Problema N°1

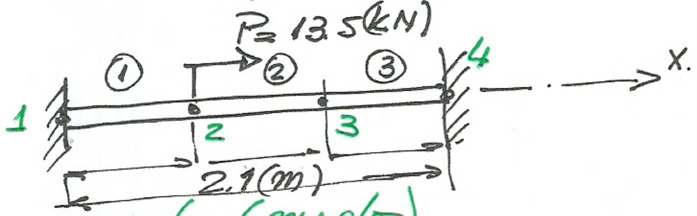
Para las 3 barras ensambladas mostradas en la figura, determinar:

a) La matriz de rigidez global.

b) Los desplazamientos en los nodos 2 y 3

c) Las reacciones en los nodos 1 y 4

Una fuerza de 13500 (N) se aplica en la dirección x, en el nodo 2. La longitud de c/elemento es 700 (mm). Dado $E = 2.0 \times 10^{11} (N/m^2)$ y $A = 0.0006 (m^2)$ para los elementos 1 y 2 y $E = 1.0 \times 10^{11} (N/m^2)$ y $A = 0.0012 (m^2)$ para el elemento 3. Los nodos 1 y 4 están fijos.



$i = 1,2,3,4 \rightarrow$ nodos (nudos)

①, ②, ③ $\rightarrow$ barras.

Figura: Ensamble de 3 barras

SOLUCION: De acuerdo con la teoría, la ecuación:

$$[k] = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

la utilizamos para encontrar la matriz de rigidez de c/barra

$$[k^{(1)}] = [k^{(2)}] = \left(\frac{EA}{l}\right)^{1,2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \left[\frac{(0.0006)\, 2.0 \times 10^{11}}{0.7}\right]\begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{k^{(1),(2)} = 1.7143 \times 10^{8}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.}$$

$$[k^{(3)}] = \left(\frac{0.0012 \cdot 1.0 \times 10^{11}}{0.7}\right)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1.7143 \times 10^{8}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con las matrices anteriores, procedemos a ensamblar 1-② los mismos:

$$[\underset{=}{K}] = 1.7143\times10^{8}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} (N/m)$$

b)

$$\begin{matrix}1.7143\\ \times10^{8}\end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \\ F_{4x} \end{Bmatrix}$$

De acuerdo con las condiciones de borde:

$u_1 = 0$; $u_4 = 0$

Sustituyendo en la ecuación anterior en el sistema global matricial, nos quedaría un sistema con 2 incognitas u_2, u_3. Resolviendo el sistema, nos queda:

$$\begin{matrix}1.7143\\ \times10^{8}\end{matrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13500 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_2 = 0.525\times10^{-4} \\ u_3 = 0.2625\times10^{-4}. \end{matrix}$$

c) Para obtener las fuerzas nodales globales, incluyendo las reacciones en los nodos 1 y 4.

$$F_{1x} = 1.7143\times10^{8}(u_1 - u_2) = 1.7143\times10^{8}(-0.525\times10^{-4}) = \boxed{\begin{matrix}-9.0\times10^{3}.\\ (R_3)\end{matrix}} (N)$$

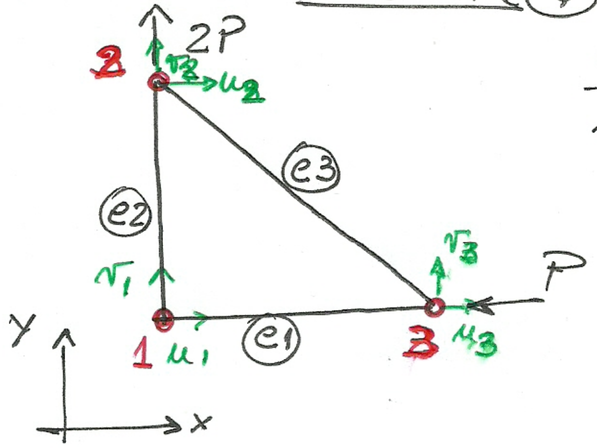
$$F_{2x} = 1.7143\times10^{8}(-u_1 + 2u_2 - u_3) = \boxed{1.35\times10^{4}.} (N)$$

$$F_{3x} = 1.7143\times10^{8}(-u_2 + 2u_3 - u_4) = 1.7143\times10^{8}(-0.525\times10^{-4} + 2\times0.2625\times10^{-4}) = 0$$

$$F_{4x} = 1.7143\times10^{8}(-u_3 + u_4) = -4.5\times10^{3}. \ (N).(R_4)$$

La suma de las Reacciones $\overline{(R_3 + R_4)} = P$. Se verifica el equilibrio

Problema 4 GUIA BARRAS y VIGAS



CONDICION DE BORDE:

$u_1 = v_1 = u_2 = v_3 = 0$

$F_{2y} = 2P$

$F_{3x} = -P$

MATRICES DE RIGIDEZ POR BARRAS

En general: $\underline{\underline{K}}_e = k_i \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix}$ donde $a = \begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix}$; $c = \cos\phi$, $s = \sin\phi$

Matriz genérica

barra e1

$$k_1 = \frac{EA}{L} ; \ \underline{a} = \{\phi = 0°\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

barra e2

$$k_2 = \frac{EA}{L} ; \ \underline{a} = \{\phi = 90°\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

barra e3

$$k_3 = \frac{EA}{L} ; \ \underline{a} = \{\phi = 135°\} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ensamble de las tres barras.

$$\underline{\underline{K}} = \frac{EA}{2L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array}$$

De acuerdo con las condiciones de contorno, obtenemos la matriz reducida ⇒

$u_1 = v_1 = u_2 = v_3 = 0$

$$K_r = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P \\ -P \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} v_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{4EA} \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix}}$$

Fuerzas de Reacción

$$(1)\quad R_1^{(1)} = \frac{EA}{2L}\left(-2u_3\right) = \frac{5P}{4}$$

$$(2)\quad R_2^{(1)} = \frac{EA}{2L}\left(-2v_2\right) = \frac{-7P}{4}$$

Nodo 1

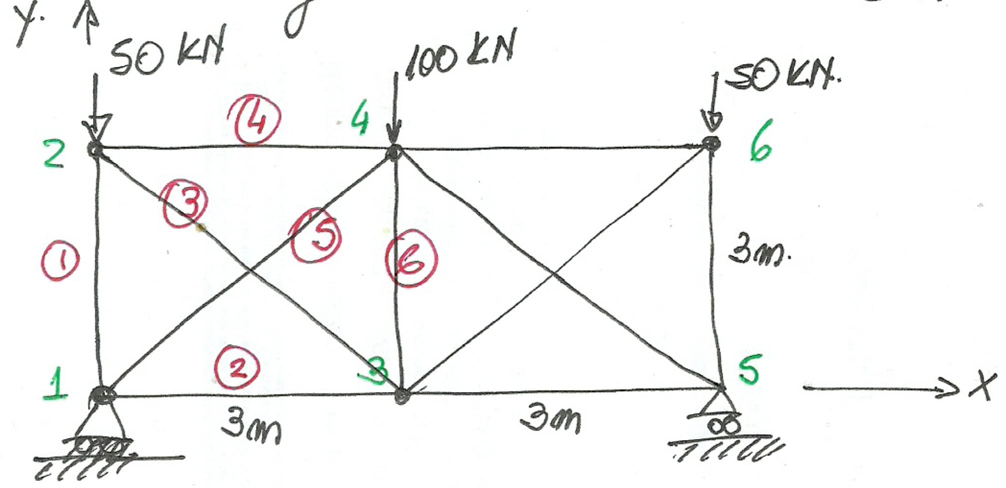
$$R_1^{(2)(3)} = \frac{EA}{2L}\left(-v_2 - u_3\right) = \frac{-P}{4}$$ Nodo 2

