

Meat Wagons - Transporte de Prisioneiros

Turma 2 Grupo 3

up201806250@fe.up.pt	Diogo Samuel Gonçalves Fernandes
up201806490@fe.up.pt	Hugo Miguel Monteiro Guimarães
up201806554@fe.up.pt	Telmo Alexandre Espirito Santo Baptista

19 de Abril de 2020

Projeto CAL - 2019/20 - MIEIC

Professor das Aulas Práticas: Rosaldo José Fernandes Rossetti



Índice

1	Descrição do Problema	3
2	Formalização do Problema	4
2.1	Dados de Entrada	4
2.2	Dados de Saída	5
2.3	Restrições	5
2.4	Função objetivo	6
3	Perspectiva de solução	7
3.1	Pré-processamento dos dados de entrada	7
3.2	Identificação do problema	7
3.3	Caminho mais curto	8
3.4	Caminho mais curto com vários pedidos	12
4	Bibliografia	17

1 Descrição do Problema

Os transportes de prisioneiros entre diversos estabelecimentos como, por exemplo, as prisões, esquadras e tribunais são feitos usando carrinhas que se encontram adaptadas ao serviço. Estes veículos têm a necessidade de serem altamente resistentes uma vez que é necessário garantir que os prisioneiros não conseguem escapar.

Para este projeto, queremos otimizar o percurso dos veículos de forma a recolher e entregar os prisioneiros nos pontos de interesse. De modo a cumprir o pretendido, é possível dividir nas seguintes fases:

Primeira Iteração - Recolha não seletiva de prisioneiros utilizando uma única carrinha

Inicialmente considere que só existe uma única camioneta para realizar todos os serviços. Com a primeira iteração pretende-se que apenas uma carrinha vá recolher os prisioneiros a uma dada localização, tendo em conta a urgência da situação. As situações que sejam mais exigentes serão respondidas primeiro pela carrinha.

É importante de notar que a recolha só pode ser efetuada se existirem caminhos que liguem todos os pontos de interesse, ou seja, o grafo necessita de ser conexo.

Algumas vezes, obras nas vias públicas podem fazer com que certas zonas tornem-se inacessíveis, inviabilizando o acesso ao destino de alguns prisioneiros. Avalie a conectividade do grafo, a fim de identificar pontos de recolha e de entrega com pouca acessibilidade.

Segunda Iteração - Recolha seletiva de prisioneiros utilizando uma única carrinha

Durante a segunda fase, cada prisioneiro irá ser agrupado com outros prisioneiros sempre que seja possível, de modo a não exceder a capacidade da carrinha.

Terceira Iteração - Recolha seletiva de prisioneiros utilizando várias carrinhas

Concluindo, nesta última fase vai-se ter em consideração o diverso número de carrinhas que a frota possui. Algumas carrinhas vão diferir de outras, tendo cada carrinha uma determinada função. Por exemplo, vão existir carrinhas específicas para transportar prisioneiros até aos aeroportos, linhas de comboio.

2 Formalização do Problema

2.1 Dados de Entrada

C_i - sequência de veículos, sendo $C_i(i)$ o seu i -ésimo elemento. Cada veículo é caracterizado por:

- *capacity* - número de prisioneiros que pode transportar
- *type* - tipo de veículo

R_i - sequência de pedidos de transporte de prisioneiros, sendo $R_i(i)$ o seu i -ésimo elemento. Cada pedido é caracterizado por:

- *pickup* - local de recolha dos prisioneiros
- *dest* - local de destino dos prisioneiros
- *numPris* - número de prisioneiros a serem transportados
- *type* - tipo de prisioneiros
- p_d - peso da distância no trajeto a efetuar
- p_t - peso do tempo no trajeto a efetuar

$G_i = (V_i, E_i)$ - grafo dirigido pesado, composto por:

- V - vértices, representando pontos da rede viária, com:
 - ID - Identificador único do vértice
 - D - Densidade populacional no vértice
 - $Adj \subseteq E$ - arestas que saem do vértice
 - $avg - speed$ - velocidade média na área em volta do vértice
- E - arestas, representando conexão entre dois pontos da rede viária, com:
 - ID - Identificador único da aresta
 - W_d - peso da aresta em relação à distância (representa a distância entre os dois vértices)
 - W_t - peso da aresta em relação ao tempo (representa o tempo médio que demora a percorrer a distância entre os dois vértices, considerando o tráfego normal naquela conexão da rede viária)

