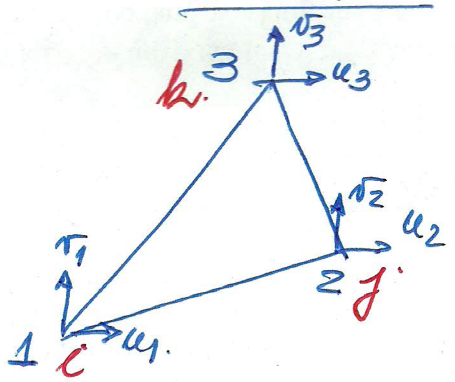
EJEMPLOS

ELEMENTO TRIANGULAR DE DEFORMACION CONSTANTE



Numeración local 1, 2, 3
Sistema global i, j, k.

Los desplazamientos en x e y se pueden interpolar en función de los desplazamientos nodales:
u_i y v_i con $i = 1, 2, 3$.

$$u(x,y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (1)$$
$$v(x,y) = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 .$$

$$N_i(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{en el nodo } i \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{3} N_i = 1.$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{array}\right]}_{\text{Se suele escribir}} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\underset{2\times 6}{\underline{\underline{N}}} = \Big[\underbrace{\underline{\underline{N_1}} \;\; \underline{\underline{N_2}} \;\; \underline{\underline{N_3}}}_{\text{cada } N_i \text{ es de } 2\times 2}\Big]$$

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \qquad \underline{d_1} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \qquad d_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$
$$v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (3)$$

$\Rightarrow$ formando un sistema:

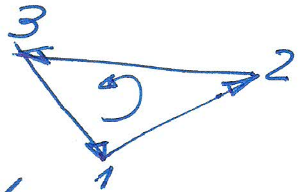
$$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1$$
$$u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2$$
$$u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3$$

Con el mismo sistema para los desplazamientos en la dirección y, es decir los $v_i(x,y)$ determinamos los N_i $\Rightarrow$

$$N_i = \frac{1}{2A}\left[a_i + b_i x + c_i y\right] \quad (4)$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$
$$b_i = y_j - y_k$$
$$c_i = x_k - x_j$$

$i, j, k = 1, 2, 3$ Los subíndices toman cíclicamente los valores 1, 2, 3 (2)



Lo primero que formamos sería los coeficientes

$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$ | $a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3$ | $a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$

$b_1 = y_2 - y_3$ | $b_2 = y_3 - y_1$ | $b_3 = y_1 - y_2$ (5)

$c_1 = x_3 - x_2$ | $c_2 = x_1 - x_3$ | $c_3 = x_2 - x_1$

Armamos la matriz de deformación correspondiente a las funciones de forma adoptadas

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6)$$

de acuerdo con las funciones de forma lineales (4) y los coeficientes (5)

$$\Rightarrow \underset{3\times 6}{\underline{\underline{B}}} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (7)$$

$$\boxed{\underset{3\times 1}{\underline{\varepsilon}} = \underset{3\times 6}{\underline{\underline{B}}} \cdot \underset{6\times 1}{d^{(e)}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underset{6\times 1}{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}}} \quad (8)$$

$\Rightarrow$ Como tenemos funciones de forma lineales (4) implica q' las deformaciones contenidas en el vector $\underline{\varepsilon}$ son constantes de allí el nombre del elemento CST (Constant Strain Triangular)

Suponiendo que su espesor $t \Rightarrow$ constante

Las fuerzas que se encuentran aplicadas o se pueden encontrar son las siguientes:

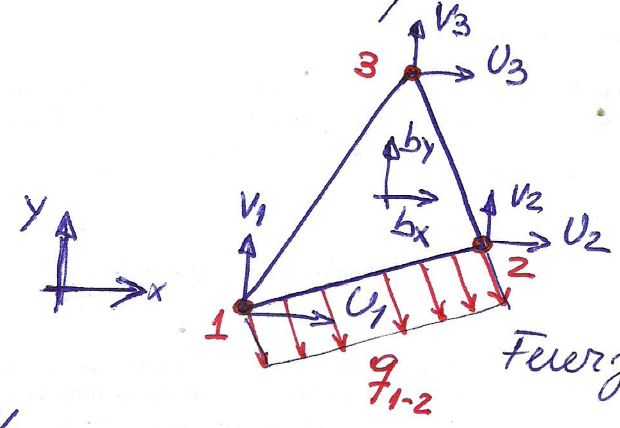
a) Fuerzas másicas concentrados en el centro de gravedad del elemento

$$\underline{b} = [b_x \; b_y]^T$$

b) Fuerzas repartidas en el contorno

$$\underline{q} = [q_x \; q_y]^T$$

c) Fuerzas de equilibrio concentrados en cada nodo U_i; V_i entre los que se incluyen las fuerzas exteriores aplicadas en los nodos.



Fuerzas 1/cada elemento

P.T.V.

$$\underbrace{t\int_A \delta\underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma}\, dA}_{\text{Trabajo Interno}} = \underbrace{t\int_{A_m} \delta\underline{D}(x,y)^T \underline{b}\, dA + \sum_{m=1}^{n} t \oint_{\ell^{(m)}} \delta\underline{D}^{(m)T} \underline{q}^{(m)} ds + \sum_{i=1}^{n} \delta u_i U_i + \sum_{i=1}^{n} \delta v_i V_i}_{\text{Fuerzas x desplazamiento, Trabajo externo}} \qquad (9)$$

$\oint_{\ell^{(m)}}$ integral sobre el lado donde está aplicada la fuerza

$\ell^{(m)}$, $m = 1, 2, 3$ $\quad$ s: variable 1/el lado.

(10)

$$t\int_A \delta\underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma}\, dA = t\int_A \delta\underline{D}(x,y)^T \underline{b}\, dA + \sum_{m=1}^{n} t\oint_{\ell^{(m)}} \delta\underline{\bar{D}}^{(m)T} \underline{q}^{(m)} ds + \delta\underline{d}^{(e)T} \underline{f}_p^{(e)}$$

donde $\delta\underline{d}^{(e)T} = [\delta u_1 \; \delta v_1 \; \delta u_2 \; \delta v_2 \; \delta u_3 \; \delta v_3]$ $\qquad \underline{D}(x,y) = \underline{N}\underline{d}^{(e)}$

$$\underline{f}_p = [U_1 \; V_1 \; U_2 \; V_2 \; U_3 \; V_3]^T$$

$$\boxed{\underline{\varepsilon} = \underline{B}\,\underline{d}^{(e)}} \quad (11)$$

$$\delta \underline{D}(x,y)^T = \delta d^{(e)T} N^T$$

$\delta \bar{D}^{(m)T} = \delta d^{(e)T} N^T|_m$ -> las funciones se evaluan en el lado que corresponda.

$$\delta \underline{\varepsilon}(x,y)^T = \delta d^{(e)T} B^T$$

Matriz constitutiva.

$$\Rightarrow \delta \underline{d}^{(e)T}\left[t\int_A B^T C B \, dA \cdot d^{(e)} - t\int_A N^T \underline{b}\, dA - t\sum_{m=1}^{n} \oint_{\ell^{(m)}} N^T|_m \, q^{(m)} ds - f_p^{(e)} \right] = 0 \quad (12)$$

Si los $\delta d^{(e)}$ son virtuales y arbitrarios

Dada la relación

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}}_{\text{Tensiones}} = \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} \nu & 1 & 0 \\ 1 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\varepsilon}} \quad (13)$$

$$\boxed{\underline{\sigma} = \underline{\underline{C}}\,\underline{\varepsilon}}$$

Si sustituimos (13) en (11) =>

$$\underline{\underline{K}}^{(e)} \underline{d}^{(e)} = f^{(e)}$$

$$\underline{\underline{K}}^{(e)} = t\int_A B^T C B \, dx\, dy$$

En el caso de funciones de forma lineales =>

$$\boxed{\underline{\underline{K}}^{(e)} = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{C}}\, \underline{\underline{B}}\, t A} \quad (14)$$