$$R_2^{(1),(3)} = \frac{EA}{2L}\left(-v_2 - u_3\right) = \frac{-P}{4}$$ Nodo 3

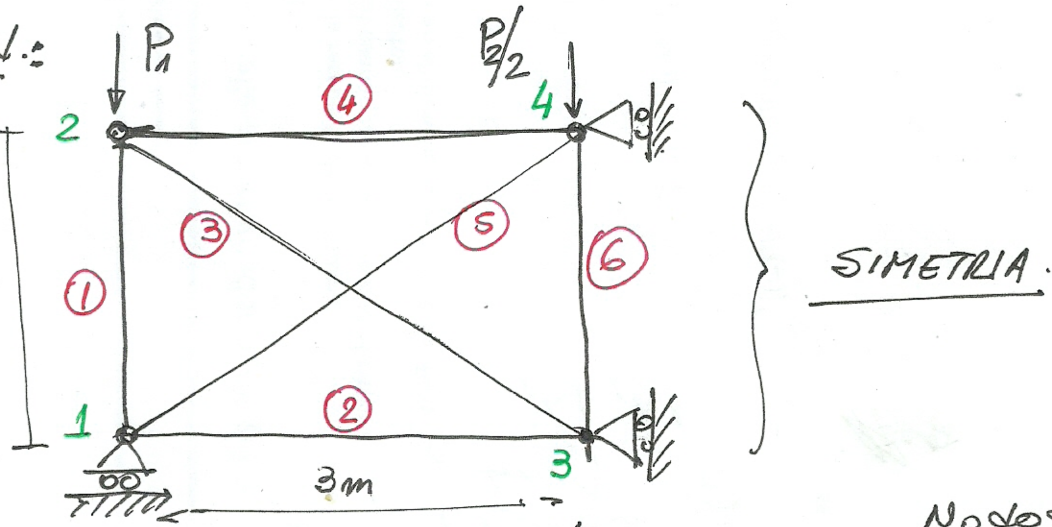
———— o ————

Problema N° 6 GUIA BARRAS y VIGAS

Para el sistema de armadura de la Figura, determinar los desplazamientos nodales, los esfuerzos por elemento y las tensiones. Asimismo las reacciones en los soportes. Todas las barras tienen $E = 70\ GPa$ y $A = 3.0 \times 10^{-4}\ m^2$. Verificar las fuerzas de equilibrio en los nodos 2 y 4. Usar simetría en el modelo.



SOLUCION:



$v_1 = 0$ $\quad P_1 = 50\ (kN)$

$v_3 = 0$ $\quad P_2 = 100\ (kN)$

$u_4 = 0$

		Nodos
barra 1	→	1 - 2
barra 2	→	1 - 3
barra 3	→	2 - 3
barra 4	→	2 - 4
barra 5	→	1 - 4
barra 6	→	3 - 4

$E = 70\ GPa = 70 \times 10^6\ (kN/m^2)$

$A = 3.0 \times 10^{-4}\ m^2$

para barra 6 $A = \dfrac{3.0}{2} \times 10^{-4}\ (m^2)$

por la simetría

$$k^{(1)}_{1-2} = \frac{EA}{3}\begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{array} \quad (u_1\ v_1\ u_2\ v_2)$$

$$k_{2-3} = \frac{EA}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{c} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \quad (u_2\ v_2\ u_3\ v_3)$$

$$k^{(2)}_{1-3} = \frac{EA}{3}\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \quad (u_1\ v_1\ u_3\ v_3)$$

$$k_{24} = \frac{EA}{3}\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \quad (u_2\ v_2\ u_4\ v_4)$$

$$k_{1-4} = \frac{EA}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \quad (u_1\ v_1\ u_4\ v_4)$$

$$k_{34} = \frac{EA}{3\cdot 2}\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{c} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \quad (u_3\ v_3\ u_4\ v_4)$$

Ensamblamos: con las restricciones $u_1 = v_1 = u_3 = u_4 = 0$

Incognitas $u_2\ v_2\ v_3\ v_4$?

Ensamblamos todo y luego se reduce la matriz.-

$$\underline{K} = \frac{EA}{3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & 0 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}$$

— se anulan filas y columnas por condición de borde $u_1 = v_1 = u_3 = u_4 = 0$

Como $\boxed{\dfrac{EA}{3} = \dfrac{(70 \times 10^6)(0.0003)}{3} = 7000.}$

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1.3536 \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.8536$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.3536.$$

$$\underline{\underline{K}}_R = \frac{EA}{3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_2 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1.3536 & -0.3536 & 0.3536 & 0 \\ -0.3536 & 1.3536 & -0.3536 & 0 \\ 0.3536 & -0.3536 & 0.8536 & -1/2 \\ 0 & 0 & -0.5. & 0.8536 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ u_2 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4. \end{array}$$

$$\underline{\underline{K}}_R = \begin{bmatrix} 9475 & -2475 & 2475 & 0 \\ -2475 & 9475. & -2475 & 0 \\ 2475 & -2475. & 5975 & -3500 \\ 0 & 0 & -3500 & 5975 \end{bmatrix}$$

El sistema global nos quedará:

Como: $\underline{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix}$ tomamos la mitad en el punto 4 por la simetría.

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 9475 & -2475 & 2475 & 0 \\ & 9475 & -2475 & 0 \\ \text{SIMETRICA} & & 5975 & -3500 \\ & & & 5975 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -50 \\ 0 \\ -50 \end{Bmatrix}.$$

$$\underline{\underline{K}}_R \qquad \underline{u} = \underline{f}$$

Resolviendo el sistema anterior ⇒

$$u_2 = 0.135 \times 10^{-2} \, (m)$$

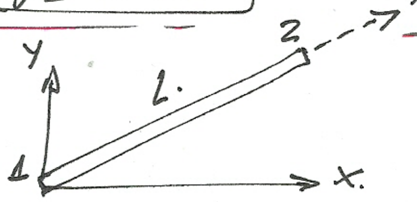
$$v_2 = -0.850 \times 10^{-2} \, (m)$$

$$v_3 = -0.137 \times 10^{-1} \, (m)$$

$$v_4 = -0.164 \times 10^{-1} \, (m)$$

en el plano XY

Para las tensiones en cada barra $\boxed{\sigma = E\varepsilon.}$



$$\varepsilon = \frac{\text{desplazamiento.}}{\text{Long. barra.}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \underline{d}'} \quad \text{(I)}$$

$\underline{d}'$: desplazamientos.

$$\begin{Bmatrix} f'_{1x} \\ f'_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix}}_{d'}$$

y como $\sigma = \dfrac{f'_{1x}}{A}$ ⇒ nos queda la ec. (I)

En n/caso:

1) $\sigma_{1-2} = \sigma_{5-6}$.

$$\sigma_{1-2} = \frac{70 \times 10^6}{3}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.135 \times 10^{-2} \\ -0.85 \times 10^{-2} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\sigma_{1-2} = -198 \, (MPa)}$$

$$f'_{x_{1-2}} = \sigma_{1-2} \times A_{1-2} = (-198000) \times (0.0003)$$

$$\boxed{f'_{x_{1-2}} = -59.5 \, (KN)}$$

La matriz de transformación será

$$T = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} c = \cos(\theta) \\ s = \sin(\theta). \end{matrix}$$

$$\sigma = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}[\underline{T}]\{\underline{d}\}.$$

$$\underline{\sigma} = \underline{C}'\{\underline{d}\}.$$

$$\underline{C}' = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$$

$$C' = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix}.$$

2) $$\sigma_{1-3} = \frac{70 \times 10^6}{3}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.137 \times 10^{-1} \end{Bmatrix} = \boxed{0} \Rightarrow \boxed{f'_{x_{1-3}} = 0}$$

$$\sigma_{2-3} = \frac{70\times10^{6}}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.135\times10^{-2} \\ -0.85\times10^{-2} \\ 0 \\ -0.137\times10^{-1} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma_{2-3} = 44.6\ (MPa) \\ f'_{x_{2-3}} = 13.39\ [kN] \end{array}}$$

En forma similar:

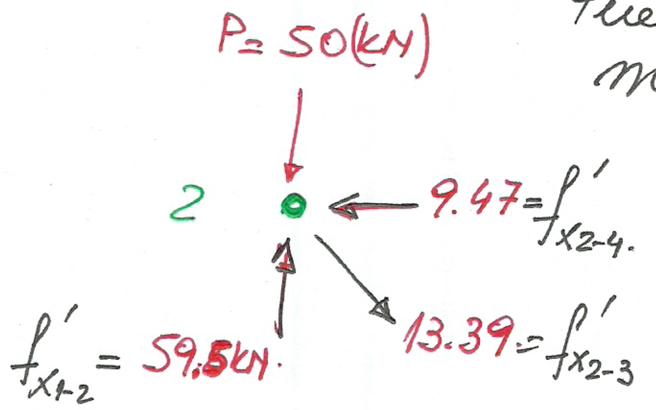
$$\boxed{\sigma_{2-4} = -31.6\,(MPa) \qquad f'_{x_{2-4}} = -9.47\,(kN)}$$

$$\boxed{\sigma_{1-4} = -191\,(MPa) \qquad f'_{x_{1-4}} = -57.32\,(kN)}$$

$$\boxed{\sigma_{3-4} = -63.1\,(MPa) \qquad f'_{x_{3-4}} = -18.93\,(kN)}$$

Fuerzas de Equilibrio en el Nodo 2

Fuerzas q' concurren al nodo 2.



