBLEMAS EJEMPLOS.

RESUMEN.

Matriz de variables constitutivas

Tensión Plana

$$D = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad d_{11} = d_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad d_{12} = d_{21} = \frac{E\nu}{1-\nu^2} \quad d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G.$$

E: Modulo de Elasticidad

ν: Coef Poisson.

DEFORMACION PLANA.

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad d_{12} = d_{21} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G.$$

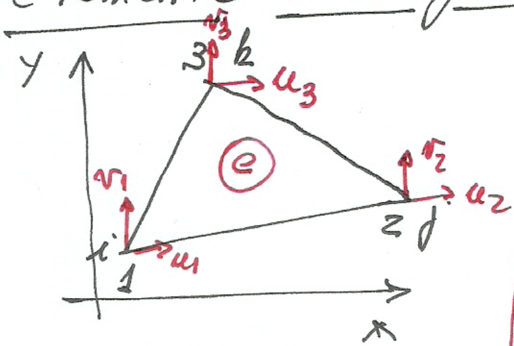
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\varepsilon} = \underline{\partial}\,\underline{u} \qquad u = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

para Tensión Plana.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \qquad \sigma = \underline{D}\,\underline{\partial}\,\underline{u}$$

Elemento Triangular (Courant, Turner).



$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y.$$

$$v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y.$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

$$u(x,y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 = \sum_{i=1}^{3} N_i u_i$$

$$v(x,y) = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} N_i v_i$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{array}\right]}_{[\underline{N}]} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$[\underline{N}]$ Matriz de funciones de forma.

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}$$ Submatriz.

$$N_i = \frac{1}{2A^{(e)}}\left[a_i + b_i x + c_i y\right]$$

$A^{(e)}$: area del triangulo (elemento).

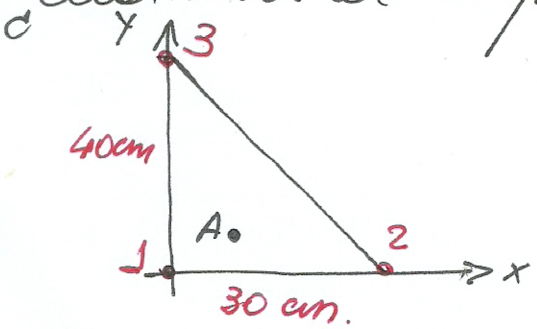
$$\boxed{\begin{aligned} a_i &= (x_j y_k - x_k y_j)/2A \\ b_i &= (y_j - y_k)/2A \\ c_i &= (x_k - x_j)/2A \end{aligned}}$$

$$A^{(e)} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} =$$

$$A^{(e)} = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

———— x ————

Ejemplo 1 Un elemento finito triangular tiene un nodo en cada vertice (lineal). Si conocemos el vector desplazamiento en cada nodo del elemento ¿cual sería el desplazamiento en el punto A?



DATOS: $x_A = 6$ cm
$y_A = 4$ cm.

$$\{\delta e\} = [0.2 \;\; 0 \;\; -0.5 \;\; 0.1 \;\; 0 \;\; 0.4]^T \; [cm].$$

1º) Calculamos las funciones de forma de cada nodo (III)

	x nod	
1	0	0
2	30	0
3	0	40

$$N_1 = \frac{(30.40 - 0.0) + (0-40)x + (0-30)y}{2A = (30 \times 40)} = \boxed{1 - 0.03333x - 0.025y}$$

$$N_2 = \frac{(0.0 - 40.0) + (40-0)x + (0-30)y}{30.40} = \boxed{0.03333x}$$

$$N_3 = \frac{(0.0 - 0.30) + (0-0)x + (30-0)y}{30.40} = \boxed{0.025y}$$

Comprobamos $\boxed{\sum_{i=1}^{3} N_i = 1.}$ ✓ OK

2) Calculamos los valores de las funciones de interpolación en el punto A $\Rightarrow$ $x_A = 6$; $y_A = 4$.

$$N_1^A = 1 - 0.03333\,x_A - 0.025\,y_A = 0.7$$

$$N_2^A = 0.03333\,x_A = 0.2$$

$$N_3^A = 0.025\,y_A = 0.1$$

3) Ahora podemos obtener los desplazamientos de A.