- *open* - se a conexão entre os vértices está aberta, isto é, se a rua estiver cortada por alguma razão então não é possível utilizar esta conexão

S - vértice da central

2.2 Dados de Saída

$G_f = (V_f, E_f)$ - grafo dirigido pesado, tendo V_f e E_f os mesmos atributos que V_i e E_i , excluindo atributos específicos do algoritmo utilizado

C_f - sequência de veículos com os serviços a realizar, sendo $C_f(i)$ o seu i -ésimo elemento. Cada veículo é caracterizado por:

- S - sequência de serviços a realizar, sendo $S(i)$ o seu i -ésimo elemento. Cada serviço é caracterizado por:
 - *emptySeats* - número de lugares vazios
 - R_f - sequência de pedidos atendidos, sendo $R_f(i)$ o seu i -ésimo elemento. Cada pedido atendido é caracterizado por:
 - * *pickupHour* - hora de chegada ao local de recolha
 - * *destHour* - hora de chegada ao local de destino
 - * p_d - peso da distância no trajeto a efetuar
 - * p_t - peso do tempo no trajeto a efetuar
 - $P = e \in E_i$ - sequência de arestas a percorrer, sendo $P(i)$ o seu i -ésimo elemento
 - *dist* - distância percorrida no serviço
 - *startHour* - hora esperada de início do serviço
 - *endHour* - hora esperada de termino do serviço

2.3 Restrições

Sobre os dados de entrada

- $\forall i \in [0, |C_i|[: \text{capacity}(C_i(i)) > 0$, uma vez que não faz sentido os veículos não poderem transportar prisioneiros
- $\forall r \in R_i, \text{dest}(r)$ deve pertencer ao mesmo componente fortemente conexo do grafo G_i que o vértice S , uma vez que o veículo tem de ser capaz de voltar à central
- $\forall r \in R_i, \text{numPris}(r) > 0$, uma vez que não faz sentido ter um pedido para transportar zero prisioneiros
- $\forall r \in R_i, p_d \geq 0 \wedge p_t \geq 0 \wedge (p_d \neq 0 \vee p_t \neq 0)$

- $\forall v \in V_i, avg-speed(v) > 0$
- $\forall e \in E_i, W_d(e) > 0 \wedge W_t(e) > 0$, uma vez que o peso da aresta representa a distância ou o tempo médio necessário para percorrer a aresta, se esta distância ou tempo forem zero estaremos num ciclo no mesmo vértice
- $\forall e \in E_i, e$ deve ser uma rua ao qual os veículos possam utilizar, ruas que os veículos não tenham permissão para entrar não são incluídas no grafo G_i
- $S \in V_i$, uma vez que a central é um vértice do grafo G_i

Sobre os dados de saída

- $|C_f| \leq |C_i|$ - não se pode usar mais veículos que os disponíveis
- $\forall v_f \in V_f, \exists v_i \in V_i$ tal que v_i e v_f têm os mesmos valores para todos os atributos, com exceção de atributos específicos aos algoritmos utilizados
- $\forall e_f \in E_f, \exists e_i \in E_i$ tal que e_i e e_f têm os mesmos valores para todos os atributos, com exceção de atributos específicos aos algoritmos utilizados
- $\forall r_f \in R_f, \exists r_i \in R_i$ tal que r_f e r_i têm os mesmos valores para os atributos p_d e p_t
- $\forall c \in C_f, \forall s \in S(c), 0 \leq emptySeats < capacity(c)$ pois cada serviço deve ter pelo menos um prisioneiro, e não pode haver sobrelotação do veículo
- $\forall c \in C_f, \forall s \in S(c), |R_f(s)| > 0$ uma vez que só faz sentido realizar um serviço se for houver um pedido de transporte de prisioneiros
- $\forall c \in C_f, \forall s \in S(c), endHour(s) > startHour(s)$
- $\forall c \in C_f, \forall s \in S(c), startHour(s) < pickupHour(\forall r \in R_f) < endHour(s) \wedge startHour(s) < destHour(\forall r \in R_f) \leq endHour(s)$

