

CONCEPTOS BASICOS

La Teoría de la Elasticidad determina el comportamiento de una estructura ante las cargas mediante la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, llamados *ecuaciones de campo* o *de gobierno*, complementados por las *condiciones de contorno* o *de sustentación*. Los métodos tradicionales de cálculo de estructuras utilizan la Resistencia de Materiales que añade hipótesis simplificadoras a la Teoría de la Elasticidad para resolver las ecuaciones de gobierno, obteniéndose unas soluciones que se consideran exactas. Sin embargo, estos métodos tradicionales de cálculo normalmente solo se pueden aplicar a estructuras articuladas y reticuladas. En estructuras mas complejas como las estructuras continuas es necesario aplicar métodos aproximados como el *Método de los elementos finitos*.

Este método se basa en una serie de conceptos que se agrupan en los apartados siguientes:

- I. *Conceptos de Elasticidad.*
- II. *Conceptos energéticos.*
- III. *Conceptos matemáticos.*

CONCEPTOS DE ELASTICIDAD

ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Sea un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas aplicadas cualesquiera (Fig. 1.1a) y sea O el punto del cuerpo cuyos estados de esfuerzos y de deformaciones estamos considerando. Eligiendo el punto O como origen del triedro de ejes coordenados x, y, z , el estado de esfuerzos en el punto O esta definido por el vector de esfuerzos

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T, \quad (1.1)$$

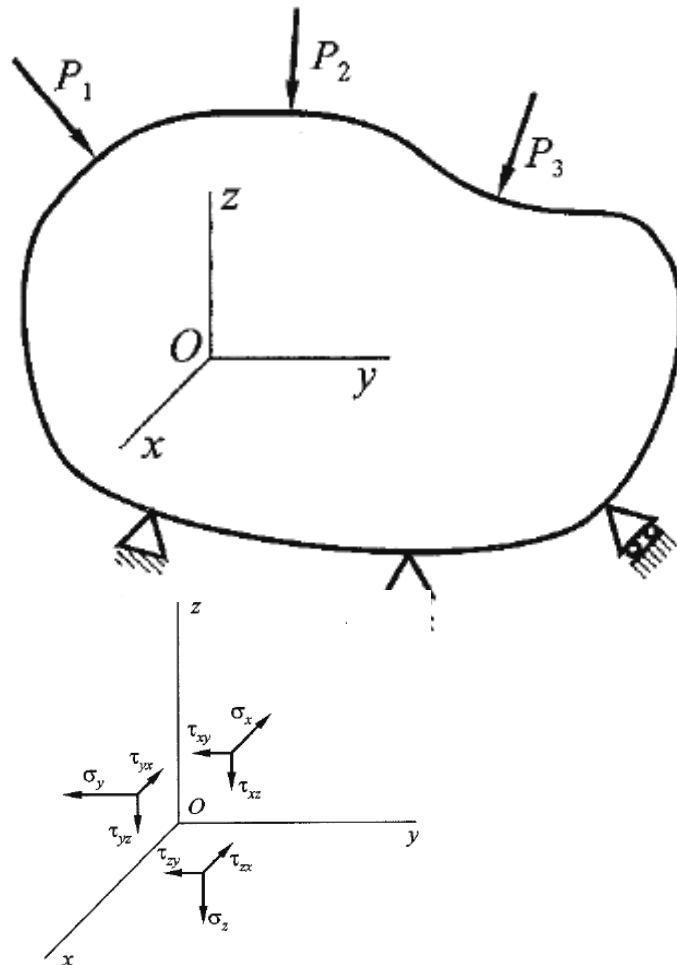


Fig. 1.1(b).

formado por los esfuerzos normales $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ y los esfuerzos cortantes $\tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{yz}$ (Figura 1.1b). Estas seis componentes constituyen las *componentes del estado de esfuerzos* en el punto considerado. A continuación se aísla del cuerpo un elemento de volumen diferencial en forma de paralelepípedo recto con vértice en el punto O, origen de un sistema de ejes coordenados coincidentes con las aristas del paralelepípedo. Cuando se reducen las dimensiones del paralelepípedo, manteniéndolo semejante a sí mismo, el paralelepípedo tiende al punto O.

El paralelepípedo elemental (Fig. 1.2) estará en equilibrio bajo la acción de las fuerzas que actúan sobre cada cara y de las fuerzas de volumen $q \, dx \, dy \, dz$, tal como el peso del paralelepípedo. Estableciendo las ecuaciones de la Estática: $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum Z = 0$, se obtienen las *ecuaciones de equilibrio* del paralelepípedo

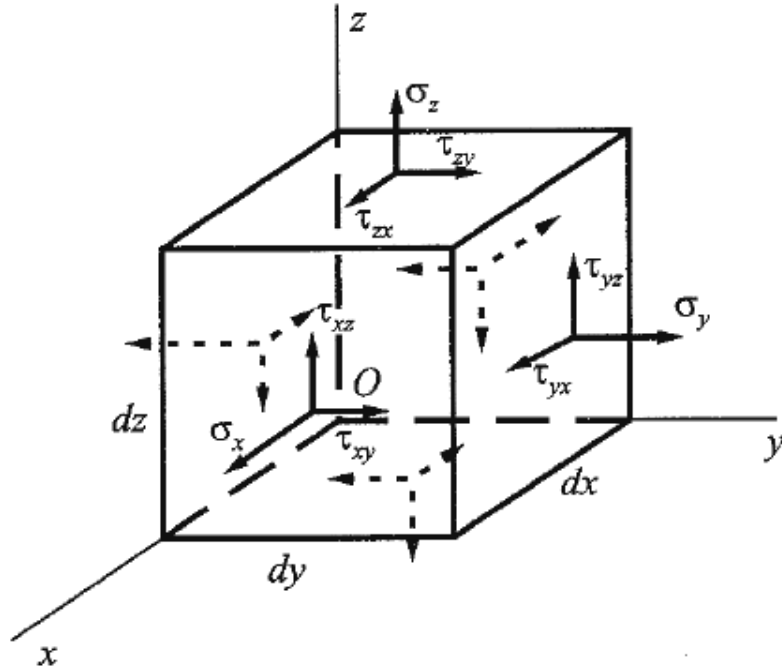


Fig. 1.2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + q_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + q_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Las ecuaciones Estática: $\sum M_x = 0$, $\sum M_y = 0$, $\sum M_z = 0$, permiten determinar las relaciones:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad (1.3)$$

que son la expresión analítica del teorema de Cauchy. Este teorema reduce a 6 las componentes independientes de esfuerzos que son las componentes que intervienen en el vector de esfuerzos $\{\sigma\}$

RELACIONES ESFUERZOS-DEFORMACIONES

Asimismo, el estado de deformaciones en el punto O (Fig. 1.3) está definido por el vector de deformaciones

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T, \quad (1.4)$$

formado por las deformaciones lineales $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$; y las deformaciones angulares $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, que constituyen las *componentes del estado de deformaciones* en el punto. Cuando el cuerpo es de un material isótropo y linealmente elástico satisface la *ley de Hooke generalizada* que determina las componentes del estado de deformaciones en función de las componentes del estado de esfuerzos

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z), \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_z + \sigma_x), \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

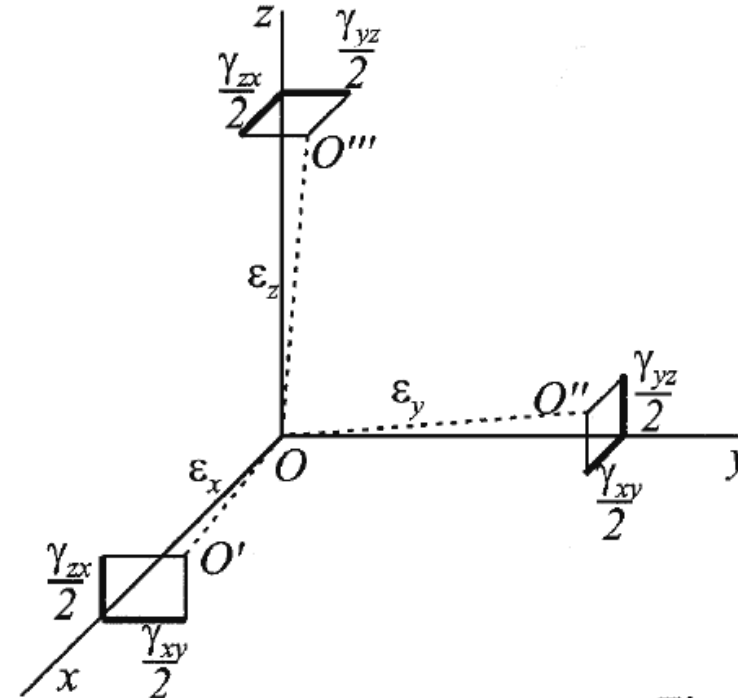


Fig. 1.3.

Al ser $E/G = 2(1 + \nu)$, las anteriores relaciones tienen solamente dos coeficientes independientes. De las ecuaciones (1.5) se deducen las ecuaciones de Lamé que determinan las componentes del estado de esfuerzos en función de las componentes del estado de deformaciones

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu \varepsilon_x \\
 \sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu \varepsilon_y \\
 \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu \varepsilon_z \\
 \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
 \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\
 \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} ,
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

Donde λ y μ , son los coeficientes de Lamé.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} ,$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G.$$

En forma matricial las ecuaciones las expresamos de la siguiente manera:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \tag{1.7}$$

donde $[\mathbf{D}]$ es la *matriz esfuerzos-deformaciones* o *matriz constitutiva*

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{vmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

que es una matriz simétrica, función del módulo de elasticidad y del coeficiente de Poisson del material. En el caso mas general de materiales anisótropos, la matriz constitutiva [D] contiene 21 coeficientes independientes.

