

Ejemplo 5.2. Una estructura bidimensional con estado de deformaciones plano se discretiza utilizando un elemento finito triangular de tres nodos (Fig. 5.10). Determinar la matriz de rigidez del elemento, considerando un espesor $t = 1$ cm.

Datos: $E = 2 \cdot 10^5$ kg/cm², $\nu = 0,2$.

Solución: Según (5.7), la matriz constitutiva de un estado de deformaciones plano es

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{vmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{vmatrix},$$

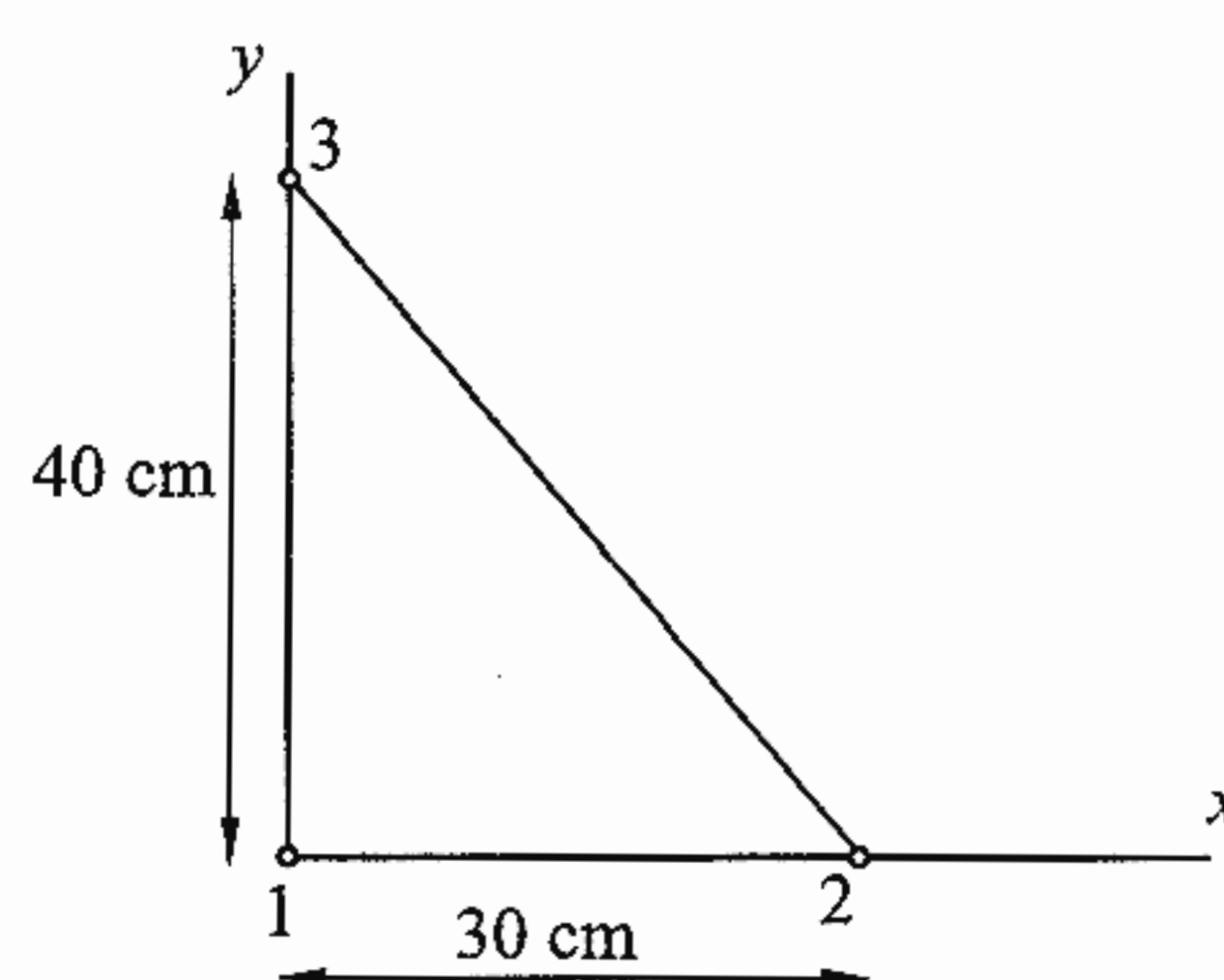


Fig. 5.10.

es decir

$$[\mathbf{D}] = \frac{2 \cdot 10^5}{1,2 \cdot 0,6} \begin{vmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{vmatrix} = 10^5 \begin{vmatrix} 2,22222 & 0,55556 & 0 \\ 0,55556 & 0,22222 & 0 \\ 0 & 0 & 0,83333 \end{vmatrix}.$$

Siendo el área del elemento $A_e = 30 \cdot 40/2 = 600$ cm², la matriz de deformación, según (5.45), es

$$[\mathbf{B}_e] = \frac{1}{2 \cdot 600} \begin{vmatrix} 0-40 & 0 & 40-0 & 0 & 0-0 & 0 \\ 0 & 0-30 & 0 & 0-0 & 0 & 30-0 \\ 0-30 & 0-40 & 0-0 & 40-0 & 30-0 & 0-0 \end{vmatrix},$$

es decir

$$[\mathbf{B}_e] = \begin{vmatrix} -0,03333 & 0 & 0,03333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,025 & 0 & 0 & 0 & 0,025 \\ -0,025 & -0,03333 & 0 & 0,03333 & 0,025 & 0 \end{vmatrix}$$

y, por tanto

$$[\mathbf{B}_e]^T = \begin{vmatrix} -0,03333 & 0 & -0,025 \\ 0 & -0,025 & -0,03333 \\ 0,03333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,03333 \\ 0 & 0 & 0,025 \\ 0 & 0,025 & 0 \end{vmatrix}$$

Según (5.49), la matriz de rigidez del elemento es

$$[\mathbf{k}_e] = tA_e [\mathbf{B}_e]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_e],$$

Al sustituir $t = 1 \text{ cm}$, $A_e = 600 \text{ cm}^2$, los valores hallados de las matrices $[\mathbf{B}_e]^T$, $[\mathbf{D}]$ y $[\mathbf{B}_e]$, y operar el triple producto matricial, se obtiene

$$[\mathbf{k}_e] = \begin{vmatrix} 179368 & 69437,5 & -148118 & -41662,3 & -31249,8 & -27775,2 \\ 69437,5 & 138877 & -27775,2 & -55544,2 & -41662,3 & -83333,2 \\ -148118 & -27775,2 & 148118 & 0 & 0 & 27775,2 \\ -41662,3 & -55544,2 & 0 & 55544,2 & 41662,3 & 0 \\ -31249,8 & -41662,3 & 0 & 41662,3 & 31249,8 & 0 \\ -27775,2 & -83333,2 & 27775,2 & 0 & 0 & 83333,2 \end{vmatrix}$$

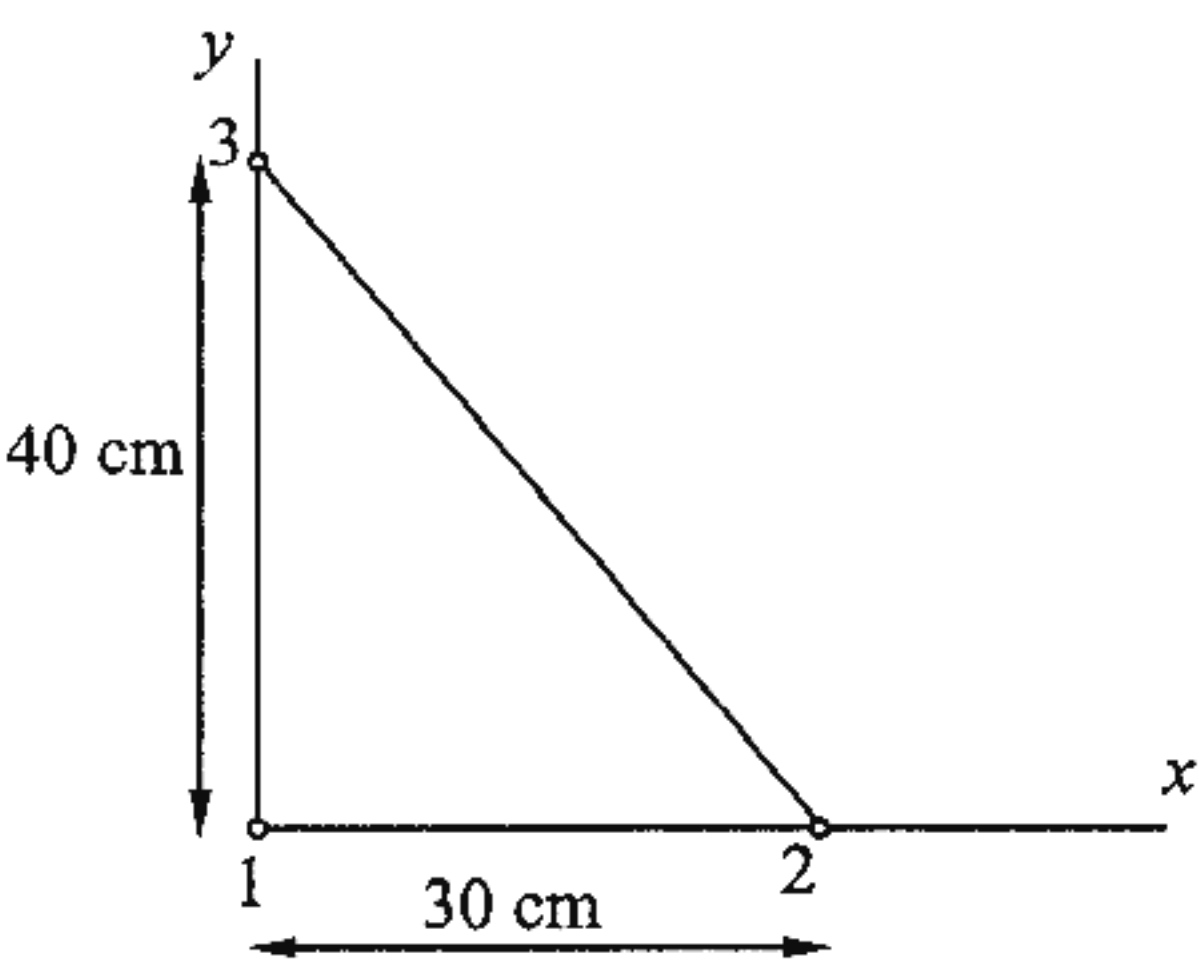


Fig. 5.11.

Ejemplo 5.3. Una estructura bidimensional se discretiza utilizando un elemento finito triangular de tres nodos (Fig. 5.11): a) determinar los términos de la submatriz $[\mathbf{k}_{ij}]$, b) considerando un estado de deformaciones plano, comprobar el valor de la submatriz $[\mathbf{k}_{2,3}]$ con los resultados del Ejemplo anterior.

Datos: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0,2$, $t = 1 \text{ cm}$.

Solución: a) Siendo $i, j, k = 1, 2, 3$, al sustituir en (5.50) las expresiones (5.9) y (5.45), se obtiene

$$[\mathbf{k}_{ij}^{(e)}] = tA \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} y_j - y_k & 0 & x_k - x_j \\ 0 & x_k - x_j & y_j - y_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{vmatrix} \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} y_k - y_i & 0 \\ 0 & x_i - x_k \\ x_i - x_k & y_k - y_i \end{vmatrix}.$$

Operando este triple producto matricial, se hallan los términos de esta submatriz

$$k_{ii} = \frac{t}{4A} \left[(y_j - y_k)(y_k - y_i)d_{11} + (x_i - x_k)(x_k - x_j)d_{33} \right],$$

$$k_{ij} = \frac{t}{4A} \left[(x_i - x_k)(y_j - y_k)d_{12} + (x_k - x_j)(y_k - y_i)d_{33} \right],$$

$$k_{ji} = \frac{t}{4A} \left[(x_k - x_j)(y_k - y_i)d_{21} + (x_i - x_k)(y_j - y_k)d_{33} \right],$$

$$k_{jj} = \frac{t}{4A} \left[(x_k - x_j)(y_k - y_i)d_{22} + (y_j - y_k)(y_k - y_i)d_{33} \right].$$

Estas expresiones determinan los términos de la submatriz de rigidez $[\mathbf{k}_{ij}]$ de un elemento sometido a un estado de esfuerzos plano o de deformaciones plano, sustituyendo los correspondientes términos d_{ij} de la matriz constitutiva $[\mathbf{D}]$.

b) Los términos de la matriz constitutiva $[\mathbf{D}]$ correspondientes a un estado de deformaciones plano, según (5.10), son

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0,8}{1,2 \cdot 0,6} = 222222 \text{ kg/cm}^2,$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0,2}{1,2 \cdot 0,6} = 55556 \text{ kg/cm}^2,$$

$$d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot 1,2} = 83333 \text{ kg/cm}^2.$$

Los términos de la submatriz $[\mathbf{k}_{23}]$ del elemento finito son los coeficientes de rigidez $k_{3,5}$, $k_{3,6}$, $k_{4,5}$, $k_{4,6}$, cuyos valores, de acuerdo con la expresión obtenida haciendo $i, j, k = 2, 3, 1$, son

$$k_{3,5} = \frac{1}{4 \cdot 600} [(40-0)(0-0) 22222 + (30-0)(0-0) 83333] = 0,$$

$$k_{3,6} = \frac{1}{4 \cdot 600} [(30-0)(40-0) 55556 + (0-0)(0-0) 83333] = 27778,$$

$$k_{4,5} = \frac{1}{4 \cdot 600} [(0-0)(0-0) 55556 + (30-0)(40-0) 83333] = 41666,5$$

$$k_{4,6} = \frac{1}{4 \cdot 600} [(0-0)(0-0) 22222 + (40-0)(0-0) 83333] = 0.$$

que determinan la submatriz

$$[\mathbf{k}_{23}] = \begin{vmatrix} 0 & 27778 \\ 41666,5 & 0 \end{vmatrix},$$

que coincide con el resultado obtenido en el Ejemplo anterior (error 0,01%).