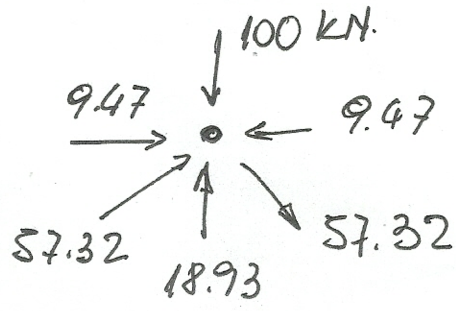
$$\Sigma F_y = -50 - 13.39 \sin 45 + 59.5$$

$$\Rightarrow \Sigma F_y \cong 0.$$

$$\Sigma F_x = -9.47 + 13.39 \cos(45°) \cong -0.001\ (kN) \cong 0.$$

Se verifica

Nodo 4



$$\Sigma F_y = -100 + 57.3(\sin 45)\times 2 + 18.93$$

$$\boxed{\Sigma F_y = -0.003 \cong 0\ (kN)}$$

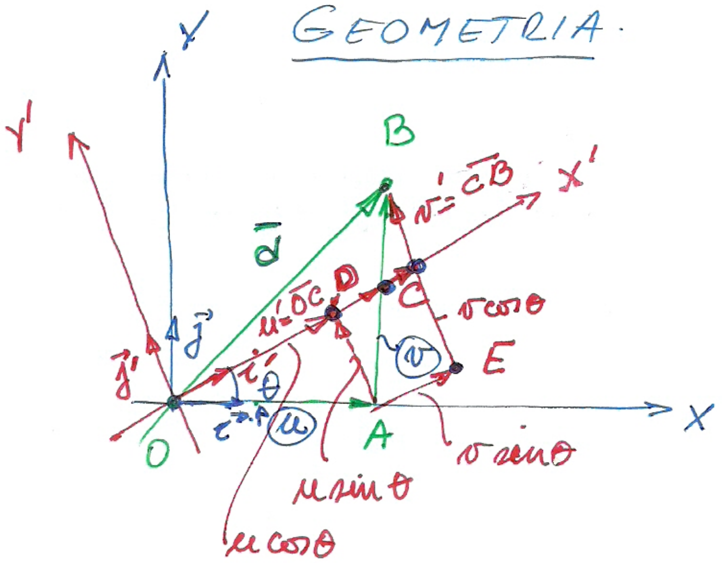
$$\Sigma F_x = 9.47 + 57.3(\cos 45) - 9.47 - 57.3(\cos 45) \cong 0$$

$$\boxed{\Sigma F_x = 0}$$

Se verifica

BARRAS

GEOMETRIA



$u' = \bar{OC}$
$v' = \bar{CB}$

$\vec{i}, \vec{j}$ versores unitarios, X, Y coordenadas globales } globales.

i' j', X', Y' } coordenadas locales.

$$\left.\begin{array}{l} \bar{u} = \bar{OA} \\ \bar{v} = \bar{AB} \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} \bar{u}' = \bar{OC} \\ \bar{v}' = \bar{CB} \end{array}\right. \qquad (1)$$

podemos ver que $\bar{OC} = \bar{OD} + \bar{DC}$ (2)

$$\left.\begin{array}{l} \bar{OD} = \bar{OA}\cos\theta = \bar{u}\cos\theta \\ \bar{DC} = \bar{AE} = \bar{v}\, sen\,\theta . \end{array}\right\} \quad (3)$$

Para calcular las ecuaciones (1)

RELACION ENTRE $\boxed{u', v'}$ CON $\boxed{u, v}$

$$\Rightarrow \boxed{u' = u\cos\theta + v\, sen\,\theta .} \quad (4)$$

para v' $\Rightarrow$

$$\boxed{v' = -u\, sen\theta + v\cos\theta .}$$

sale de. $\bar{CB} = -\bar{AD} + \bar{BE}$ usando las relaciones trigonometricas

donde: $\bar{AD} = \bar{OA}\, sen\,\theta = \bar{u}\, sen\,\theta$
$\bar{BE} = \bar{AB}\cos\theta = v\cos\theta .$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} .$$

$C = \cos\theta$
$S = sen\,\theta .$

Luego de ver las relaciones trigonometricas podemos decir

$\underline{\underline{d}}'$: matriz desplazamiento local.

$\underline{\underline{d}}$: " " global.

$$\Rightarrow \underline{\underline{d}}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{d}}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix}}_{\text{MATRIZ TRANSFORMACION o ROTACION}} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.}$$

Esta matriz es ortogonal porque:

$$T^T T = I.$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad T^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$T^T T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = T^T$$

Generalmente se usan como matriz de rotación o transformación. En 2D relacionan componentes de un vector en un sistema de coordenadas a las componentes en otro sistema

Por ejemplo las componentes del vector desplazamiento $\vec{d}$ en $[X-Y]$ con aquellos de $\vec{d}'$ en $[X';Y']$.

$$\Rightarrow [d'] = \underline{\underline{T}}[d] \qquad \begin{bmatrix} d_x' \\ d_y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

Otro uso es cambiar la matriz de rigidez local a una matriz de rigidez global. para un elemento

$$\Rightarrow \underline{\underline{k}} = \underline{\underline{T}}^T [k'] \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^{-1} [k'] \underline{\underline{T}}$$

y expresamos la matriz de rigidez en el plano $[X,Y]$

Si hablamos de cosenos directores $\Rightarrow$

$$[t_{11} \quad t_{12}] = [\cos\theta \quad \operatorname{sen}\theta] \quad \text{para } Ox' \text{ o } d_x'$$

para Oy' d_y' $\Rightarrow$

$$[t_{21} \quad t_{22}] = [-\operatorname{sen}\theta \quad \cos\theta] \Rightarrow$$

$$\vec{i}' = \bar{i}\cos\theta + \bar{j}\operatorname{sen}\theta$$

$$\vec{j}' = -\bar{i}\operatorname{sen}\theta + \bar{j}\operatorname{sen}\theta$$

$\rightarrow t_{11}^2 + t_{12}^2 = 1 \qquad t_{21}^2 + t_{22}^2 = 1.$

como $\vec{i}'$ y $\vec{j}'$ son ortogonales $\Rightarrow$ su producto punto

$$[t_{11} i + t_{12} j] \cdot [t_{21} i + t_{22} j] =$$

$$t_{11} t_{21} + t_{12} t_{22} = 0$$

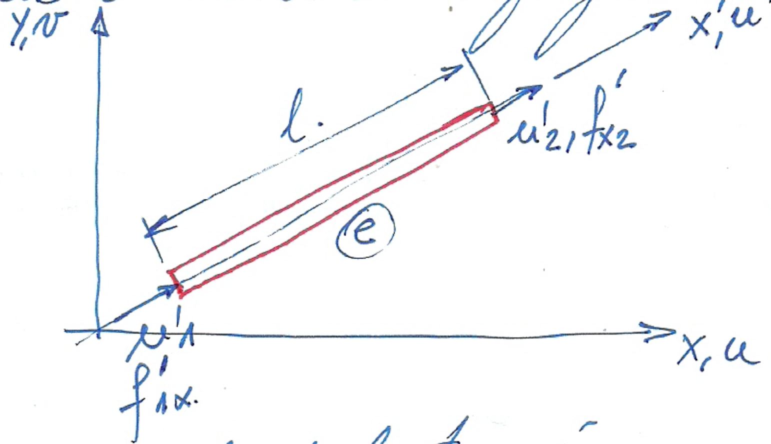
$$\Rightarrow \boxed{T^T = T^{-1}}$$

Ec. fundamental

x

MATRIZ RIGIDEZ GLOBAL PARA UNA BARRA ORIENTADA ARBITRARIAMENTE EN EL PLANO

Dado la barra de la figura:



u_1' f_{1x}'
u_2' f_{2x}'
coordenadas locales

Como se sabe de la teoría para el sistema global.

