

Meat Wagons - Transporte de Prisioneiros

Turma 2 Grupo 3

up201806250@fe.up.pt

Diogo Samuel Gonçalves Fernandes

up201806490@fe.up.pt

Hugo Miguel Monteiro Guimarães

up201806554@fe.up.pt

Telmo Alexandre Espirito Santo Baptista

19 de Abril de 2020

Projeto CAL - 2019/20 - MIEIC

Professor das Aulas Práticas: Rosaldo José Fernandes Rossetti



Índice

1	Descrição do Problema	3
2	Formalização do Problema	4
2.1	Dados de Entrada	4
2.2	Dados de Saída	5
2.3	Restrições	5
2.4	Função objetivo	6
3	Perspectiva de solução	7
3.1	Pré-processamento dos dados de entrada	7
3.2	Identificação do problema	7
3.3	Caminho mais curto	8
3.4	Caminho mais curto com vários pedidos	12
4	Funcionalidades a implementar	16
4.1	Pré-processamento dos dados de entrada	16
5	Bibliografia	18

1 Descrição do Problema

Os transportes de prisioneiros entre diversos estabelecimentos como, por exemplo, as prisões, esquadras e tribunais são feitos utilizando veículos que se encontrem adaptados ao serviço. Estes veículos têm a necessidade de serem altamente resistentes uma vez que é necessário garantir que os prisioneiros não conseguem escapar.

Para este projeto, queremos otimizar o percurso dos veículos de forma a recolher e entregar os prisioneiros nos pontos de interesse. De modo a cumprir o pretendido, é possível dividir nas seguintes fases:

Primeira Iteração - Recolha de prisioneiros utilizando um único veículo

Inicialmente consideramos que só existe uma única camioneta para realizar todos os serviços. Com a primeira iteração pretende-se que apenas um veículo vá recolher os prisioneiros a uma dada localização, tendo em conta a urgência da situação. As situações que sejam mais exigentes serão respondidas primeiro pelos veículos.

É importante notar que a recolha só pode ser efetuada se existirem caminhos que liguem todos os pontos de interesse, ou seja, o grafo necessita de ser conexo.

Algumas vezes, obras nas vias públicas podem fazer com que certas zonas tornem-se inacessíveis, inviabilizando o acesso ao destino de alguns prisioneiros. Avalie a conectividade do grafo, a fim de identificar pontos de recolha e de entrega com pouca acessibilidade.

Segunda Iteração - Recolha de prisioneiros utilizando vários veículos

Durante a segunda fase vai-se ter em consideração o diverso número de veículos que a frota possui. Alguns veículos vão diferir de outras, tendo cada veículo uma determinada função. Vão existir veículos específicos para transportar prisioneiros até aos aeroportos e linhas de comboio.

Terceira Iteração - Recolha seletiva de prisioneiros utilizando vários veículos

Na terceira e última iteração vamos ter em consideração não só o número de veículos disponíveis, como também o número de pedidos de transporte de prisioneiros que um veículo pode realizar num único serviço. Um único veículo pode sair da central e transportar vários prisioneiros, desde que o número de prisioneiros não ultrapasse a capacidade do veículo.

2 Formalização do Problema

2.1 Dados de Entrada

C_i - sequência de veículos, sendo $C_i(i)$ o seu i -ésimo elemento. Cada veículo é caracterizado por:

- *capacity* - número de prisioneiros que pode transportar
- *type* - tipo de veículo

R_i - sequência de pedidos de transporte de prisioneiros, sendo $R_i(i)$ o seu i -ésimo elemento. Cada pedido é caracterizado por:

- *pickup* - local de recolha dos prisioneiros
- *dest* - local de destino dos prisioneiros
- *numPris* - número de prisioneiros a serem transportados
- *type* - tipo de prisioneiros
- p_d - peso da distância no trajeto a efetuar
- p_t - peso do tempo no trajeto a efetuar

$G_i = (V_i, E_i)$ - grafo dirigido pesado, composto por:

- V - vértices, representando pontos da rede viária, com:
 - ID - Identificador único do vértice
 - D - Densidade populacional no vértice
 - $Adj \subseteq E$ - arestas que saem do vértice
 - *avg – speed* - velocidade média na área em volta do vértice
 - *reachable* - se o vértice é alcançável a partir da central
- E - arestas, representando conexão entre dois pontos da rede viária, com:
 - ID - Identificador único da aresta
 - W_d - peso da aresta em relação à distância (representa a distância entre os dois vértices)
 - W_t - peso da aresta em relação ao tempo (representa o tempo médio que demora a percorrer a distância entre os dois vértices, considerando o tráfego normal naquela conexão da rede viária)

- *open* - se a conexão entre os vértices está aberta, isto é, se a rua estiver cortada por alguma razão então não é possível utilizar esta conexão

S - vértice da central

2.2 Dados de Saída

$G_f = (V_f, E_f)$ - grafo dirigido pesado, tendo V_f e E_f os mesmos atributos que V_i e E_i , excluindo atributos específicos do algoritmo utilizado

C_f - sequência de veículos com os serviços a realizar, sendo $C_f(i)$ o seu i -ésimo elemento. Cada veículo é caracterizado por:

- S - sequência de serviços a realizar, sendo $S(i)$ o seu i -ésimo elemento. Cada serviço é caracterizado por:
 - *emptySeats* - número de lugares vazios
 - R_f - sequência de pedidos atendidos, sendo $R_f(i)$ o seu i -ésimo elemento. Cada pedido atendido é caracterizado por:
 - * *pickupHour* - hora de chegada ao local de recolha
 - * *destHour* - hora de chegada ao local de destino
 - * p_d - peso da distância no trajeto a efetuar
 - * p_t - peso do tempo no trajeto a efetuar
 - $P = e \in E_i$ - sequência de arestas a percorrer, sendo $P(i)$ o seu i -ésimo elemento
 - *dist* - distância percorrida no serviço
 - *startHour* - hora esperada de início do serviço
 - *endHour* - hora esperada de termino do serviço

2.3 Restrições

Sobre os dados de entrada

- $\forall i \in [0, |C_i|[: \text{capacity}(C_i(i)) > 0$, uma vez que não faz sentido os veículos não poderem transportar prisioneiros
- $\forall r \in R_i, \text{dest}(r)$ deve pertencer ao mesmo componente fortemente conexo do grafo G_i que o vértice S , uma vez que o veículo tem de ser capaz de voltar à central
- $\forall r \in R_i, \text{numPris}(r) > 0$, uma vez que não faz sentido ter um pedido para transportar zero prisioneiros
- $\forall r \in R_i, p_d \geq 0 \wedge p_t \geq 0 \wedge (p_d \neq 0 \vee p_t \neq 0)$

- $\forall v \in V_i, avg-speed(v) > 0$
- $\forall e \in E_i, W_d(e) > 0 \wedge W_t(e) > 0$, uma vez que o peso da aresta representa a distância ou o tempo médio necessário para percorrer a aresta, se esta distância ou tempo forem zero estaremos num ciclo no mesmo vértice
- $\forall e \in E_i, e$ deve ser uma rua ao qual os veículos possam utilizar, ruas que os veículos não tenham permissão para entrar não são incluídas no grafo G_i
- $S \in V_i$, uma vez que a central é um vértice do grafo G_i

Sobre os dados de saída

- $|C_f| \leq |C_i|$ - não se pode usar mais veículos que os disponíveis
- $\forall v_f \in V_f, \exists v_i \in V_i$ tal que v_i e v_f têm os mesmos valores para todos os atributos, com exceção de atributos específicos aos algoritmos utilizados
- $\forall e_f \in E_f, \exists e_i \in E_i$ tal que e_i e e_f têm os mesmos valores para todos os atributos, com exceção de atributos específicos aos algoritmos utilizados
- $\forall r_f \in R_f, \exists r_i \in R_i$ tal que r_f e r_i têm os mesmos valores para os atributos p_d e p_t
- $\forall c \in C_f, \forall s \in S(c), 0 \leq emptySeats < capacity(c)$ pois cada serviço deve ter pelo menos um prisioneiro, e não pode haver sobrelotação do veículo
- $\forall c \in C_f, \forall s \in S(c), |R_f(s)| > 0$ uma vez que só faz sentido realizar um serviço se for houver um pedido de transporte de prisioneiros
- $\forall c \in C_f, \forall s \in S(c), endHour(s) > startHour(s)$
- $\forall c \in C_f, \forall s \in S(c), startHour(s) < pickupHour(\forall r \in R_f) < endHour(s) \wedge startHour(s) < destHour(\forall r \in R_f) \leq endHour(s)$