5.5. VECTOR DE FUERZAS NODALES EQUIVALENTE

A. Carga distribuida sobre el elemento

Consideremos que sobre el elemento actúa una carga cualquiera $\mathbf{q}(x, y)$ distribuida por unidad de volumen (Fig. 5.12a). Según (2.35), el vector de fuerzas nodales equivalente a la carga distribuida es

$$\{\mathbf{F}_q\} = \int_{V_e} [\mathbf{N}_e]^T \{\mathbf{q}_e\} dV_e.$$

Teniendo en cuenta que $\{\mathbf{q}_e\} = [q_x \ q_y]^T$, al sustituir la matriz $[\mathbf{N}_e]$ correspondiente al elemento triangular (5.33), se obtiene

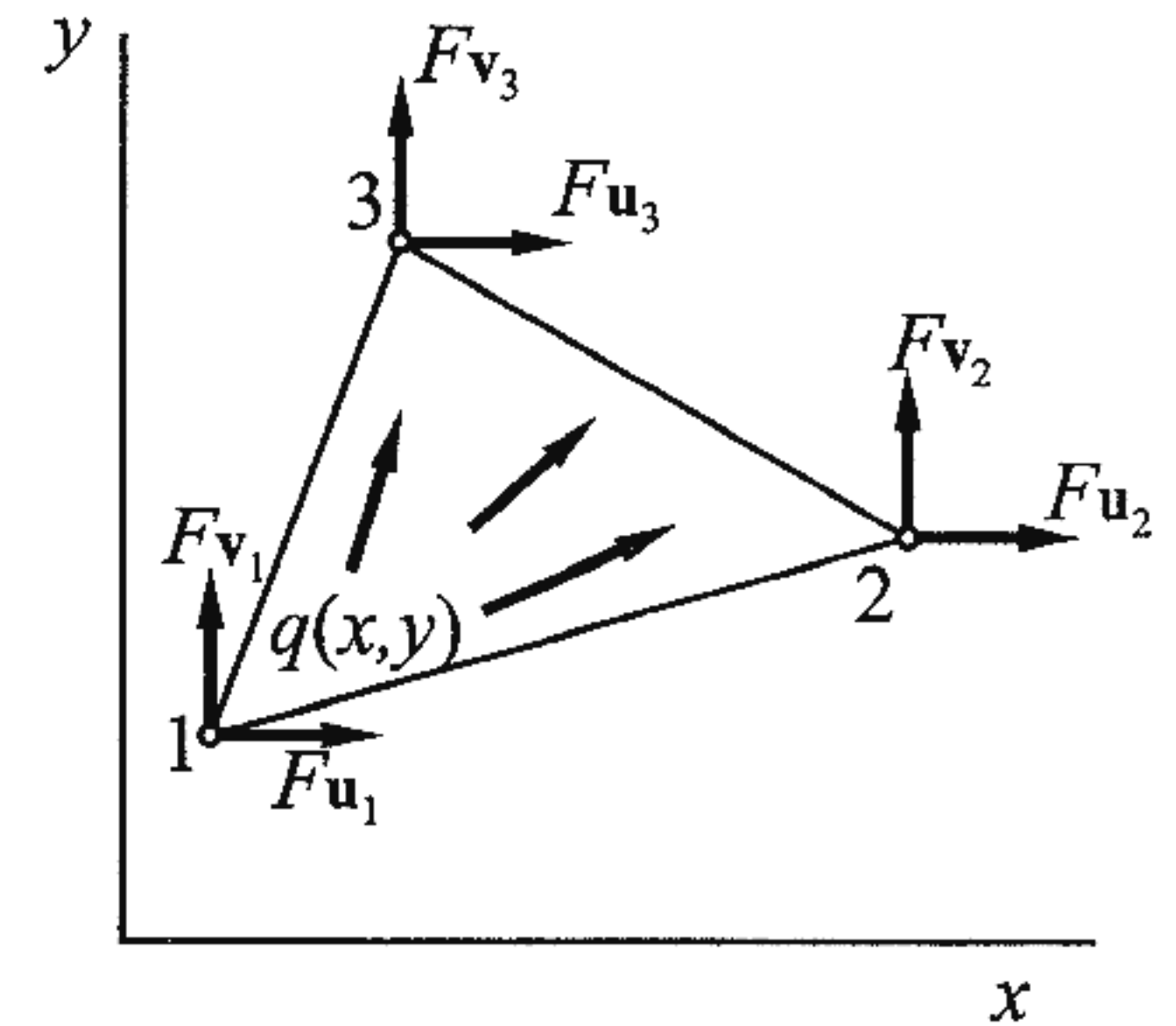


Fig. 5.12 (a)

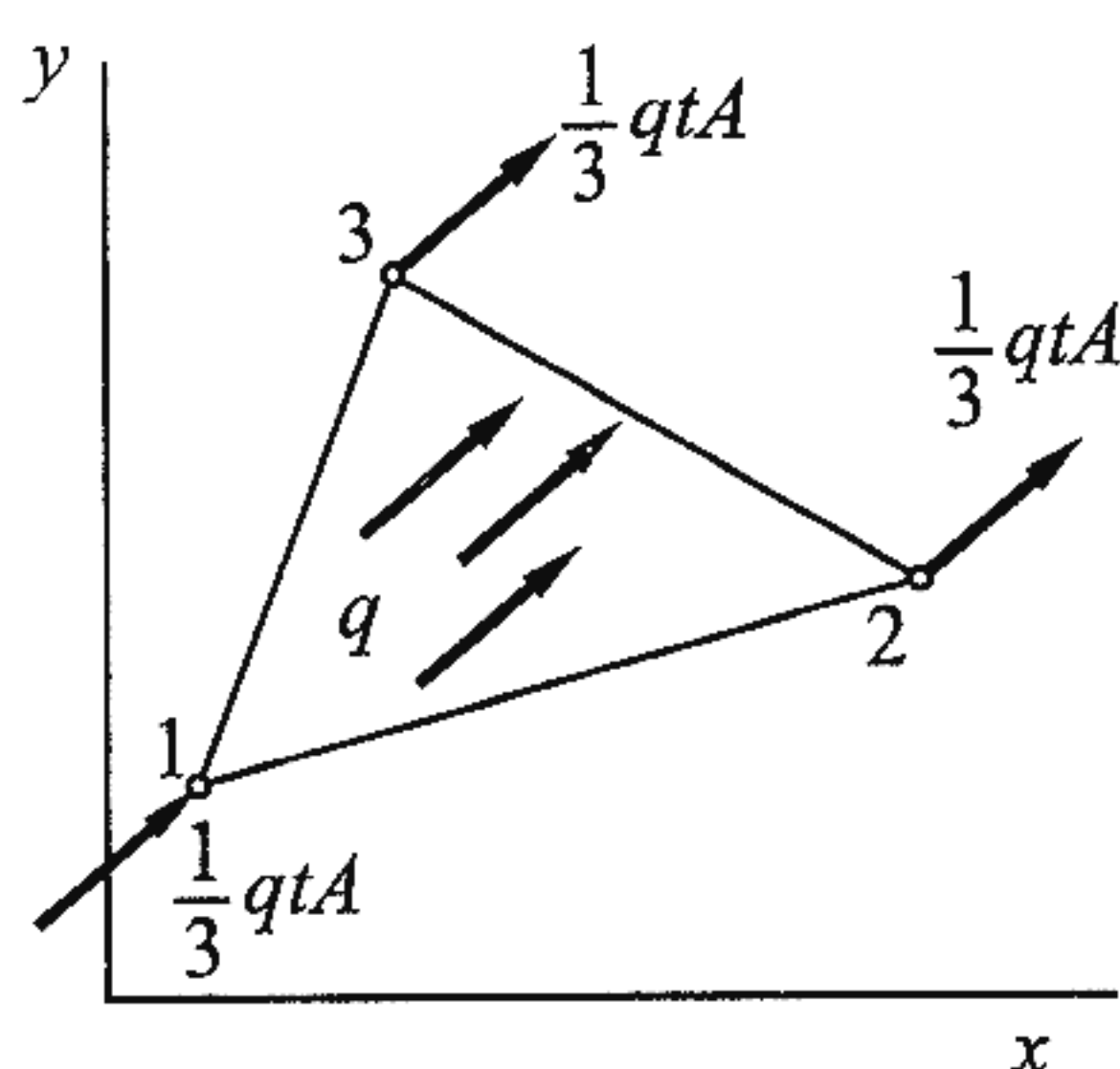
$$\{\mathbf{F}_P\} = \begin{Bmatrix} F_{u1} \\ F_{v1} \\ F_{u2} \\ F_{v2} \\ F_{u3} \\ F_{v3} \end{Bmatrix} = \int_A \begin{Bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} t dA, \quad (5.51)$$

es decir

$$\begin{aligned} F_{u1} &= \int_A N_1 q_x t dA, & F_{v1} &= \int_A N_1 q_y t dA, \\ F_{u2} &= \int_A N_2 q_x t dA, & F_{v2} &= \int_A N_2 q_y t dA, \\ F_{u3} &= \int_A N_3 q_x t dA, & F_{v3} &= \int_A N_3 q_y t dA, \end{aligned} \quad (5.52)$$

Sustituyendo en estas expresiones los valores de las funciones de interpolación (5.35) se obtienen las fuerzas nodales equivalentes a la carga distribuida.

En el caso particular de que la carga distribuida $q(x, y)$ sea constante en el elemento (Fig. 5.12b), al ser $\int_A N_i dA = A/3$, las fuerzas nodales equivalentes (5.52) se reducen a



$$\begin{aligned} F_{u1} &= \frac{1}{3} q_x t A, & F_{v1} &= \frac{1}{3} q_y t A, \\ F_{u2} &= \frac{1}{3} q_x t A, & F_{v2} &= \frac{1}{3} q_y t A, \\ F_{u3} &= \frac{1}{3} q_x t A, & F_{v3} &= \frac{1}{3} q_y t A, \end{aligned} \quad (5.53)$$

Fig. 5.12 (b).

Estas ecuaciones significan que la carga uniformemente distribuida sobre un elemento finito triangular lineal equivale a una fuerza $q t A/3$ aplicada en cada uno de sus nodos.

B. Carga distribuida sobre el borde del elemento

Consideremos que sobre un borde del elemento, por ejemplo el borde 1-2, actúa una carga cualquiera $p(x, y)$ distribuida por unidad de superficie de borde (Fig. 5.13a). Como en el borde 1-2, la función de interpolación N_3 es nula, las fuerzas nodales equivalentes solamente actuarán en los nodos 1 y 2, siendo sus expresiones, análogas a (5.52)

$$\begin{aligned}
 F_{u1} &= \int_{L_{1-2}} N_1 p_x t dL, & F_{v1} &= \int_{L_{1-2}} N_1 p_y t dL, \\
 F_{u2} &= \int_{L_{1-2}} N_2 p_x t dL, & F_{v2} &= \int_{L_{1-2}} N_2 p_y t dL,
 \end{aligned}
 \tag{5.54}$$

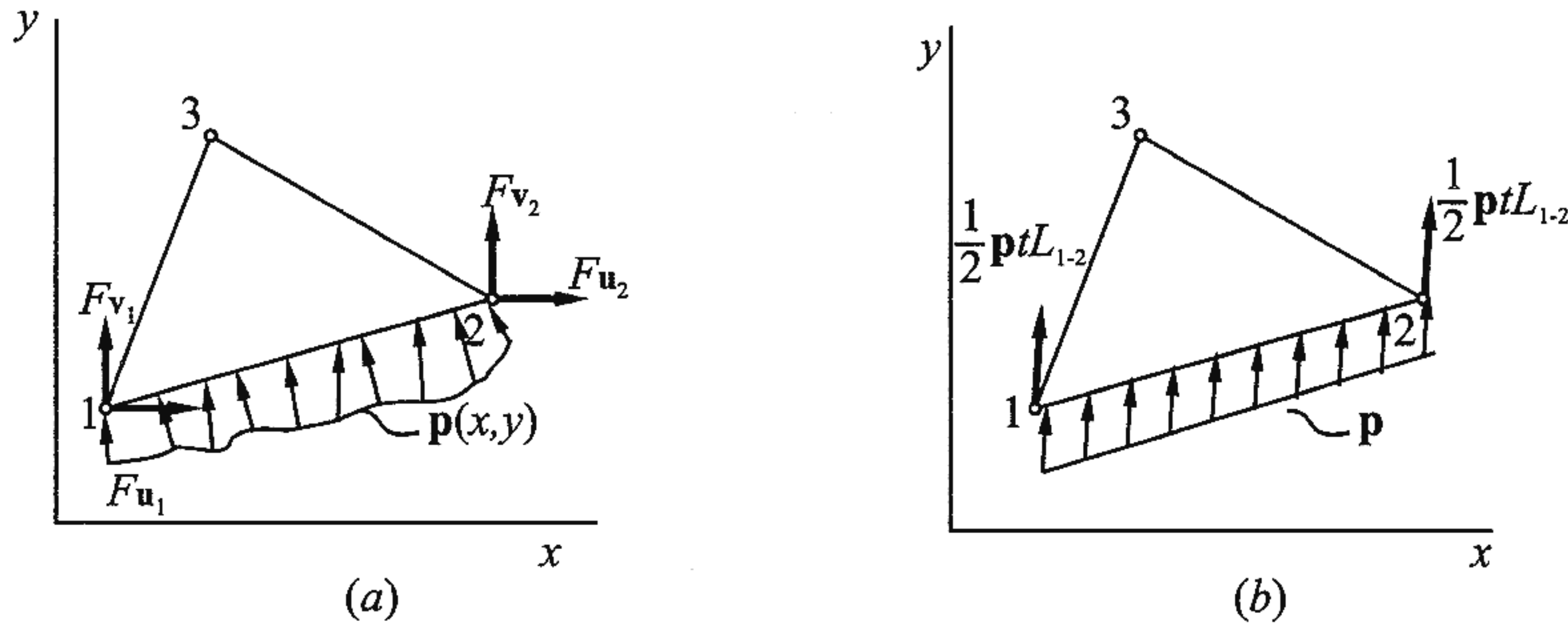


Fig. 5.13 (a) y (b)