$$\{u_A\} = \Bigg\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}}_{N_1^A} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}}_{N_2^A} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}}_{N_3^A} \Bigg\}_{2\times 6} \begin{Bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.5 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0.4 \end{Bmatrix}_{6\times 1} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.06 \end{bmatrix} [cm].$$

——— o ———

MATRIZ DE RIGIDEZ.

$$\underline{\underline{K}}^{(e)} \cdot \underline{a}^{(e)} = \underline{\bar{F}}^{(e)}$$

$$K^{(e)} = \int_{A^e} \underline{\underline{B}}_e^T \underline{\underline{D}} \, \underline{\underline{B}}_e \, t \, dA.$$

donde
$$\underline{\underline{B}}_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cc|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{array}\right]$$

$$\underline{\underline{B}}_e = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{array}\right]$$

$$\underline{\underline{B}}_e = \frac{1}{2A} \left[\begin{array}{cc|cc|cc} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{array}\right]$$

$$\underset{6\times 6}{\underline{K}_e} = \int_A \underset{6\times 3}{B_e^T} \, \underset{3\times 3}{D} \, \underset{3\times 6}{B_e} \, t \, dA \qquad t: \text{espesor.}$$

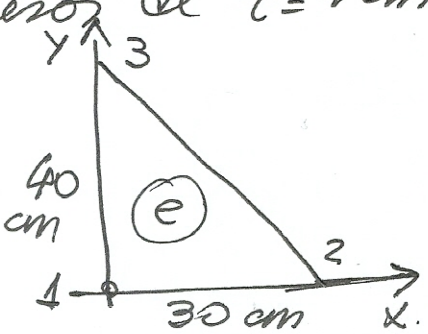
$$K_e = t A_e \underline{\underline{B}}_e^T \underline{\underline{D}} \, \underline{\underline{B}}_e$$

$$K_{ij}^{(e)} = t A_e \underline{\underline{B}}_i^T \underline{\underline{D}} \, \underline{\underline{B}}_j$$

Ejemplo 2 Una estructura bidimensional con estado de deformación plana se discretiza utilizando un elemento finito triangular de 3 nodos como la figura. Determinar la matriz de rigidez del elemento, considerando un espesor de $t = 1$ cm.

DATOS $E = 2 \times 10^5 \, (\text{kg/cm}^2)$

$\nu = 0.2$



Segun deformación plana, tendremos.

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$D = 10^{5} \begin{bmatrix} 2.22222 & 0.55556 & 0 \\ 0.55556 & 0.22222 & 0 \\ 0 & 0 & 0.83333 \end{bmatrix}$$

$$A_e = \frac{30 \times 40}{2} = 600\ (cm^2)$$

$$B_e = \frac{1}{2 \cdot 600} \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0-40 & 0 & 40-0 & 0 & 0-0 & 0 \\ 0 & 0-30 & 0 & 0-0 & 0 & 30-0 \\ 0-30 & 0-40 & 0-0 & 40-0 & 30-0 & 0-0 \end{array}\right]$$

$$B_e = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -0.03333 & 0 & 0.03333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.025 & 0 & 0 & 0 & 0.025 \\ -0.025 & -0.03333 & 0 & 0.03333 & 0.025 & 0 \end{array}\right]$$

$$K_e = t A_e B_e^T D B \qquad t = 1\,cm. \qquad A_e = 600\ cm^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{K_e} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 179368 & 69437.5 & -148118 & -41662.3 & -31249.8 & -27775.2 \\ 69437.5 & 138877 & -27775.2 & -55544.2 & -41662.3 & -83333.2 \\ \hline -148118 & -27775.2 & 148118 & 0 & 0 & 27775.2 \\ -41662.3 & -55544.2 & 0 & 55544.2 & 41662.3 & 0 \\ \hline -31249.8 & -41662.3 & 0 & 41662.3 & 31249.8 & 0 \\ -27775.2 & -83333.2 & 27775.2 & 0 & 0 & 83333.2 \end{array}\right]$$

Ejemplo 3 Para la estructura anterior, determinar: VI

a) los términos de la submatriz $[k_{ij}]$

b) Considerando el estado de deformación plana comprobar el valor de la submatriz $[k_{23}]$ con los resultados de a)

