

MECANICA COMPUTACIONAL INGENIERIA EN INFORMATICA

Norberto Marcelo Nigro ^a Gerardo Franck ^a Diego Sklar ^a

^a *Facultad de Ingenieria y Ciencias Hidricas de la Universidad Nacional del Litoral (FICH-UNL), Ciudad Universitaria, 3000 Santa Fe, ARGENTINA*

1 TEORIA DE LA ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL

Estas notas son un breve resumen del capítulo 5 del libro de Eugenio Oñate *Calculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos*.

1.1 Campo de desplazamientos

Los desplazamientos suelen representar la incógnita principal en el problema de la elasticidad. Es un campo vectorial que denotaremos como:

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \quad (1)$$

1.2 Campo de deformaciones

Del campo vectorial de desplazamientos se pueden deducir el campo tensorial de las deformaciones como:

$$\boldsymbol{\epsilon}(x, y) = \nabla \mathbf{u}(x, y)$$

Asumiendo la hipótesis de un estado de deformaciones o tensiones bidimensionales donde ϵ_z o σ_z son nulos, entonces el producto de ambos, que participa en el principio de los trabajos virtuales, es nulo, motivo por el cual no es tenido

en cuenta de aquí en mas. Con estas hipótesis el tensor deformación y el de tensiones se pueden simplificar en sus versiones vectoriales para de esta forma simplificar el análisis. Por lo tanto de ahora en mas asumiremos a ambos como campos vectoriales, y en el caso de la deformación definido como:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Tambien podríamos escribir lo anterior como:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boldsymbol{\nabla}^{\epsilon-\sigma} \mathbf{u} \tag{3}$$

La notación $\boldsymbol{\nabla}^{\epsilon-\sigma}$ responde a que el operador ∇ no es el comúnmente definido operador gradiente sino una versión especial de la teoría de la elasticidad que nos permite operar con los tensores deformación y tensión como vectores.

1.3 Campo de tensiones

Del mismo modo el campo tensorial de tensiones lo asumiremos un campo vectorial con sus componentes significativas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (4)$$

1.4 Relación tensión con deformación

Esta relación se deduce de la ecuación constitutiva de la elasticidad tridimensional mediante un tensor de 4to orden \mathbf{C} que relaciona ambos tensores de 2do orden, $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\epsilon}$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

Con las hipótesis simplificativas bidimensionales $\epsilon_z = 0$ y $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ la citada relación se puede escribir como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} \quad (5)$$

donde nuevamente tanto $\boldsymbol{\sigma}$ como $\boldsymbol{\epsilon}$ son considerados con sus componentes significativas, es decir, como vectores.

La matriz \mathbf{D} asume una forma general:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} \quad (6)$$

donde se ha asumido el teorema de Maxwell-Betty que impone la simetría de esta matriz y si además consideramos isotropía llegamos a la definición de los siguientes coeficientes:

Tensión Plana

$$\begin{aligned}
d_{11} &= d_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \\
d_{12} &= \nu d_{11} \\
d_{33} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} = G
\end{aligned} \tag{7}$$

Deformación Plana

$$\begin{aligned}
d_{11} &= d_{22} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\
d_{12} &= \frac{\nu}{1 - \nu} d_{11} \\
d_{33} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} = G
\end{aligned} \tag{8}$$

con E el módulo de Young y ν el coeficiente de Poisson, datos que caracterizan a un material.

El caso ortótropo lo omitimos por razones de brevedad. Para mayor detalle ver la bibliografía citada en este apunte.