2.4 Função objetivo

A solução ótima passa por minizar a soma ponderada da distância percorrida e o tempo do serviço de um determinado veículo, que resulta na seguinte função:

$$\sum_{c \in C_f} \sum_{s \in S} \sum_{e \in P} (W_d(e) * max(p_d(R_f(s))) + W_t(e) * max(p_t(R_f(s)))$$

- $max(p_d(R_f(s)))$ - é o maior valor para o peso da distância numa determinada sequência de pedidos de um serviço de um veículo
- $max(p_t(R_f(s)))$ - é o maior valor para o peso do tempo numa determinada sequência de pedidos de um serviço de um veículo

Deste modo, obtivemos a função objetivo para o nosso problema que se encontra acima.

3 Perspectiva de solução

3.1 Pré-processamento dos dados de entrada

Grafo

Partindo da central todos os vértices que não forem alcançáveis têm a variável *reachable* definida como falsa.

Além disso, todas os vértices do grafo que não pertençam à componente fortemente conexa de origem devem ser marcados como inacessíveis (*reachable* é colocado a falso).

Pedidos de transporte de prisioneiros

Remover todos os pedidos de transporte de prisioneiros que não pertençam ao grafo pré-processado, isto é, remover aqueles que façam parte de arestas que têm a componente *open* definida como falsa.

Também devemos organizar os pedidos de transporte de prisioneiros por ordem decrescente do número de prisioneiros a transportar, facilitando depois no alocamento de veículos para o seu transporte.

Veículos para transporte de prisioneiros

Relativamente ao pré-processamento dos veículos de transporte, devemos organizá-los por ordem decrescente de capacidade. Assim, como também temos os pedidos de transporte de prisioneiros organizados por ordem decrescente do número de prisioneiros a transportar podemos potencialmente minizar o número de veículos utilizados.

3.2 Identificação do problema

A empresa de transporte de prisioneiros Meat Wagons necessita de transportar os prisioneiros de um ponto de recolha até um determinado destino. De modo a otimizar este transporte, a empresa optou por procurar o caminho mais eficiente para a efetuar a viagem.

Na primeira iteração, onde apenas está disponível um veículo, que realiza os pedidos de transporte um de cada vez, este problema trata-se do **caminho mais curto** entre a origem e o local de recolha seguido do **caminho mais curto** entre o local de recolha e o destino. A segunda iteração é semelhante à primeira iteração, variando apenas o número de veículos disponíveis para realizar os pedidos.

Na terceira e última iteração, não só varia o número de veículos disponíveis, como também o número de pedidos de transporte que um veículo pode realizar num único serviço, equiparando-se ao problema designado por **Vehicle Routing Problem**, uma generalização do problema do **Travelling Salesman Problem**, um problema NP-difícil.

Vale também realçar que os veículos devem retornar para a central no fim

3.3 Caminho mais curto

Este é o problema referido na primeira e segunda iteração, e trata-se de encontrar o percurso mais curto e eficiente entre dois pontos, ou entre todos os pares de pontos do grafo.

Entre dois pontos

Entre os vários algoritmos que existem para calcular o caminho mais curto entre dois pontos destacam-se os seguintes algoritmos:

Algoritmo de Dijkstra

Este algoritmo foi concebido por Edsger W. Dijkstra e resolve problemas do caminho mais curto de uma única origem em grafos que possuam pesos não negativos.