RELACIONES DEFORMACIONES-DESPLAZAMIENTOS

Entre las componentes del estado de deformaciones en un punto y las componentes del desplazamiento de ese punto, $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ existen las relaciones de *compatibilidad de las deformaciones*

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.11)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} .$$

Estas relaciones se pueden expresar matricialmente en la forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

$$\{\epsilon\} = [\partial]\{u\}, \quad (1.13)$$

siendo $[\boldsymbol{\partial}]$ el *operador matricial*

$$[\boldsymbol{\partial}] = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix} \quad (1.14)$$

formado por operadores en derivadas parciales y $\{\mathbf{u}\}$ el *vector de desplazamientos*

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix}. \quad (1.15)$$

PROBLEMA ELASTICO

El análisis del comportamiento de una estructura frente a las fuerzas aplicadas lleva consigo la resolución del problema elástico que consiste en determinar en cada uno de los puntos de la estructura las 15 magnitudes siguientes:

6 componentes del estado esfuerzos: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$

6 componentes del estado de deformaciones: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$

3 componentes del desplazamiento: u, v, w

Estas 15 magnitudes están relacionadas entre sí mediante 15 ecuaciones que son el fundamento de la Teoría de la Elasticidad:

3 ecuaciones de equilibrio (1.2)

6 ecuaciones que relacionan esfuerzos y deformaciones (1.6)

6 ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones (1.11)

Al resolver este sistema de 15 ecuaciones en derivadas parciales hay que tener en cuenta las *condiciones de contorno* que comprenden dos tipos de prescripciones:

- Desplazamientos conocidos debido a la actuación de los enlaces o sustentaciones.
- Esfuerzos conocidos originados en las proximidades de las fuerzas aplicadas.

A veces interesa expresar las ecuaciones de equilibrio en función de los desplazamientos y a las ecuaciones diferenciales resultantes se las denomina *ecuaciones diferenciales de gobierno*.

La solución del problema elástico es única y solamente puede hallarse de forma exacta en casos particulares mediante la Teoría de la Elasticidad. Por el contrario, la Resistencia de Materiales resuelve el problema elástico de forma más simple utilizando, usualmente, métodos aproximados a partir de hipótesis simplificadoras.

La *unicidad de la solución* es una consecuencia de que la energía de deformación es siempre positiva cuando existen fuerzas aplicadas sobre la estructura. En efecto, supongamos que a un sistema de fuerzas aplicadas {P} le corresponde en un punto O de la estructura un estado de esfuerzos:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$$

Y que al mismo sistema de fuerzas {P} le corresponde, en el mismo punto O, otro estado de esfuerzos diferente

$$\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau'_{xy}, \tau'_{yz}, \tau'_{zx}$$

Aplicando el principio de superposición, a un estado de fuerzas aplicadas {P} - {P} = O le correspondería en el punto O un estado de esfuerzos no nulo

$$\sigma_x - \sigma'_x, \quad \sigma_y - \sigma'_y, \quad \sigma_z - \sigma'_z, \quad \tau_{xy} - \tau'_{xy}, \quad \tau_{yz} - \tau'_{yz}, \quad \tau_{zx} - \tau'_{zx}$$

y, por tanto, una energía de deformación positiva. Tendríamos así un sistema de fuerzas nulo que aplicado sobre la estructura realizaría un trabajo nulo y en cambio la estructura almacenaría una energía de deformación positiva. Ello estaría en contradicción con el principio de conservación de la energía y, por consiguiente, la solución del problema elástico tiene que ser única. Cuando no existen fuerzas aplicadas sobre la estructura su energía de deformación es nula y son también nulos los esfuerzos en todos los puntos de la estructura. Sin embargo, hay casos en que pueden existir *esfuerzos iniciales* sin que haya fuerzas aplicadas sobre la estructura. En estos casos, si el principio de superposición es aplicable, los esfuerzos finales en el cuerpo elástico se hallan sumando los esfuerzos iniciales y los esfuerzos debidos a las fuerzas aplicadas que se obtienen resolviendo el problema elástico.

CONCEPTOS ENERGETICOS

TEOREMA DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

El teorema de los trabajos virtuales establece que la condición necesaria y suficiente para que una estructura esté en equilibrio es que sea nula la suma de los trabajos que realizan todas las fuerzas que actúan en la estructura para cualquier conjunto de desplazamientos y deformaciones virtuales compatibles con sus enlaces (Fig. 1.4). Estos trabajos comprenden el trabajo que realizan las fuerzas externas a la estructura W_e y el trabajo que realizan sus fuerzas internas W_i Por consiguiente

$$W_e + W_i = 0 . \quad (1.16)$$

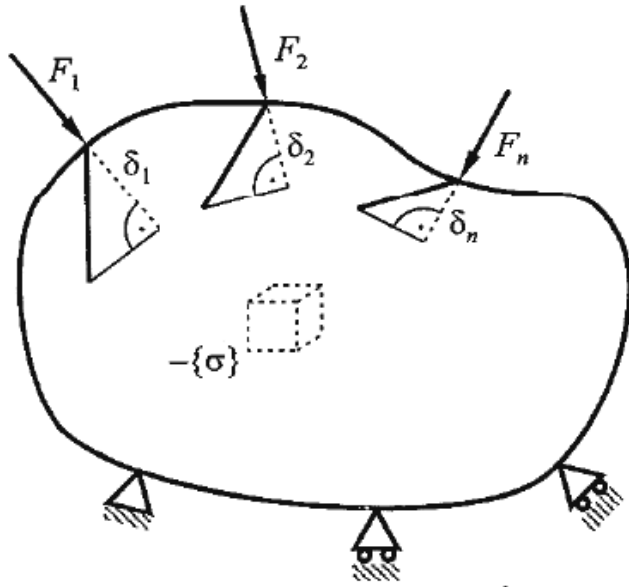


Fig. 1.4.

El trabajo que realizan las fuerzas externas $\{\mathbf{F}_e\}$ cuando se producen unos desplazamientos virtuales $\{\delta_e^*\}$ compatibles con los enlaces es

$$W_e = \Sigma F_j \cdot \delta_j^* = \{\delta_e^*\}^T \{\mathbf{F}_e\}. \quad (1.17)$$

Las fuerzas internas de un paralelepípedo con vértice en uno de sus puntos son iguales y de sentido contrario a las fuerzas externas que actúan sobre ese paralelepípedo, que son las originadas por el vector esfuerzos $\{\sigma\}$ en Fig. 1.4. ese punto.

En consecuencia, el trabajo elemental dW_i que realizan las fuerzas internas de un paralelepípedo elemental cuando se producen unas deformaciones virtuales $\{\epsilon^*\}$ compatibles con las desplazamientos virtuales $\{\delta^*\}$ es igual y de signo contrario a la suma de los trabajos realizados por las fuerzas originadas por los esfuerzos normales

$$-(\sigma_x dy dz) \epsilon_x^* dx - (\sigma_y dz dx) \epsilon_y^* dy - (\sigma_z dx dy) \epsilon_z^* dz$$

y por las fuerzas originadas por los esfuerzos cortantes:

$$-(\tau_{xy} dx dy) \gamma_{xy} dz - (\tau_{yz} dy dz) \gamma_{yz} dx - (\tau_{zx} dz dx) \gamma_{zx} dy.$$

Es decir

$$dW_i = -\{\boldsymbol{\epsilon}^*\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV$$

y, por tanto

$$W_i = - \int_V \{\boldsymbol{\epsilon}^*\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV . \quad (1.18)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.17) y (1.18) en (1.16), se obtiene

$$\{\boldsymbol{\delta}_e^*\}^T \{\mathbf{F}_e\} - \int_V \{\boldsymbol{\epsilon}^*\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV = 0, \quad (1.19)$$

que es la expresión analítica del teorema de los trabajos virtuales.

Este teorema se puede utilizar para calcular la fuerza F_j a aplicar en un punto determinado cuando se conoce la distribución de esfuerzos reales $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ de la estructura. Para ello consideramos un único desplazamiento virtual $\{\boldsymbol{\delta}_j^*\}$ manteniendo sin modificar los desplazamientos de los puntos de aplicación de las otras fuerzas de la estructura. En este caso la ecuación (1.19) se reduce a

$$F_j \cdot \delta_j^* = \int_V \{\boldsymbol{\epsilon}^*\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV. \quad (1.20)$$

Cuando la estructura es linealmente elástica, las deformaciones virtuales $\{\boldsymbol{\epsilon}^*\}$ correspondientes al desplazamiento virtual único $\{\delta_j^*\}$ son proporcionales a las deformaciones virtuales $\{\boldsymbol{\epsilon}_u^*\}$ correspondientes al desplazamiento virtual único $\{\delta_j^*=1\}$, verificándose

$$\{\boldsymbol{\epsilon}^*\} = \{\boldsymbol{\epsilon}_u^*\} \delta_j^*,$$

que sustituida en (1.20), determina la ecuación

$$F_j = \int_V \{\boldsymbol{\epsilon}_u^*\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dV, \quad (1.21)$$

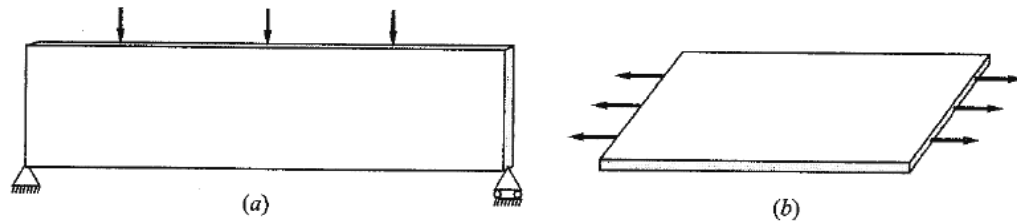
que representa el *teorema del desplazamiento virtual unitario* que se utiliza para determinar los coeficientes de rigidez de elementos estructurales bidimensionales y tridimensionales.