2.4 Função objetivo

A solução ótima passa por minizar a soma ponderada da distância percorrida e o tempo do serviço de uma determinada carrinha, que resulta na seguinte função:

$$\sum_{c \in C_f} \sum_{s \in S} \sum_{e \in P} (W_d(e) * max(p_d(R_f(s))) + W_t(e) * max(p_t(R_f(s)))$$

- $max(p_d(R_f(s)))$ - é o maior valor para o peso da distância numa determinada sequência de pedidos de um serviço de uma carrinha
- $max(p_t(R_f(s)))$ - é o maior valor para o peso do tempo numa determinada sequência de pedidos de um serviço de uma carrinha

Deste modo, obtivemos a função objetivo para o nosso problema que se encontra acima.

3 Perspectiva de solução

3.1 Pré-processamento dos dados de entrada

Grafo

Partindo da central todos as arestas que não forem alcançáveis têm a variável *open* definida como falsa. Além disso, todas os vértices do grafo que não pertencerem à componente fortemente conexa de origem devem ter as arestas que lhe alcançam marcadas como inacessíveis.

Pedidos de transporte de prisioneiros

Remover todos os pedidos de transporte de prisioneiros que não pertençam ao grafo pré-processado, isto é, remover aqueles que façam parte de arestas que têm a componente *open* definida como falsa.

Também devemos organizar os pedidos de transporte de prisioneiros por ordem decrescente do número de prisioneiros a transportar, facilitando depois no alocamento de veículos para o seu transporte.

Veículos para transporte de prisioneiros

Relativamente ao pré-processamento dos veículos de transporte, devemos organizá-los por ordem decrescente de capacidade. Assim, como também temos os pedidos de transporte de prisioneiros organizados por ordem decrescente do número de prisioneiros a transportar podemos potencialmente minizar o número de veículos utilizados.

3.2 Identificação do problema

A empresa de transporte de prisioneiros Meat Wagons necessita de transportar os prisioneiros de um ponto de recolha até um determinado destino. De modo a otimizar este transporte, a empresa optou por procurar o caminho mais eficiente para a efetuar a viagem.

Na primeira iteração, onde apenas está disponível um veículo, que realiza os pedidos de transporte um de cada vez, este problema trata-se do **caminho mais curto** entre a origem e o local de recolha seguido do **caminho mais curto** entre o local de recolha e o destino. A segunda iteração é semelhante à primeira iteração, variando apenas o número de veículos disponíveis para realizar os pedidos.

Na terceira e última iteração, não só varia o número de veículos disponíveis, como também o número de pedidos de transporte que um veículo pode realizar num único serviço, equiparando-se ao problema designado por **Vehicle Routing Problem**, uma generalização do problema do **Travelling Salesman Problem**, um problema NP-difícil.

Vale também realçar que os veículos devem retornar para a central no fim

3.3 Caminho mais curto

Este é o problema referido na primeira e segunda iteração, e trata-se de encontrar o percurso mais curto e eficiente entre dois pontos, ou entre todos os pares de pontos do grafo.

Entre dois pontos

Entre os vários algoritmos que existem para calcular o caminho mais curto entre dois pontos destacam-se os seguintes algoritmos:

Algoritmo de Dijkstra

Este algoritmo foi concebido por Edsger W. Dijkstra e resolve problemas do caminho mais curto de uma única origem em grafos que possuam pesos não negativos.

Para poder aplicar este algoritmo é necessário que cada vértice guarde a seguinte informação:

- W - custo mínimo até ao local da origem (combinação linear da distância e tempo, como visto na função objetivo)
- $path$ - vértice antecessor no caminho mais curto

O algoritmo de Dijkstra pode utilizar uma *priorityqueue* ou um *array* para inserir os novos vértices. Este consiste em inicializar os vértices, o que se pode fazer em tempo linear $O(|V|)$. Seguidamente, inicializar a estrutura auxiliar, que neste caso consideramos a *priorityqueue* devido a ter maior eficiência relativamente ao *array*, com o vértice origem.

Processam os vértices que se encontram na queue extraindo-os e seguidamente percorrendo cada aresta do vértice a ser processado. Posteriormente, se o custo relativo ao vértice de destino da aresta for maior do que o custo do caminho atual, terá que se atualizar o vértice de destino e inserindo na *priorityqueue* caso ele ainda não esteja na fila de processamento ou fazendo a operação *DECREASE – KEY* caso este já esteja na fila de processamento.