Para poder aplicar este algoritmo é necessário que cada vértice guarde a seguinte informação:

- W - custo mínimo até ao local da origem (combinação linear da distância e tempo, como visto na função objetivo)
- $path$ - vértice antecessor no caminho mais curto

O algoritmo de Dijkstra pode utilizar uma *priorityqueue* ou um *array* para inserir os novos vértices. Este consiste em inicializar os vértices, o que se pode fazer em tempo linear $O(|V|)$. Seguidamente, inicializar a estrutura auxiliar, que neste caso consideramos a *priorityqueue* devido a ter maior eficiência relativamente ao *array*, com o vértice origem.

Processam os vértices que se encontram na queue extraíndo-os e seguidamente percorrendo cada aresta do vértice a ser processado. Posteriormente, se o custo relativo ao vértice de destino da aresta for maior do que o custo do caminho atual, terá que se atualizar o vértice de destino e inserindo na *priorityqueue* caso ele ainda não esteja na fila de processamento ou fazendo a operação *DECREASE – KEY* caso este já esteja na fila de processamento.

As operações de inserção, extração e *DECREASE – KEY* têm complexidade temporal $O(\log(N))$. Dado que é necessário percorrer todos os vértices e arestas resulta numa complexidade de $O((|V| + |E|) * \log(|V|))$.

Assim podemos concluir que o tempo de execução do algoritmo é $O((|V| + |E|) * \log(|V|))$.

O pseudo-código para implementar este algoritmo é o seguinte:

```
FOR EACH  $v \in V$  DO
  COST( $v$ )  $\leftarrow \infty$ 
  PATH( $v$ )  $\leftarrow \text{NULL}$ 
```



```

COST( $s$ )  $\leftarrow$  0
 $Q \leftarrow \emptyset$  // MIN PRIORITY QUEUE
INSERT( $Q$ , ( $s$ , COST( $s$ )))
WHILE  $Q \neq \emptyset$  DO
     $v \leftarrow$  EXTRACT-MIN( $Q$ )
    FOR EACH  $w \in \text{Adj}(v)$  DO
        IF COST( $w$ ) > COST( $v$ ) + WEIGHT( $v$ ,  $w$ ) THEN
            COST( $w$ )  $\leftarrow$  COST( $v$ ) + WEIGHT( $v$ ,  $w$ )
            PATH( $w$ )  $\leftarrow$   $v$ 
            IF  $w \notin Q$  THEN
                INSERT( $Q$ , ( $w$ , COST( $w$ )))
            ELSE
                DECREASE-KEY( $Q$ , ( $w$ , COST( $w$ )))

```

Este algoritmo destaca-se pela sua facilidade de implementação, porém o algoritmo pode explorar demasiados vértices desnecessários.

A ineficiência do algoritmo pode ser visto na imagem abaixo:

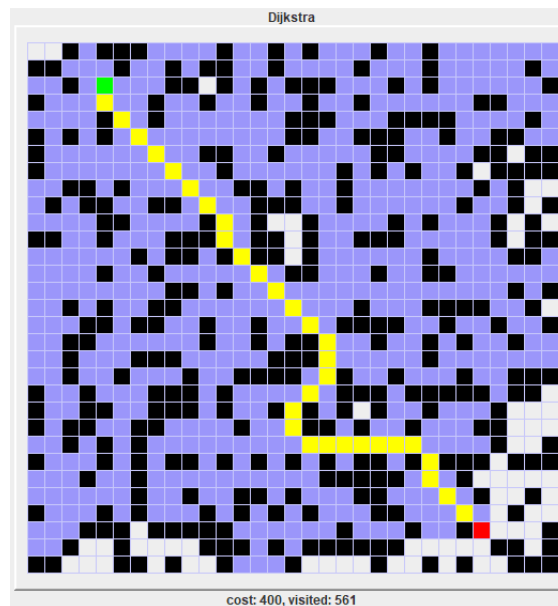


Figura 1: *Dijkstra's algorithm*

■ walls	■ visited
■ origin	■ destination
■ shortest path	

Algoritmo de Bellman-Ford

O algoritmo de Bellman-Ford corresponde a uma extensão do algoritmo de Dijkstra permitindo a existência de pesos negativos nas arestas, sendo mais lento que o de Dijkstra por esse mesmo motivo.

Uma vez que foi imposta a restrição de pesos não negativos nas arestas, este algoritmo não se vê útil, uma vez que não se vê necessário tratar pesos negativos.