1.5 Principio de los trabajos virtuales

Esta es una forma energética que permite resolver el equilibrio local y global. Se define una función objetivo que representa la energía puesta en juego y se busca minimizarla. Esto redunda en la siguiente expresión integral:

$$\begin{aligned}
&\int \int_A (\delta \epsilon_x \sigma_x + \delta \epsilon_y \sigma_y + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) t dA = \\
&= \int \int_A (\delta u b_x + \delta v b_y) t dA + \oint_l (\delta u t_x + \delta v t_y) t ds + \sum_i (\delta u_i U_i + \delta v_i V_i)
\end{aligned} \tag{9}$$

El miembro derecho representa el trabajo de las fuerzas repartidas por unidad de volumen $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$, de las fuerzas repartidas sobre el contorno $\mathbf{t} = (t_x, t_y)$ y de las fuerzas puntuales $\mathbf{q}_i = (U_i, V_i)$ sobre los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{u} = [\delta u, \delta v]$, mientras que el miembro izquierdo representa el trabajo de las tensiones sobre los desplazamientos virtuales. A es el area y t su espesor. En problemas de tensión plana t debería coincidir con el espesor real mientras que

en el caso de deformación plana debería ser la unidad. Escribiendo la misma ecuación de una forma mas compacta:

$$\int \int_A \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} t dA = \int \int_A \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} t dA + \oint_l \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} t ds + \sum_i \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{q}_i \quad (10)$$

Estas ecuaciones son el punto de partida para el proceso de discretización que se introduce a continuación.

Esto mismo tambien puede lograrse a partir del método de los residuos ponderados, definiendo el residuo como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{W}_i \mathbf{R}_i^{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{W}}_i \mathbf{R}_i^{\Gamma} d\Gamma = \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{W}^T (\nabla^{\epsilon-\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{W}^T (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n) d\Gamma + \sum_i \int_{\Omega} \mathbf{W}^T \mathbf{q}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

donde las cargas puntuales están expresadas como deltas de *Dirac*.

Recurriendo a la forma débil de 11 tenemos

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} (\nabla^{\epsilon-\sigma} \mathbf{W})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{W}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{W}^T (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n) d\Gamma + \sum_i \int_{\Omega} \mathbf{W}^T \mathbf{q}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega = 0 \\ & - \int_{\Omega} (\nabla^{\epsilon-\sigma} \mathbf{W})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{W}^T \mathbf{b} d\Omega + \underbrace{\int_{\Gamma_u} \mathbf{W}^T \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d\Gamma}_{=0 \text{ (Dirichlet)}} + \\ & + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{W}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n d\Gamma + \sum_i \int_{\Omega} \mathbf{W}^T \mathbf{q}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

y terminamos con una forma equivalente a 10 donde \mathbf{W} equivale a $\delta \mathbf{u}$ y $\nabla^{\epsilon-\sigma} \mathbf{W}$ equivale a $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ habiendo usado una formulación Galerkin donde la función de peso y la aproximante de la solución coinciden.

La forma débil se emplea para reducir los requisitos de regularidad en los espacios funcionales y de esa forma generar formulaciones más simples.

Usando 17 y 5 en 12 llegamos a:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \mathbf{W}^T (\nabla^{\epsilon-\sigma})^T \mathbf{D} \nabla^{\epsilon-\sigma} \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{W}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \\
& + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{W}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n \, d\Gamma + \sum_i \int_{\Omega} \mathbf{W}^T \mathbf{q}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \, d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

1.6 Discretización

A continuación daremos los lineamientos generales de la discretización para luego particularizar a los elementos finitos frecuentemente empleados.

Nosotros trabajaremos sobre un elemento denominado *máster* definido en un espacio de coordenadas naturales (ξ, η) para lo cual necesitamos definir las transformaciones necesarias para poder transformar el problema desde el espacio real (x, y) al máster.

Del mismo modo con las variables dependientes, en este caso los desplazamientos $(\delta u, \delta v)$.

En ambos casos apelaremos a la forma discreta:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(\xi, \eta) &= \sum_j \mathbf{x}_j N_j(\xi, \eta) \\
\mathbf{u}(\xi, \eta) &= \sum_j \mathbf{u}_j N_j(\xi, \eta) \\
\text{con} \\
\mathbf{u}_j &= (u_j, v_j)
\end{aligned} \tag{14}$$

Con estas expresiones es posible relacionar los gradientes en el dominio real (x, y) a aquellos en el dominio máster (ξ, η) , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \\
(\nabla \mathbf{u})_{ij} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
\frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \\
\nabla_x u_i &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta} \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \nabla_\xi u_i = \mathbf{J} \nabla_\xi u_i
\end{aligned} \tag{15}$$