<u>DATOS</u>: $E = 2\times10^5$ (kg/cm²) $\quad \nu = 0.2 \quad t = 1$ cm.

$$k_{ij}^{(e)} = (tA)\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_j - y_k & 0 & \vdots & x_k - x_j \\ 0 & x_k - x_j & \vdots & y_j - y_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_k - y_i & 0 \\ 0 & x_i - x_k \\ x_i - x_k & y_k - y_i \end{bmatrix}$$

operando con triple producto matricial, tenemos.

$$k_{ii} = \frac{t}{4A}\left[(y_j - y_k)(y_k - y_i)\,d_{11} + (x_i - x_k)(x_k - x_j)\,d_{33}\right].$$

$$k_{ij} = \frac{t}{4A}\left[(x_i - x_k)(y_j - y_k)\,d_{12} + (x_k - x_j)(y_k - y_i)\,d_{33}\right].$$

$$k_{ji} = \frac{t}{4A}\left[(x_k - x_j)(y_k - y_i)\,d_{21} + (x_i - x_k)(y_j - y_k)\,d_{33}\right].$$

$$k_{jj} = \frac{t}{4A}\left[(x_k - x_j)(y_k - y_i)\,d_{22} + (y_j - y_k)(y_k - y_i)\,d_{33}\right]$$

los d_{ij} dependen del estado de deformación plana

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2\times10^5 \times 0.8}{1.2 \times 0.6} = 222\,222 \text{ (kg/cm}^2)$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2\cdot10^5 \cdot 0.2}{1.2 \times 0.6} = 55556 \text{ (kg/cm}^2)$$

$$d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2\times10^5}{2\cdot1.2} = 83\,333 \text{ (kg/cm}^2)$$

Los términos de la submatriz $[K_{23}]$ serán k_{35}, k_{36} k_{45} k_{46}. cuyos valores, se obtienen haciendo $i, j, k = 2, 3, 1$. (Ver la matriz de la página V).

$$k_{3,5} = \frac{1}{4.600}\left[(40-0)(0-0)22222 + (30-0)(0-0)83333\right] = 0$$

$$k_{3,6} = \frac{1}{4.600}\left[(30-0)(40-0)55556 + (0-0)(0-0)83333\right] = 27778$$

$$k_{45} = \frac{1}{4.600}\left[(0-0)(0-0)55556 + (30-0)(40-0)83333\right] = 41666.5$$

$$k_{4,6} = \frac{1}{4.600}\left[(0-0)(0-0)22222 + (40-0)(0-0)83333\right] = 0$$

$$K_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 27778 \\ 41666.5 & 0 \end{bmatrix}$$

COMO CALCULAMOS EL VECTOR DE FUERZAS NODALES EQUIVALENTE

A- CARGA DISTRIBUIDA SOBRE EL ELEMENTO

Ej. Peso propio, fuerza centrífuga, etc.

Consideramos que sobre el elemento actúa una carga cualquiera $q(x,y)$ distribuida por unidad de volumen => El vector de fuerzas nodales equivalente a la carga distribuida será:

$$F_{eq} = \int_{Ve} \underline{\underline{N_e}}^T \underline{q_e}\, dV_e = \int_A \underline{\underline{N_e}}^T \underline{q_e}\, t\, dA$$

$$\underline{q_e} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{N_e}}^T = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad =>$$

$$\underline{F}_e = \begin{bmatrix} F_{u1} \\ F_{v1} \\ F_{u2} \\ F_{v2} \\ F_{u3} \\ F_{v3} \end{bmatrix} = \int_A \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} t\,dA$$

$$F_{u_1} = \int_A N_1\, q_x\, t\, dA \, ; \quad F_{v_1} = \int_A N_1 \cdot q_y\, t \cdot dA$$