PRINCIPIO DE LA ENERGIA POTENCIAL TOTAL

ESTRUCTURAS BIDIMENSIONALES

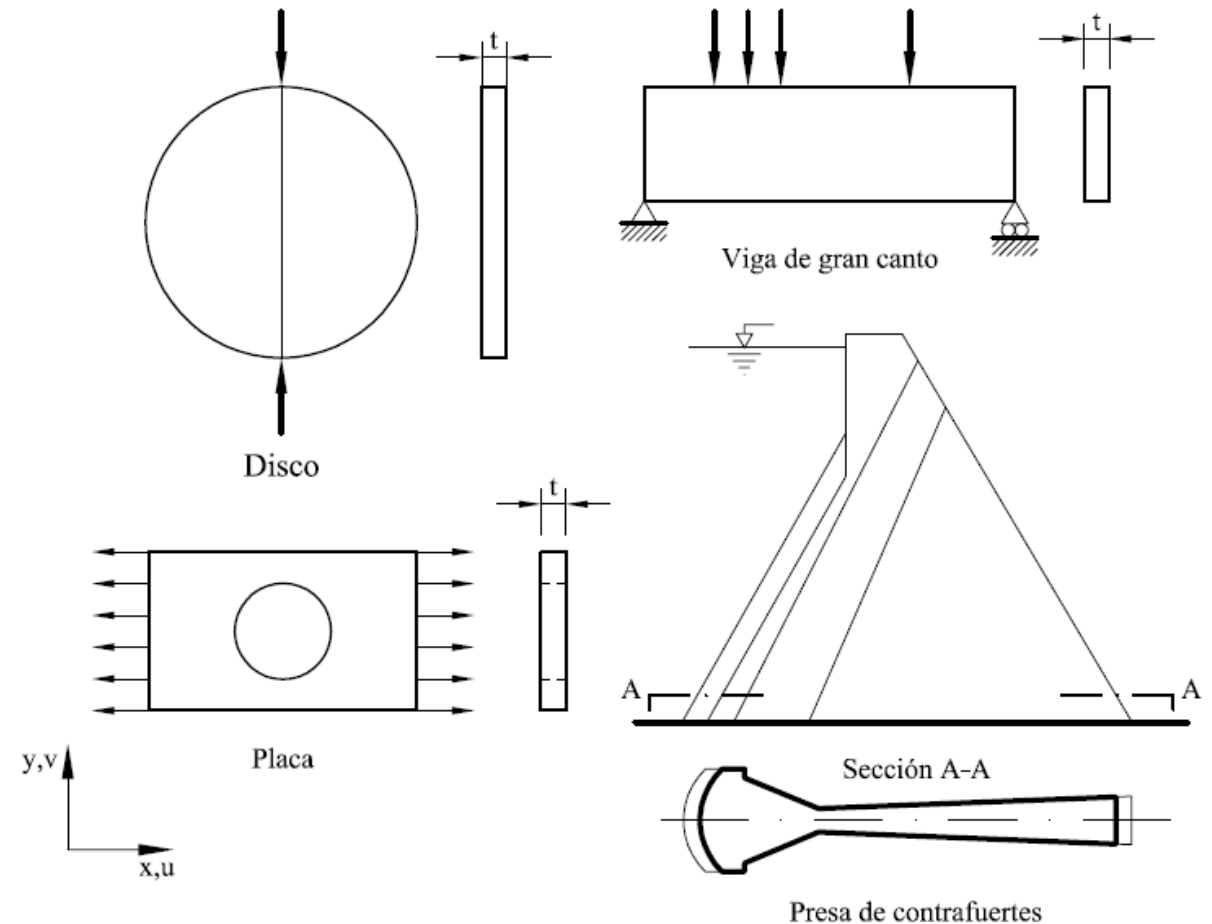
INTRODUCCION

En esta parte se aplica el método de los elementos finitos al análisis de *estructuras bidimensionales* que son aquellas en las que todos sus puntos se encuentran en un *estado de esfuerzos plano* o un *estado de deformaciones plano*. A una estructura le corresponde un estado de esfuerzos plano cuando una de sus dimensiones (ancho o espesor) es mucho menor que las otras dos y las cargas están aplicadas en su plano medio. Son ejemplos de estructuras bidimensionales con estado de esfuerzos plano las vigas de gran canto (Fig. 5.1) y las placas con cargas en su plano medio (Fig. 5.1 b).



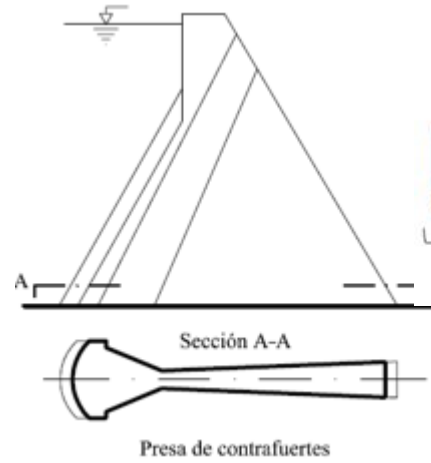
Ejemplos de tensión plana

Fig



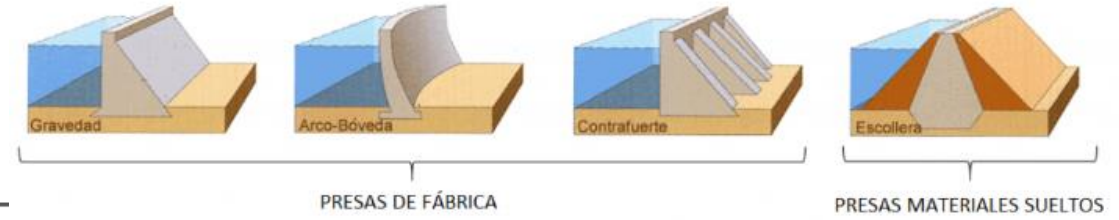


INTRODUCCION



Presa de Glen Canyon

Ejemplos de tensión plana



Presa de Roselend (Francia)

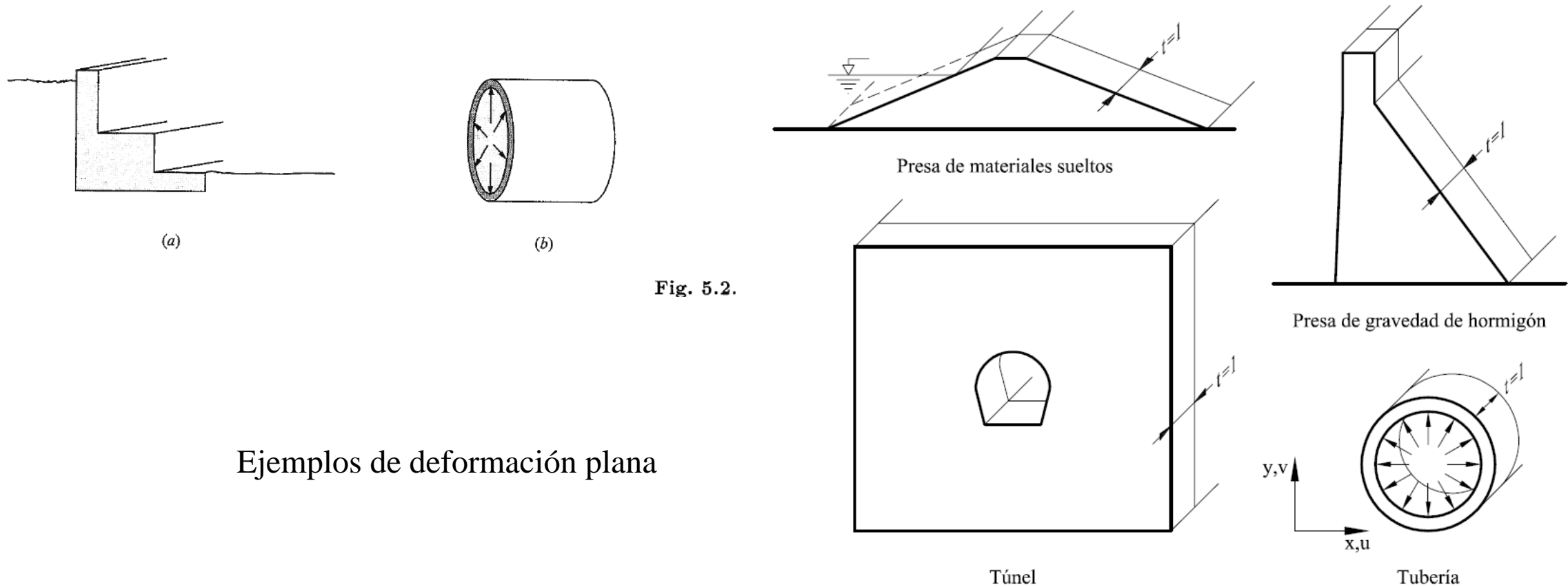


Presa de Val de La Mare

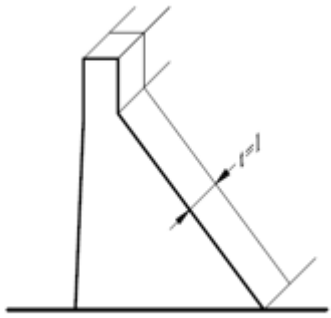


Presa El Tunal (Salta)

A una estructura bidimensional le corresponde un estado de deformaciones plano cuando una de sus dimensiones (longitud) es mucho mayor que las otras dos, estando las cargas aplicadas perpendicularmente al eje de la estructura y distribuidas uniformemente en toda la longitud de la estructura. Son ejemplos de estructuras bidimensionales con estado de deformaciones plano los muros de contención (Fig. 5.2a) y las tuberías sometidas a presión (Fig. 5.2b).