Si la carga distribuida $\mathbf{p}(x,y)$ es constante en el borde 1-2 (Fig. 5.13b), las ecuaciones anteriores se reducen a

$$\begin{aligned}
 F_{u1} &= \frac{1}{2} p_x t L_{1-2}, & F_{v1} &= \frac{1}{2} p_y t L_{1-2}, \\
 F_{u2} &= \frac{1}{2} p_x t L_{1-2}, & F_{v2} &= \frac{1}{2} p_y t L_{1-2},
 \end{aligned}
 \tag{5.55}$$

Estas ecuaciones significan que la *carga uniformemente distribuida sobre el borde 1-2 de un elemento finito triangular lineal equivale a una fuerza $\frac{1}{2} \mathbf{p} t L_{1-2}$ aplicada en cada uno de los dos nodos que limitan ese borde.*

C. Carga concentrada

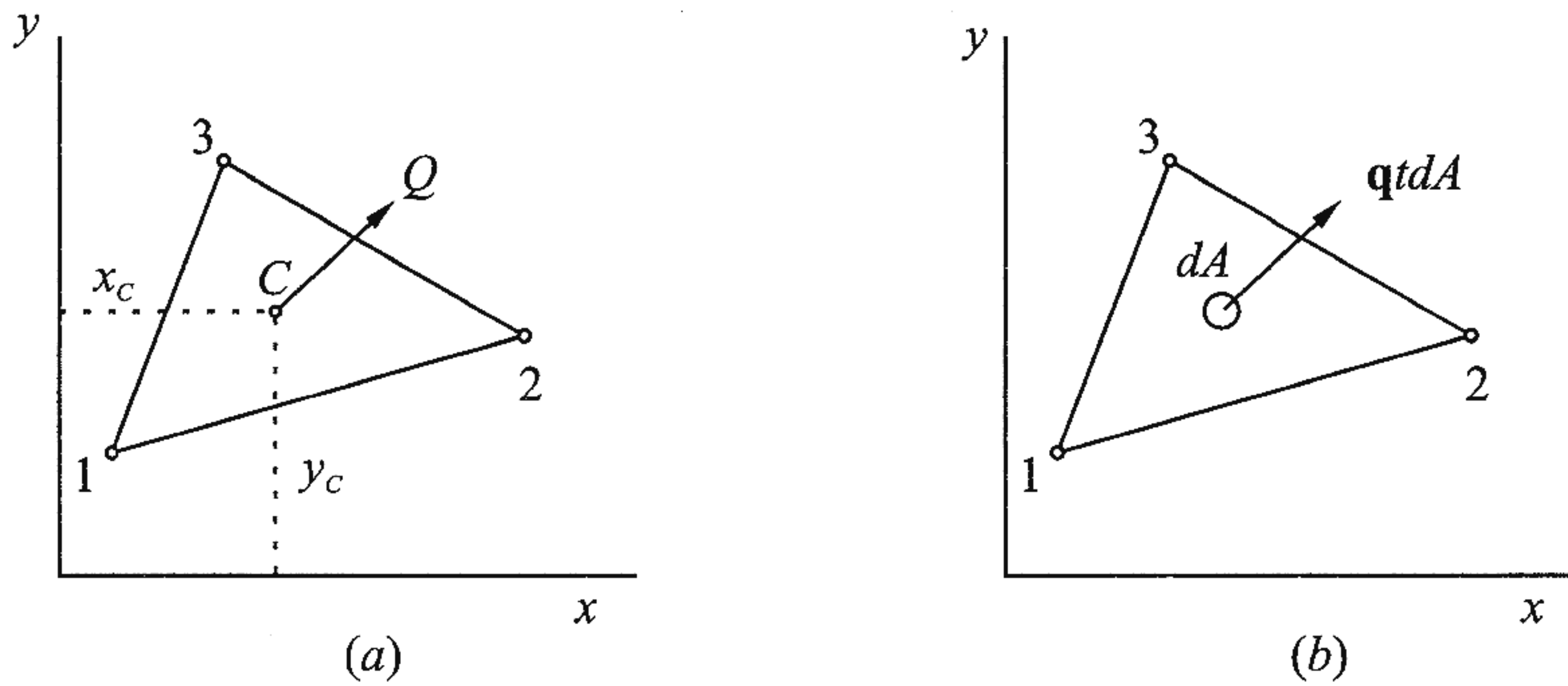


Fig. 5.14 (a) y (b)

Supongamos ahora que el elemento finito está sometido a una carga concentrada \mathbf{Q} aplicada en el punto C de coordenadas $x = x_C$, $y = y_C$ (Fig. 5.14a).

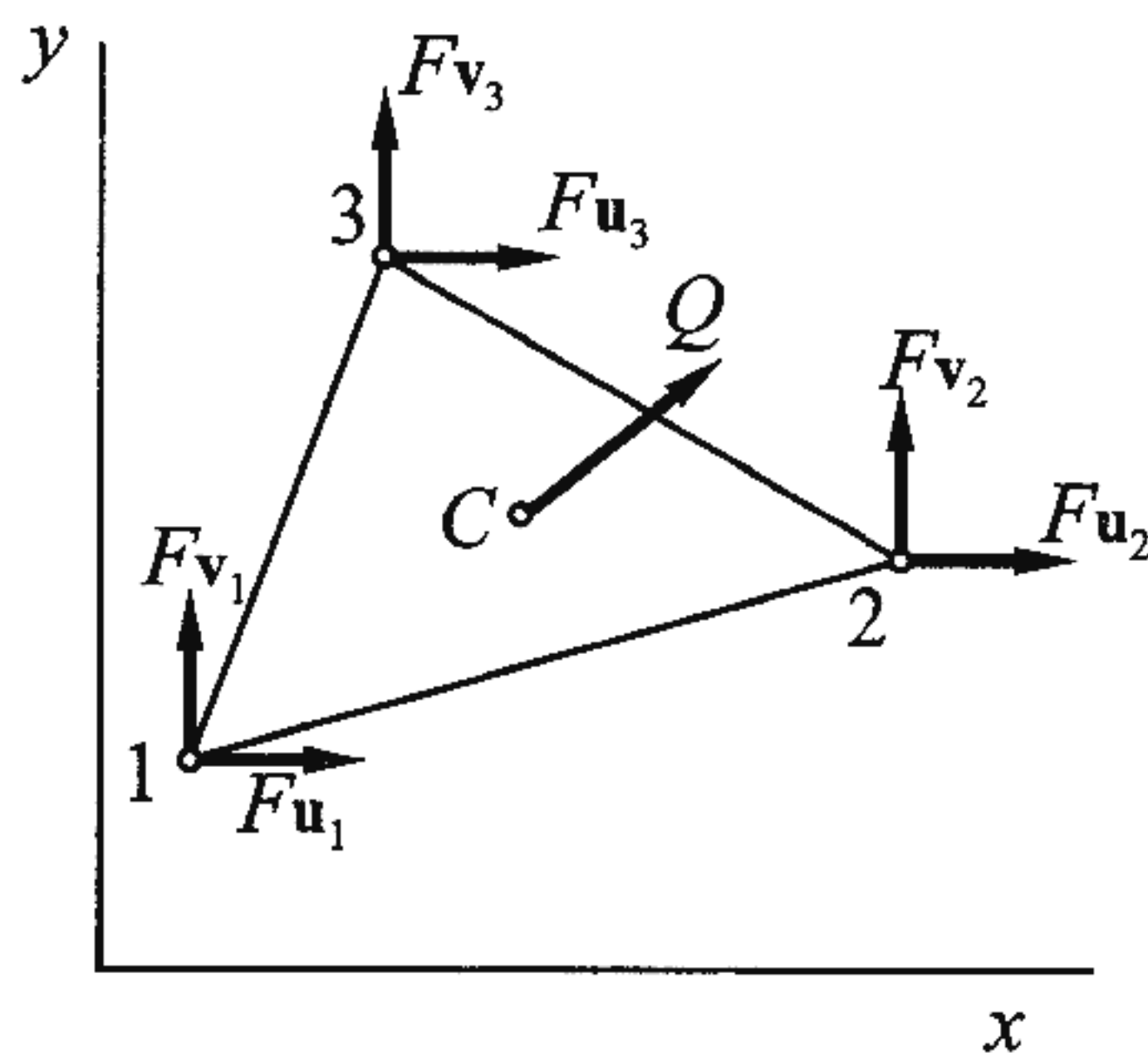


Fig. 5.14 (c).

Considerando esta carga como la resultante de una carga distribuida q sobre un volumen diferencial tdA , tal que $Q = qtdA$ (Fig. 5.14b), al hacer las integraciones (5.51) a lo largo de todo el elemento, el producto $q_x tdA$ es igual a Q_x y el producto $q_y tdA$ es igual a Q_y , únicamente para el punto de coordenadas $x = x_C$, $y = y_C$, siendo nulos en los restantes puntos del elemento. Debido a ello, la primera de las ecuaciones (5.52) se reduce a

$$F_{u1} = \int_A N_1 q_x t dA = (N_1)_{\substack{x = x_C \\ y = y_C}} \cdot q_x t dA$$

y, en consecuencia, las fuerzas nodales equivalentes a la carga concentrada Q son

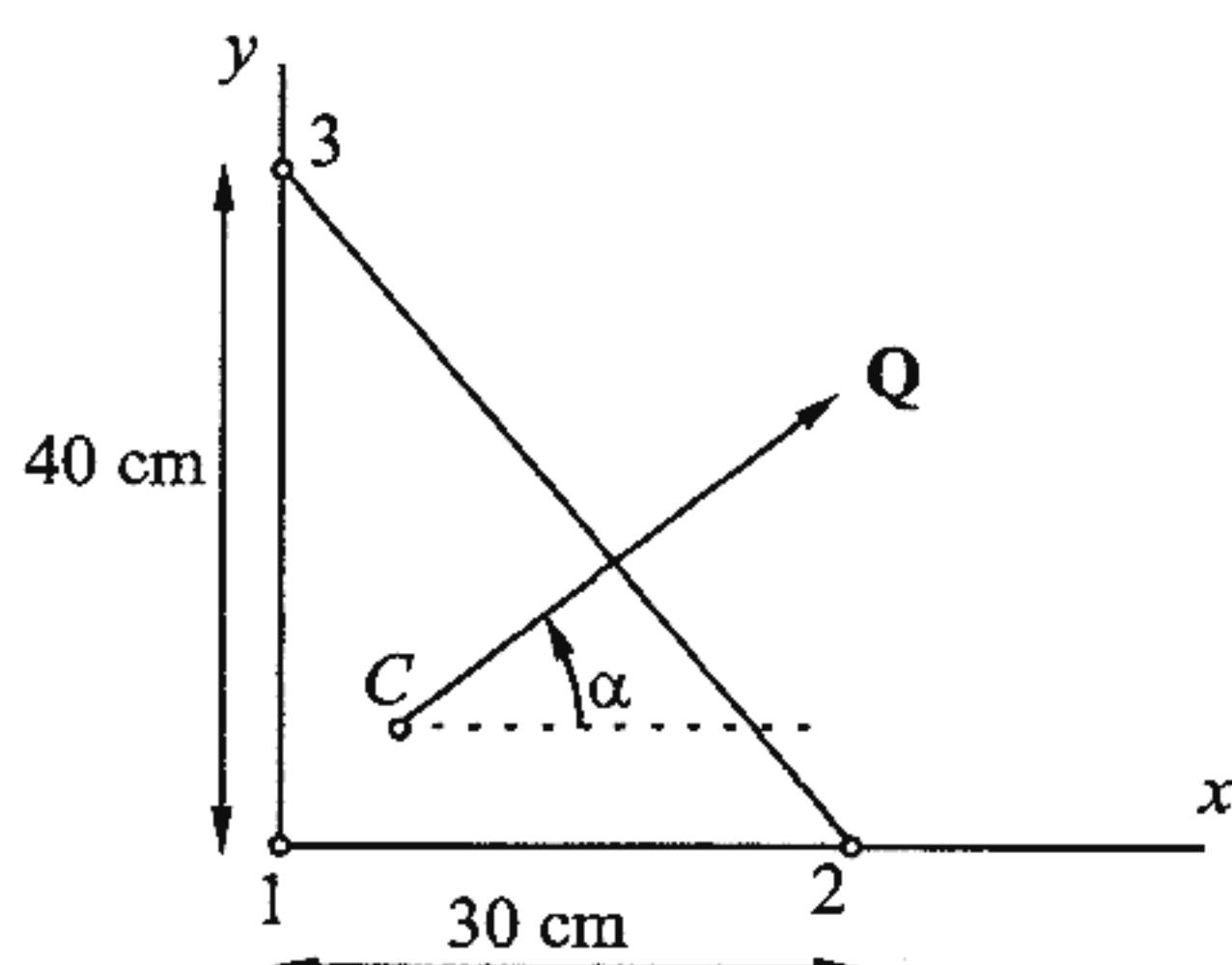
$$\begin{aligned} F_{u1} &= Q_x (N_1)_{\substack{x = x_C \\ y = y_C}}, & F_{v1} &= Q_y (N_1)_{\substack{x = x_C \\ y = y_C}} \\ F_{u2} &= Q_x (N_2)_{\substack{x = x_C \\ y = y_C}}, & F_{v2} &= Q_y (N_2)_{\substack{x = x_C \\ y = y_C}} \\ F_{u3} &= Q_x (N_3)_{\substack{x = x_C \\ y = y_C}}, & F_{v3} &= Q_y (N_3)_{\substack{x = x_C \\ y = y_C}} \end{aligned} \quad (5.56)$$

y están representadas en la figura 5.14c.