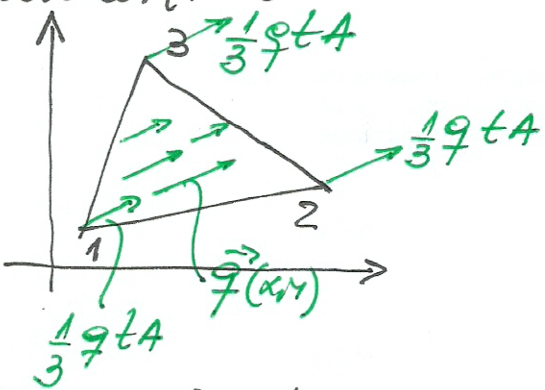
$$F_{u_2} = \int_A N_2\, q_x\, t\, dA \, ; \quad F_{v_2} = \int_A N_2\, q_y\, t\, dA.$$

$$F_{u_3} = \int_A N_3\, q_x\, t\, dA \, ; \quad F_{v_3} = \int_A N_3\, q_y\, t\, dA.$$

Se deben sustituir los valores de las funciones de interpolación y de esa manera obtenemos las fuerzas nodales equivalentes a cada nodo

Si la carga es constante en el elemento, al ser:

$$\int_A N_i\, dA = A/3.$$ (probar) $\Rightarrow$ las fuerzas se reducen a:



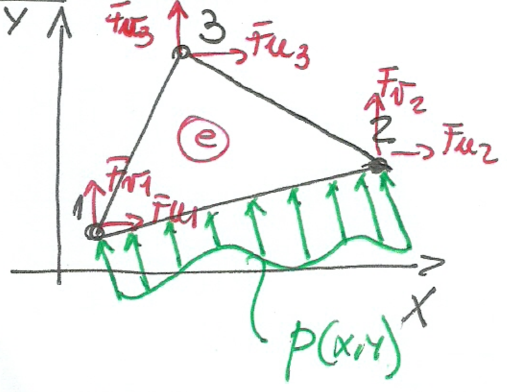
$$F_{u_1} = \frac{1}{3} q_x\, tA \, ; \quad F_{v_1} = \frac{1}{3} q_y\, tA$$

$$F_{u_2} = \frac{1}{3} q_x\, tA \, ; \quad F_{v_2} = \frac{1}{3} q_y\, tA$$

$$F_{u_3} = \frac{1}{3} q_x\, tA \, ; \quad F_{v_3} = \frac{1}{3} q_y\, tA.$$

Esto me indican que se reparten por igual a cada nodo y es igual a $q\,t\,A/3$.

B CARGA DISTRIBUIDA SOBRE EL BORDE



Consideremos que la carga está en el borde del elemento Ej. ver Fig 1-2 (borde) Carga P(x,y) distribuida por unidad de superficie de borde.

En el borde $\overline{1\text{-}2}$ las funciones de Interpolación N_3 se anulan, las fuerzas nodales equivalentes solo actúan en el nodo 1 y 2.

$$\Rightarrow F_{u_1} = \int_{l_{1-2}} N_1\, p(x)\, t\, dl \quad ; \quad F_{v_1} = \int_{l_{1-2}} N_1\, P(y)\, t\, dl.$$

$$F_{u_2} = \int_{l_{1-2}} N_2\, P_x\, t\, dl \quad ; \quad F_{v_2} = \int_{l_{1-2}} N_2\, P_y\, t\, dl.$$

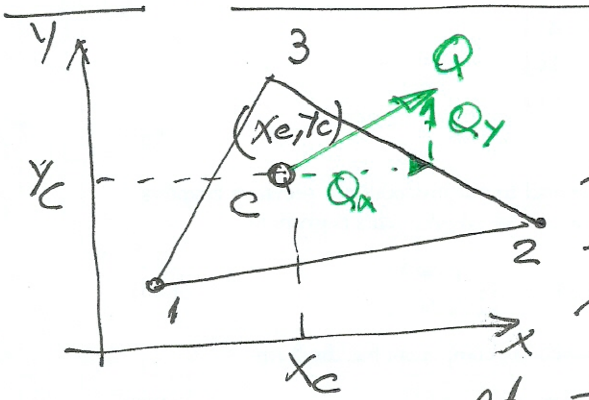
Si la carga es constante en el borde $\Rightarrow$

$$F_{u_1} = \frac{1}{2} p_x\, t\, l_{1-2} \qquad F_{v_1} = \frac{1}{2} P_y\, t\, l_{1-2}$$

l_{1-2}: longitud del borde
$$F_{u_2} = \frac{1}{2} P_x\, t\, l_{1-2} \qquad F_{v_2} = \frac{1}{2} P_y\, t\, l_{1-2}$$

Es decir trasladamos por igual a la carga constante a c/uno de los nodos de ese borde.-
Si la carga no es constante debemos conocer la función y calcular la integral.-

C- CARGA CONCENTRADA.