INTRODUCCION

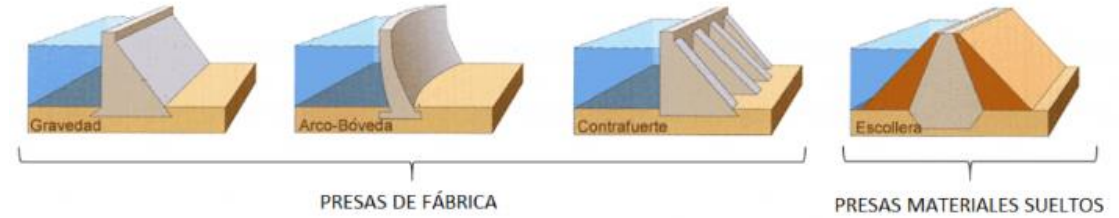


Presa de gravedad de hormigón



Represa Willow Creek Dam en Oregon,

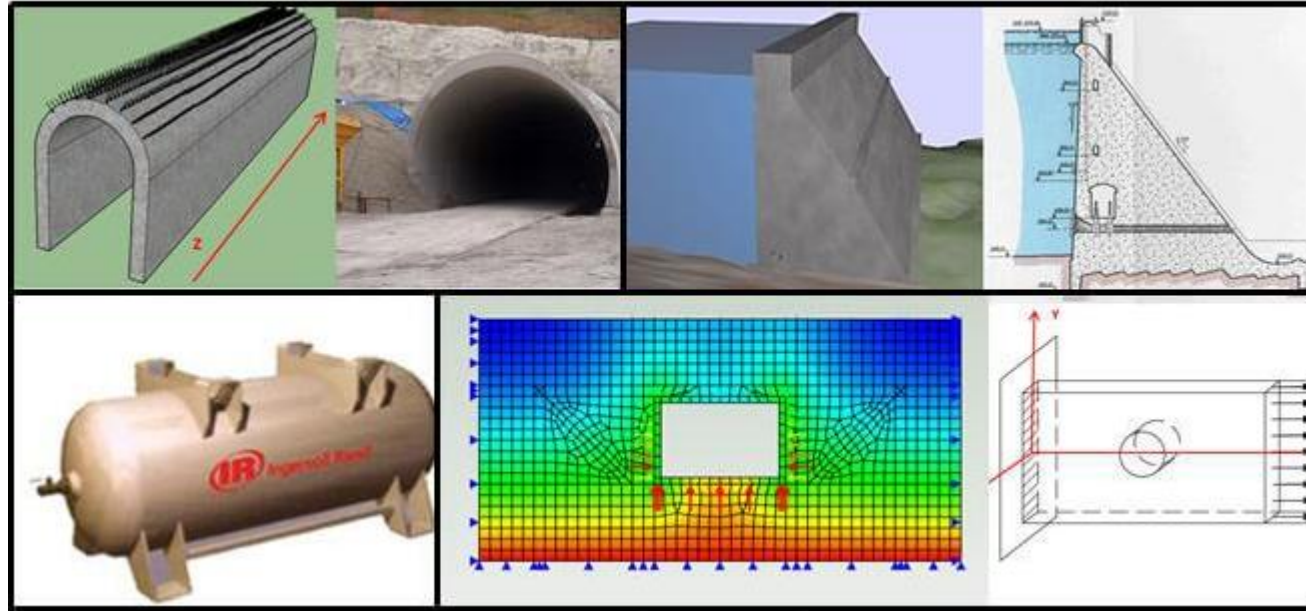
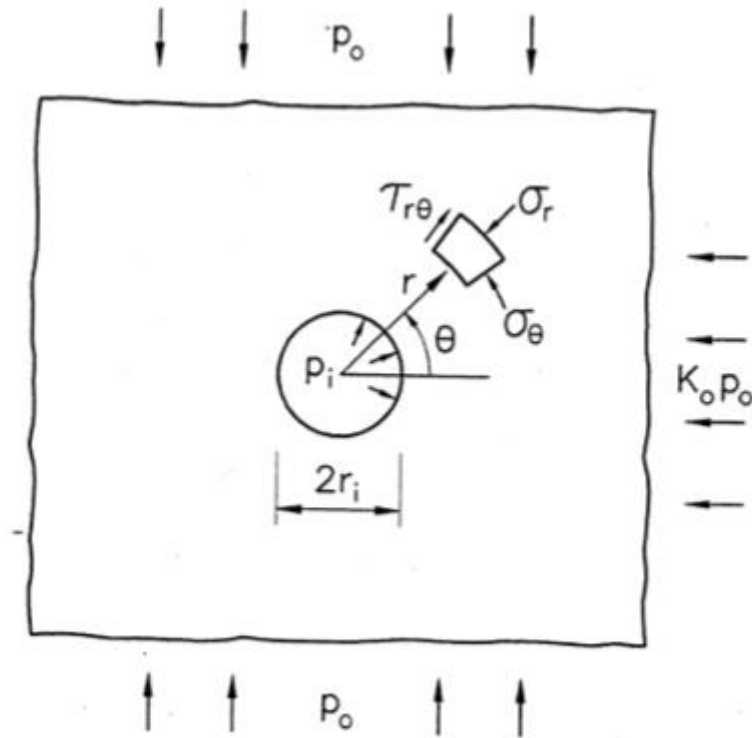
Ejemplos deformación plana



Represa Piedra del Águila

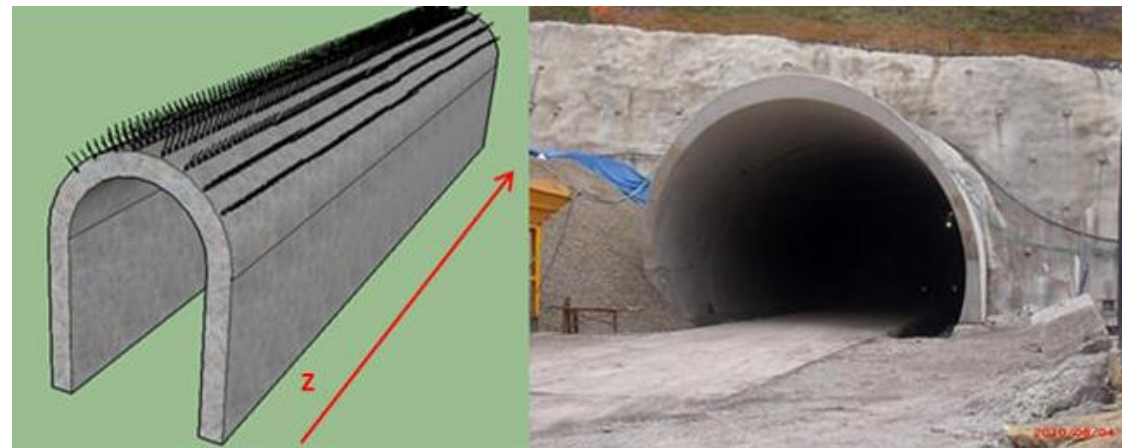
INTRODUCCION

Ejemplos tensión y deformación plana



Estado tensional alrededor de una excavación,

Por deformación plana



Lo que hacemos en estos casos es reducir las ecuaciones de la Teoría de la Elasticidad al caso bidimensional y, a continuación, se discretizan las estructuras bidimensionales utilizando **elementos finitos lagrangianos** como el elemento triangular de tres nodos y el elemento rectangular de cuatro nodos.

ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL

Vectores de esfuerzos y de deformaciones

Consideraremos que el plano correspondiente a un estado de esfuerzos plano o a un estado de deformaciones plano sea el plano coordenado XY . En un estado de esfuerzos plano (Fig. 5.3), los esfuerzos actúan en el plano XY y son nulos en la dirección Z , es decir,

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

En este caso

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0,$$

pero las deformaciones ε_z no son nulas, siendo su valor, según (1.5),

$$\varepsilon_z = -\nu (\sigma_x + \sigma_y) / E.$$

Asimismo, en un estado de deformaciones plano (Fig. 5.4), las deformaciones son nulas en la dirección Z , es decir,

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0,$$

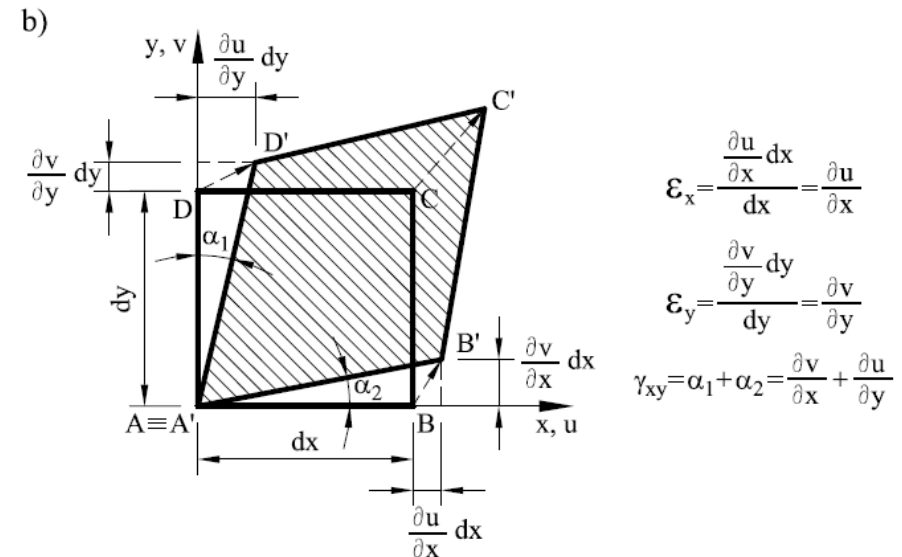
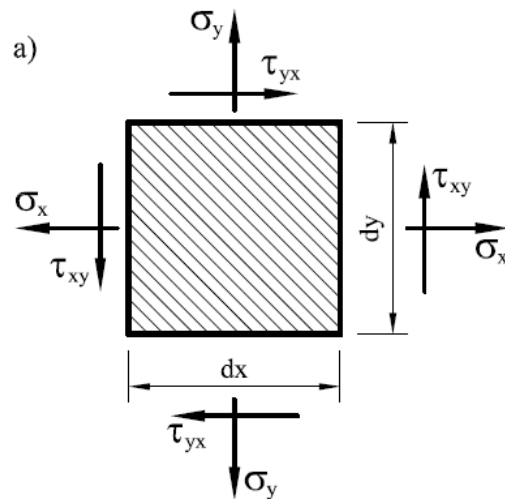
pero los esfuerzos σ_z no son nulos, siendo su valor, según (1.6) $\sigma_z = \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y)$