Del mismo modo para transformar al revés tenemos

$$\nabla_\xi u_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}^{-1}} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \nabla_x u_i = \mathbf{J}^{-1} \nabla_x u_i \tag{16}$$

Del mismo modo el operador $\nabla^{\epsilon-\sigma}$ de acuerdo a su definición dada en 17 y a la transformación recién definida en 15 y 16 llegamos a

$$\nabla^{\epsilon-\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}) & 0 \\ 0 & (\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}) \\ (\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}) & (\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}) \end{pmatrix} \tag{17}$$

Otro elemento de la discretización es la partición del dominio Ω en elementos, de forma tal queda

$$\begin{aligned}
\Omega &= \cup_e \Omega^{(e)} \\
&\text{tal que} \\
\cap_e \Omega^{(e)} &= \emptyset
\end{aligned} \tag{18}$$

1.6.1 Elementos triangulares de 3 nodos

La expresión anterior 14 en forma expandida se puede escribir para el caso de un elemento lineal de 3 nodos (triángulo)

$$\begin{aligned}
 \text{para las coordenadas } \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}^{(e)}} \\
 \text{y para los desplazamientos } \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}^{(e)}} \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)} \\
 \mathbf{N} &= [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{N}_3] \quad ; \quad \mathbf{N}_i = \begin{pmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{pmatrix} \\
 \mathbf{a}^{(e)} &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \mathbf{a}_2^{(e)} \\ \mathbf{a}_3^{(e)} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{19}$$

Para las deformaciones usando 2, tenemos

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \mathbf{a}^{(e)} \quad ; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Siendo el elemento triangular un soporte de un polinomio lineal completo, su gradiente es constante con lo cual las matrices \mathbf{B}_i tienen coeficientes constantes por elemento.

De 10 y 13 llegamos a:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{N}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n d\Gamma + \sum_i \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Si usamos la partición presentada en 18 entonces a nivel elemental las expresiones que quedan son:

$$\sum_{(e)} \left\{ \underbrace{- \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a} d\Omega}_{-\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)}} + \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega}_{\mathbf{f}_b^{(e)}} + \underbrace{\int_{\Gamma_{\sigma} \cap \Gamma^{(e)}} \mathbf{N}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n d\Gamma}_{\mathbf{f}_t^{(e)}} + \underbrace{\sum_i \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega}_{\mathbf{f}_q^{(e)}} \right\} = 0 \quad (22)$$

donde quedan definidas la matriz de rigidez elemental y los vectores de fuerzas de cuerpo, de contorno por tracción y de cargas puntuales.

En particular para el elemento de 3 nodos tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \\
\mathbf{f}_b^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega \\
\mathbf{f}_t^{(e)} &= \int_{\Gamma_\sigma \cap \Gamma^{(e)}} \mathbf{N}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n d\Gamma \\
\mathbf{f}_q^{(e)} &= \sum_i \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega
\end{aligned} \tag{23}$$

Como normalmente las fuerzas puntuales son pocas en lugar de aplicarlas en cada elemento de la malla se las recorre en otro lazo y se las aplica solo sobre los elementos donde se ubican sus puntos de aplicación.

A continuación recorreremos elemento a elemento y computamos en forma genérica las cuentas sobre uno de ellos en particular a modo de ejemplo.

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{B}_3^T \end{pmatrix}}_{6 \times 3} \underbrace{\mathbf{D}}_{3 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \end{pmatrix}}_{3 \times 6} d\Omega \\
\mathbf{K}_{ij}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \underbrace{\mathbf{B}_i^T}_{2 \times 3} \underbrace{\mathbf{D}}_{3 \times 3} \underbrace{\mathbf{B}_j}_{3 \times 2} d\Omega
\end{aligned} \tag{24}$$