Es decir tenemos una carga concentrada Q aplicada en un punto interior del elemento que puede ser o no un nodo

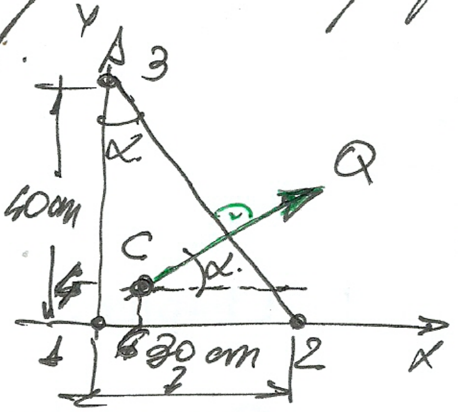
Si Q fuera la resultante de una carga distribuida
$$q \Rightarrow \vec{Q} = \vec{q}\, t\, dA$$

$$F_{u_1} = \int_A N_1\, q_x\, t\, dA = (N_1)_{\substack{x=x_c\\ y=y_c}} \cdot q_x\, t\, dA$$

$$\begin{cases} Q_x = q_x\, t\, dA \\ Q_y = q_y\, t\, dA \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} F_{u_1} = Q_x (N_1)_{x_c, y_c} \;; & F_{v_1} = Q_y (N_1)_{x_c, y_c} \\ F_{u_2} = Q_x (N_2)_{x_c, y_c} \;; & F_{v_2} = Q_y (N_2)_{x_c y_c} \\ F_{u_3} = Q_x (N_3)_{x_c, y_c} & F_{v_3} = Q_y (N_3)_{x_c y_c} \end{array}$$

Ⅹ

Ejemplo 4: Siguiendo con el ejemplo 2 y utilizando dicha geometría, vamos a suponer que el mismo está cargado con una fuerza concentrada Q, aplicada en un punto C perpendicular al borde 2-3 de 500 kg.



DATOS: $Q = 500\ kg$ $X_C = 6\ cm$ $Y_C = 4\ cm.$

$\alpha = tg\left(\frac{30}{40}\right)$

$\alpha = 36.87°$

SOLUCIONES

$F_{u_1} = Q_\alpha (N_1)_{X_C, Y_C}$

$N_1 = 1 - 0.03333x - 0.025y.$

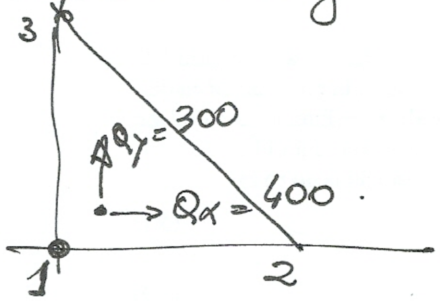
$N_1\big|_{X_C, Y_C} = 0.7$

$N_2 = 0.03333x \Rightarrow N_2\big|_{X_C, Y_C} = 0.2$

$N_3 = 0.025y \Rightarrow N_3\big|_{X_C, Y_C} = 0.1.$

$Q_x = Q.\cos\alpha = 500\ kg.\cos\alpha = 500\left(\frac{4}{5}\right) = 400\ kg.$

$Q_y = Q\ sen\alpha = 500\ kg\ sen\alpha = 500\left(\frac{3}{5}\right) = 300\ kg.$



$F_{u_1} = Q_x N_1\big|_{X_C, Y_C} = 400\ kg.0.7 = 280\ kg.$

$F_{v_1} = Q_y N_1\big|_{X_C, Y_C} = 300.0.7 = 210\ kg.$

$F_{u_2} = Q_x N_2\big|_{X_C, Y_C} = 400.0.2 = 80\ kg.$

$F_{v_2} = Q_y N_2\big|_{X_C, Y_C} = 300.0.2 = 60\ kg.$

$F_{u_3} = Q_x N_3\big|_{X_C, Y_C} = 400.0.1 = 40\ kg.$

$F_{v_3} = Q_y N_3\big|_{X_C, Y_C} = 300.0.1 = 30\ kg.$

$$\Rightarrow F_Q = \begin{Bmatrix} 280 \\ 210 \\ 80 \\ 60 \\ 40 \\ 30 \end{Bmatrix}.$$