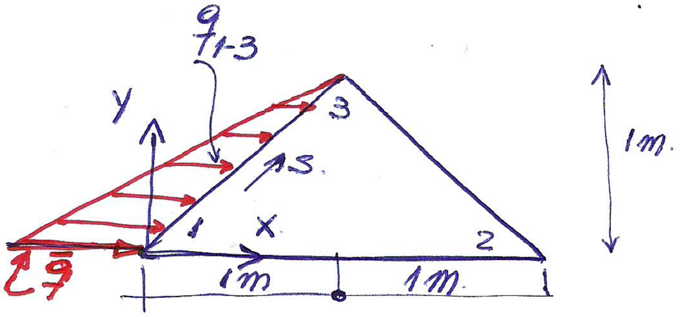
Los esfuerzos:

$$f^{(e)} = f_b^{(e)} + f_q^{(e)} + f_p$$

$$f_b^{(e)} = t\int_A N^T b \, dx\, dy.$$ (15)

$$f_q^{(e)} = \sum_{m=1}^{n} f_q^{(m)} = \sum_{m=1}^{n} t \oint_{\ell^{(m)}} N^T|_m \, q^{(m)} ds.$$

f_p: fuerzas concentradas.



Elemento triangular de tres (3) nodos de espesor t sometido a una fuerza horizontal repartida sobre el lado (1-3). La coordenada s que recorre dicho lado toma los valores $s_1 = 0$ y $s_3 = \sqrt{2}\,m$. como se indica en la figura.

Los fuerzas nodales equivalentes en esta carga están dados por:

$$f_q^{1-3} = t \oint_{\ell^{1-3}} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix}_{1-3} \begin{pmatrix} q_x^{1-3} \\ 0 \end{pmatrix} ds.$$ (16)

los cargas están en la dirección x.

espesor.

funciones de forma en los nodos 1 y 3.

donde se nota el valor nulo de las funciones de forma relacionadas con el nodo 2 que no pertenece al lado 1-3

$$f_q^{1-3} = t \oint_{\ell^{1-3}} \begin{bmatrix} N_1 q_x^{1-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_3 q_x^{1-3} \\ 0 \end{bmatrix} ds.$$ (17)

La variación de la fuerza distribuida con respecto a la coordenada Y vale:

$$q_x^{1-3}(Y) = \bar{q}(1-Y)$$

$X = S \cos 45.$

$Y = S \sin 45.$ (18) $\Rightarrow$ la expresión de la fuerza distribuida en función de la coordenada S.

$\bar{q}$ valor en el nodo 1.

$$q_x^{1-3}(S) = \bar{q}\,(1 - S \sin 45) \qquad (19)$$

Las funciones de forma en los nodos 1 y 3 son

$$N_i = \frac{1}{2A}\left[a_i + b_i X + c_i Y\right] \qquad (20)$$

$$= \frac{1}{2A}\left[a_i + b_i \frac{S}{\sqrt{2}} + c_i \frac{S}{\sqrt{2}}\right] \text{ con } i = 1,3.$$

De acuerdo a la figura $a_1 = 2$

$b_1 = c_1 = -1.$

$\Rightarrow$ la primera de las integrales en (17) es:

1) $$\oint_{\ell^{1-3}} N_1 q_x^{1-3}\, dS = \int_{S_1}^{S_2} \left\{ \frac{1}{2A}\left[2 - 2\frac{S}{\sqrt{2}}\right] \bar{q}\,(1 - S \sin 45) \right\} dS$$

$$= \frac{2}{3}\frac{\bar{q}}{\sqrt{2}} \text{ ; donde } A = 1.$$

2) $$\oint_{\ell^{1-3}} N_3 q_x^{1-3}\, dS = \frac{1}{3}\frac{\bar{q}}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto el vector de fuerzas nodales equivalentes a la fuerza aplicada distribuida es:

$$f_q = \frac{t\bar{q}}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estas fuerzas son estáticamente equivalentes a la fuerza aplicada ya que el valor total de esta es: $\bar{q}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\bar{q}}{\sqrt{2}}$ que es igual a las fuerzas concentradas en los nodos 1 y 3