Para las fuerzas

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_b^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega = \int_{\Omega^{(e)}} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1^T \mathbf{b} \\ \mathbf{N}_2^T \mathbf{b} \\ \mathbf{N}_3^T \mathbf{b} \end{pmatrix} d\Omega \\
\mathbf{f}_t^{(e)} &= \int_{\Gamma_\sigma \cap \Gamma^{(e)}} \mathbf{N}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n d\Gamma = \int_{\Gamma_\sigma \cap \Gamma^{(e)}} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n \\ \mathbf{N}_2^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n \\ \mathbf{N}_3^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n \end{pmatrix} d\Gamma \\
\mathbf{f}_q^{(e)} &= \sum_i \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega = \sum_i \int_{\Omega^{(e)}} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1^T \mathbf{q}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \\ \mathbf{N}_2^T \mathbf{q}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \\ \mathbf{N}_3^T \mathbf{q}_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \end{pmatrix} d\Omega = \\
&= \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{q}_i \\ \mathbf{N}_2^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{q}_i \\ \mathbf{N}_3^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{q}_i \end{pmatrix} \quad \forall \mathbf{x}_i \in e
\end{aligned} \tag{25}$$

Como dijimos anteriormente la integral la hacemos en el elemento máster $\hat{\Omega}$ por lo cual hay que tener en cuenta que los elementos del integrando deben ser considerados acorde a la transformación, entonces:

- $\mathbf{N}_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \rightarrow \mathbf{N}_i(\xi, \eta)$, es decir que a cada punto del dominio real le corresponde 1 y solo 1 del transformado por lo que el reemplazo es directo
- \mathbf{B}_i es una matriz construida en función de $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ y $\frac{\partial N_i}{\partial y}$
- $\nabla_x N_i = \mathbf{J} \nabla_\xi N_i$
- las funciones de forma triangulares en el master son

$$\begin{aligned}
N_1 &= 1 - \xi - \eta \\
N_2 &= \xi \\
N_3 &= \eta
\end{aligned} \tag{26}$$

- los gradientes son

$$\begin{aligned}
(\nabla_\xi N_1)^T &= \left(\frac{\partial N_1}{\partial \xi}, \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \right) = (-1, -1) \\
(\nabla_\xi N_2)^T &= \left(\frac{\partial N_2}{\partial \xi}, \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \right) = (1, 0) \\
(\nabla_\xi N_3)^T &= \left(\frac{\partial N_3}{\partial \xi}, \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \right) = (0, 1)
\end{aligned} \tag{27}$$

- los gradientes en el dominio real son:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_1}{\partial y}\right)^T &= \mathbf{J} \nabla_{\xi} N_1 \\ \left(\frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial y}\right)^T &= \mathbf{J} \nabla_{\xi} N_2 \\ \left(\frac{\partial N_3}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial y}\right)^T &= \mathbf{J} \nabla_{\xi} N_3\end{aligned}\tag{28}$$

- con \mathbf{J} calculada a partir de la inversa de las derivadas $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$ (16), es decir:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}^{-1}$$

con

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^{j=3} x_j \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^{j=3} x_j \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^{j=3} y_j \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^{j=3} y_j \frac{\partial N_j}{\partial \eta}\end{aligned}\tag{29}$$

con (x_j, y_j) las coordenadas de los vértices del elemento triangular considerado.

- el diferencial de volumen $d\Omega$ también se transforma al master como

$$d\Omega = |\mathbf{J}| d\hat{\Omega}$$

con $|\mathbf{J}|$ el determinante de la matriz jacobiana que transforma el dominio real en el máster y por lo tanto la integral sobre el volumen del elemento (area en 2D) se escribe como:

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} \mathbf{B}_i^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}_j(\xi, \eta) |\mathbf{J}| d\eta\tag{30}$$

De esta forma la integral queda definida en un dominio fijo (máster) lo cual requiere conocer la matriz jacobiana de la transformación entre el dominio real y el máster (\mathbf{J}) y en la cual aparece explícitamente a través del determinante de la citada matriz y por otro lado el cálculo de la matriz \mathbf{B}_i también requiere conocer la citada matriz ya que las derivadas hay que

calcularlas en el dominio físico original y no en el dominio de integración (máster).