Ejemplo 5.4. El elemento finito triangular del Ejemplo 5.1 está sometido a la carga concentrada Q aplicada en el punto C perpendicularmente al borde 2-3 (Fig. 5.15). Determinar el vector de fuerzas nodales equivalente.

Datos: $Q = 500$ kg, $x_C = 6$ cm, $y_C = 4$ cm.

Solución: Según (5.56), las fuerzas nodales equivalentes a la carga Q son



$$\begin{aligned} F_{u1} &= Q_x (N_1)_{\substack{x = x_C \\ y = y_C}}, & F_{v1} &= Q_y (N_1)_{\substack{x = x_C \\ y = y_C}} \\ F_{u2} &= Q_x (N_2)_{\substack{x = x_C \\ y = y_C}}, & F_{v2} &= Q_y (N_2)_{\substack{x = x_C \\ y = y_C}} \\ F_{u3} &= Q_x (N_3)_{\substack{x = x_C \\ y = y_C}}, & F_{v3} &= Q_y (N_3)_{\substack{x = x_C \\ y = y_C}} \end{aligned}$$

Fig. 5.15.

Las funciones de interpolación del elemento, halladas en el Ejemplo 5.1, son

$$N_1 = 1 - 0,03333x - 0,025y, \quad N_2 = 0,3333x, \quad N_3 = 0,025y$$

y sus valores en el punto C son

$$N_1 = 1 - 0,03333 \cdot 6 - 0,025 \cdot 4 = 0,7, \quad N_2 = 0,03333 \cdot 6 = 0,2, \quad N_3 = 0,025 \cdot 4 = 0,1.$$

Siendo las componentes de la carga Q ,

$$Q_x = Q \cos \alpha = 500 \frac{4}{5} = 400 \text{ kg}, \quad Q_y = Q \sin \alpha = 500 \frac{3}{5} = 300 \text{ kg},$$

las fuerzas nodales equivalentes son

$$\begin{aligned} F_{u1} &= 400 \cdot 0,7 = 280 \text{ kg}, & F_{v1} &= 300 \cdot 0,7 = 210 \text{ kg}, \\ F_{u2} &= 400 \cdot 0,2 = 80 \text{ kg}, & F_{v2} &= 300 \cdot 0,2 = 60 \text{ kg}, \\ F_{u3} &= 400 \cdot 0,1 = 40 \text{ kg}, & F_{v3} &= 300 \cdot 0,1 = 30 \text{ kg}, \end{aligned}$$

y, por tanto, el vector de fuerzas nodales equivalente es

$$\{\mathbf{F}_Q\} = [280 \ 210 \ 80 \ 60 \ 40 \ 30]^T.$$

5.6. MATRIZ COMPLETA DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

La ecuación matricial completa de equilibrio de una estructura (2.43)

$$\left(\int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \right) \{\delta_0\} = \{\mathbf{P}_0\} + \int_V [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{q}_0\} dV + \int_S [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{p}_0\} dS$$

equivale a

$$[\mathbf{K}_0]\{\delta_0\} = \{\mathbf{F}_0\}, \quad (5.57)$$

siendo $[\mathbf{K}_0]$ la *matriz completa de rigidez de la estructura*, definida por

$$[\mathbf{K}_0] = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV.$$

En el caso de una estructura bidimensional, la expresión anterior se reduce a

$$[\mathbf{K}_0] = \int_A [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] t dA \quad (5.58)$$

y, teniendo en cuenta (5.48), las submatrices de rigidez de la estructura son

$$[\mathbf{K}_{ij}] = \int_A [\mathbf{B}_i]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_j] t dA. \quad (5.59)$$

Al ser constantes en cada elemento los términos de la matriz de deformación $[\mathbf{B}]$ de una estructura discretizada en elementos triangulares lineales, si el espesor t es constante, la matriz completa de rigidez de la estructura es

$$[\mathbf{K}_0] = t \Sigma A_e [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \tag{5.60}$$

y las submatrices de rigidez

$$[\mathbf{K}_{ij}] = t \Sigma A_e [\mathbf{B}_i]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_j]. \tag{5.61}$$

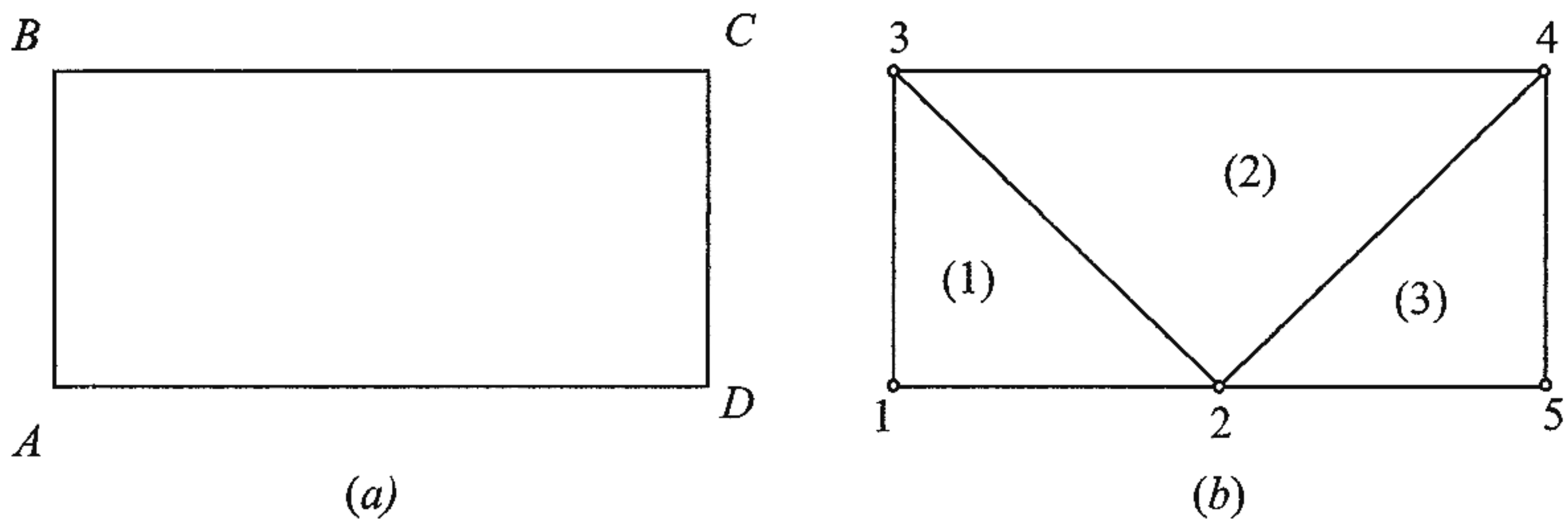


Fig. 5.16 (a) y (b).

Sea, por ejemplo, un bloque prismático que consideramos una estructura bidimensional al tener en cuenta sus características y las cargas que va a soportar (Fig. 5.16a). Al discretizar esta estructura en 3 elementos finitos triangulares con nodos en los vértices (Fig. 5.16b), su matriz de forma $[\mathbf{N}]$ es

$$[\mathbf{N}] = \left| \begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 \end{array} \right|,$$

es decir

$$[\mathbf{N}] = [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{N}_3 \ \mathbf{N}_4 \ \mathbf{N}_5].$$

Al considerar la totalidad de los elementos, la función de forma N_i representa los desplazamientos de los puntos de la estructura cuando se le da un valor unidad al desplazamiento del nodo i , en dirección perpendicular a la estructura, manteniendo nulos los desplazamientos de los restantes nodos (Fig. 5.16c).

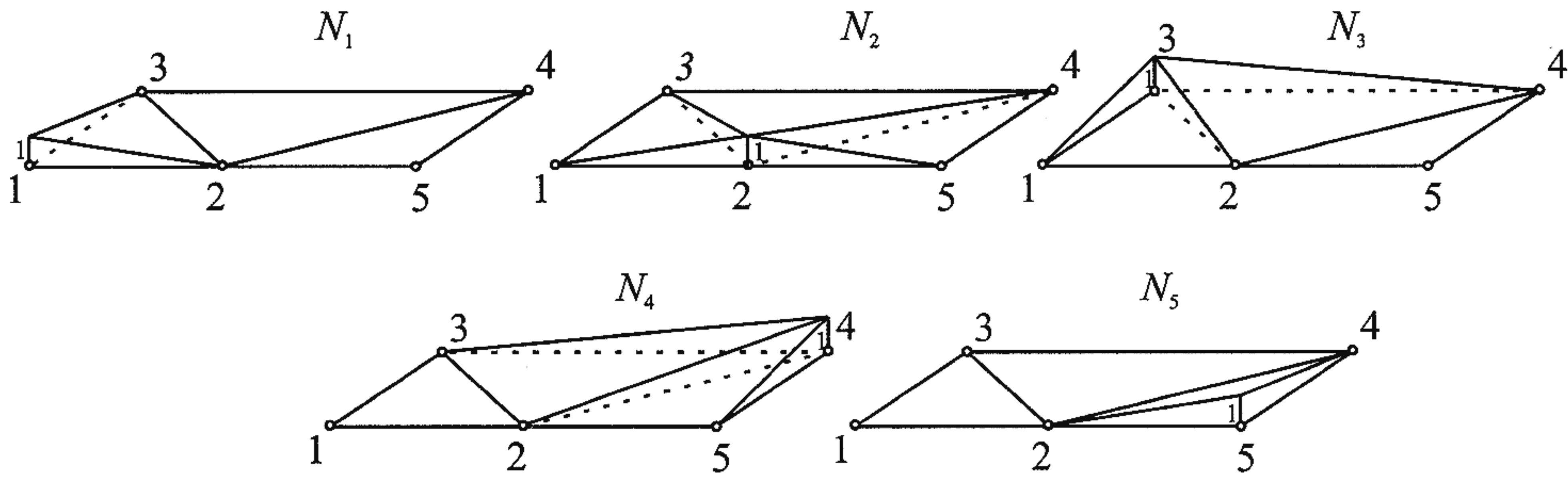


Fig. 5.16 (c).

Según (2.25), $[\mathbf{B}] = [\boldsymbol{\partial}][\mathbf{N}]$ y, por tanto, la matriz de deformación de la estructura es

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \mathbf{B}_3 \ \mathbf{B}_4 \ \mathbf{B}_5]$$

y, teniendo en cuenta (5.60), la matriz de rigidez completa de la estructura considerada es

$$[\mathbf{K}_0] = t \sum A_e \begin{vmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_5 \end{vmatrix} [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \mathbf{B}_3 \ \mathbf{B}_4 \ \mathbf{B}_5]$$

equivalente a:

$$[\mathbf{K}_0] = \Sigma [\mathbf{K}_0^{(e)}], \quad (5.62)$$

que representa el proceso de ensamblaje de los elementos. En esta expresión $[\mathbf{K}_0^{(e)}]$ es la *matriz de rigidez del elemento ampliada* al tamaño de la estructura, es decir, a un orden $n_0 = 2n_n$, siendo n_n el número de nodos de la estructura discretizada. Para ello se utilizan submatrices nulas como submatrices complementarias.