$$\begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{bmatrix} = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{sistema global.} \quad (2.1)$$

$$\underset{=}{k} = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

Si lo llevamos a coordenadas locales $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} f'_{1x} \\ f'_{2x} \end{bmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\Rightarrow \boxed{[f'] = [\underline{\underline{k}}'][u']} \quad (2.4)$$

Si queremos relacionar las fuerzas nodales globales por elemento $[f]$ a los desplazamientos nodales globales $[d]$ para un elemento barra orientado en forma arbitraria con respecto a los ejes globales según un ángulo θ, produciré la matriz de rigidez global $\Rightarrow$.

$$\begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{bmatrix} = \underline{\underline{k}} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{o bien} \quad \boxed{[\underline{f}] = \underline{\underline{k}}\,[\underline{d}].} \quad (2.5)$$

4 comp de fuerzo   4 comp de desplaz.

pero en el sistema <u>local</u> aparecen 2 comp. de <u>fuerza</u> y 2 de <u>desplazamiento</u>

Sabemos que; usando las relaciones entre comp. locales y globales que:

$$u'_1 = u_1 \cos\theta + v_1 \operatorname{sen}\theta.$$
$$u'_2 = u_2 \cos\theta + v_2 \operatorname{sen}\theta. \quad (2.6)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (2.7) \quad \Rightarrow \boxed{[d'] = [\underline{\underline{T}}^*][d]} \quad (2.8)$$

$$\underline{T}^* = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix}$$

En forma similar:

$$[f'] = T^*[f]. \qquad (2.9)$$

por (2.4) y sustituyendo en ella (2.8) tenemos

$$\boxed{[f'] = [k']\underbrace{T^*[d]}_{u'}} \qquad (2.10)$$

y usando (2.9)

$$\boxed{T^*[f] = [k']T^*[d]} \qquad (2.11)$$

pero así como está para relacionar fuerzas nodales globales con desplazamientos nodales globales, deberíamos invertir T^* y como esto además no es posible ⇒ (no es cuadrada) ⇒ hay que expandir $[d']$ $[f']$ y $[k']$ para hacerlo consistente con el uso global aunque f_{1y} y v_{2y} sean nulos.

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{bmatrix}}_{[d']} = \underbrace{\begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}}_{[d]}} \qquad (2.12)$$

matriz de 4x4.

⇒ Emulando lo anterior f_{1y} y f_{2y} ~~son~~ nulos ⇒

$$[T][f] = [k'][T][d]$$

$$\Rightarrow [f] = [T^{-1}].[k'][T].[d] \quad \text{y como } T^{-1} = T^T$$

$$\Rightarrow \boxed{f = T^T k' T [d]} \qquad (2.13)$$

$$[k] = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ & S^2 & -CS & -S^2 \\ \text{SIMETRICA} & & C^2 & CS \\ & & & S^2 \end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\,\text{sen}\,\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta\,\text{sen}\,\theta \\ & \text{sen}^2\theta & -\cos\theta\,\text{sen}\,\theta & -\text{sen}^2\theta \\ & & \cos^2\theta & \cos\theta\,\text{sen}\,\theta \\ \text{SIMETRICA} & & & \text{sen}^2\theta \end{bmatrix} \qquad (2.15)$$

Ahora si consideramos una barra como un elemento finito lineal ⇒

⇒ el desplazamiento será (la función desplaz.)

$$u = a_1 + a_2 x.$$

$$\Rightarrow u = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad N_1 = 1 - \frac{x}{l}. \qquad N_2 = \frac{x}{l}.$$

$$u(0) = u_1 = a_1.$$

$$u(l) = u_2 = a_2 l + u_1.$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{u_2 - u_1}{l}. \qquad \text{reemplazando:}$$

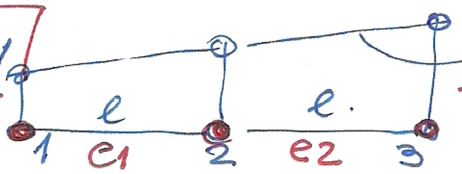
$$\boxed{u = \left(\frac{u_2 - u_1}{l}\right) x + u_1.}$$

$$\Rightarrow u = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \qquad N_1 = 1 - \frac{x}{l} \qquad N_2 = \frac{x}{l}.$$

Si tenemos dos barras unidos.

$$\boxed{u^{(1)} = \frac{u_2 - u_1}{l} x + u_1} \qquad \boxed{u^{(2)} = \frac{u_3 - u_2}{l} x + u_2}$$



suponiendo que cada barra es un elemento y de acuerdo con lo anterior, suponemos funciones continuas a trozo elemento a elemento como en FEM, la matriz de rigidez para cada elemento se puede sumar utilizando el método de rigidez directa ⇒

cont. de barras $\boxed{\sum_{e=1}^{N} [k^e] = \underline{\underline{K}}}$ Matriz de rigidez TOTAL (2.16)

N: nº total de barras.

Idem para la matriz de fuerza

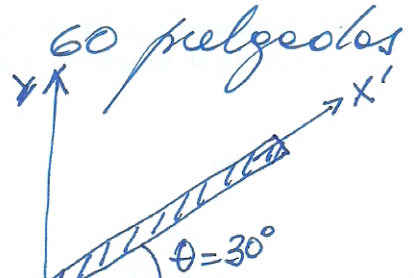
$$\boxed{\sum_{e=1}^{N} [f^{(e)}] = [F]} \quad (2.17)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{K}}\{d\} = [F]} \quad (2.18)$$

Vamos a ver varios ejemplos de ~~mayor~~ menor a mayor complejidad ⇒

1) Dada una barra simple como la figura evaluamos la matriz de rigidez global con respecto a X-Y. Área de la sección de la barra 2 pulg², long: 60 pulgadas y $E = 30 \times 10^6$ psi

$\theta = 30°$



Evaluamos k ⇒ de (2.14) (2.15) anterior ⇒ con $\theta = 30°$

θ: positivo en sentido contrario a las agujas del reloj desde x a x' ⇒

$\theta = 30$ $\quad C = \cos 30 = \sqrt{3}/2$ $\quad S = \sin 30 = 1/2$.

$$\underline{k} = \frac{\overset{A}{(2)}\times\overset{E}{(30\times10^6)}}{l=60}\begin{bmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ & 1/4 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -1/4 \\ & \underline{SIM} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ & & & 1/4 \end{bmatrix}$$

$\sqrt{3}/4$

$$\Rightarrow k = 10^6\begin{bmatrix} 0.75 & 0.433 & -0.75 & -0.433 \\ & 0.25 & -0.433 & -0.25 \\ & & 0.75 & 0.433 \\ & & & 0.25 \end{bmatrix} \quad (Lb/in)$$

---

2) En este caso vamos a calcular variables secundarias como tensiones en la barra.
Las fuerzas como vimos, estan relacionadas con los desplazamientos $\Rightarrow$

$$\begin{Bmatrix} f'_{1x} \\ f'_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix}. \qquad 2.19$$

Si tomamos que $f'_{1y} = f'_{2y} = 0 \Rightarrow$.

$$\begin{bmatrix} f'_{1x} \\ f'_{1y} \\ f'_{2x} \\ f'_{2y} \end{bmatrix} = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix} \qquad 2.20$$

$\Rightarrow$ la definición de tensión axial de tracción es la fuerza axial / sección transversal $\Rightarrow$.

$$\sigma = f'_{2x}/A$$

y como $f'_{2x} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{Bmatrix}$. $\Rightarrow$ combinando ambas

$$\underline{\sigma} = \frac{E}{l}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}[d'] \qquad 2.21$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{l}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix} T^*[d] \quad \text{en coordenadas globales} \quad (2.22)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}}'[d] \quad \text{donde:}$$

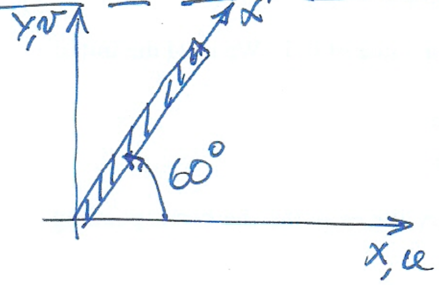
$$\underline{\underline{C}}' = \frac{E}{l}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c & s & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & s\end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\underline{\underline{C}}' = \frac{E}{l}\begin{bmatrix}-c & -s & c & s\end{bmatrix} \quad (2.24)$$

2] Dada la barra de la figura, determinar las tensiones axiales. Dada su sección $A = 4\times10^{-4}\ m^2$ $E = 210$ [GPa] y $l = 2$ m. con un ángulo $\theta = 60°$ suponemos que medimos los desplazamientos globales y son:

$u_1 = 0.25$ mm.
$v_1 = 0$
$u_2 = 0.50$ mm
$v_2 = 0.75$ m.