As operações de inserção, extração e *DECREASE – KEY* têm complexidade temporal $O(\log(N))$. Dado que é necessário percorrer todos os vértices e arestas resulta numa complexidade de $O((|V| + |E|) * \log(|V|))$.

Assim podemos concluir que o tempo de execução do algoritmo é $O((|V| + |E|) * \log(|V|))$.

O pseudo-código para implementar este algoritmo é o seguinte:

```
FOR EACH  $v \in V$  DO
   $COST(v) \leftarrow \infty$ 
   $PATH(v) \leftarrow NULL$ 

 $COST(s) \leftarrow 0$ 
 $Q \leftarrow \emptyset$  // MIN PRIORITY QUEUE
```



```

INSERT(Q, (s, COST(s)))
WHILE Q  $\neq$   $\emptyset$  DO
  v  $\leftarrow$  EXTRACT-MIN(Q)
  FOR EACH w  $\in$  Adj(v) DO
    IF COST(w) > COST(v) + WEIGHT(v, w) THEN
      COST(w)  $\leftarrow$  COST(v) + WEIGHT(v, w)
      PATH(w)  $\leftarrow$  v
    IF w  $\notin$  Q THEN
      INSERT(Q, (w, COST(w)))
    ELSE
      DECREASE-KEY(Q, (w, COST(w)))

```

Este algoritmo destaca-se pela sua facilidade de implementação, porém o algoritmo pode explorar demasiados vértices desnecessários.

A ineficiência do algoritmo pode ser visto na imagem abaixo:

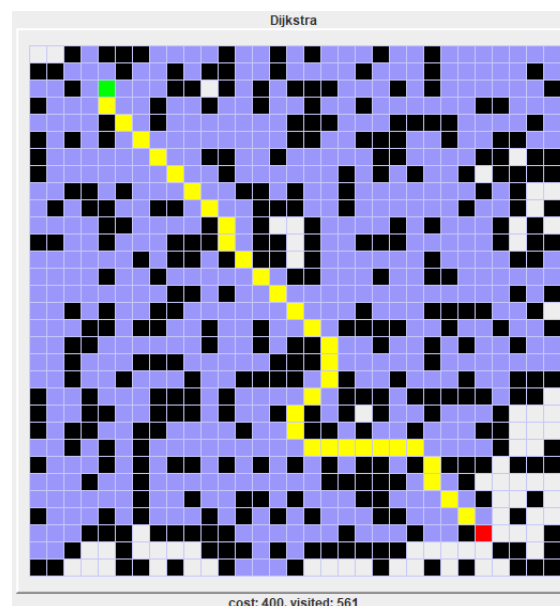


Figura 1: *Dijkstra's algorithm*

■ walls	■ visited
■ origin	■ destination
■ shortest path	

Algoritmo de Bellman-Ford

O algoritmo de Bellman-Ford corresponde a uma extensão do algoritmo de Dijkstra permitindo a existência de pesos negativos nas arestas, sendo mais lento que o de Dijkstra por esse mesmo motivo.

Uma vez que foi imposta a restrição de pesos não negativos nas arestas, este algoritmo não se vê útil, uma vez que não se vê necessário tratar pesos negativos.

Algoritmo A*

O algoritmo A*, desenvolvido por Peter Hart, Nils Nilsson e Bertram Raphael, pode ser visto como uma extensão do algoritmo de Dijkstra, usando heurística para guiar a sua pesquisa.

Em cada iteração, o algoritmo precisa decidir qual caminho processar, baseando-se no custo do caminho desde a origem até ao ponto atual e numa estimativa do custo do caminho desde o vértice adjacente a testar até ao destino, isto é o algoritmo visa minimizar a seguinte função

$$f(n) = g(n) + h(n) \quad (1)$$

onde n é o próximo vértice do caminho, $g(n)$ o custo desde a origem até n e $h(n)$ uma estimativa do custo mínimo desde n até ao destino.