Así en la estructura anteriormente discretizada, la matriz de rigidez completa de la estructura será

$$[\mathbf{K}_0] = [\mathbf{K}_0^{(1)}] + [\mathbf{K}_0^{(2)}] + [\mathbf{K}_0^{(3)}].$$

Siendo la matriz de rigidez del elemento 1

$$[\mathbf{k}^{(1)}] = \begin{vmatrix} \mathbf{k}_{11}^{(1)} & \mathbf{k}_{12}^{(1)} & \mathbf{k}_{13}^{(1)} \\ \mathbf{k}_{21}^{(1)} & \mathbf{k}_{22}^{(1)} & \mathbf{k}_{23}^{(1)} \\ \mathbf{k}_{31}^{(1)} & \mathbf{k}_{32}^{(1)} & \mathbf{k}_{33}^{(1)} \end{vmatrix},$$

su matriz ampliada es

$$[\mathbf{K}_0^{(1)}] = \begin{vmatrix} \mathbf{k}_{11}^{(1)} & \mathbf{k}_{12}^{(1)} & \mathbf{k}_{13}^{(1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{k}_{21}^{(1)} & \mathbf{k}_{22}^{(1)} & \mathbf{k}_{23}^{(1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{k}_{31}^{(1)} & \mathbf{k}_{32}^{(1)} & \mathbf{k}_{33}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Análogamente, las matrices de rigidez ampliadas de los elementos 2 y 3 son

$$[\mathbf{K}_0^{(2)}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{22}^{(2)} & \mathbf{k}_{23}^{(2)} & \mathbf{k}_{24}^{(2)} & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{32}^{(2)} & \mathbf{k}_{33}^{(2)} & \mathbf{k}_{34}^{(2)} & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{42}^{(2)} & \mathbf{k}_{43}^{(2)} & \mathbf{k}_{44}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad [\mathbf{K}_0^{(3)}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{22}^{(3)} & 0 & \mathbf{k}_{24}^{(3)} & \mathbf{k}_{25}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{42}^{(3)} & 0 & \mathbf{k}_{44}^{(3)} & \mathbf{k}_{45}^{(3)} \\ 0 & \mathbf{k}_{52}^{(3)} & 0 & \mathbf{k}_{54}^{(3)} & \mathbf{k}_{55}^{(3)} \end{vmatrix}$$

Sumando las matrices de rigidez ampliadas de los tres elementos, se obtiene la matriz completa de rigidez de la estructura discretizada

$$[\mathbf{K}_0] = \begin{vmatrix} \mathbf{k}_{11}^{(1)} & \mathbf{k}_{12}^{(1)} & \mathbf{k}_{13}^{(1)} & 0 & 0 \\ \mathbf{k}_{21}^{(1)} & \mathbf{k}_{22}^{(1)} + \mathbf{k}_{22}^{(2)} + \mathbf{k}_{22}^{(3)} & \mathbf{k}_{23}^{(1)} + \mathbf{k}_{23}^{(2)} & \mathbf{k}_{24}^{(2)} + \mathbf{k}_{24}^{(3)} & \mathbf{k}_{25}^{(3)} \\ \mathbf{k}_{31}^{(1)} & \mathbf{k}_{32}^{(1)} + \mathbf{k}_{32}^{(2)} & \mathbf{k}_{33}^{(1)} + \mathbf{k}_{33}^{(2)} & \mathbf{k}_{34}^{(2)} & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{42}^{(2)} + \mathbf{k}_{42}^{(3)} & \mathbf{k}_{43}^{(2)} & \mathbf{k}_{44}^{(2)} + \mathbf{k}_{44}^{(3)} & \mathbf{k}_{45}^{(3)} \\ 0 & \mathbf{k}_{52}^{(3)} & 0 & \mathbf{k}_{54}^{(3)} & \mathbf{k}_{55}^{(3)} \end{vmatrix}$$

Este proceso de ensamblaje está recogido en las representaciones que se han hecho de la funciones de forma N_i , en las que se observa que se da un desplazamiento unitario al nodo i de la estructura discretizada y desplazamientos nulos a los nodos contiguos, que pueden pertenecer a un solo elemento o a varios elementos.

Ejemplo 5.5. Un bloque prismático de hormigón (Fig. 5.17a) se discretiza en dos elementos finitos triangulares lineales (Fig. 5.17b). Determinar la matriz completa de rigidez de la estructura $[\mathbf{K}_0]$.

Datos: $E = 2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$, $\nu = 0,2$, $\overline{AD} = 2 \text{ m}$, $\overline{AB} = 1 \text{ m}$, espesor $t = 0,5 \text{ m}$.

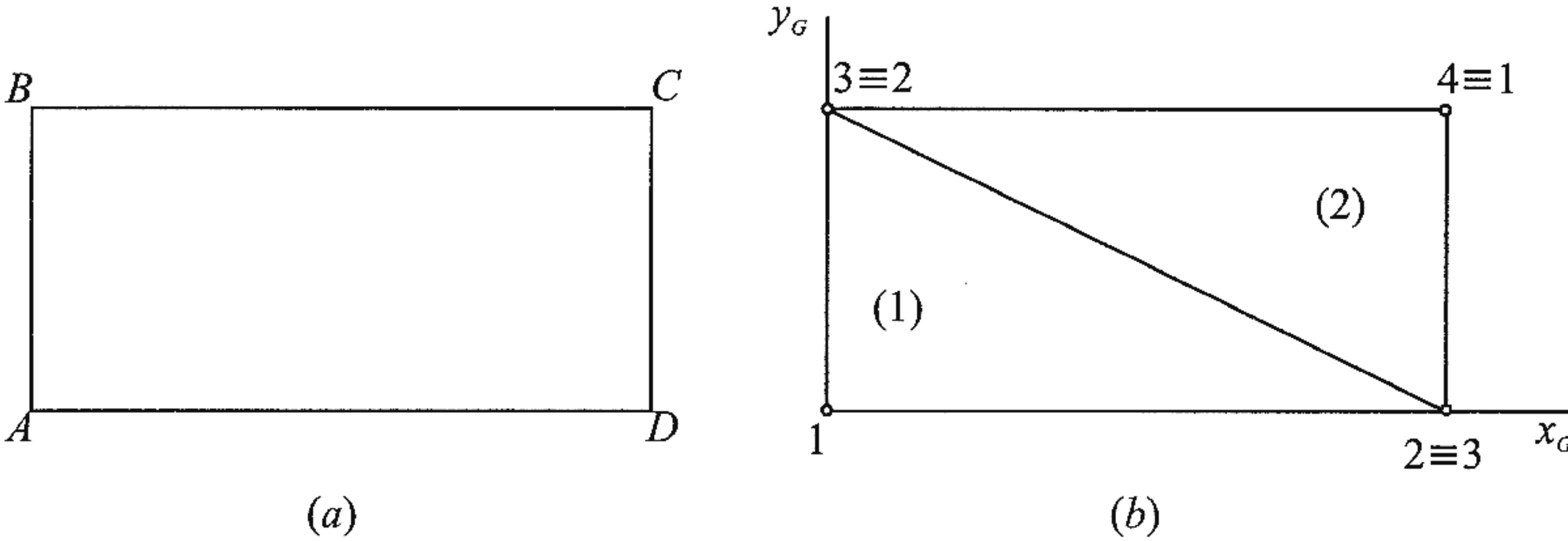


Fig. 5.17.

Solución: Considerando el bloque prismático como una estructura bidimensional con un estado de esfuerzos plano, se elige el sistema de ejes globales. Al numerar los nodos en sentido sinextrorsum, le corresponden los nodos 1, 2 y 3 al elemento 1 y los nodos 4, 3 y 2 al elemento 2.

En la tabla 5.1 se reflejan las coordenadas de los nodos y la correspondencia o *conectividad* entre la numeración real de los nodos y la numeración de las fórmulas a aplicar del elemento finito triangular.

coordenadas			conectividad			
nodos	x(m)	y(m)	elemento			
1	0	0	(1)	1	2	3
2	2	0	(2)	4	3	2
3	0	1				
4	2	1				

Tabla 5.1.

Según (5.6), la matriz constitutiva de un estado de esfuerzos plano es

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} = \frac{2 \cdot 10^6}{1-0,2^2} \begin{vmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-0,2}{2} \end{vmatrix},$$

es decir

$$[D] = 10^6 \begin{vmatrix} 2,0833 & 0,4167 & 0 \\ 0,4167 & 2,0833 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8333 \end{vmatrix}.$$

Según (5.45), la matriz de deformación del elemento 1, de área $A_e = 2 \cdot 1/2 = 1 \text{ m}^2$, es

$$[B^{(1)}] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0-1 & 0 & 1-0 & 0 & 0-0 & 0 \\ 0 & 0-2 & 0 & 0-0 & 0 & 2 \\ 0-2 & 0-1 & 0-0 & 1-0 & 2 & 0-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -0,5 & 0 & 0,5 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Siendo $t = 0,5 \text{ m}$, la matriz de rigidez del elemento 1, según (5.49), es

$$[k^{(1)}] = 0,5 \cdot 1 \begin{vmatrix} -0,5 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -0,5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} 10^6 \begin{vmatrix} 2,0833 & 0,4167 & 0 \\ 0,4167 & 2,0833 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0833 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -0,5 & 0 & 0,5 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

o sea

$$[k^{(1)}] = 10^6 \begin{vmatrix} 0,67708 & 0,3125 & -0,26042 & -0,20833 & -0,41666 & -0,10417 \\ 0,3125 & 1,14583 & -0,10417 & -0,10417 & -0,20833 & -1,04166 \\ -0,26042 & -0,10417 & 0,26042 & 0 & 0 & 0,10417 \\ -0,20833 & -0,10417 & 0 & 0,10417 & 0,20833 & 0 \\ -0,41666 & -0,20833 & 0 & 0,20833 & 0,41666 & 0 \\ -0,10417 & -1,04166 & 0,10417 & 0 & 0 & 1,04166 \end{vmatrix},$$

Esta matriz ampliada a tamaño de estructura es

$$[\mathbf{K}_0^{(1)}] = 10^6 \begin{vmatrix} 0,67708 & 0,3125 & -0,26042 & -0,20833 & -0,41666 & -0,10417 & 0 & 0 \\ 0,3125 & 1,14583 & -0,10417 & -0,10417 & -0,20833 & -1,04166 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ -0,26042 & -0,10417 & 0,26042 & 0 & 0 & 0,10417 & 0 & 0 \\ -0,20833 & -0,10417 & 0 & 0,10417 & 0,20833 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ -0,41666 & -0,20833 & 0 & 0,20833 & 0,41666 & 0 & 0 & 0 \\ -0,10417 & -1,04166 & 0,10417 & 0 & 0 & 1,04166 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

De acuerdo con la tabla 5.1, la numeración 4, 3, 2 del elemento 2 se corresponde con la numeración 1, 2, 3 del elemento 1, En consecuencia, la matriz de deformación del elemento 2, según (5.45), es

$$[\mathbf{B}^{(2)}] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1-0 & 0 & 0-1 & 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 2-0 & 0 & 2-2 & 0 & 0-2 \\ 2-0 & 1-0 & 2-2 & 0-1 & 0-2 & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,5 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0,5 & 0 & -0,5 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

y la matriz de rigidez del elemento 2, según (5.49), es

$$[\mathbf{k}^{(2)}] = 0,5 \cdot 10^6 \begin{vmatrix} 0,5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2,0833 & 0,4167 & 0 \\ 0,4167 & 2,0833 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8333 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,5 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0,5 & 0 & -0,5 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Operando el triple producto matricial, se obtiene

$$[\mathbf{k}^{(2)}] = 10^6 \begin{vmatrix} 0,67708 & 0,3125 & -0,26042 & -0,20833 & -0,41666 & -0,10417 \\ 0,3125 & 1,14583 & -0,10417 & -0,10417 & -0,20833 & -1,04166 \\ - & - & - & - & - & - \\ -0,26042 & -0,10417 & 0,26042 & 0 & 0 & 0,10417 \\ -0,20833 & -0,10417 & 0 & 0,10417 & 0,20833 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ -0,41666 & -0,20833 & 0 & 0,20833 & 0,41666 & 0 \\ -0,10417 & -1,04166 & 0,10417 & 0 & 0 & 1,04166 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$$

que coincide naturalmente con la matriz de rigidez del elemento 1 ya que tiene la misma la forma y la misma numeración. Teniendo en cuenta que el orden de las filas y columnas de esta matriz es 4, 3, 2, la matriz de rigidez ampliada a tamaño de estructura del elemento 2 es

$$[\mathbf{K}_0^{(2)}] = 10^6 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0,41666 & 0 & 0 & 0,20833 & -0,41666 & -0,20833 \\ 0 & 0 & 0 & 1,04166 & 0,10417 & 0 & -0,10417 & -1,04166 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0,10417 & 0,26042 & 0 & -0,26042 & -0,10417 \\ 0 & 0 & 0,20833 & 0 & 0 & 0,10417 & -0,20833 & -0,10417 \\ \hline 0 & 0 & -0,41666 & -0,10417 & -0,26042 & -0,20833 & 0,67708 & 0,3125 \\ 0 & 0 & -0,20833 & -0,04166 & -0,10417 & -0,10417 & 0,3125 & 1,14583 \end{vmatrix}$$