Ejemplo 5. (Otro forma de tratamiento)

Dado q' las fuerzas de contorno se encuentran definidas con respecto a la coordenada perimetral, se requiere tratar de forma diferente las funciones de interpolación en el cálculo de las integrales requeridas. Para ello basta expresar las ~~coorden~~ coordenadas x, y en forma paramétrica con respecto a la coordenada s que recorre el elemento. Veamos el ejemplo:

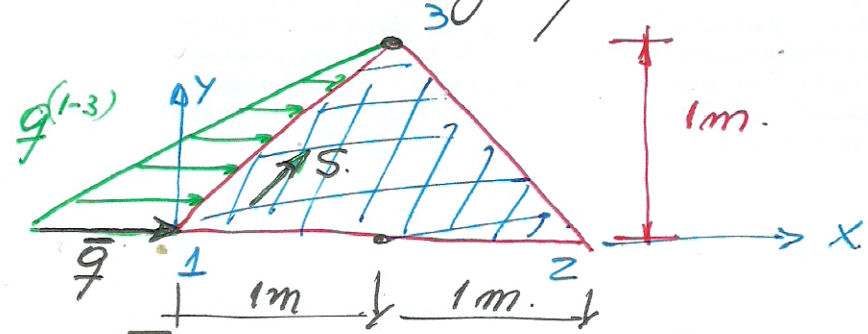


Figura. Descripción geométrica

La figura anterior muestra un elemento finito triangular de tres nodos (CST) con un espesor "t", sometido a una fuerza horizontal repartida sobre el lado (1-3). La coordenada "s", que recorre dicho lado, toma los siguientes valores:

$S_1 = 0$; $S_3 = \sqrt{2}$ m., $S_2 = 0$ como se puede ver en la figura. Tenemos que obtener las fuerzas nodales equivalentes a esta carga están dados por

$$f_q^{1-3} = t \oint_{l_{1-3}} \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix}}_{\underline{N}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} q_x^{1-3} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Las cargas están definidas según la coordenada x.}} \cdot ds.$$

Las funciones de forma N_2 se anulan ya que el nodo 2 no pertenece a esta frontera.
Desarrollando, nos queda:

$$f_q^{1-3} = t \oint_{l^{1-3}} \begin{bmatrix} N_1 q_x^{1-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_3 q_x^{1-3} \\ 0 \end{bmatrix} ds.$$

La variación de la fuerza distribuida con respecto a la coordenada y vale:

$$q_x^{1-3}(y) = \bar{q}(1-y)$$

Es decir cuando
$y=0 \quad q_x = \bar{q}$
$y=1$ (nodo 3) $q_x^{1-3} = 0$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Se cumple.}}$

De la figura vemos que.

$x = s\cos 45°$
$y = s \operatorname{sen} 45°$

Expresamos la carga distribuida en función de s.

$$q_x^{1-3}(s) = \bar{q}\left(1 - s(\sin 45)\right)$$

en nodo 3:
$\operatorname{sen} 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ o bien $\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow \bar{q}\left(1 - \underbrace{\sqrt{2}}_{s}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\operatorname{sen}45°}\right) = 0$

Las funciones de forma en los nodos 1 y 3 serán

$$N_i = \frac{1}{2A}\left[a_i + b_i x + c_i y\right]$$

$$N_i = \frac{1}{2A}\left[a_i + b_i \frac{s}{\sqrt{2}} + c_i \frac{s}{\sqrt{2}}\right] \quad \text{con } i = 1, 3.$$

como
$a_i = x_j y_k - x_k y_j$
$b_i = y_j - y_k$
$c_i = x_k - x_j$
$\Rightarrow$
$a_1 = 2$
$b_1 = -1.$
$c_1 = -1.$