Tanto en un caso como en el otro se verifica que:

$$\sigma_z \cdot \epsilon_z = 0$$

Por ello, la influencia de ϵ_z es nula al aplicar el **teorema de los trabajos virtuales** (1.19) a una estructura con un estado de esfuerzos plano. Igualmente es nula la influencia de σ_z en una estructura con un estado de deformaciones plano. Por ambas razones, los vectores de esfuerzos y de deformaciones que influyen en el comportamiento de una estructura bidimensional son

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$



Ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio de un paralelepípedo elemental (1.2), correspondientes a una estructura bidimensional (Fig. 5.5), se reducen a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + q_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + q_y &= 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

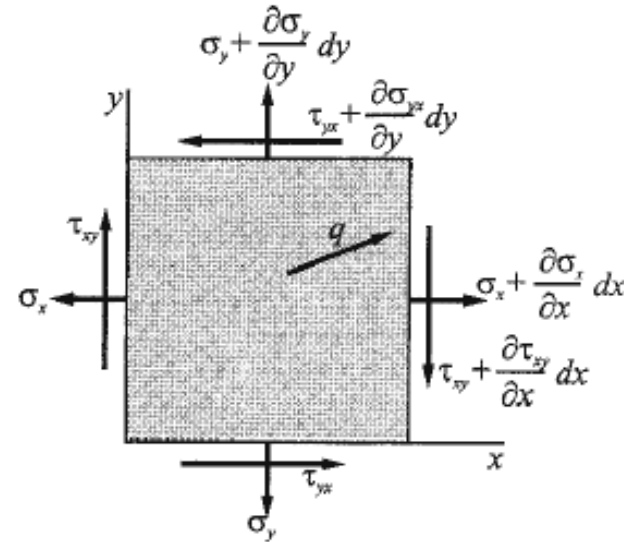


Fig. 5.5.

Relaciones esfuerzos-deformaciones

Las relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones pueden expresarse en la forma matricial (1.7)

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (5.3)$$

donde **[D]** es la *matriz esfuerzos-deformaciones* o *matriz constitutiva*, definida por

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{vmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{vmatrix} \quad (5.4)$$

En un estado de esfuerzos plano, los esfuerzos actúan en el plano XY y son nulos en la dirección Z , es decir,

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0.$$

En este caso las deformaciones ε_z no son nulas, por lo que sustituyendo su valor $\varepsilon_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)/E$

en la ecuación matricial esfuerzos-deformaciones (5.3), resulta

$$\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix}, \quad (5.5)$$

siendo en este caso la matriz constitutiva:

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix}. \quad (5.6)$$

En un estado de deformaciones plano, *las deformaciones* son nulas en la dirección Z, es decir

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Eliminando en la matriz (5.4) las filas y columnas 3, 5, y 6, se obtiene la matriz constitutiva correspondiente a este caso

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{vmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{vmatrix} \quad (5.7)$$

por lo que la ecuación matricial esfuerzos-deformaciones (5.3) se reduce a:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{vmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix}. \quad (5.8)$$

Las expresiones (5.6) y (5.7) de la matriz constitutiva de un estado de esfuerzos plano o de un estado de deformaciones plano pueden englobarse en la expresión única:

$$[\mathbf{D}] = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{vmatrix}, \quad (5.9)$$

siendo

Estado de esfuerzos plano Estado de deformaciones plano

$$\begin{array}{lll} d_{11} = d_{22} & \frac{E}{1 - \nu^2} & \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ d_{12} = d_{21} & \frac{E\nu}{1 - \nu^2} & \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ d_{33} & \frac{E}{2(1 + \nu)} = G & \frac{E}{2(1 + \nu)} = G \end{array} \quad (5.10)$$

Relaciones deformaciones-desplazamientos

En un estado de esfuerzos plano o de deformaciones plano las componentes del vector de deformaciones que influyen en el comportamiento de una estructura bidimensional son ε_x , ε_y , γ_{xy}

Por esta razón, las relaciones entre las deformaciones y los desplazamientos (1.11) que constituyen las *ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones* se reducen a

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (5.11)$$

siendo $u(x, y)$, $v(x, y)$, las componentes del desplazamiento del punto considerado.

Estas relaciones se pueden expresar matricialmente en la forma

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix}, \quad (5.12)$$

es decir

$$\{\epsilon\} = [\boldsymbol{\partial}] \{\mathbf{u}\}, \quad (5.13)$$

siendo $[\boldsymbol{\partial}]$ el operador lineal

$$[\boldsymbol{\partial}] = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix} \quad (5.14)$$

y $\{\mathbf{u}\}$ el vector de desplazamientos

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix}. \quad (5.15)$$

Relaciones esfuerzos - desplazamientos

Sustituyendo (5.13) en (5.3) se obtienen las relaciones entre esfuerzos y desplazamientos

$$\{\sigma\} = [D] [\partial] \{u\} . \quad (5.16)$$

En un estado de esfuerzos plano

$$\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix} . \quad (5.17a)$$

y en un estado de deformaciones plano

$$\begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{vmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix} . \quad (5.17b)$$

Las ecuaciones (5.17a) y (5.17b) que relacionan los esfuerzos con los desplazamientos constituyen las *ecuaciones diferenciales de gobierno* de una estructura bidimensional, con estado de esfuerzos plano y con estado de deformaciones plano, respectivamente.

OBTENCION DEL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Tal como vimos el MEF es un procedimiento más para hallar la solución de las ecuaciones diferenciales y sus condiciones de contorno que expresan el comportamiento de un problema físico. Para su implementación, tales ecuaciones deben llevarse de su forma diferencial original a una forma integral equivalente a la diferencial. En lo que sigue obtendremos dicha forma integral a través del método de residuos ponderados, mostrando la analogía del proceso con el principio de los trabajos virtuales. Siguiendo la metodología hasta ahora empleada, la forma diferencial para problemas de elasticidad bidimensional está dada por:

Ecuaciones de equilibrio que gobiernan el problema

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \text{ (equilibrio según direcc. } x) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y &= 0 \text{ (equilibrio según direcc. } y) \end{aligned} \right] \text{ en } \Omega \quad (9.20)$$

donde b_x , b_y son las fuerzas másicas según las direcciones x e y , respectivamente (Figura 9.4).

Condiciones de contorno

El MRP se aplica a las condiciones de equilibrio en el dominio y en el contorno.

- Contorno donde las fuerzas están prescritas

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y &= \bar{t}_x \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y &= \bar{t}_y \end{aligned} \right] \text{ en } \Gamma_t \quad (9.21)$$

donde n_x, n_y son los cosenos directos y \bar{t}_x, \bar{t}_y las fuerzas de superficie que actúan sobre el contorno Γ_t (Figura 9.4).

- Contorno donde las variables están prescritas

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{en } \Gamma_u \quad (9.22)$$

Obsérvese la analogía con los planteamientos hechos al resolver la ecuación de Poisson.