De acuerdo con (5.62), la matriz completa de rigidez de la estructura $[\mathbf{K}_0]$ es la suma de las matrices de rigidez ampliadas de los elementos 1 y 2. Es decir

$$[\mathbf{K}_0] = [\mathbf{K}_0^{(1)}] + [\mathbf{K}_0^{(2)}].$$

Sumando matrices de rigidez ampliadas se obtiene

$$[\mathbf{K}_0] = 10^6 \begin{vmatrix} 0,67708 & 0,3125 & -0,26042 & -0,20833 & -0,41666 & -0,10417 & 0 & 0 \\ 0,3125 & 1,14583 & -0,10417 & -0,10417 & -0,20833 & -1,04166 & 0 & 0 \\ \hline -0,26042 & -0,10417 & 0,67708 & 0 & 0 & 0,3125 & -0,41666 & -0,20833 \\ -0,20833 & -0,10417 & 0 & 1,14583 & 0,3125 & 0 & -0,10417 & -1,04166 \\ \hline -0,41666 & -0,20833 & 0 & 0,3125 & 0,67708 & 0 & 0,26042 & -0,10417 \\ -0,10417 & -1,04166 & 0,3125 & 0 & 0 & 1,14583 & -0,20833 & -0,10417 \\ \hline 0 & 0 & -0,41666 & -0,10417 & -0,26042 & -0,20833 & 0,67708 & 0,3125 \\ 0 & 0 & -0,20833 & -1,04166 & -0,10417 & -0,10417 & 0,3125 & 1,14583 \end{vmatrix}$$

5.7. RESPUESTA DE LA ESTRUCTURA

A. Desplazamientos nodales

Desglosando los desplazamientos nodales $\{\delta\}$ en desplazamientos conocidos (o nulos) $\{\delta_c\}$ y desconocidos $\{\delta_d\}$ y las fuerzas nodales en fuerzas conocidas $\{\mathbf{F}_c\}$ y fuerzas desconocidas $\{\mathbf{F}_d\}$, la ecuación matricial completa de equilibrio de la estructura (5.57), $[\mathbf{K}_0] \{\delta_0\} = \{\mathbf{F}_0\}$, se convierte en

$$\begin{vmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_I \\ \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{III} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_d \\ \delta_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{F}_c \\ \mathbf{F}_d \end{vmatrix}, \quad (5.63)$$

de la que se deduce

$$[\mathbf{K}] \{\delta_d\} + [\mathbf{K}_I] \{\delta_c\} = \{\mathbf{F}_c\}, \quad (5.64)$$

o bien

$$\{\delta_d\} = [\mathbf{K}]^{-1} (\{\mathbf{F}_c\} - [\mathbf{K}_I] \{\delta_c\}), \quad (5.65)$$

que determina los desplazamientos nodales desconocidos $\{\delta_d\}$, siendo $[\mathbf{K}]$ la matriz de rigidez de la estructura, que tiene un orden n igual al número de grados de libertad activos de la estructura, es decir, igual al número de desplazamientos nodales. Asimismo $\{\mathbf{F}_c\}$ es el vector de fuerzas nodales conocidas que incluye las fuerzas externas directamente aplicadas a los nodos y las fuerzas nodales equivalentes.

Usualmente los desplazamientos nodales conocidos son nulos, $\{\delta_c\} = \{\mathbf{0}\}$, al ser desplazamientos de nodos coaccionados por enlaces externos. En este caso, las ecuaciones (5.64) y (5.65) se reducen a

$$[\mathbf{K}] \{\delta_d\} = \{\mathbf{F}_c\}, \quad (5.66)$$

y

$$\{\delta_d\} = [\mathbf{K}]^{-1} \{\mathbf{F}_c\}. \quad (5.67)$$

B. Reacciones externas

Las fuerzas nodales desconocidas son las reacciones de los enlaces externos. De la ecuación matricial (5.63) se deduce

$$\{\mathbf{F}_d\} = [\mathbf{K}_{II}] \{\delta_d\} + [\mathbf{K}_{III}] \{\delta_c\}, \quad (5.68)$$

que determina las reacciones externas una vez hallados los desplazamientos nodales desconocidos. En el caso particular, pero frecuente, de que los desplazamientos conocidos sean nulos, $\{\delta_c\} = \{\mathbf{0}\}$, la ecuación anterior se reduce a

$$\{\mathbf{F}_d\} = [\mathbf{K}_{II}] \{\delta_d\}, \quad (5.69)$$

C. Respuesta de los elementos

La ecuación (2.24)

$$\{\epsilon\} = [\mathbf{B}_e] \{\delta_e\} \quad (5.70)$$

permite calcular las deformaciones en cualquier punto de un elemento en función de los desplazamientos nodales $\{\delta_e\}$ de ese elemento. Asimismo, la ecuación (2.26)

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}_e] \{\delta_e\} \quad (5.71)$$

permite calcular los esfuerzos en cualquier punto de un elemento en función de los desplazamientos nodales $\{\delta_e\}$ de ese elemento.

En el caso de un elemento triangular lineal, las ecuaciones (5.70) y (5.71) dan lugar a

$$\{\epsilon\} = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{vmatrix} \quad (5.72)$$

y

$$\{\sigma\} = [D] \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{vmatrix} \quad (5.73)$$

que demuestran que las deformaciones y los esfuerzos en cualquier punto de un elemento triangular lineal son constantes.

El elemento triangular lineal es de fácil adaptación a las estructuras bidimensionales pero tiene el inconveniente de una precisión limitada que se corrige con la utilización de un mayor número de elementos, es decir, con mallas mas tupidas.

Ejemplo 5.6. El bloque prismático de hormigón $ABCD$ del Ejemplo 5.5 se halla empotrado en su base y sometido a las cargas P , Q y a la carga p uniformemente distribuida sobre la superficie del borde BC (Fig. 5.18a). Discretizando el bloque en dos elementos finitos triangulares lineales (Fig. 5.18b), determinar: a) los desplazamientos nodales, b) las reacciones externas c) el desplazamiento del punto G , centro de gravedad del bloque, d) las deformaciones y los esfuerzos en los puntos B y C .

Datos: $E = 2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$, $\nu = 0,2$, $\overline{AD} = 2 \text{ m}$, $\overline{AB} = 1 \text{ m}$, espesor $t = 0,5 \text{ m}$, $\overline{HH_1} = \overline{HH_2} = 0,4 \text{ m}$, matriz $[K_0]$ del Ejemplo 5.5, $P = 60 \text{ t}$, $Q = 80 \text{ t}$, $p = 40 \text{ t/m}^2$.

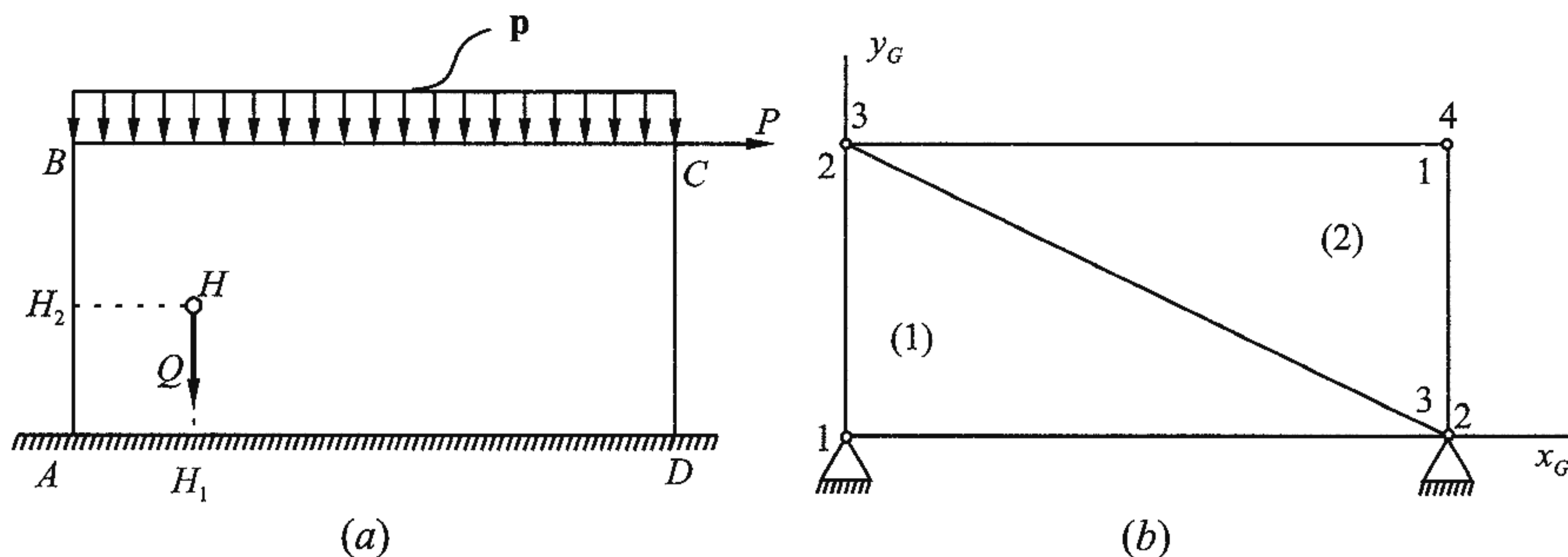


Fig. 5.18 (a) y (b).

Solución: a) El empotramiento AD del bloque ha sido sustituido por apoyos fijos en los nodos 1 y 2. Tanto para hallar los desplazamientos de puntos no nodales como para hallar las fuerzas nodales equivalentes a la carga concentrada \mathbf{P} es necesario calcular las funciones de forma.

Funciones de forma. Según (5.35), las funciones de forma son

$$N_1 = \frac{x_2 y_3 - y_2 x_3 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y}{2A_e} = \frac{2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 + (0 - 1)x + (0 - 2)y}{2 \cdot 1},$$

$$N_2 = \frac{x_3 y_1 - y_3 x_1 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y}{2A_e} = \frac{0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + (1 - 0)x + (0 - 0)y}{2 \cdot 1},$$

$$N_3 = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y}{2A_e} = \frac{0 \cdot 0 - 0 \cdot 2 + (0 - 0)x + (2 - 0)y}{2 \cdot 1},$$

es decir

$$N_1 = 1 - 0,5x - y, \quad N_2 = 0,5x, \quad N_3 = y.$$

Teniendo en cuenta que en el elemento 2 la conectividad de los nodos es 4, 3, 2 = 1, 2, 3, las funciones de forma del elemento 2, de acuerdo con (5.35), son

$$N_4 = \frac{x_3 y_2 - y_3 x_2 + (y_3 - y_2)x + (x_2 - x_3)y}{2A_e} = \frac{0 \cdot 0 - 1 \cdot 2 + (1 - 0)x + (2 - 0)y}{2 \cdot 1},$$

$$N_3 = \frac{x_2 y_4 - y_2 x_4 + (y_2 - y_4)x + (x_4 - x_2)y}{2A_e} = \frac{2 \cdot 1 - 0 \cdot 2 + (0 - 1)x + (2 - 2)y}{2 \cdot 1},$$

$$N_2 = \frac{x_4 y_3 - y_4 x_3 + (y_4 - y_3)x + (x_3 - x_4)y}{2A_e} = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + (1 - 1)x + (0 - 2)y}{2 \cdot 1},$$

es decir

$$N_4 = -1 + 0,5x + y, \quad N_3 = 1 - 0,5x, \quad N_2 = 1 - y.$$

Vector de fuerzas nodales. Las fuerzas aplicadas directamente a los nodos son la carga $P = 60$ t aplicada en el nodo 4 y las reacciones externas en los nodos 1 y 2. Por tanto, los vectores de fuerzas nodales correspondientes son

$$\{\mathbf{F}_1\}_d = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{F}_2\}_d = \begin{bmatrix} R_{2x} \\ R_{2y} \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{F}_4\}_d = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A estos vectores de fuerzas nodales aplicadas directamente hay que sumar los vectores de fuerzas nodales equivalentes. Siendo los valores de las funciones de forma del elemento 1 correspondientes al punto de aplicación de la carga \mathbf{Q}

$$N_{1H} = 1 - 0,5 \cdot 0,4 = 0,4, \quad N_{2H} = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2, \quad N_{3H} = 0,4$$

y las componentes, $Q_x = 0$, $Q_y = -80$ t de la carga concentrada \mathbf{Q} , las fuerzas nodales equivalentes a la carga \mathbf{Q} , según (5.56), son

$$\begin{aligned} F_{u1} &= Q_x N_{1H} = 0 \cdot 0,4 = 0, & F_{v1} &= Q_y N_{1H} = (-80) 0,4 = -32 \text{ t}, \\ F_{u2} &= Q_x N_{2H} = 0 \cdot 0,2 = 0, & F_{v2} &= Q_y N_{2H} = (-80) 0,2 = -16 \text{ t}, \\ F_{u3} &= Q_x N_{3H} = 0 \cdot 0,4 = 0, & F_{v3} &= Q_y N_{3H} = (-80) 0,4 = -32 \text{ t}, \end{aligned}$$

Por tanto, los vectores de fuerzas nodales equivalente a la carga concentrada \mathbf{Q} son

$$\{\mathbf{F}_1\}_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ -32 \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{F}_2\}_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{F}_3\}_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ -32 \end{bmatrix}$$

Según (5.55), la carga uniformemente distribuida sobre el borde 3 – 4 equivale a las fuerzas nodales

$$F_{u3} = F_{u4} = \frac{1}{2} p_x t L_{3-4} = \frac{1}{2} 0 \cdot 0,5 \cdot 2 = 0, \quad F_{v3} = F_{v4} = \frac{1}{2} p_y t L_{3-4} = \frac{1}{2} (-40) 0,5 \cdot 2 = -20 \text{ t}$$

y el vector de fuerzas nodales equivalente correspondiente es

$$\{\mathbf{F}_3\}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{F}_4\}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, los vectores de fuerzas que actúan en cada nodo (Fig. 5.18c) son