Algoritmo A*

O algoritmo A*, desenvolvido por Peter Hart, Nils Nilsson e Bertram Raphael, pode ser visto como uma extensão do algoritmo de Dijkstra, usando heurística para guiar a sua pesquisa.

Em cada iteração, o algoritmo precisa decidir qual caminho processar, baseando-se no custo do caminho desde a origem até ao ponto atual e numa estimativa do custo do caminho desde o vértice adjacente a testar até ao destino, isto é o algoritmo visa minimizar a seguinte função

$$f(n) = g(n) + h(n) \quad (1)$$

onde n é o próximo vértice do caminho, $g(n)$ o custo desde a origem até n e $h(n)$ uma estimativa do custo mínimo desde n até ao destino.

Uma possível implementação do algoritmo está demonstrada no seguinte pseudo-código:

```

RECONSTRUCTPATH(current)
  path ← {current}
  WHILE PATH(current) ≠ NULL
    current ← PATH(current)
    path.PUSHFRONT(current)
  RETURN path

A_STAR(start, goal, heuristic)
  FOR EACH v ∈ V DO
    G_COST(v) ← ∞
    F_COST(v) ← ∞
    PATH(v) ← NULL

  G_COST(start) ← 0
  F_COST(start) ← heuristic(start) // G_COST(start)+heuristic(start)
  Q ← ∅ // MIN PRIORITY QUEUE
  INSERT(Q, (start, COST(start)))
  WHILE Q ≠ ∅ DO
    v ← EXTRACT-MIN(Q)
    IF V = GOAL
      RETURN RECONSTRUCTPATH(v)

    FOR EACH w ∈ Adj(v) DO
      IF G_COST(w) > G_COST(v) + WEIGHT(v, w) THEN
        G_COST(w) ← G_COST(v) + WEIGHT(v, w)
        PATH(w) ← v
        F_COST(w) ← G_COST(w) + heuristic(w)
        IF w ∉ Q THEN
          INSERT(Q, (w, COST(w)))

```

```
ELSE
  DECREASE-KEY(Q, (w, COST(w)))
```

O algoritmo A^* é um algoritmo de elevada eficiência e otimização, sendo usado em muitos contextos, como nos sistemas de encaminhamento de viagens que corresponde às duas primeiras iterações do nosso problema.

A eficiência deste algoritmo pode ser observada comparando o número de vértices explorados durante a pesquisa com o algoritmo de Dijkstra, como é demonstrado na imagem abaixo:

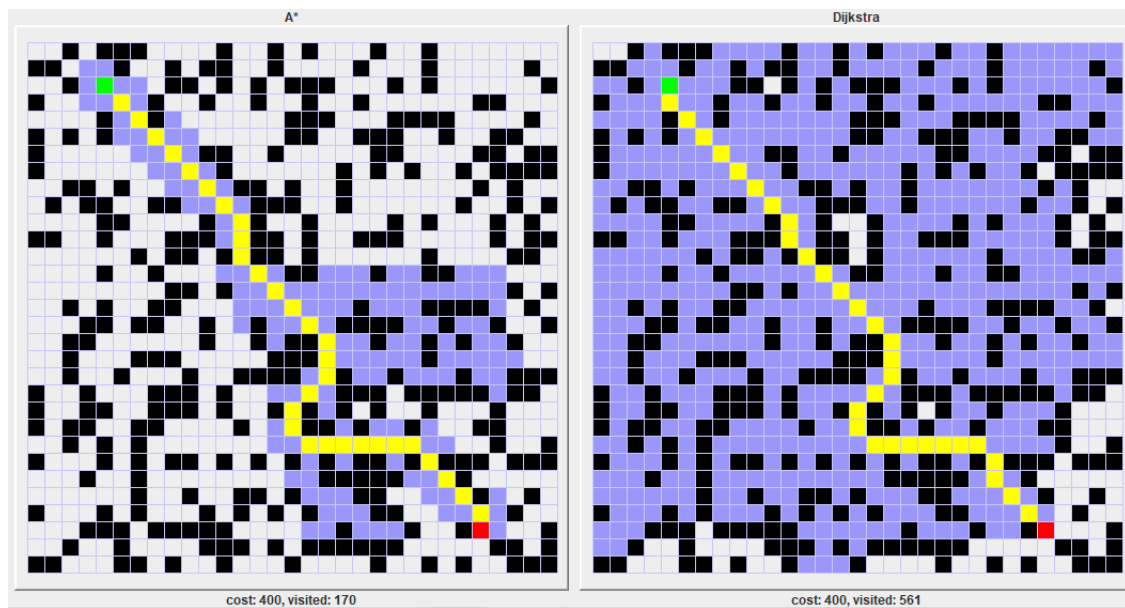


Figura 2: A^* algorithm vs. Dijkstra's algorithm

■ walls ■ visited
 ■ origin ■ destination
 ■ shortest path

Embora a eficiência do algoritmo seja maior, o algoritmo A^* não garante a solução ótima para todos os casos, ao contrário de algoritmos como o de Dijkstra. Esta desvantagem pode ser observada na imagem abaixo:

Analisando os resultados obtidos, é possível constatar que o algoritmo de Dijkstra visitou aproximadamente dez vezes mais vértices que o algoritmo A^* (1975 vs. 197). Porém, o caminho mais curto encontrado pelo algoritmo A^* não corresponde ao caminho com menor custo, uma vez que o caminho encontrado pelo algoritmo de Dijkstra possui um custo menor que o algoritmo de A^* (570 vs. 606).

Entre todos os pares de vértices

É possível calcular o caminho entre todos os pares de vértices através de algoritmos, como a aplicação repetida do algoritmo de Dijkstra ou a utilização do algoritmo de Floyd-Warshall.

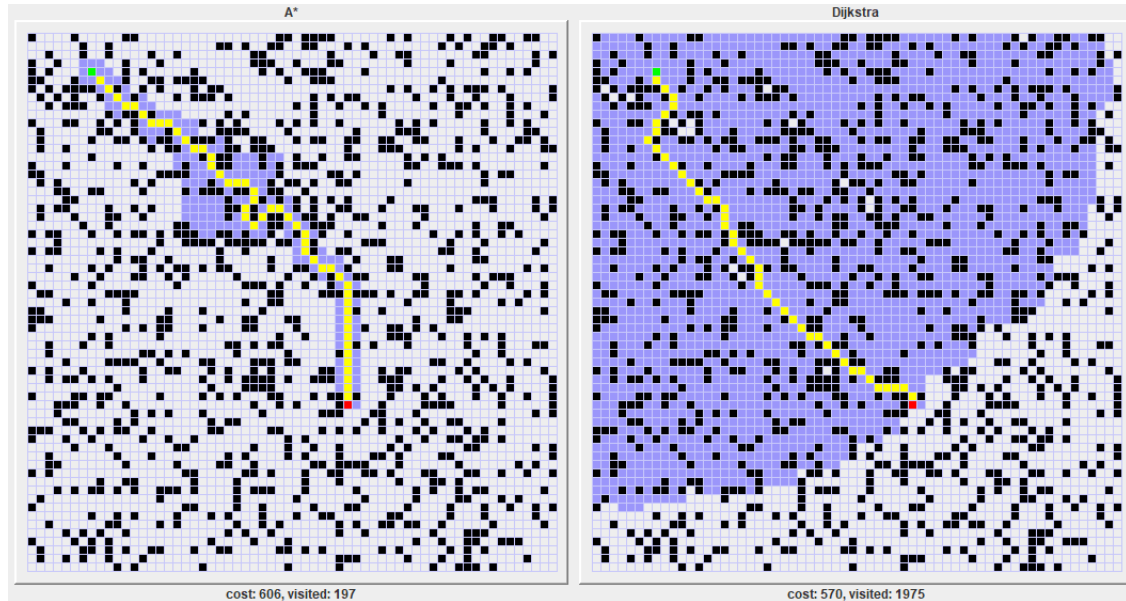


Figura 3: *A* algorithm vs. Dijkstra's algorithm*

- walls
- visited
- origin
- destination
- shortest path

Estes algoritmos são bastante utilizados para pré-processamento de mapas de estradas, porém no nosso problema, como os pesos para a distância e o para o tempo variam de pedido para pedido, o pré-processamento dos caminhos mais curtos para todos os pares de vértices não traria nenhuma vantagem, apenas uma diminuição na eficiência do programa.