Uma possível implementação do algoritmo está demonstrada no seguinte pseudo-código:

```

RECONSTRUCT_PATH(current)
  path ← {current}
  WHILE PATH(current) ≠ NULL
    current ← PATH(current)
    path.PUSH_FRONT(current)
  RETURN path

A_STAR(start, goal, heuristic)
  FOR EACH v ∈ V DO
    G_COST(v) ← ∞
    F_COST(v) ← ∞
    PATH(v) ← NULL

  G_COST(start) ← 0
  F_COST(start) ← heuristic(start) // G_COST(start) + heuristic(start)
  Q ← ∅ // MIN PRIORITY QUEUE
  INSERT(Q, (start, COST(start)))
  WHILE Q ≠ ∅ DO
    v ← EXTRACT_MIN(Q)
    IF V = GOAL
      RETURN RECONSTRUCT_PATH(v)

    FOR EACH w ∈ Adj(v) DO
      IF G_COST(w) > G_COST(v) + WEIGHT(v, w) THEN
        G_COST(w) ← G_COST(v) + WEIGHT(v, w)
        PATH(w) ← v
        F_COST(w) ← G_COST(w) + heuristic(w)
        IF w ∉ Q THEN
          INSERT(Q, (w, COST(w)))
        ELSE
          DECREASE_KEY(Q, (w, COST(w)))

```

O algoritmo A* é um algoritmo de elevada eficiência e otimização, sendo usado em muitos contextos, como nos sistemas de encaminhamento de viagens que corresponde às duas primeiras iterações do nosso problema.

A eficiência deste algoritmo pode ser observada comparando o número de vértices explorados durante a pesquisa com o algoritmo de Dijkstra, como é demonstrado na imagem abaixo:

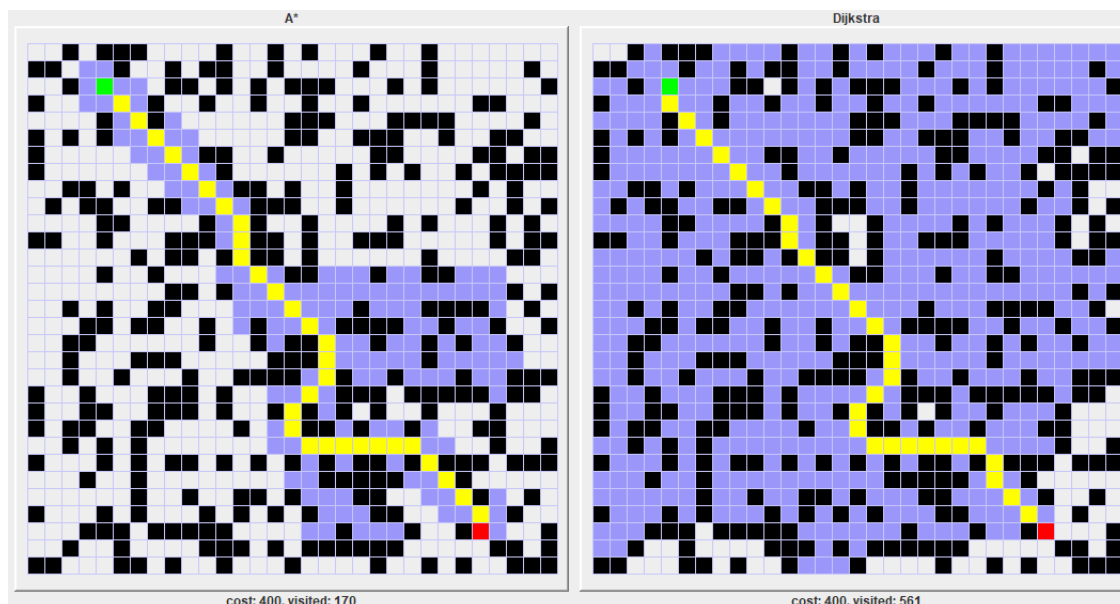


Figura 2: *A* algorithm vs. Dijkstra's algorithm*

■ walls ■ visited
■ origin ■ destination
■ shortest path

Embora a eficiência do algoritmo seja maior, o algoritmo A* não garante a solução ótima para todos os casos, ao contrário de algoritmos como o de Dijkstra. Esta desvantagem pode ser observada na imagem abaixo:

Analisando os resultados obtidos, é possível constatar que o algoritmo de Dijkstra visitou aproximadamente dez vezes mais vértices que o algoritmo A* (1975 **vs.** 197). Porém, o caminho mais curto encontrado pelo algoritmo A* não corresponde ao caminho com menor custo, uma vez que o caminho encontrado pelo algoritmo de Dijkstra possui um custo menor que o algoritmo de A* (570 **vs.** 606).