Ecuaciones de equilibrio interno

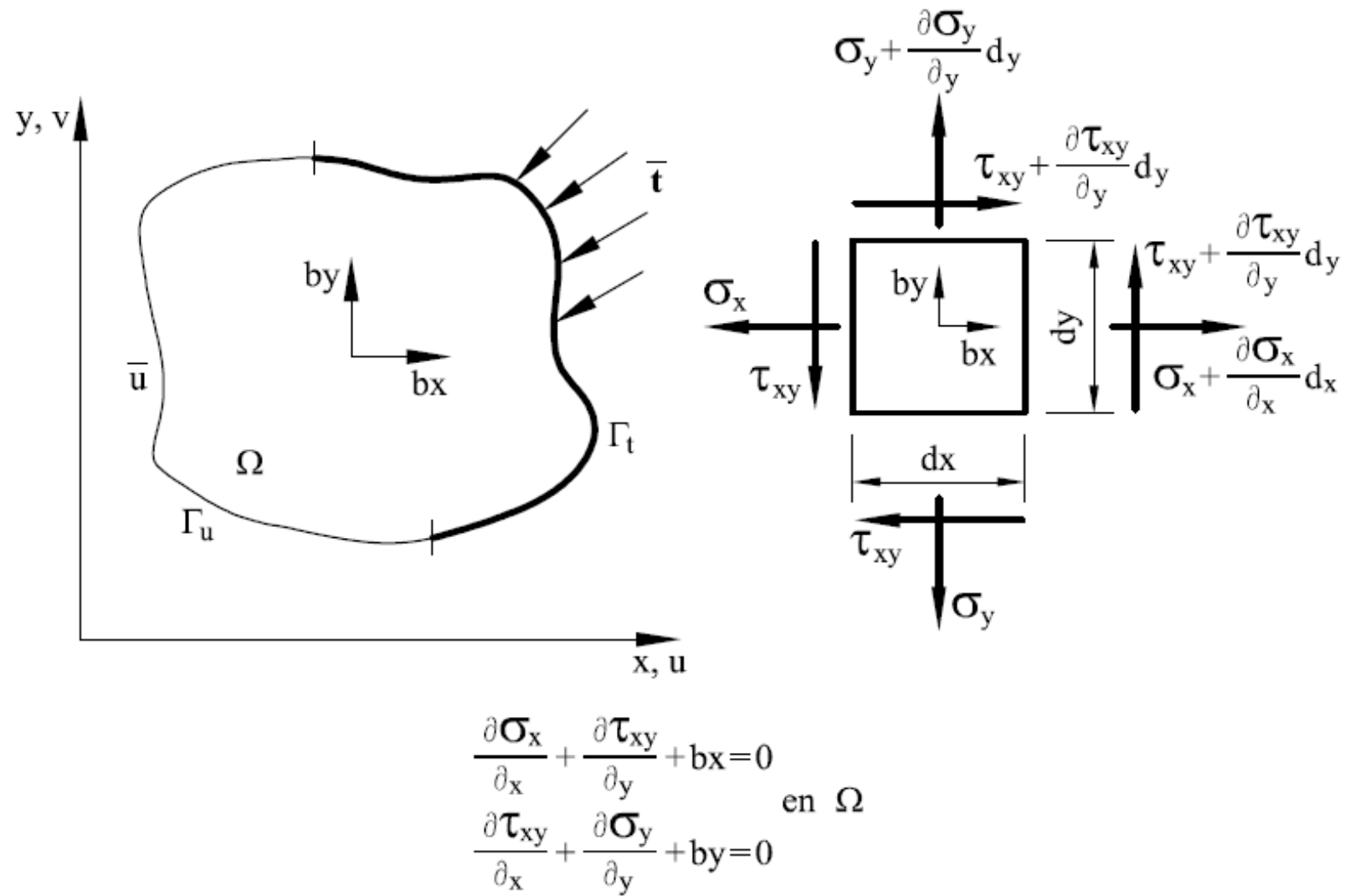


Figura 9.4: Equilibrio interno y en el contorno en un solido bidimensional

Ecuaciones de equilibrio en el contorno

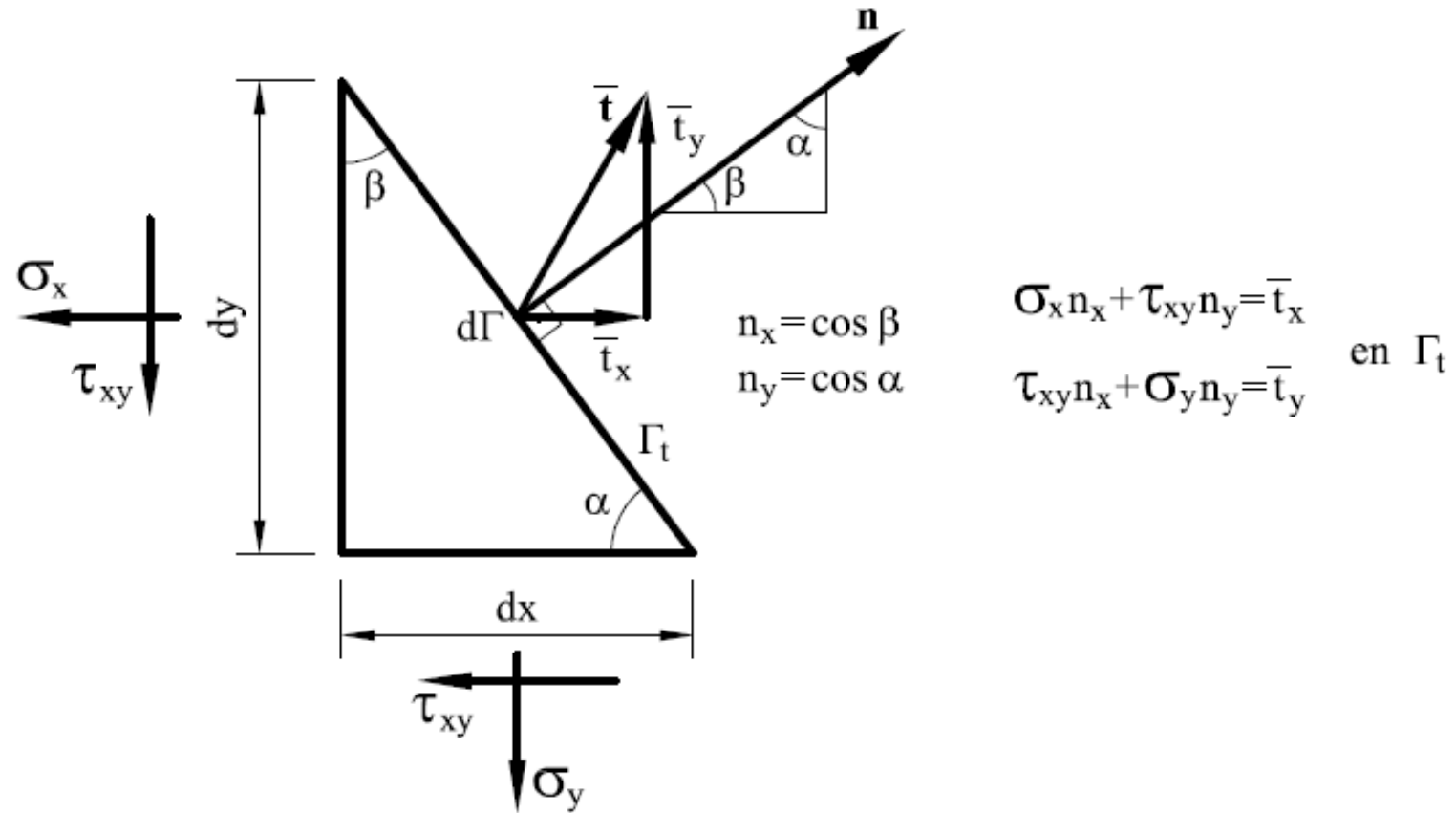


Figura 9.4: Equilibrio interno y en el contorno en un solido bidimensional

Obtendremos la *forma integral* equivalente recurriendo al metodo de los residuos ponderados. Para ello hagamos

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left[W_1(x, y) \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x \right) + W_2(x, y) \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + b_y \right) \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_t} [W_3(x, y)(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y - \bar{t}_x) + W_4(x, y)(\sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x - \bar{t}_y)] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (9.23)$$

Las funciones de peso $W_i(x, y)$ **se interpretan ahora como desplazamientos de los puntos del cuerpo**. Dado que estas funciones pueden ser cualesquiera, dichos desplazamientos se denominan desplazamientos virtuales. Así

$$W_1 = \delta u; \quad W_3 = -W_1 = -\delta u \quad (9.24)$$

$$W_2 = \delta v; \quad W_4 = -W_2 = -\delta v$$

Como condición adicional se impone que los desplazamientos virtuales satisfagan las condiciones de contorno sobre Γ_u , es decir $\delta u - \bar{\delta u} = 0$ sobre Γ_u . Integremos ahora por partes la primera integral de (9.23)

$$\iint_{\Omega} \delta u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) dx dy = \int dy \int \delta u \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx = \quad (9.25)$$

$$= - \iint_{\Omega} \sigma_x \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} dx dy + \int_{\Gamma=\Gamma_t+\Gamma_u} \delta u \sigma_x dy$$

← Término en la frontera

donde, para la aplicación de la conocida formula de integración por partes, se ha tomado

$$\left. \begin{aligned} a &= \delta u(x, y) \Rightarrow da = \frac{\partial}{\partial x}(\delta u)dx \\ db &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx \Rightarrow b = \sigma_x \end{aligned} \right| \quad (9.26)$$

Los restantes términos se obtienen en modo análogo. Sustituyendo las ecs. (9.24) en la expresión resultante, se tiene

$$\begin{aligned} & - \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\delta u)\sigma_x + \frac{\partial}{\partial y}(\delta v)\sigma_y + \left(\frac{\partial}{\partial y}(\delta u) + \frac{\partial}{\partial x}(\delta v) \right) \tau_{xy} \right] dxdy + \\ & + \int_{\Gamma=\Gamma_t+\Gamma_u} [\delta u(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) + \delta v(\sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x)] d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma_t} [\delta u(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) + \delta v(\sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x)] d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_t} (\delta u \bar{t}_x + \delta v \bar{t}_y) d\Gamma + \iint_{\Omega} (\delta u b_x + \delta v b_y) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (9.27)$$

Se supone que los desplazamientos virtuales satisfacen las condiciones de contorno cinemáticas en desplazamientos.

donde en la segunda de las integrales se ha introducido (Figura 9.4)

$$\begin{aligned} dx &= d\Gamma \cos \alpha = d\Gamma n_y \\ dy &= d\Gamma \cos \beta = d\Gamma n_x \end{aligned} \quad (9.28)$$

Simplificando términos y ordenando, queda

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\delta u)}_{\delta \varepsilon_x} \sigma_x + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(\delta v)}_{\delta \varepsilon_y} \sigma_y + \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}(\delta v) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta u) \right)}_{\delta \gamma_{xy}} \tau_{xy} \right] dx dy = \\ & = \iint_{\Omega} (\delta u b_x + \delta v b_y) d\Omega + \int_{\Gamma_t} [\delta u \bar{t}_x + \delta v \bar{t}_y] d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_u} [\delta u (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) + \delta v (\sigma_y n_y + \sigma_x n_x)] d\Gamma \end{aligned} \quad (9.29)$$

Normalmente, en mecánica de sólidos, las condiciones de contorno (9.22) implican desplazamientos prescritos nulos (movimientos impedidos en los apoyos)

$$\bar{u} = 0 \rightarrow u = 0 \rightarrow \delta u = 0$$

$$\bar{v} = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow \delta v = 0$$

con lo que la última de las integrales del segundo miembro de (9.29) desaparece, al ser nulos los desplazamientos virtuales sobre Γ_u . Por otra parte

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\delta u) &= \delta \varepsilon_x \\ \frac{\partial}{\partial y}(\delta v) &= \delta \varepsilon_y \\ \frac{\partial}{\partial x}(\delta v) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta u) &= \delta \gamma_{xy} \end{aligned} \tag{9.30}$$

Así, pues, considerando movimientos impedidos en los apoyos, se tiene

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} (\delta \varepsilon_x \sigma_x + \delta \varepsilon_y \sigma_y + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) dx dy = \\
& = \iint_{\Omega} (\delta u b_x + \delta v b_y) dx dy + \int_{\Gamma_t} (\delta u \bar{t}_x + \delta v \bar{t}_y) d\Gamma
\end{aligned}
\tag{9.31}$$

que es la forma usual del principio de los trabajos virtuales (PTV). Puede demostrarse que el PTV es condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un sólido. Por ello el PTV se utiliza como punto de partida para el cálculo de estructuras por el MEF.