- las cargas de volumen se integran en forma directa como:

$$\mathbf{f}_b^{(e)} = \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1^T(\xi, \eta) \mathbf{b} \\ \mathbf{N}_2^T(\xi, \eta) \mathbf{b} \\ \mathbf{N}_3^T(\xi, \eta) \mathbf{b} \end{pmatrix} |\mathbf{J}| d\eta \quad (31)$$

- las cargas puntuales

$$\mathbf{f}_q^{(e)} = \sum_i \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1^T(\mathbf{x}_i)(\xi, \eta) \mathbf{q}_i \\ \mathbf{N}_2^T(\mathbf{x}_i)(\xi, \eta) \mathbf{q}_i \\ \mathbf{N}_3^T(\mathbf{x}_i)(\xi, \eta) \mathbf{q}_i \end{pmatrix} \quad \forall \mathbf{x}_i \in e \quad (32)$$

- las cargas sobre el contorno también se pueden integrar mediante una transformación al elemento máster respectivo, que en el caso 2D sería una integración de línea entre $x \in (x_1, x_2)$ y en el máster sería $\xi \in (-1, 1)$

1.6.2 Elementos cuadrangulares de 4 nodos

Para el elemento de 4 nodos o vértices son pocas cosas las que cambian. Las enunciamos a continuación:

- las funciones de forma ahora son el producto cartesiano de 2 funciones en 1D, es decir:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2}(1 + \xi_i \xi) \times \frac{1}{2}(1 + \eta_i \eta) \\ N_1 &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \times \frac{1}{2}(1 - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \times \frac{1}{2}(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \times \frac{1}{2}(1 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \times \frac{1}{2}(1 + \eta) \end{aligned} \quad (33)$$

con (ξ_i, η_i) las coordenadas de los 4 vértices del cuadrángulo máster.

- Siendo estas funciones de forma polinomios de segundo orden incompletos (contienen un término $\xi \times \eta$, o $x \times y$) ya los gradientes no son mas constantes por elemento como en el caso triangular.

•

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}^{-1}$$

con

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^{j=4} x_j \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^{j=4} x_j \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^{j=4} y_j \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^{j=4} y_j \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \end{aligned} \tag{34}$$

donde ahora para construir la matriz jacobiana y su inversa hay que extender el lazo a los 4 vértices.

- del mismo modo la matriz \mathbf{B} se construye como

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{35}$$

- y por lo tanto la matriz de rigidez es ahora

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{B}_3^T \\ \mathbf{B}_4^T \end{pmatrix}}_{8 \times 3} \underbrace{\mathbf{D}}_{3 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{pmatrix}}_{3 \times 8} d\Omega \\ \mathbf{K}_{ij}^{(e)} &= \int_{\Omega^{(e)}} \underbrace{\mathbf{B}_i^T}_{2 \times 3} \underbrace{\mathbf{D}}_{3 \times 3} \underbrace{\mathbf{B}_j}_{3 \times 2} d\Omega \end{aligned} \tag{36}$$

- y el vector de incógnitas elementales es ahora

$$\begin{aligned}
& \text{para las coordenadas } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} \\
& \text{y para los desplazamientos } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}^{(e)}} \\
& \mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)} \\
& \mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{N}_3 \ \mathbf{N}_4] \quad ; \quad \mathbf{N}_i = \begin{pmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{pmatrix} \\
& \mathbf{a}^{(e)} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \mathbf{a}_2^{(e)} \\ \mathbf{a}_3^{(e)} \\ \mathbf{a}_4^{(e)} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{37}$$

- la integración sobre el elemento máster $\hat{\Omega}$ definido como $(\xi, \eta) \in (-1, 1) \times (-1, 1)$ se realiza en forma similar al caso triangular solo cambian los límites de integración, a saber:

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^1 d\xi \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}_j(\xi, \eta) |\mathbf{J}| d\eta \quad (38)$$

1.7 Implementación computacional

Un código de elementos finitos (FEM) requiere a grosso modo lo siguiente:

- un lazo sobre todos los elementos
- para cada elemento, contar con sus coordenadas $xnod = (x_j, y_j)$ y sus conectividades $icone = (i_1, i_2, i_3)$ en el caso de triángulos y (i_1, i_2, i_3, i_4) en el caso de cuadrángulos.
- con sus coordenadas $xnod$ se calcula la matriz jacobiana \mathbf{J} como se explicó previamente, su inversa y su determinante
- se calcula la matriz \mathbf{B} y la matriz constitutiva \mathbf{D}
- se evalúa el integrando $\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}|$
- se integra analíticamente o numéricamente el integrando, generando una matriz elemental de $(nen \times ndf) \times (nen \times ndf)$, con $nen = 3$ para triángulos, $nen = 4$ para cuadrángulos y $ndf = 2$ para elasticidad bidimensional, $ndf = 1$ para problemas escalares como el caso térmico.
- También se ensambla el miembro derecho que aporta el elemento, sea las cargas de volumen, las puntuales y las de contorno que le correspondan.
- Se lleva la contribución elemental a la matriz global usando el arreglo de conectividades $icone$
- se aplican las condiciones de contorno Dirichlet con algún criterio, sea tachando sus filas y columnas respectivas previa modificación del miembro derecho acorde a esta fijación, o sea anulan sus contribuciones y se introduce la asignación al sistema de ecuaciones agregando un 1 en la diagonal y el valor de la fijación al miembro derecho, o alguna otra forma equivalente.
- finalmente se resuelve el sistema de ecuaciones.

A continuación presentamos un caso testigo. Se trata de una viga en voladizo como muestra la siguiente figura ya discretizada con una malla de triángulos.

El triángulo marcado en rojo es el que será analizado en detalle. Este triángulo es el elemento 12 de esta malla que tiene 48 elementos en total, 8 según la dirección x , 3 según y y esos 24 cuadrángulos originales son luego divididos por su diagonal en 48 triángulos. Ese triángulo tiene como nodos

$$icone(12, 1 : 3) = [131423]$$

y las coordenadas de esos 3 nodos son

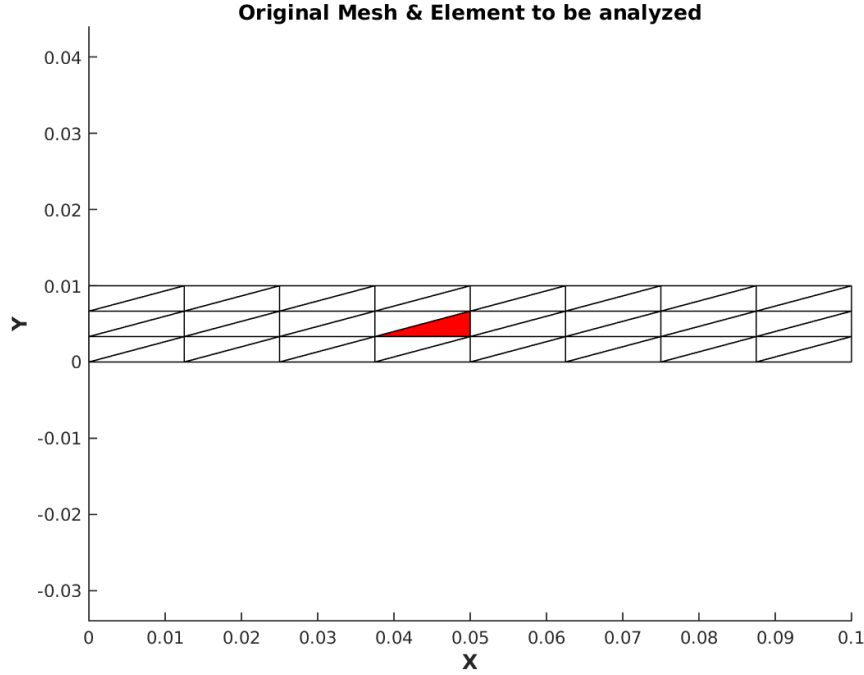


Fig. 1. Viga en voladizo - Malla de triángulos

$$xnod([13, 14, 23], :) = \begin{pmatrix} 3.75e-02 & 3.3333e-03 \\ 5.00e-02 & 3.3333e-03 \\ 5.00e-02 & 6.6667e-03 \end{pmatrix}$$