Entre todos os pares de vértices

É possível calcular o caminho entre todos os pares de vértices através de algoritmos, como a aplicação repetida do algoritmo de Dijkstra ou a utilização do algoritmo de Floyd-Warshall.

Estes algoritmos são bastante utilizados para pré-processamento de mapas de estradas, porém no nosso problema, como os pesos para a distância e o para o tempo variam de pedido

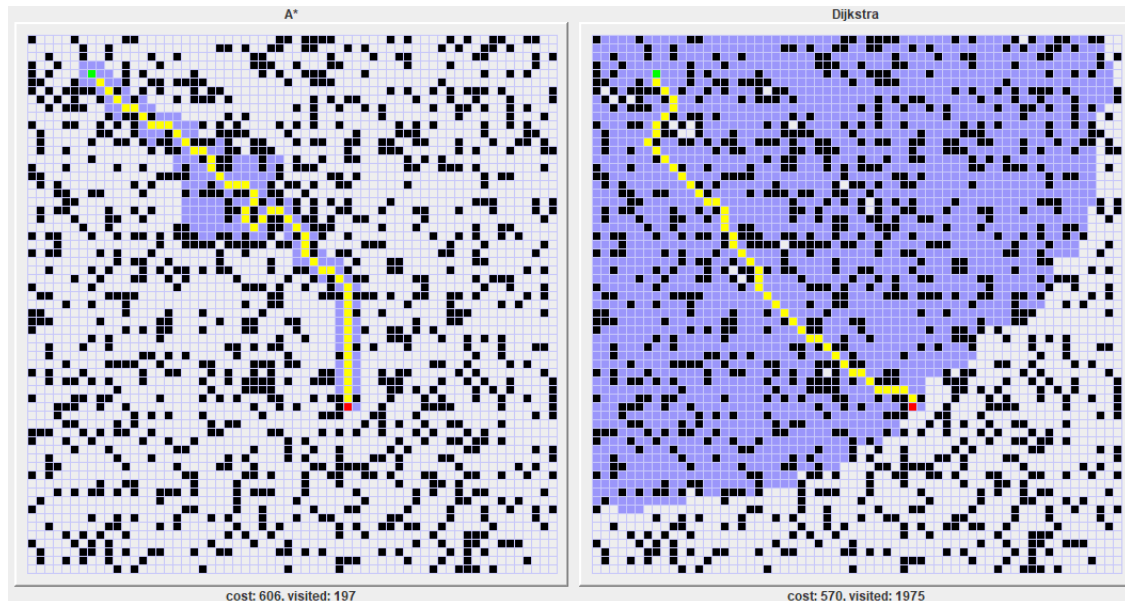


Figura 3: *A* algorithm vs. Dijkstra's algorithm*

- | | |
|-----------------|---------------|
| ■ walls | ■ visited |
| ■ origin | ■ destination |
| ■ shortest path | |

para pedido, o pré-processamento dos caminhos mais curtos para todos os pares de vértices não traria nenhuma vantagem, apenas uma diminuição na eficiência do programa.

3.4 Caminho mais curto com vários pedidos

Dada a possibilidade de um veículo realizar vários pedidos num único serviço, existirá um conjunto de locais de recolha e locais de destino a serem percorridos.

Deparamo-nos então com um problema similar ao **Travelling Salesman Problem**, um problema NP-difícil. Como se trata de um grafo dirigido é a versão assimétrica do problema **Travelling Salesman Problem**

As soluções deste problema podem dividir-se em duas categorias:

- **Soluções Exatas** - algoritmos que encontram a solução exata do problema
- **Soluções Aproximadas** - algoritmos que aproximam a solução do problema através de heurísticas e aproximações