3.4 Caminho mais curto com vários pedidos

Dada a possibilidade de um veículo realizar vários pedidos num único serviço, existirá um conjunto de locais de recolha e locais de destino a serem percorridos.

Deparamo-nos então com um problema similar ao **Travelling Salesman Problem**, um problema NP-difícil. Como se trata de um grafo dirigido é a versão assimétrica do problema **Travelling Salesman Problem**

As soluções deste problema podem dividir-se em duas categorias:

- **Soluções Exatas** - algoritmos que encontram a solução exata do problema
- **Soluções Aproximadas** - algoritmos que aproximam a solução do problema através de heurísticas e aproximações

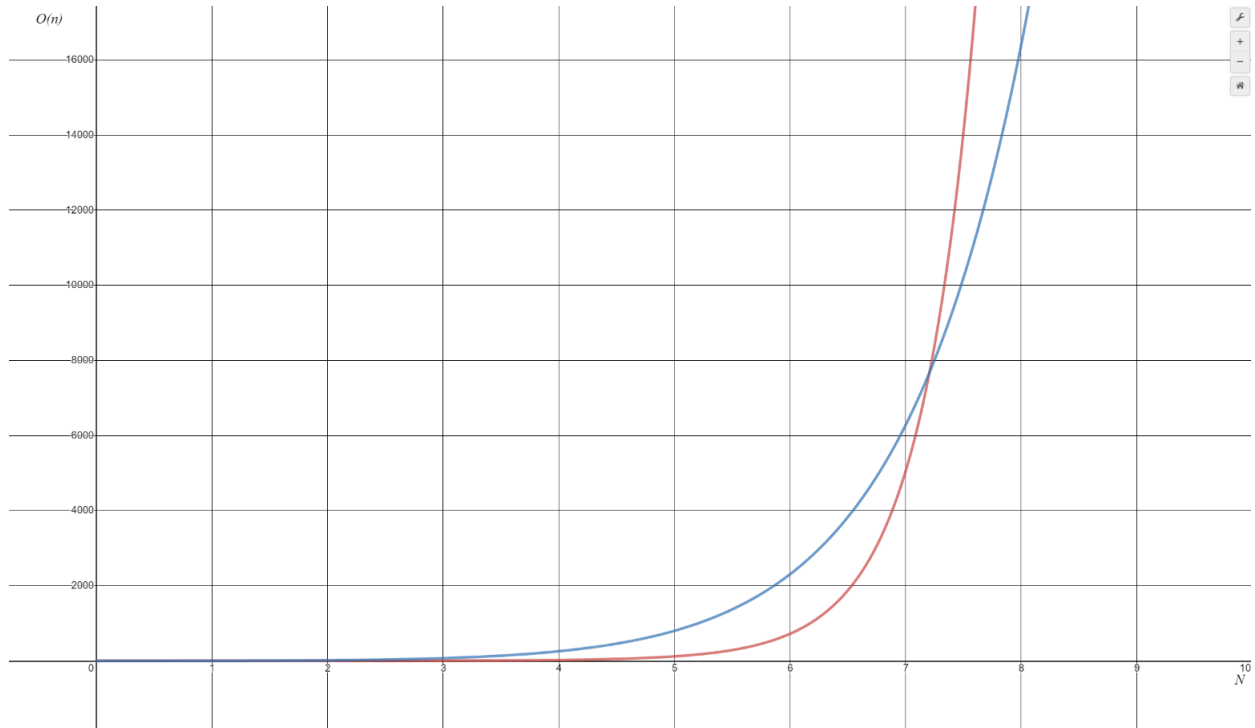


Figura 4: *Brute-force vs. Held-Karp algorithm: Complexities*

— Brute-force ($O(n!)$) — Held-Karp ($O(n^2 2^n)$)

Soluções Exatas

Brute-force

O método brute-force testa todas as permutações possíveis para o percurso, atualizando o caminho ótimo sempre que encontra um custo menor ao atual, resultando assim numa complexidade $O(n!)$, sendo n o número de vértices a percorrer.