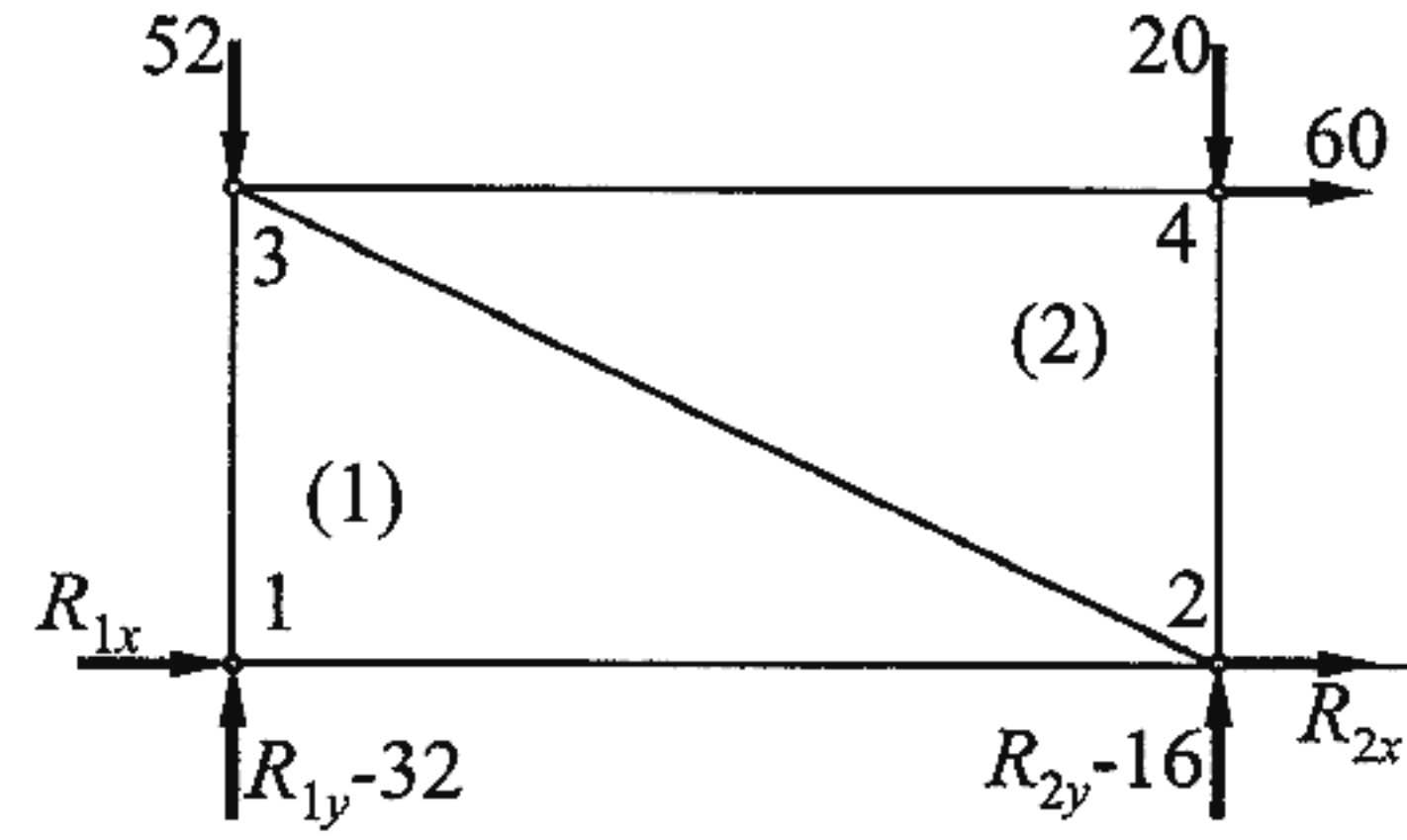


Fig. 5.18 (c)

$$\{\mathbf{F}_1\} = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} - 32 \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{F}_2\} = \begin{bmatrix} R_{2x} \\ R_{2y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{2x} \\ R_{2y} - 16 \end{bmatrix},$$

$$\{\mathbf{F}_3\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -32 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -52 \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{F}_4\} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ -20 \end{bmatrix}.$$

Componiendo los vectores de fuerzas que actúan en cada nodo, se obtiene el vector de fuerzas nodales de la estructura

$$\{\mathbf{F}_0\} = [R_{1x} \quad R_{1y} - 32 \quad R_{2x} \quad R_{2y} - 16 \quad 0 \quad -52 \quad 60 \quad -20]^T.$$

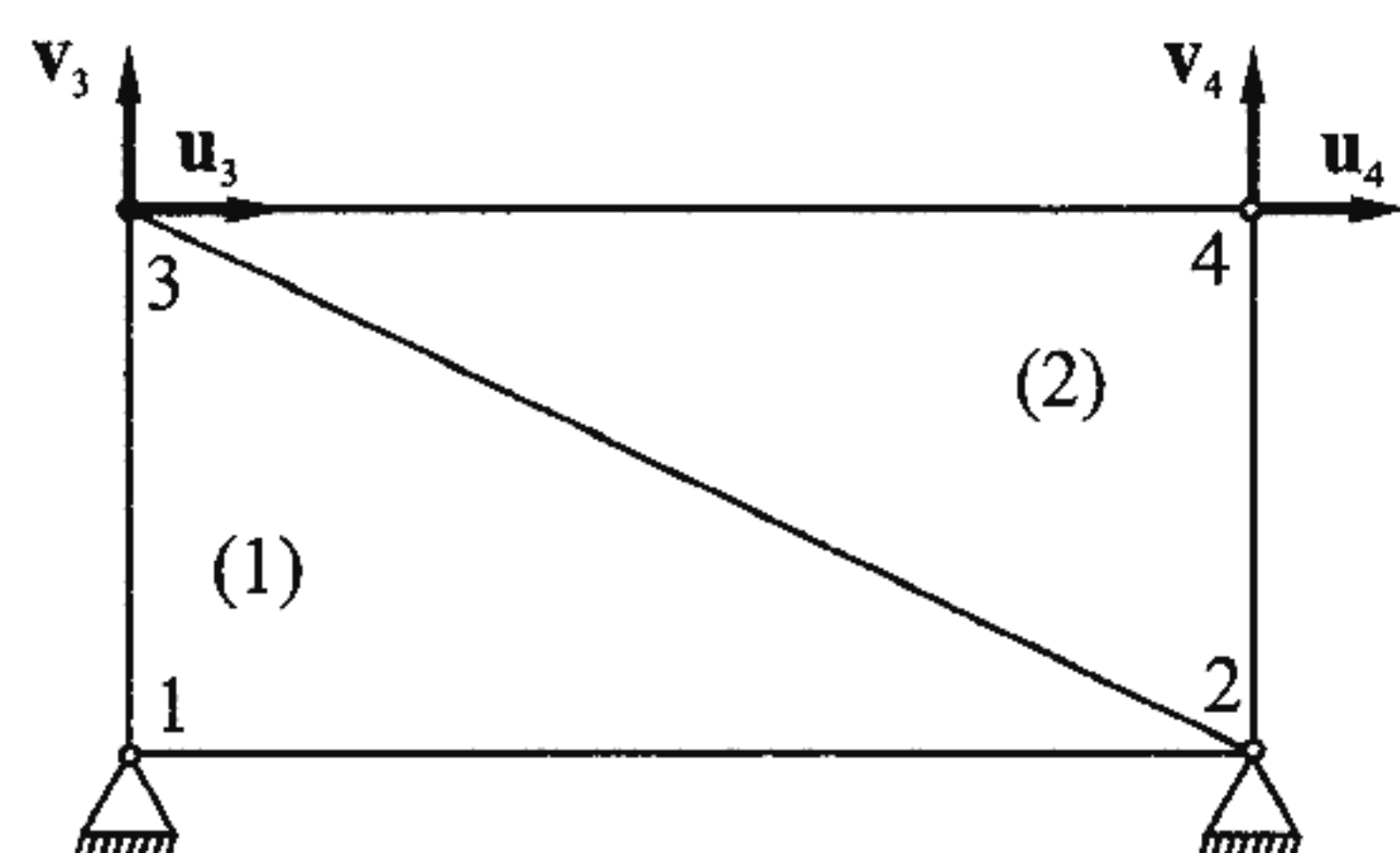


Fig. 5.18 (d)

Vector de desplazamientos nodales (Fig. 5.18d). Siendo nulos los desplazamientos de los apoyos A y D, es decir u_1, v_1 y u_2, v_2 , el vector de desplazamientos nodales de la estructura es

$$\{\delta_0\} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]^T.$$

Ecuación matricial completa de equilibrio de la estructura. La ecuación matricial (5.57), $[\mathbf{K}_0]\{\delta_0\} = \{\mathbf{F}_0\}$, es

$$10^6 \begin{bmatrix} 0,67708 & 0,3125 & -0,26042 & -0,20833 & -0,41666 & -0,10417 & 0 & 0 \\ 0,3125 & 1,14583 & -0,10417 & -0,10417 & -0,20833 & -1,04166 & 0 & 0 \\ -0,26042 & -0,10417 & 0,67708 & 0 & 0 & 0,3125 & -0,41666 & -0,20833 \\ -0,20833 & -0,10417 & 0 & 1,14583 & 0,3125 & 0 & -0,10417 & -1,04166 \\ -0,41666 & -0,20833 & 0 & 0,3125 & 0,67708 & 0 & -0,26042 & -0,10417 \\ -0,10417 & -1,04166 & 0,3125 & 0 & 0 & 1,14583 & -0,20833 & -0,10417 \\ 0 & 0 & -0,41666 & -0,10417 & -0,26042 & -0,20833 & 0,67708 & 0,3125 \\ 0 & 0 & -0,20833 & -1,04166 & -0,10417 & -0,10417 & 0,3125 & 1,14583 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -52 \\ 60 \\ -20 \end{Bmatrix}$$

Ecuación matricial de equilibrio de la estructura. La ecuación matricial (5.66), $[\mathbf{K}]\{\delta_d\} = \{\mathbf{F}_c\}$, correspondiente a esta estructura es

$$10^6 \begin{bmatrix} 0,67708 & 0 & -0,26042 & -0,10417 \\ 0 & 1,14583 & -0,20833 & -0,10417 \\ -0,26042 & -0,20833 & 0,67708 & 0,3125 \\ -0,10417 & -0,10417 & 0,3125 & 1,14583 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -52 \\ 60 \\ -20 \end{Bmatrix}.$$

de la que se deduce el vector de desplazamientos nodales desconocidos (expresados en m)

$$\{\delta_d\} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{Bmatrix} 0,37586 \\ -0,28637 \\ 1,20228 \\ 0,56265 \end{Bmatrix}$$

b) De la ecuación matricial $[\mathbf{K}_0]\{\delta_0\} = \{\mathbf{F}_0\}$ se deduce la ecuación (5.69), $\{\mathbf{F}_d\} = [\mathbf{K}_{II}]\{\delta_d\}$ que determina las reacciones externas R_{1x} , R_{1y} , R_{2x} , R_{2y} de la estructura. Es decir

$$10^6 \begin{bmatrix} -0,41666 & -0,10417 & 0 & 0 \\ -0,20833 & -1,04166 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3125 & -0,41666 & -0,20833 \\ 0,3125 & 0 & -0,10417 & -1,04166 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} - 32 \\ R_{2x} \\ R_{2y} - 16 \end{Bmatrix},$$

y sustituyendo el vector de desplazamientos nodales $\{\delta_d\}$, resulta

$$\begin{vmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} - 32 \\ R_{2x} \\ R_{2y} - 16 \end{vmatrix} = 10^6 \begin{vmatrix} -0,41666 & -0,10417 & 0 & 0 \\ -0,20833 & -1,04166 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3125 & -0,41666 & -0,20833 \\ 0,3125 & 0 & -0,10417 & -1,04166 \end{vmatrix} 10^{-4} \begin{vmatrix} 0,37586 \\ -0,28637 \\ 1,20228 \\ -0,56265 \end{vmatrix}.$$

es decir

$$\begin{vmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} - 32 \\ R_{2x} \\ R_{2y} - 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12,6775 \\ 22 \\ -47,3224 \\ 57,8298 \end{vmatrix}.$$

Por tanto, el vector de reacciones externas expresadas en t (Fig. 5.18e) es

$$\begin{vmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12,6775 \\ 54 \\ -47,3224 \\ 73,8298 \end{vmatrix}.$$