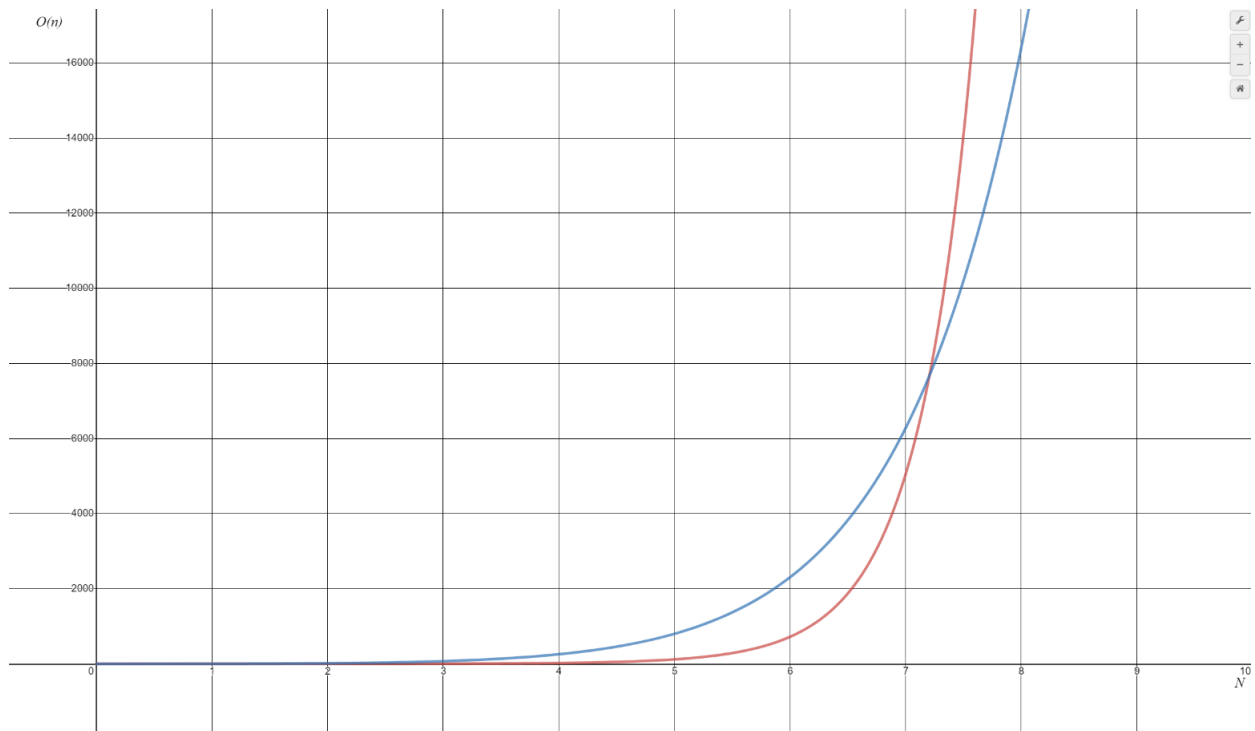


Figura 4: *Brute-force vs. Held-Karp algorithm: Complexities*

— Brute-force ($O(n!)$) — Held-Karp ($O(n^2 2^n)$)

Soluções Exatas

Brute-force

O método brute-force testa todas as permutações possíveis para o percurso, atualizando o caminho ótimo sempre que encontra um custo menor ao atual, resultando assim numa complexidade $O(n!)$, sendo n o número de vértices a percorrer.

Held-Karp

FALTA EXPLICAR + PSEUDO

Analisando as complexidades dos algoritmos apresentados podemos verificar que o método de brute-force é mais eficiente para valores de n menores que sete, sendo o algoritmo de Held-Karp mais eficiente para os restantes valores de n , sendo n o número de vértices a percorrer, assim como se pode observar no gráfico seguinte:

Na implementação do cálculo da solução exata alternaríamos o método utilizado conforme o número de vértices a percorrer, usando brute-force para $n \leq 7$ e o algoritmo Held-Karp para $n > 7$.

Soluções Aproximadas

Nearest Neighbour

O algoritmo de **nearest neighbour** consiste em escolher um vértice aleatório para o início, e de seguida escolher o vértice mais próximo como próximo vértice a percorrer repetindo este passo até visitar todos os vértices a serem percorridos. Trata-se assim de algoritmo ganancioso que encontra uma solução aproximada em tempo reduzido, no entanto esta solução não é garantidamente a solução ótima.