El PTV expresa el equilibrio entre el trabajo de deformación de las tensiones y de las fuerzas exteriores.

Se define

$$\begin{aligned}
\delta \varepsilon &= \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_x \\ \delta \varepsilon_y \\ \delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix} & \delta \mathbf{u} &= \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{Bmatrix} \\
\boldsymbol{\sigma} &= \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} & \mathbf{b} &= \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} & \mathbf{t} &= \begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{9.32}$$

donde δ_ε es el vector de deformaciones virtuales, δ_u el vector de desplazamientos virtuales, σ el vector de tensiones, \mathbf{b} el vector de las fuerzas másicas y \mathbf{t} el vector de fuerzas de contorno o superficie. La expresión matricial del PTV se escribe como

$$\boxed{\iint_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega = \iint_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma} \quad (9.33)$$

Pasando todo al primer miembro, se obtiene la expresión del principio de la mínima energía potencial, la cual de hecho es también una manifestación de equilibrio

$$\boxed{\delta \pi = \iint_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega - \iint_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0} \quad (9.34)$$

siendo π el funcional de energía potencial total. La obtención de π solo es sencilla en problemas lineales.

Ello no invalida la generalidad de la expresión (9.34) que es válida en problemas lineales y no lineales.

Por consiguiente el PTV es válido para problemas con pequeños y grandes desplazamientos (linealidad y no linealidad geométrica), para relaciones tensiones-deformaciones lineales o no lineales (linealidad y no linealidad mecánica), sea en régimen estático o dinámico. Es el más general de los principios de equilibrio, de ahí su importancia.

METODO DE ELEMENTOS FINITOS

APLICACIÓN AL CALCULO ESTRUCTURAL

ELEMENTO TRIANGULAR DE TRES NODOS

FUNCIONES DE DESPLAZAMIENTOS

Consideremos como elemento bidimensional un *elemento triangular de tres nodos*, es decir, un elemento triangular con un nodo en cada vértice y desplazamientos nodales $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$ (Fig. 5.6). En este caso, el vector de desplazamientos del elemento finito $\{\mathbf{u}_e\}$ puede expresarse aproximadamente por las funciones de desplazamientos

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad (5.18)$$

$$v(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y,$$

que son polinomios que tienen un número total de parámetros α_i igual a 6, que es el número de grados de libertad del elemento. Las funciones de desplazamientos $u(x, y), v(x, y)$ son polinomios completos de primer grado y, por ello, el elemento considerado es un *elemento lineal*. Dichas funciones pueden expresarse en la forma matricial

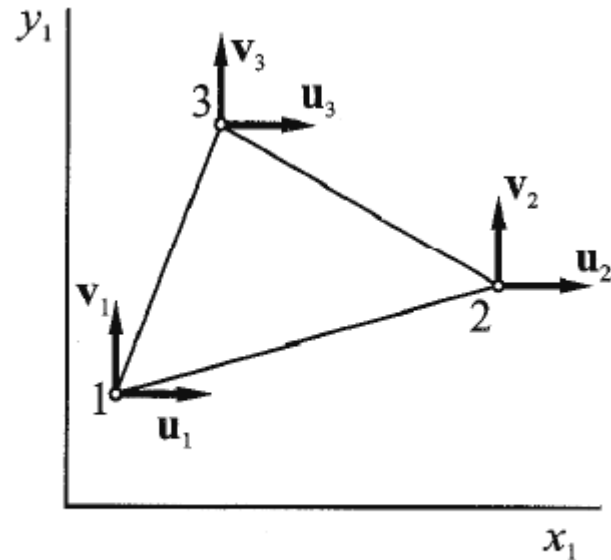


Fig. 5.6.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}. \quad (5.19)$$

es decir

$$\{\mathbf{u}_e\} = [\mathbf{P}] \{\boldsymbol{\alpha}\}, \quad (5.20)$$

siendo

$$\{\mathbf{u}_e\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad (5.21)$$

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & x & y \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

$$\{\boldsymbol{\alpha}\} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6]^T. \quad (5.23)$$

Los seis coeficientes $\boldsymbol{\alpha}_i$ se hallan particularizando en la ecuación (5.19) los desplazamientos u , v en los tres nodos, obteniéndose

$$\{\boldsymbol{\delta}_e\} = [\mathbf{C}] \{\boldsymbol{\alpha}\}, \quad (5.24)$$

donde $\{\boldsymbol{\delta}_e\}$ es el vector de los desplazamientos nodales

$$\{\boldsymbol{\delta}_e\} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3]^T \quad (5.25)$$

y $[\mathbf{C}]$ la matriz

$$[\mathbf{C}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ \hline 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ \hline 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{array} \right] \quad (5.26)$$

De la ecuación (5.24), se deduce

$$\{\boldsymbol{\alpha}\} = [\mathbf{C}]^{-1} \{\boldsymbol{\delta}_e\}, \quad (5.27)$$

que sustituida en (5.20), determina la función de desplazamientos

$$\{\mathbf{u}_e\} = [\mathbf{P}] [\mathbf{C}]^{-1} \{\boldsymbol{\delta}_e\}. \quad (5.28)$$

Comparando esta ecuación con

$$\{\mathbf{u}_e\} = [\mathbf{N}_e] \{\boldsymbol{\delta}_e\}, \quad (5.29)$$

se obtiene la matriz de interpolación del elemento

$$[\mathbf{N}_e] = [\mathbf{P}] [\mathbf{C}]^{-1}, \quad (5.30)$$

que determina las funciones de interpolación $N_i(x, y)$. Ahora bien, los desplazamientos $u(x, y)$ tienen que depender únicamente de los desplazamientos nodales u_1, u_2, u_3 . De la misma forma, los desplazamientos $v(x, y)$ dependerán solamente de los desplazamientos nodales v_1, v_2, v_3 y, además, ambas dependencias han de ser iguales. En consecuencia, al utilizar las funciones de interpolación $N_i(x, y)$, las funciones de desplazamientos del elemento

$$u(x, y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3, \quad (5.31)$$

$$v(x, y) = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3,$$

es decir

$$u(x, y) = N_1 u_1 + 0 \cdot v_1 + N_2 u_2 + 0 \cdot v_2 + N_3 u_3 + 0 \cdot v_3 ,$$

$$v(x, y) = 0 \cdot u_1 + N_1 v_1 + 0 \cdot u_2 + N_2 v_2 + 0 \cdot u_3 + N_3 v_3 ,$$

Estas expresiones equivalen a

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

según la cual, la matriz de interpolación del elemento $[N_e]$ es

$$[\mathbf{N}_e] = \begin{vmatrix} N_1 & 0 & | & N_2 & 0 & | & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & | & 0 & N_2 & | & 0 & N_3 \end{vmatrix} \quad (5.33)$$

y las submatrices de interpolación son

$$[\mathbf{N}_1] = \begin{vmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{vmatrix}, \quad [\mathbf{N}_2] = \begin{vmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{vmatrix}, \quad [\mathbf{N}_3] = \begin{vmatrix} N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{vmatrix}, \quad (5.34)$$

De la ecuación (5.30) se deducen las funciones de interpolación N_i del elemento triangular lineal

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{x_2 y_3 - y_2 x_3 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y}{2A_e}, \\ N_2 &= \frac{x_3 y_1 - y_3 x_1 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y}{2A_e}, \\ N_3 &= \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y}{2A_e}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

donde A_e es el área del elemento triangular

$$A_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left[x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) \right], \quad (5.36)$$

que resulta ser negativa cuando los nodos del elemento están numerados en el sentido de las agujas del reloj.

Las funciones de interpolación N_i pueden expresarse en la forma

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y, \quad (5.37)$$

siendo

$$a_i = \frac{x_j y_k - y_j x_k}{2A_e}, \quad b_i = \frac{y_j - y_k}{2A_e}, \quad c_i = \frac{x_k - x_j}{2A_e}. \quad (5.38)$$

Las ecuaciones (5.35) equivalen a

$$N_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}, \quad N_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}, \quad N_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} \quad (5.39)$$

y comparando (5.39) y (1.45) se comprueba que

$$N_1 = \xi_1, \quad N_2 = \xi_2, \quad N_3 = \xi_3, \quad (5.40)$$

lo que permite establecer que *las funciones de forma del elemento triangular lineal coinciden con las correspondientes coordenadas de área.*

Las funciones de interpolación N_i tienen valor unidad en el nodo i y valor cero en los restantes nodos y, por ello, son polinomios lagrangianos y, en consecuencia, el elemento triangular de tres nodos es un *elemento lagrangiano*. También se verifica que $N_1 + N_2 + N_3 = 1$ en cualquier punto del elemento. Al igual que en el caso de los elementos unidimensionales, la función N_i determina los desplazamientos de los puntos del elemento cuando se le da un valor unidad al desplazamiento del nodo i manteniendo nulos los desplazamientos de los otros nodos (Fig. 5.7). También en este caso, la representación de la función de interpolación N_i coincide con la forma que adquiere el elemento al disponer los anteriores desplazamientos en dirección perpendicular al elemento. Por esta razón, a la función N_i se le llama también *función de forma* y a la matriz $[N_e]$ *matriz de forma*.