Calculo de las Tensiones



$C = \cos 60° = 1/2$

$S = \operatorname{sen} 60° = \sqrt{3}/2$

$$d = \begin{bmatrix}0.25\times10^{-3}\,m\\ 0\\ 0.50\times10^{-3}\,m\\ 0.75\times10^{-3}\,m\end{bmatrix}$$

de (2.24)

$$\Rightarrow \sigma_x = ? \quad C' = \frac{210\times10^6}{2}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

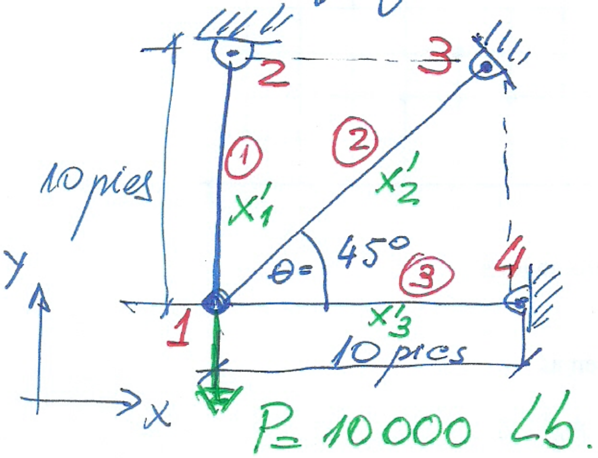
$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{210\times10^6}{2}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.25\\ 0\\ 0.50\\ 0.75\end{Bmatrix}\times10^{-3} = 81.32\times10^{3}\,(kN/m^2)$$

$$= 81.32\ [MPa].$$

Ejemplo 3 SOLUCION EN EL PLANO (2D)

Ahora utilizando el método de rigidez directo desarrollamos la matriz de rigidez global ensamblando un conjunto de barras. Un plano de barras es una estructura compuesta de elementos de barras q' descansan en un plano común y son conectados por pasadores sin fricción. Las cargas deben actuar sólo en ese plano y se deben aplicar en los nudos o juntas.-

Dada una estructura compuesta por 3 elementos como la de la figura. La fuerza apunta hacia abajo en el nodo 1 y vale 10 000 (Lb). Determinar los desplazamientos en X e Y globales y las tensiones en c/elemento. $E = 30 \times 10^6$ psi $A = 2\ in^2$ para todas las barras. La longitud están en la figura.



Cuadrado de 10 x 10 pies.

nudos: 1, 2, 3, 4

barras ①, ②, ③

x_1', x_2', x_3' coord. locales

ANALISIS: Calculamos primero la matriz de rigidez global para cada barra usando la ecuación (2.14)

1) Para ello determinamos el angulo θ entre ejes globales (11)
X y local X' para c/barra

2) En este ejemplo X' se toma desde el nodo 1 hacia el otro nodo en c/barra.

3) θ: se mide en sentido contrario a las agujas del reloj

Para la barra (1): X_1' está dirigido de 1 a 2.

$\theta^{(1)} = 90°$

" " " (2): X_2' va de 1 a 3 $\theta^{(2)} = 45°$

" " " (3): X_3' va de 1 a 4 $\theta^{(3)} = 0$

4) Tenemos 8 componentes nodales de desplazamiento o g.d.l. para el sistema sin restringir

5) k global debe ser de 8×8

Tabla

Elemento barra.	$\theta°$	C	S	C^2	S^2	CS
1	90	0	1	0	1	0
2	45	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	1/2	1/2
3	0	1	0	1	0	0

barra 1 de. 2.14.

$$k^{(1)} = \frac{\overset{psi}{(30\times10^6)}\overset{in^2}{(2)}}{120 \text{ (inch)}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

barra 2

$$k^{(2)} = \frac{(30\times10^6)(2)}{120.\sqrt{2}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Barra 3

$$k^{(3)} = \frac{(30\times10^{6})(2)}{120} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

factor común $\frac{(30\times10^{6})(2)}{120} = 500.000$.

el termino de la (2) barra debe ser multiplicado por $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ensamblamos las 3 barras.

Calculando nos queda.

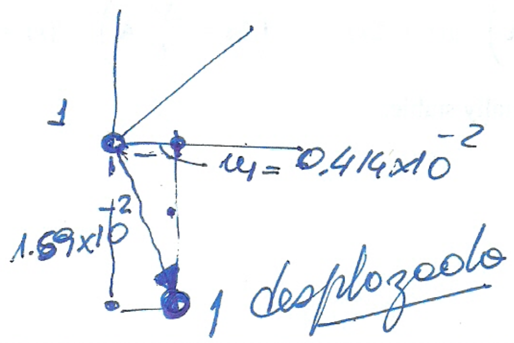
$$\underline{K} = 500.000 \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.354 & 0.354 & 0 & 0 & -0.354 & -0.354 & -1 & 0 \\ 0.354 & 1.354 & 0 & -1 & -0.354 & -0.354 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.354 & -0.354 & 0 & 0 & 0.354 & 0.354 & 0 & 0 \\ -0.354 & -0.354 & 0 & 0 & 0.354 & 0.354 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$500.000 \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2=0 \\ v_2=0 \\ u_3=0 \\ v_3=0 \\ u_4=0 \\ v_4=0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10.000 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{bmatrix}$$

Reacciones (F_{2x} … F_{4y})

$$500000 \begin{bmatrix} 1.354 & 0.354 \\ 0.354 & 1.354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10000 \end{bmatrix}$$

$u_1 = 0.414\times10^{-2}$ [in] $\qquad v_1 = -1.59\times10^{-2}$ [in]



CALCULAMOS TENSIONES

Salen de $\underline{\underline{C}}' = \frac{E}{l}\left[-c\ -s\ c\ s\right]$

$\sigma = \underline{C}' \cdot [d]$

barra 1

$$\sigma^{(1)} = \frac{30\times10^{6}}{120}\left[0\ -1\ 0\ 1\right]\begin{Bmatrix} u_1 = 0.414\times10^{-2} \\ v_1 = -1.59\times10^{-2} \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \end{Bmatrix} = 3965\,[psi]$$

tracciona

barra 2

$$\sigma^{(2)} = \frac{30\times10^{6}}{120\sqrt{2}}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\begin{Bmatrix} u_1 = 0.414\times10^{-2} \\ v_1 = 1.59\times10^{-2} \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{Bmatrix} = 1471\,[psi]$$

tracciona

barra 3

$$\sigma^{(3)} = \frac{30\times10^{6}}{120}\left[-1\ 0\ 1\ 0\right]\begin{Bmatrix} u_1 = 0.414\times10^{-2} \\ v_1 = 1.59\times10^{-2} \\ u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \end{Bmatrix} = -1035\,[psi]$$