Para el nodo 1 tendremos:

$$\oint_{l^{1-3}} N_1 q_x^{(1-3)} ds = \int_{s_1}^{s_3} \left(\frac{1}{2A}\left[2 + (-1)\frac{s}{\sqrt{2}} + (-1)\frac{s}{\sqrt{2}}\right]\right) \bar{q}\left(1 - s \operatorname{sen} 45\right) ds$$

$$\Rightarrow \oint_{l^{13}} N_1(s)\, f_x^{(1-3)}(s)\, ds = \boxed{\frac{2}{3}\frac{\bar{q}}{\sqrt{2}}}$$

Como $A_A = 1$; $\Rightarrow \frac{1}{2A} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ en forma análoga

$$\oint_{l^{1-3}} N_3(s)\, f_x^{(1-3)}\, ds = \oint_{l^{13}} \left[\frac{1}{2A}\left(2\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right]\bar{q}\,(1 - s \sin 45^\circ)\, ds.$$

$a_3 = 0$

$b_3 = 0$ $\Rightarrow \oint_{l^{13}} N_3(s)\, f_x^{(1-3)}\, ds = \boxed{\frac{1}{3}\frac{\bar{q}}{\sqrt{2}}}$

$c_3 = 2$

$A_\Delta = 1.$

$\Rightarrow$ El vector de fuerzas nodales equivalente será:

$$f_q = \frac{t\,\bar{q}}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ } que equivale a la carga distribuida

Estáticamente son iguales a la carga aplicada, ya que su valor total es $\bar{q}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\bar{q}}{\sqrt{2}}$ y que es igual a la suma de las fuerzas concentradas en los nodos 1 y 3 respectivamente.

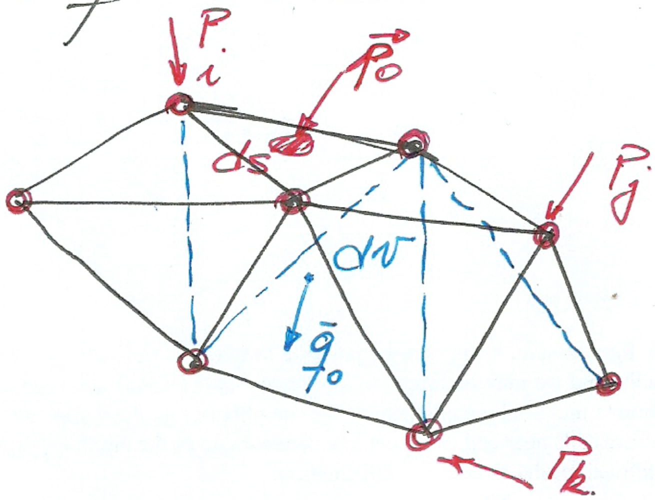
Así de esta manera obtuvimos las fuerzas equivalentes para este tipo de carga.-

---

DADA UNA ESTRUCTURA COMO OBTENER LA MATRIZ COMPLETA DE RIGIDEZ.

La ecuación matricial de equilibrio de una estructura discretizada por elementos finitos sale del principio de los trabajos virtuales

Supongamos que tenemos:



Ω: cuerpo de volumen V.

n: g. de libertad

(1)

$$\left(\int_V \underline{B}^T \underline{D}\,\underline{B}\,dv\right)\{\delta_0\} = \underbrace{\{P_0\}}_{\text{cargas concentradas}} + \underbrace{\int_V \underline{N}^T\{q_0\}\,dv}_{\text{cargas volumétricas}} + \underbrace{\int_S \underline{N}^T\{p_0\}\,ds}_{\text{cargas superficiales}}$$

δ_0: vector de parámetros nodales.

$$\delta_0 = [\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n]^T$$

$\underline{B}$: Matriz de deformación

$\underline{N}$: matriz de forma.

Sabemos que $\underline{B} = \underline{\partial}\,\underline{N}$

$$\underline{\partial} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$ para T.P. o D.P.

de (1) $\boxed{\underline{K}\,\underline{\delta_0} = \underline{F}}$ donde $K = \int_V B^T D B\,dv$

y $K_{ij} = \int_V B_i^T D\, B_j\, dv$

F: vector de fuerzas nodales equivalente.

$$F = \underline{P_0} + \int_V \underline{N}^T q_0\,dv + \oint_S \underline{N}^T p_0\,dS.$$