O pseudo-código deste algoritmo é o seguinte:

```
FOR EACH  $v \in V$  DO
  VISITED( $v$ )  $\leftarrow$  false
  PATH( $v$ )  $\leftarrow$  NULL

 $v \leftarrow$  RANDOMVERTEX( $V$ ) // choose starting point
VISITED( $v$ )  $\leftarrow$  true

WHILE NOT ALL_VISITED( $V$ ) DO
   $w \leftarrow$  CLOSEST_VERTEX( $V, v$ ) // get closest vertex to  $v$ 
  VISITED( $w$ )  $\leftarrow$  true
  PATH( $w$ )  $\leftarrow$  PATH( $v$ )
   $v \leftarrow w$ 
```

Algoritmo Genético

Algoritmos genéticos são algoritmos baseados em heurísticas que simulam o processo de evolução de espécies, o processo de *seleção natural*, selecionando os melhores espécimes de cada geração.

Os algoritmos genéticos podem ser divididos em cinco fases:

1. Gerar a população
2. Calcular a aptidão de cada indivíduo da população
3. Escolher os indivíduos mais aptos
4. Reproduzir os indivíduos escolhidos (por replicação ou *crossover*)
5. Mutação dos indivíduos de modo a introduzir pequenas variações na população

```
// calculate fitness
CALCULATE_FITNESS( $I$ )
fitness  $\leftarrow$  0
FOR  $i \leftarrow 1$  TO  $|VERTICES(I)|$ 
  // add cost of going from vertex  $i-1$  to vertex  $i$ 
```

```
    fitness ← fitness + COST(VERTICES[i-1], VERTICES[i])
    FITNESS(I) ← fitness

// Choose the n best individuals
CULLPOPULATION(P, n)
    sorted ← SORT_BY_FITNESS(P) // sort by descending order of fitness
    best ← ∅
    FOR i ← 0 TO n
        INSERT(best, sorted(i))
    RETURN best

// replicate individual
REPLICATE(I)
    return EXACT_COPY(I)

// create new individual from two parents
CROSSOVER(parent_A, parent_B)
    child ← NEWINDIVIDUAL()
    // being N the number of vertices to visit
    // random integer in [0, N[
    section_start ← RANDOMINT(0, N)
    // random integer in ]section_start, N[
    section_end ← RANDOMINT(section_start + 1, N)
    // copy random section from parent A
    FOR i ← section_start TO section_end DO
        VERTICES(child) AT (i) ← VERTICES(parent_A) AT (i)

    // fill remaining empty sections with genes from parent B
    FOR i ← 0 TO N DO
        IF VERTICES(child) AT (i) = NULL
            VERTICES(child) AT (i) ← VERTICES(parent_B) AT (i)
    RETURN CHILD

// mutate individual
MUTATE(I)
    v ← RANDOMVERTEX(VERTICES(I)) // choose random vertex
    w ← RANDOMVERTEX(VERTICES(I)) // choose another random vertex
    SWAP(v, w)

// using crossover to reproduce (can be done with replication)
// reproduces population P
REPRODUCEPOPULATION(P)
    NEW_P ← ∅
    FOR i ← 0 TO POPULATION_SIZE DO
        // choose parents (can be tested to be different parents)
        parent_A ← RANDOMINDIVIDUAL(P)
```

```
parent_B ← RANDOMINDIVIDUAL(P)
I ← CROSSOVER(parent_A, parent_B)
random ← RANDOMNUMBER() // random number between 0 and 1
IF random < MUTATIONRATE THEN
    MUTATE(I)
    INSERT(NEW_P, I)
RETURN NEW_P

// generate random population (random order of vertices to visit)
P ← GENERATERANDOMPOPULATION(V)

WHILE ... // decide stopping criteria
    FOR EACH individual ∈ P
        CALCULATEFITNESS(individual)

    best ← CULLPOPULATION(P, n)
    P ← REPRODUCEPOPULATION(best) // reproduce best individuals
```


4 Bibliografia

- Apresentações fornecidas pelo professor Rosaldo José Fernandes Rossetti nas aulas teóricas da cadeira Conceção e Análise de Algoritmos
- [Shortest Path Problem](#)
- [Dijkstra's Algorithm](#)
- [Bellman-Ford Algorithm](#)
- [A* algorithm](#)
- [Traveling Salesman Problem](#)
- [Vehicle Routing Problem](#)
- [Held-Karp algorithm](#)
- [Nearest neighbour algorithm](#)
- [Desmos Graphing Tool](#)
- [Path Finder Visualization Program](#)