se comprime

Equilibrio fuerzas

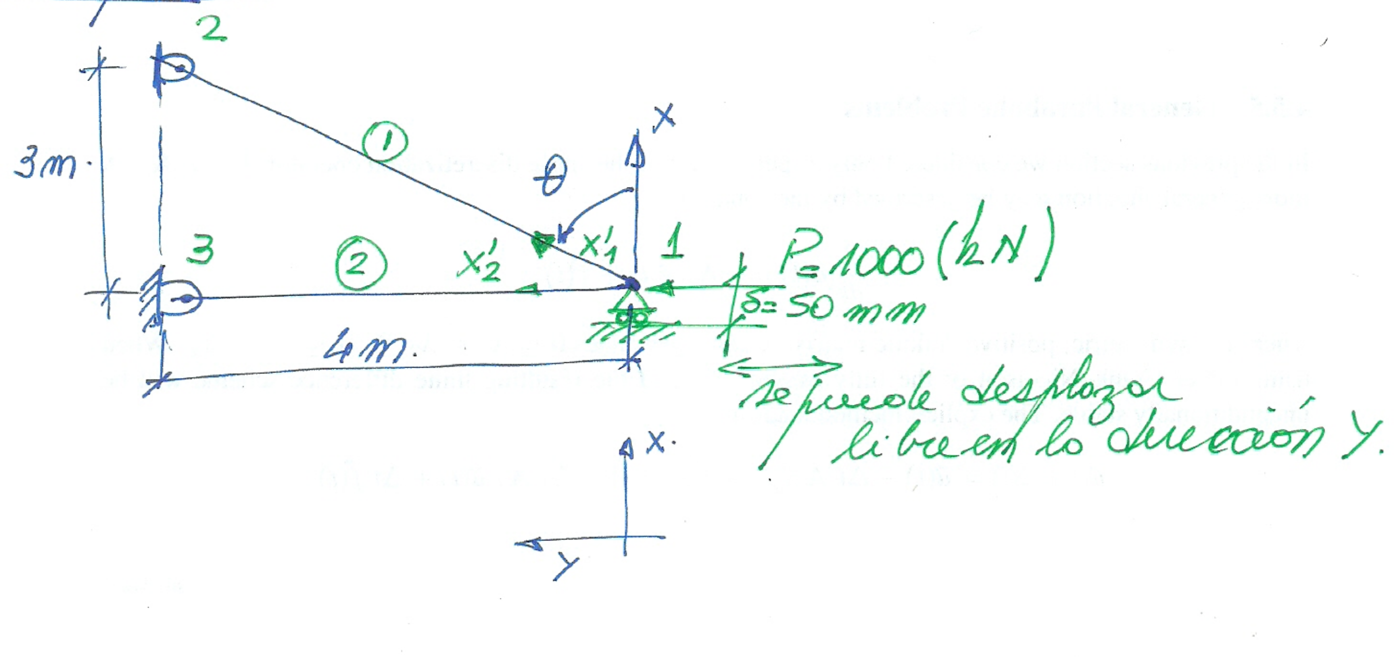
$\Sigma F_x = 0 \quad (1471\,psi)(2)\frac{\sqrt{2}}{2} - 1035(psi)(2) = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad (3965\,psi)(2) + 1471(psi)(2) - 10000 = 0$

¡ojo!

Se comprueba el equilibrio

Ejemplo 4:



Tenemos 2 barras 1 y 2

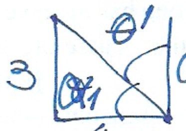
Determinar el desplazamiento del nodo 1 y la fuerza axial en cada barra.

Una fuerza de $P = 1000$ (kN) se aplica en 1 en la dirección positiva Y, El nodo 1 a su vez deslizándose 50 mm. en $(-X)$

$E = 210$ GPa ; $A = 6\times10^{-4}\ m^2$ para c/barra.

La longitud sale de la figura. CALCULO

barra 1



$\theta =$ $\theta = \operatorname{arctg}(3/4) = 36.87$

$\theta^{(1)} = 53.13$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\theta^{(1)} &= 3/5 = 0.6 \\ \sin\theta^{(1)} &= 4/5 = 0.8 \end{aligned}}$$

long = 5 m. $l = \sqrt{4^2+3^2} = 5\ m$.

$$k^{(1)} = \frac{(6.0\times10^{-4}\,m^2)(210\times10^{6}\,kN/m^2)}{5\,m}\begin{bmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.36 & -0.48 \\ 0.48 & 0.64 & -0.48 & -0.64 \\ -0.36 & -0.48 & 0.36 & 0.48 \\ -0.48 & -0.64 & +0.48 & 0.64 \end{bmatrix}$$

$$k^{(1)} = 25200\begin{bmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.36 & -0.48 \\ 0.48 & 0.64 & -0.48 & -0.64 \\ -0.36 & -0.48 & 0.36 & 0.48 \\ -0.48 & -0.64 & 0.48 & 0.64 \end{bmatrix}$$

x

barra 2

$\cos\theta^{(2)} = 0$

$\sin\theta^{(2)} = 1$.

da 31500

$$k^{(2)} = \frac{(6.0\times10^{-4}\,m^2)(210\times10^{6}\,\frac{kN}{m^2})}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k^{(2)} = 25200\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 & -1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.25 & 0 & 1.25 \end{bmatrix}$$

saque factor común

Armamos el Sistema General Global.

15

$$(25200)\begin{bmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.36 & -0.48 & 0 & 0 \\ 0.48 & 1.89 & -0.48 & -0.64 & 0 & -1.25 \\ & & 0.36 & 0.48 & 0 & 0 \\ & \text{Simetrica} & & 0.64 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 1.25 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix}$$

$$F_{1y} = \underbrace{1000\,(kN)}_{P}$$

Sabemos que $u_1 = \delta = -0.05\ m$.
$u_2 = 0$; $v_2 = 0$ $u_3 = 0$; $v_3 = 0$

La incognita es v_1?

$$P = 25200\left[(0.48\,\delta) + (1.89\,v_1)\right]$$

despejando $v_1 = 0.00002\,P - 0.254\,\delta$.

$$v_1 = 0.00002\,(1000\ kN) - 0.254\,(-0.05)$$

$$\boxed{v_1 = 0.0337\ m}$$

(1) se desplaza en la direccion positiva de Y.
es decir hacia la izquierda.-

FUERZAS LOCALES ver ecuacion (2.9) $[f'] = T^*[f]$.

$$\begin{pmatrix} f'_{1x} \\ f'_{2x} \end{pmatrix} = (25200)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}}_{\text{sale de}}\begin{Bmatrix} u_1 = -0.05 \\ v_1 = 0.0337 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

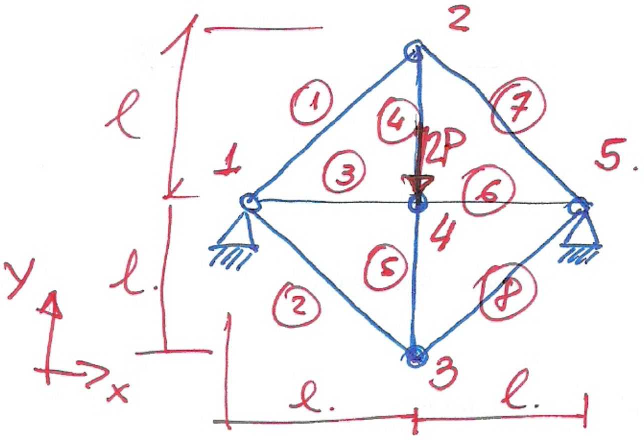
$$T^* = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \text{ ec } (2.7)$$

$$\left.\begin{aligned} f'_{1x} &= -76.6\,(kN) \\ f'_{2x} &= 76.6\,(kN) \end{aligned}\right\}\ \text{COMPRIME}$$

$$\begin{Bmatrix} f'_{1x} \\ f'_{3x} \end{Bmatrix} = (31500)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 = -0.05 \\ v_1 = 0.0337 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} f'_{1x} &= 1061\ kN \\ f'_{3x} &= -1061\,[kN] \end{aligned}$$

COMPRIME

Como calcularia el seg. problema:

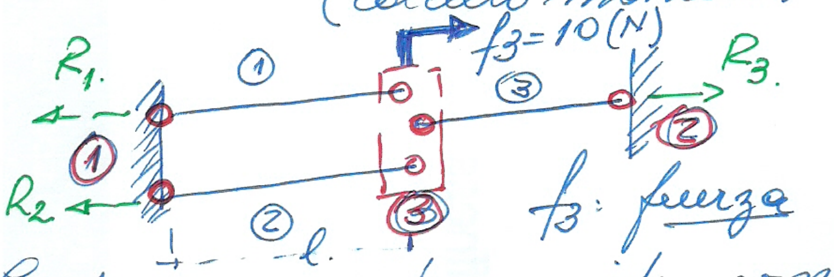


8 barras.
Carga = 2P nodo 4
soporte fijo
barras 1, 2, 7 y 8
Rigidez Axial = $\sqrt{2}$ AE
barras 3, 6 Raxial = AE

Calcular P. y los desplazamientos.

GUIA TRABAJOS PRACTICOS.
BARRAS

Problema 1: Análisis de una estructura de tres barras (Cálculo manual) trabajando a tracción



(i) Nodo.
(i) barra.