No hemos entrado mucho en detalle respecto a la integración numérica pero usamos cuadratura Gaussiana, por lo tanto la integral se reemplaza por la suma sobre unos puntos de Gauss que tienen coordenadas preestablecidas en el máster ponderados de forma de obtener la precisión deseada. En este caso usamos 3 puntos de Gauss cuyas coordenadas son:

$$\xi_{pg} = \begin{pmatrix} 1.6667e-01 & 6.6667e-01 & 1.6667e-01 \end{pmatrix}$$

$$\eta_{pg} = \begin{pmatrix} 1.6667e-01 & 1.6667e-01 & 6.6667e-01 \end{pmatrix}$$

y sus pesos son los tres iguales a $w_{pg} = \frac{1}{6}$.

Por lo tanto la integral $\int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} I(\xi, \eta) d\eta$ se reemplaza por la suma $\sum_{pg} I(\xi_{pg}, \eta_{pg}) w_{pg}$, donde I es el integrando a integrar.

Para cada punto de Gauss evaluamos el integrando y esto requiere entre otras cosas evaluar la matriz \mathbf{B} y la matriz jacobiana \mathbf{J} . Por lo tanto armamos una rutina que nos construya la matriz jacobiana, que evaluada en el elemento en cuestión sobre el primer punto de Gauss arroja lo siguiente:

$$(\mathbf{J}^{-1})_{e=12}^{pg=1} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \begin{pmatrix} 1.2500e-02 & 0 \\ 1.2500e-02 & 3.3333e-03 \end{pmatrix}$$

lo cual arroja

$$(\mathbf{J})_{e=12}^{pg=1} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 8.0000e+01 & 0 \\ -3.0000e+02 & 3.0000e+02 \end{pmatrix}$$

con el determinante de la matriz jacobiana de valor $4.1667e-05$.

En cuanto a la matriz \mathbf{B} tenemos

$$(\mathbf{B}_1)_{e=12}^{pg=1} = \begin{pmatrix} -8.0000e+01 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -8.0000e+01 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{B}_2)_{e=12}^{pg=1} = \begin{pmatrix} 8.0000e+01 & 0 \\ 0 & -3.0000e+02 \\ -3.0000e+02 & 8.0000e+01 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{B}_3)_{e=12}^{pg=1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3.0000e+02 \\ 3.0000e+02 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez recorrido los 3 puntos de Gauss y el integrando correspondiente a cada punto de Gauss se obtiene una matriz elemental, en este caso de 6×6 compuesta por un arreglo de 3×3 matrices de 2×2 . Cada una de estas matrices de 2×2 la presentamos a continuación para que la puedan cotejar con sus resultados.

$$(\mathbf{K}_{1,1})_{e=12} = \begin{pmatrix} 3.0769e + 10 & 0 \\ 0 & 1.0769e + 10 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{1,2})_{e=12} = \begin{pmatrix} -3.0769e + 10 & 3.4615e + 10 \\ 4.0385e + 10 & -1.0769e + 10 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{1,3})_{e=12} = \begin{pmatrix} 0 & -3.4615e + 10 \\ -4.0385e + 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{2,1})_{e=12} = \begin{pmatrix} -3.0769e + 10 & 4.0385e + 10 \\ 3.4615e + 10 & -1.0769e + 10 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{2,2})_{e=12} = \begin{pmatrix} 1.8221e + 11 & -7.5000e + 10 \\ -7.5000e + 10 & 4.4346e + 11 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{2,3})_{e=12} = \begin{pmatrix} -1.5144e + 11 & 3.4615e + 10 \\ 4.0385e + 10 & -4.3269e + 11 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{3,1})_{e=12} = \begin{pmatrix} 0 & -4.0385e + 10 \\ -3.4615e + 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{3,2})_{e=12} = \begin{pmatrix} -1.5144e + 11 & 4.0385e + 10 \\ 3.4615e + 10 & -4.3269e + 11 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{3,3})_{e=12} = \begin{pmatrix} 1.5144e + 11 & 0 \\ 0 & 4.3269e + 11 \end{pmatrix}$$