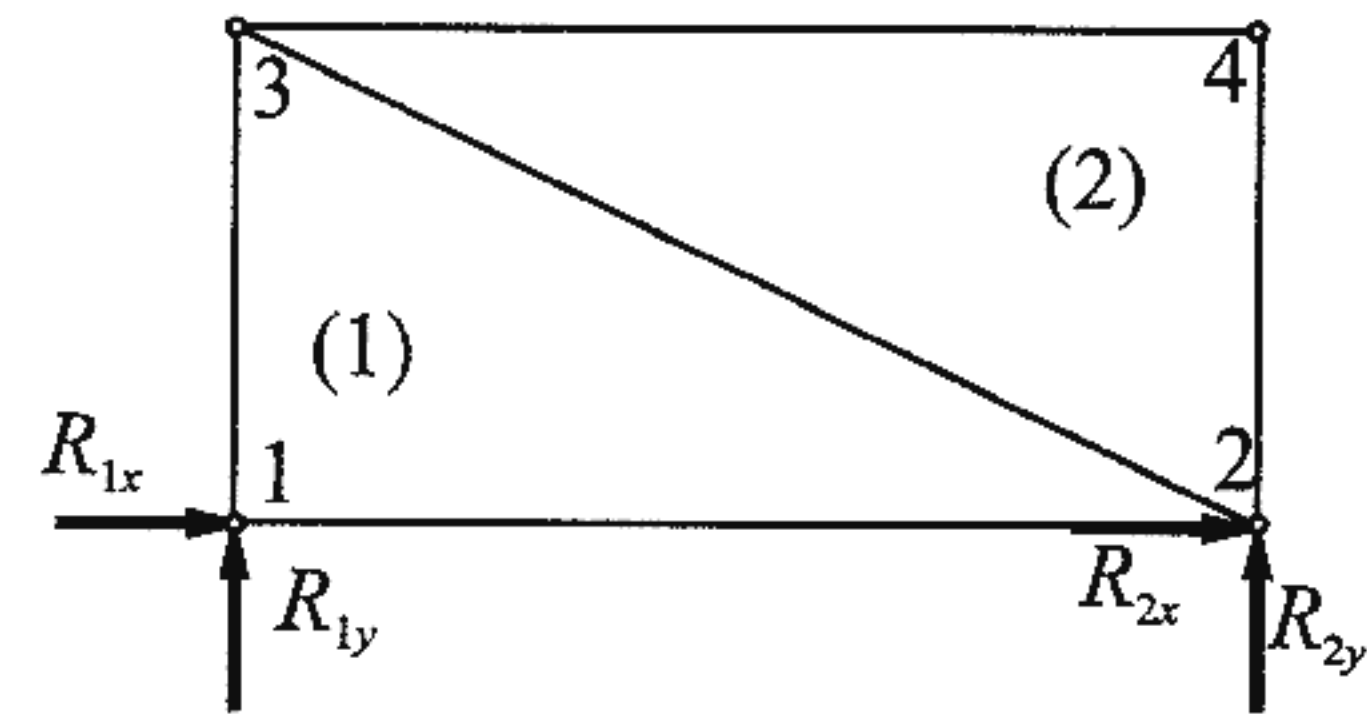


Fig. 5.18 (e).

c) El punto G pertenece al elemento 1 y al elemento 2, siendo sus coordenadas $(1, 0, 5)$ (Fig. 5.18f). Según (5.29), el vector desplazamientos de un punto es $\{\mathbf{u}_e\} = [\mathbf{N}_e]\{\boldsymbol{\delta}_e\}$. Las funciones de forma del elemento 1 son $N_1 = 1 - 0,5x - y$, $N_2 = 0,5x$, $N_3 = y$, siendo sus valores en el punto G

$$N_1^G = 1 - 0,5 \cdot 1 - 0,5 = 0,$$

$$N_2^G = 0,5 \cdot 1 = 0,5,$$

$$N_3^G = 0,5$$

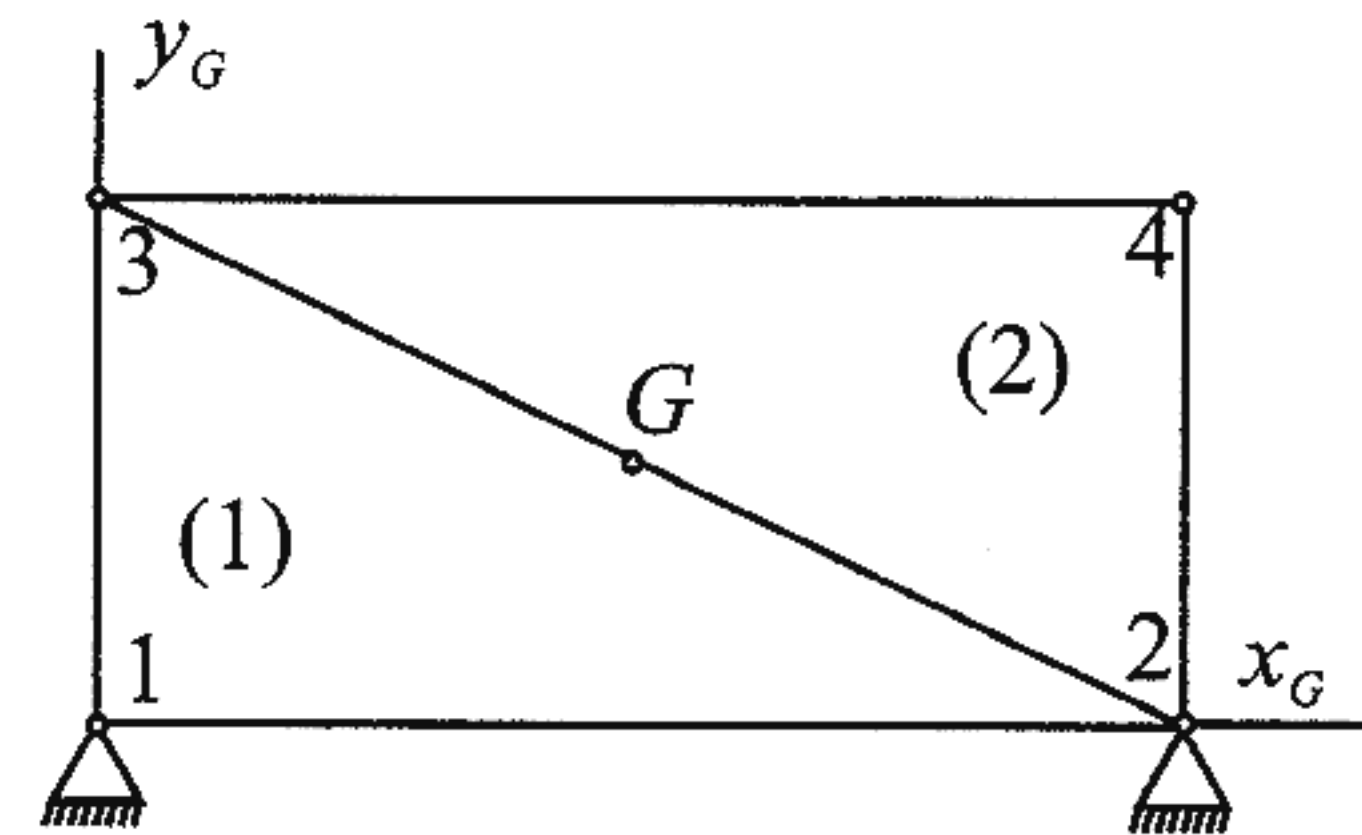


Fig. 5.18 (f).

y, por tanto, la matriz de forma correspondiente es

$$[\mathbf{N}_G^{(1)}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \end{vmatrix}.$$

El vector de desplazamientos del punto G como perteneciente al elemento 1 es

$$\{\mathbf{u}_G^{(1)}\} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \end{vmatrix} 10^{-4} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,37586 \\ -0,28637 \end{vmatrix} = 10^{-4} \begin{vmatrix} 0,18793 \\ -0,14319 \end{vmatrix} (\text{m}).$$

Considerando el punto G como perteneciente al elemento 2, al ser las funciones de forma en este elemento $N_4 = -1 + 0,5x + y$, $N_3 = 1 - 0,5x$, $N_2 = 1 - y$, sus valores en el punto G son

$$N_4^G = -1 + 0,5 \cdot 1 + 0,5 = 0, \quad N_3^G = 1 - 0,5 \cdot 1 = 0,5, \quad N_2^G = 1 - 0,5 = 0,5$$

y, por tanto, la matriz de forma correspondiente a este punto del elemento 2 es

$$[\mathbf{N}_G^{(2)}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & | & 0,5 & 0 & | & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0,5 & | & 0 & 0,5 \end{vmatrix}.$$

El vector de desplazamientos del punto G como perteneciente al elemento 2 es

$$\{\mathbf{u}_G^{(2)}\} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & | & 0,5 & 0 & | & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0,5 & | & 0 & 0,5 \end{vmatrix} 10^{-4} \begin{vmatrix} 1,20228 \\ -0,56265 \\ \hline 0,37586 \\ -0,28637 \\ \hline 0 \\ 0 \end{vmatrix} = 10^{-4} \begin{vmatrix} 0,18793 \\ -0,14319 \end{vmatrix} \text{ (m)},$$

que coincide con el resultado obtenido anteriormente al considerar el punto G como perteneciente al elemento 1.

d) Según (5.70), el vector de deformaciones de cualquier punto de un elemento es

$$\{\boldsymbol{\epsilon}\} = [\mathbf{B}_e] \{\boldsymbol{\delta}_e\}$$

y, por tanto, el vector de esfuerzos correspondiente es

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\epsilon}\}$$

Deformaciones. En el Ejemplo 5.5 se determinaron las matrices de deformación de los elementos 1 y 2

$$[\mathbf{B}^{(1)}] = \begin{vmatrix} -0,5 & 0 & | & 0,5 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & -1 & | & 0 & 0 & | & 0 & 1 \\ -1 & -0,5 & | & 0 & 0,5 & | & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad [\mathbf{B}^{(2)}] = \begin{vmatrix} 0,5 & 0 & | & -0,5 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & | & 0 & -1 \\ 1 & 0,5 & | & 0 & -0,5 & | & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

por lo que el vector de deformaciones de los puntos del elemento 1, entre los que se encuentran los puntos B y G (Fig. 5.18g), es

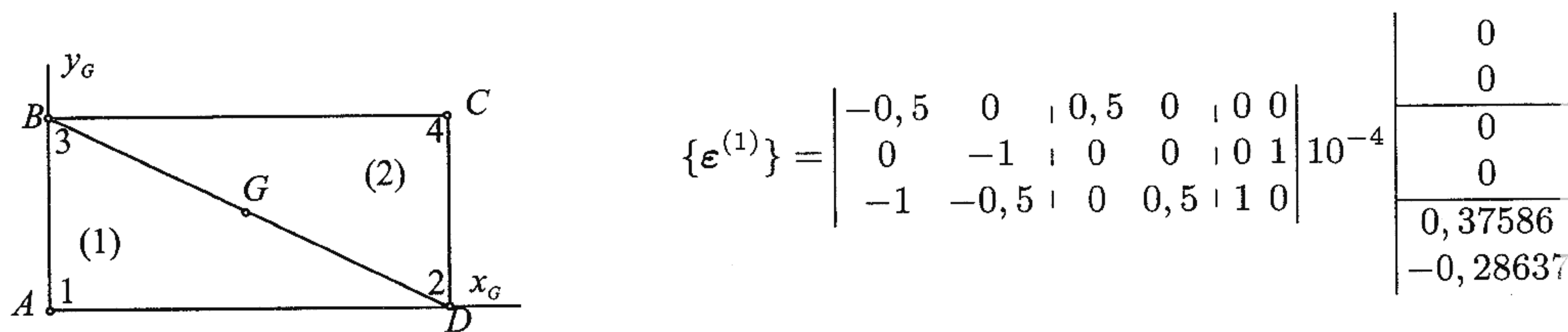


Fig. 5.18 (g)

es decir

$$\{\epsilon^{(1)}\} = 10^{-4} \begin{vmatrix} 0 \\ -0,28637 \\ 0,37586 \end{vmatrix}.$$

El vector de deformaciones de los puntos del elemento 2, entre los que se encuentran los puntos B, C y G , es

$$\{\epsilon^{(2)}\} = \begin{vmatrix} 0,5 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0,5 & 0 & -0,5 & -1 & 0 \end{vmatrix} 10^{-4} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,20228 \\ -0,56265 \\ 0,37586 \\ -0,28637 \end{vmatrix}$$

es decir

$$\{\epsilon^{(2)}\} = 10^{-4} \begin{vmatrix} 0,41321 \\ -0,56265 \\ 1,06414 \end{vmatrix}.$$

Esfuerzos. Teniendo en cuenta que la matriz constitutiva (Ejemplo 5.5) es

$$[D] = 10^6 \begin{vmatrix} 2,0833 & 0,4167 & 0 \\ 0,4167 & 2,0833 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8333 \end{vmatrix},$$

el vector de esfuerzos de los puntos del elemento 1, entre los que se encuentran los puntos B y G , es

$$\{\sigma^{(1)}\} = 10^6 \begin{vmatrix} 2,0833 & 0,4167 & 0 \\ 0,4167 & 2,0833 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8333 \end{vmatrix} 10^{-4} \begin{vmatrix} 0 \\ -0,28637 \\ 0,37586 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11,9323 \\ -59,6611 \\ 31,3213 \end{vmatrix} \text{ (t/m}^2\text{)}.$$

Asimismo, el vector de esfuerzos de los puntos del elemento 2, entre los que se encuentran los puntos B, C y G , son

$$\{\sigma^{(2)}\} = 10^6 \begin{vmatrix} 2,0833 & 0,4167 & 0 \\ 0,4167 & 2,0833 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8333 \end{vmatrix} 10^{-4} \begin{vmatrix} 0,41321 \\ -0,56265 \\ 1,0614 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 62,6417 \\ -100,000 \\ 88,6783 \end{vmatrix} \text{ (t/m}^2\text{)}.$$

Se observa la falta de continuidad existente en las deformaciones y en los esfuerzos de los puntos B y G comunes a los dos elementos.