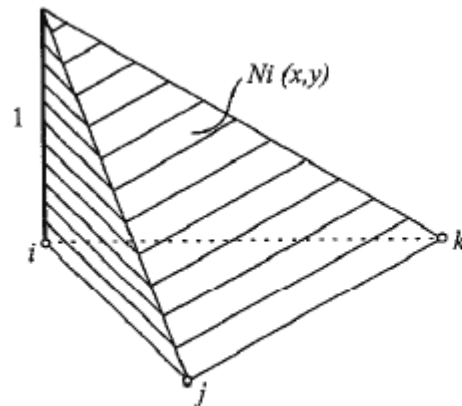


Fig. 5.7.

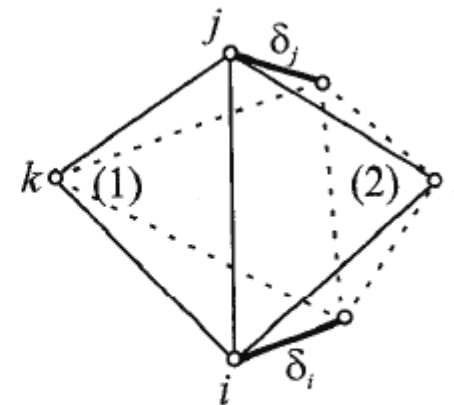


Fig. 5.8.

Las funciones de desplazamientos (5.18) y, por tanto, también su otra forma de expresión (5.29), cumplen la condición de isotropía por ser las funciones de desplazamientos polinomios cuyos términos son simétricos respecto a las coordenadas x , y completando la segunda fila del triángulo de Pascal. Además al ser polinomios, son funciones uniformes y continuas y, por ello, cualquier punto del interior del elemento satisface la condición de compatibilidad. Y también satisfacen la condición de compatibilidad interelemental (Fig. 5.8), ya que si los desplazamientos δ_i, δ_j de los nodos comunes i, j son iguales en los dos elementos, como los desplazamientos de los puntos del borde varían linealmente, no se puede producir ningún salto o discontinuidad en los desplazamientos de dichos puntos.

Veamos un ejemplo como calcular las funciones de forma y como se utilizan dentro de un elemento para determinar valores primarios o secundarios en cualquier punto.

Ejemplo 5.1. Un elemento finito triangular tiene un nodo en cada vértice (Fig. 5.9). Conociendo el vector de desplazamientos nodales del elemento, determinar el vector de desplazamientos del punto A

$$\text{Datos: } x_A = 6 \text{ cm, } y_A = 4 \text{ cm, } \{\delta_e\} = [0.2, 0.0, -0.5, 0.1, 0.0, 0.4]^T \text{ (cm).}$$

Solución: Según (5.35), las funciones de interpolación del elemento son

Este ejercicio muestra como interpolar a un punto cualquiera del dominio

$$N_1 = \frac{30 \cdot 40 - 0 \cdot 0 + (0 - 40)x + (0 - 30)y}{30 \cdot 40} = 1 - 0,03333x - 0,025y,$$

$$N_2 = \frac{0 \cdot 0 - 40 \cdot 0 + (40 - 0)x + (0 - 0)y}{30 \cdot 40} = 0,03333x,$$

$$N_3 = \frac{0 \cdot 0 - 0 \cdot 30 + (0 - 0)x + (30 - 0)y}{30 \cdot 40} = 0,025y.$$

Los valores de las funciones de interpolación en el punto A son

$$N_1^A = 1 - 0,0333 \cdot 6 - 0,025 \cdot 4 = 0,7,$$

$$N_2^A = 0,03333 \cdot 6 = 0,2,$$

$$N_3^A = 0,025 \cdot 4 = 0,1$$

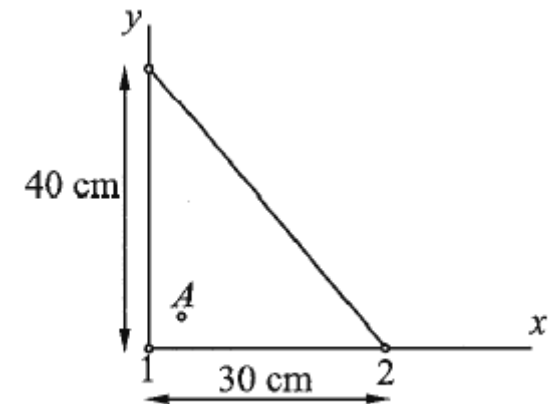


Fig. 5.9.

y, teniendo en cuenta (5.32), se halla el vector de desplazamientos del punto A

$$\{\mathbf{u}_A\} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0,2 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0,2 & 0 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0,1 \\ 0 \\ 0,4 \end{bmatrix} \quad \text{Operando, se obtiene} \quad \{\mathbf{u}^A\} = \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,06 \end{bmatrix} \text{ (cm)}.$$

MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO

Según (2.31) la ecuación matricial de equilibrio del elemento es

$$[\mathbf{k}_e] \{\delta_e\} = \{\mathbf{F}_e\}, \quad (5.41)$$

siendo $[\mathbf{k}_e]$ la matriz de rigidez del elemento, definida por

$$[\mathbf{k}_e] = \int_{V_e} [\mathbf{B}_e]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_e] dV_e, \quad (5.42)$$

donde $[\mathbf{B}_e]$ es la matriz de deformación del elemento definida, según (2.25), por

$$[\mathbf{B}_e] = [\partial] [\mathbf{N}_e]. \quad (5.43)$$

Teniendo en cuenta (5.14) y (5.33)

$$[\mathbf{B}_e] = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{vmatrix},$$

es decir

$$[\mathbf{B}_e] = \begin{vmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{vmatrix} \quad (5.44)$$

Derivando las funciones de interpolación (5.35), se obtiene la matriz de deformación del elemento triangular de tres nodos

$$[\mathbf{B}_e] = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{vmatrix}, \quad (5.45)$$

que es una matriz de 3 x 6 que tiene tantas submatrices $[B_i]$ de 3 x 2 elementos como nodos tiene el elemento, es decir 3. Los términos de la matriz de deformación $[\mathbf{B}_e]$ son constantes que dependen de las coordenadas x , y de los tres nodos. La matriz de deformación $[\mathbf{B}_e]$ equivale a

$$[\mathbf{B}_e] = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \mathbf{B}_3], \quad (5.46)$$

Sustituyendo en (5.42) la matriz de deformación $[\mathbf{B}_e]$ (5.45), la matriz constitutiva $[\mathbf{D}]$, (5.6) para el estado de esfuerzos plano y (5.7) para el estado de deformaciones plano, y $dV_e = t dA_e$, siendo t el espesor del elemento, se obtiene la matriz de rigidez del elemento triangular de tres nodos

$$[\mathbf{k}_e]_{6 \times 6} = \int_{A_e} [\mathbf{B}_e]^T_{6 \times 3} [\mathbf{D}]_{3 \times 3} [\mathbf{B}_e]_{3 \times 6} t dA_e, \quad (5.47)$$

De esta ecuación se deducen las submatrices de rigidez $[k_{ij}^e]$ del elemento

$$[\mathbf{k}_{ij}^{(e)}]_{2 \times 2} = \int_{A_e} [\mathbf{B}_i]^T_{2 \times 3} [\mathbf{D}]_{3 \times 3} [\mathbf{B}_j]_{3 \times 2} t dA_e. \quad (5.48)$$

Si el espesor t del elemento es constante, las expresiones de la matriz de rigidez del elemento y de sus submatrices se reducen a

$$[\mathbf{k}_e] = t A_e [\mathbf{B}_e]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_e] \quad (5.49)$$

y

$$[\mathbf{k}_{ij}^{(e)}] = t A_e [\mathbf{B}_i]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_j]. \quad (5.50)$$

VEREMOS VARIOS EJEMPLOS CON LAS HERRAMIENTAS PARA EL CALCULO DE ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL

COMO LO PROGRAMAMOS

EJEMPLO: UNA PLACA CON TENSION PLANA

Placa en Tensión Plana

1. Descripción del Problema

- Una placa rectangular de dimensiones $L \times H$ está sometida a una carga uniaxial en su borde derecho.
- Suposiciones:
 - **Material:** Isotrópico y linealmente elástico.
 - **Condiciones:** Tensión plana.
- Propiedades del material:
 - Módulo de Young (E)
 - Coeficiente de Poisson ν

2. Formulación

- El problema se formula en términos de desplazamientos u y v en el plano XY
- La matriz de rigidez de cada elemento triangular se calcula mediante

$$\mathbf{K}_e = t \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$$

donde:

- t : espesor de la placa.
- \mathbf{B} : matriz de deformación-desplazamiento para el elemento triangular.
- \mathbf{D} : matriz constitutiva de elasticidad en tensión plana.

El Código deberá tener:

- 1. Datos y Parámetros del problema:** Se definen propiedades como E , ν , y las dimensiones de la placa.
- 2. Definición de nodos y elementos:** Para simplificar, el ejemplo usa una placa con solo dos elementos triangulares.
- 3. Ensamblaje de la matriz de rigidez global:** Para cada elemento, se calculan matrices locales de rigidez y se ensamblan en la matriz global.
- 4. Condiciones de contorno:** Fijamos los desplazamientos en el borde izquierdo y aplicamos una fuerza en el borde derecho.
- 5. Solución y cálculo de tensiones:** Resolvemos el sistema para los desplazamientos y calculamos las tensiones en cada elemento.