Los tres barras están unidas como lo muestra la figura. Los extremos izquierdo y derecho están ambos restringidos, es decir el desplazamiento prescripto es nulo. Existe una fuerza de 10 N. actuando en el nodo del medio. Los nodos fueron numerados comenzando con aquellos donde el desplazamiento es nulo.

Denominamos $K^{(e)}$: la matriz de c/barra individual
$k^{(e)}$ la rigidez elemental de c/barra.-

Resolver:

a) Ensamblar la matriz de rigidez global y el vector fuerza.-

b) Obtener los desplazamientos nodales de la ecuación Matricial

c) Cálculo de las fuerzas de Reacción.-

SOLUCION

$$\begin{array}{cc} (1) & (3) \\ \end{array}$$
$$\underline{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{cc} (1) & (3) \end{array} \quad K^{(2)} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \qquad K^{(3)} = \begin{bmatrix} k^{(3)} & -k^{(3)} \\ -k^{(3)} & k^{(3)} \end{bmatrix}$$

El ensamble será

$$\underline{K} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} k^{(1)} + k^{(2)} & 0 & -k^{(1)} - k^{(2)} \\ 0 & k^{(3)} & -k^{(3)} \\ -k^{(1)} - k^{(2)} & -k^{(3)} & k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

siendo:
$$k^{(e)} = \frac{EA}{l^{(e)}}$$

El vector desplazamiento será:

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{bmatrix} \qquad \text{El de fuerza} \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \text{Reacciones} \quad \underline{r} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Consideramos como que R_1 es una sola reacción de ambas barras sobre la pared.

El sistema global quedará:

$$\left[\begin{array}{cc|c} k^{(1)}+k^{(2)} & 0 & -k^{(1)}-k^{(2)} \\ 0 & k^{(3)} & -k^{3} \\ \hline -k^{(1)}-k^{(2)} & -k^{(3)} & k^{(1)}+k^{(2)}+k^{(3)} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline u_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ \hline 10 \end{array}\right]$$

Nos quedará: Como los primeros desplazamientos están prescriptos $= \emptyset$.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_E & \underline{\underline{K}}_{EF} \\ \underline{\underline{K}}_{EF}^T & \underline{\underline{K}}_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_E \\ \underline{d}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{r}_E \\ \underline{r}_F \end{bmatrix}$$

El sistema reducido de ecuaciones está dado por:

$$\left(k^{(1)}+k^{(2)}+k^{(3)}\right) u_5 = 10$$

$$\Rightarrow u_3 = \frac{10}{k^{(1)}+k^{(2)}+k^{(3)}}$$

Las reacciones serán:

$$\underline{r}_E = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{K}}_E \underline{d}_E + \underline{\underline{K}}_{EF} \underline{d}_F = \begin{bmatrix} -k^{(1)}-k^{(2)} \\ -k^{(3)} \end{bmatrix} \frac{10}{\left(k^{(1)}+k^{(2)}+k^{(3)}\right)}$$

Otra forma: Es plantear el equilibrio en los tres nudos

nudo 1 $\sum_{e=1}^{3} R_i^{(e)} = -R_1$; nudo 2 $\sum_{e=1}^{3} R_i^{(e)} = -R_2$.

nudo 3; $\sum_{e=1}^{3} R_i^{(e)} = f_3$.

nudo 1: $(k^{(1)}+k^{(2)})u_1 - (k^{(1)}+k^{(2)})u_3 = -R_1$

nudo 2: $k^{(3)}(u_2-u_3) = -R_2$

nudo 3: $-(k^{(1)}+k^{(2)})u_1 - k^{(3)}u_2 + (k^{(1)}+k^{(2)}+k^{(3)})u_3 = f_3$

Si por ejemplo $k^{(1)} = k^{(2)} = k^{(3)} = \frac{EA}{\ell}$ (Igual en todas las barras)

$$\Rightarrow u_3 = \frac{10}{3\frac{EA}{\ell}} = \frac{10\ell}{3EA}$$

$$R_1 = \frac{2EA}{\cancel{\ell}} \cdot \frac{10\cancel{\ell}}{3\cancel{EA}} = 20/3 \text{ o bien } \boxed{\frac{2}{3}f_3}$$

$$R_2 = -\frac{EA}{\ell} \frac{10}{\frac{3EA}{\ell}} = -10/3 \text{ o bien } \boxed{-f_3/3}$$

Problema 2 Analizar la estructura de barras en el plano (calculo manual).

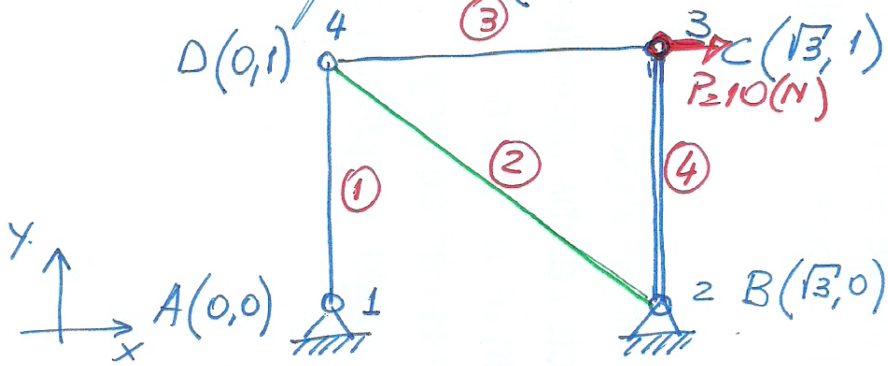


Figura 2: Estructura de barras.

En la estructura de la figura 2, los nodos A y B estan fijos ($u=0$). Una fuerza igual a 10 [N] actúa en la dirección X positiva en el nodo C. Las coordenadas de las uniones están dadas en metros. El modulo de Young (elastico) y la sección transversal de las barras (A) son constantes.

a- Ensamblar la matriz de Rigidez global.

b- El vector de cargas (fuerzas)

c- Generar el sistema matricial y resolver los desplazamientos. Calcular Tensiones y Reacciones

Solución Problema 2

Elemento 1 (barra 1) Está enumerada con los nodos (nudos) 1 y 4. $\cos 90 = 0$ $\operatorname{sen} 90° = 1$. $l^{(1)} = 1$.

$$k^{(1)} = \frac{EA}{1}$$

En cada nodo o nudo tenemos dos desplazamientos, en x e y.

$$K^{(1)} = EA\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento 2 (barra 2) $\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\operatorname{sen} 135 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Nodos 2 y 4 $l^{(2)} = \sqrt{2}$; $k^{(2)} = \frac{EA}{\sqrt{2}}$

$$K^{(2)} = \frac{EA}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1/2 & -1/2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Elemento 3 (barra 3) nodos 3 y 4 globales.

$\cos 180° = -1$ $\operatorname{sen} 0° = 0$ $l^{(3)} = 1$ $k^{(3)} = EA$

$$K^{(3)} = EA\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemento 4 (barra 4). nodos 2 y 3.

$\cos 90° = 0$ $\operatorname{sen} 90° = 1$ $l^{(4)} = 1$ $k^{(4)} = EA$

$$K^{(4)} = EA\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desde acá planteamos el ensamble directo =>

$$\underline{\underline{K}} = EA \left[\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\
0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\
0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{array}\right]$$

y los desplazamientos serán:

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \qquad \underline{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_{1x} \\ \Gamma_{1y} \\ \Gamma_{2x} \\ \Gamma_{2y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nota: Cuando tenemos una fuerza externa en un nodo o nodo que esta establecido, el correspondiente desplazamiento en ese nodo será una incógnita
Por otro lado, si en cambio tenemos un desplazamiento en un nodo, entonces la correspondiente componente de fuerza en ese nodo es una reacción incógnita.-

Si la particionamos el sistema global, como en el primer problema, tendremos:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_E & \underline{\underline{K}}_{EF} \\ \underline{\underline{K}}_{EF}^T & K_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_E \\ \underline{d}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_E \\ f_F \end{bmatrix}$$

$$\underline{d}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{d}_F = \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad \underline{f}_F = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad r_E = \begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{K}}_{EF} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

La matriz con los desplaz. incognitos genera un sistema reducido de ecuaciones $\Rightarrow$.

$$EA \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto nos dará:

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \cdot \begin{bmatrix} 20+20\sqrt{2} \\ 0 \\ 10+20\sqrt{2} \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$r_E = \begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \end{bmatrix} = \underline{\underline{K}}_E \underline{d}_E + \underline{\underline{K}}_{EF} \underline{d}_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20+20\sqrt{2} \\ 0 \\ 10+20\sqrt{2} \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Verificando que se satisfacen las ecuaciones de equilibrio.

$$\Sigma F_x = 0 \; ; \; \Sigma F_y = 0 \; ; \; \Sigma M_z = 0 .$$

Finalmente en el posprocesamiento calculamos las tensiones en las |4| barras.

$$\underline{\sigma}^{(e)} = E^{(e)} \left(\frac{u'_{2x} - u'_{1x}}{l^e} \right) = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_{1x} \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{bmatrix} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\underline{T}} \underline{d}$$

$$= \frac{E}{l} \begin{bmatrix} -\cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \end{bmatrix} \underline{d}$$

Para la barra 1

$$\phi = 90^\circ \quad (\cos 90 = 0, \operatorname{sen} 90 = 1)$$

$$\underline{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10+20\sqrt{2} \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underline{\sigma}^{(1)}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10+20\sqrt{2} \\ 10 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{A} = \boxed{\frac{10}{A}}$$

<u>barra 2</u> $\quad \phi^{(2)} = 135 \quad \left(\cos 135 = -\frac{1}{\sqrt{2}} ; \operatorname{sen} 135 = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\underline{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10+20\sqrt{2} \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\sigma^{(2)} =} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10+20\sqrt{2} \\ 10 \end{bmatrix} \frac{1}{A} = \boxed{\frac{-10\sqrt{2}}{A}}$$

barra 3 $\phi^3 = 180$ $(\cos 180 = -1, \ \sin 180 = 0)$. P

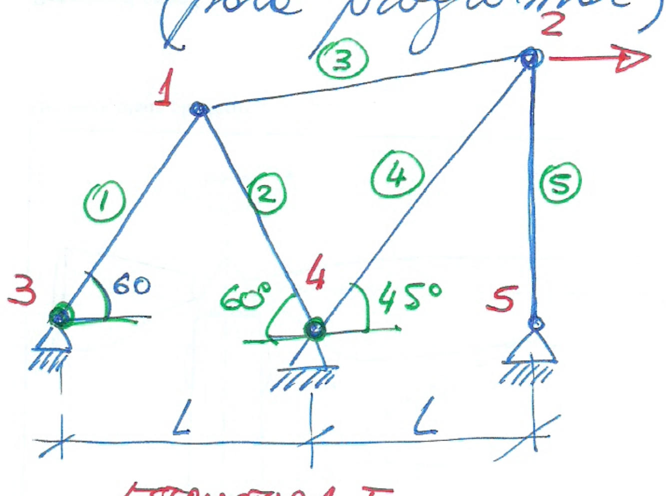
$$d^{(3)} = \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 20+20\sqrt{2} \\ 0 \\ 10+20\sqrt{2} \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\sigma^{(3)} =} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20+20\sqrt{2} \\ 0 \\ 10+20\sqrt{2} \\ 10 \end{bmatrix} \frac{1}{A} = \boxed{\frac{10}{A}}$$

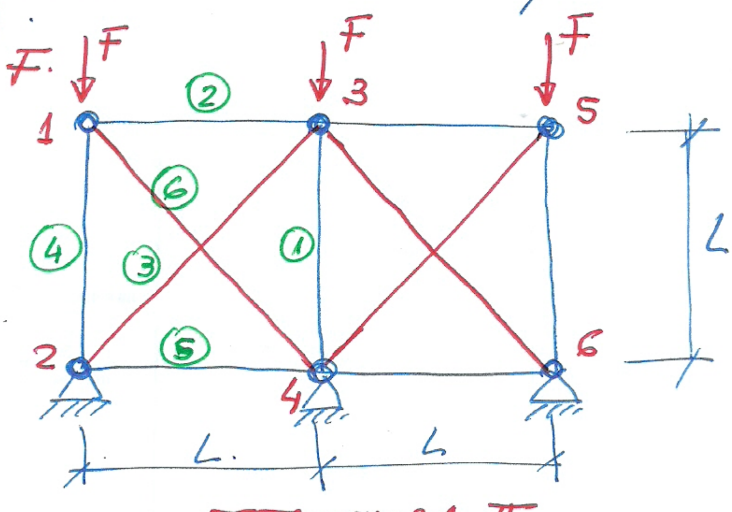
barra 4 $\phi = 90$ $(\cos 90 = 0; \ \sin 90 = 1)$

$$d^{(4)} = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20+20\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20+20\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{A} = 0$$

Problema 3. Análisis de dos estructuras en un plano (para programar).



ESTRUCTURA I

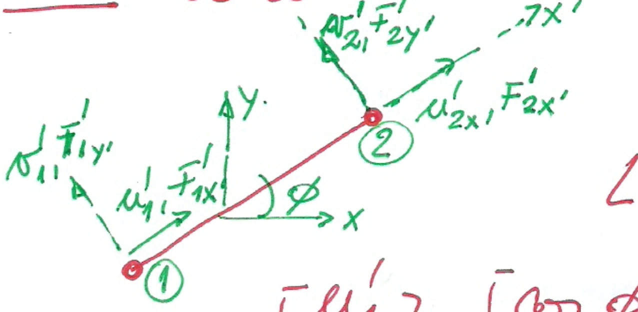


ESTRUCTURA II

Utilizando Matlab u Octave, encontrar los desplazamientos y las tensiones en las dos estructuras de la figura superior. Graficar las deformaciones. En el caso de la ESTRUCTURA II aprovechar la condición de simetría. Para las dos vigas o barras, verificar el equilibrio en el nodo 1. El módulo de Young (E) es igual a $E = 10^{11}$ [Pa] y el área de sección transversal.

de todas las barras es $A = 10^{-2}$ [m^2].
Las fuerzas $F = 10^3$ [N] y $L = 2$ [m]. —
Desarrollar un modelo de calculo para estos dos casos. —

Nota: Calculo de tensiones



$$\varepsilon = \frac{u'_2 - u'_1}{L} \Rightarrow \boxed{\sigma^{(e)} = E\,\frac{u'_2 - u'_1}{L}} \quad (\mathrm{I})$$

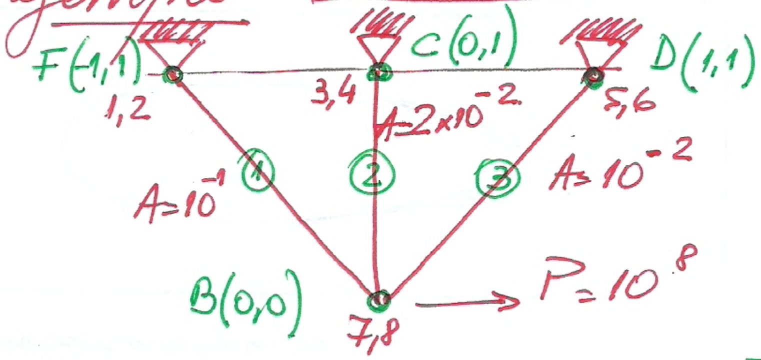
L: longitud de la barra.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}}_{\underline{d}^{(e)}} \quad (\mathrm{II})$$

Combinando (I) y (II)

$$\Rightarrow \sigma^{(e)} = \frac{E}{L}\left[-\cos\phi \;\; -\sin\phi \;\; \cos\phi \;\; \sin\phi\right] \underline{d}^{e}$$

Por ejemplo — Previamente calculado.



$$\sigma^{(3)} = \frac{E}{\sqrt{2}}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; \frac{\sqrt{2}}{2} \;\; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\begin{Bmatrix} 0.0033 \\ 0.005 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0\ [kPa]$$

$$\sigma^{e} = \frac{E}{L}\left[-\cos\phi \;\; -\sin\phi \;\; \cos\phi \;\; \sin\phi\right] \underline{d}^{(e)}$$

Aplicando esta ecuación a c/elemento, tenemos por ejemplo a la barra (1)

$$\sigma^{(1)} = \frac{E}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\begin{Bmatrix} 0.033284 \\ 0.005 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}(m) = 141.421\ [kPa].$$

$$\sigma^{(2)} = E\left[0 \;\; -1 \;\; 0 \;\; 1\right]\begin{Bmatrix} 0.033284 \\ 0.005 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -50\ [kPa].$$