Held-Karp

FALTA EXPLICAR + PSEUDO

Analisando as complexidades dos algoritmos apresentados podemos verificar que o método de brute-force é mais eficiente para valores de n menores que sete, sendo o algoritmo de Held-Karp mais eficiente para os restantes valores de n , sendo n o número de vértices a percorrer, assim como se pode observar no gráfico seguinte:

Na implementação do cálculo da solução exata alternaríamos o método utilizado conforme o número de vértices a percorrer, usando brute-force para $n \leq 7$ e o algoritmo Held-Karp para $n > 7$.

Soluções Aproximadas

Nearest Neighbour

O algoritmo de **nearest neighbour** consiste em escolher um vértice aleatório para o início, e de seguida escolher o vértice mais próximo como próximo vértice a percorrer repetindo este passo até visitar todos os vértices a serem percorridos. Trata-se assim de algoritmo ganancioso que encontra uma solução aproximada em tempo reduzido, no entanto esta solução não é garantidamente a solução ótima.

O pseudo-código deste algoritmo é o seguinte:

```
FOR EACH  $v \in V$  DO
  VISITED( $v$ )  $\leftarrow$  false
  PATH( $v$ )  $\leftarrow$  NULL

 $v \leftarrow$  RANDOMVERTEX( $V$ ) // choose starting point
VISITED( $v$ )  $\leftarrow$  true

WHILE NOT ALL_VISITED( $V$ ) DO
   $w \leftarrow$  CLOSEST_VERTEX( $V, v$ ) // get closest vertex to  $v$ 
  VISITED( $w$ )  $\leftarrow$  true
  PATH( $w$ )  $\leftarrow$  PATH( $v$ )
   $v \leftarrow w$ 
```

Algoritmo Genético

Algoritmos genéticos são algoritmos baseados em heurísticas que simulam o processo de evolução de espécies, o processo de *seleção natural*, selecionando os melhores espécimes de cada geração.

Os algoritmos genéticos podem ser divididos em cinco fases:

1. Gerar a população
2. Calcular a aptidão de cada indivíduo da população
3. Escolher os indivíduos mais aptos
4. Reproduzir os indivíduos escolhidos (por replicação ou *crossover*)
5. Mutação dos indivíduos de modo a introduzir pequenas variações na população

```
// calculate fitness
CALCULATE_FITNESS( $I$ )
fitness  $\leftarrow$  0
FOR  $i \leftarrow 1$  TO  $|VERTICES(I)|$ 
  // add cost of going from vertex  $i-1$  to vertex  $i$ 
```

```
    fitness ← fitness + COST(VERTICES[i-1], VERTICES[i])
FITNESS(I) ← fitness

// Choose the n best individuals
CULLPOPULATION(P, n)
    sorted ← SORT_BY_FITNESS(P) // sort by descending order of fitness
    best ← ∅
    FOR i ← 0 TO n
        INSERT(best, sorted(i))
    RETURN best

// replicate individual
REPLICATE(I)
    return EXACT_COPY(I)

// create new individual from two parents
CROSSOVER(parent_A, parent_B)
    child ← NEWINDIVIDUAL()
    // being N the number of vertices to visit
    // random integer in [0, N[
    section_start ← RANDOMINT(0, N)
    // random integer in ]section_start, N[
    section_end ← RANDOMINT(section_start + 1, N)
    // copy random section from parent A
    FOR i ← section_start TO section_end DO
        VERTICES(child) AT (i) ← VERTICES(parent_A) AT (i)

    // fill remaining empty sections with genes from parent B
    FOR i ← 0 TO N DO
        IF VERTICES(child) AT (i) = NULL
            VERTICES(child) AT (i) ← VERTICES(parent_B) AT (i)
    RETURN CHILD

// mutate individual
MUTATE(I)
    v ← RANDOMVERTEX(VERTICES(I)) // choose random vertex
    w ← RANDOMVERTEX(VERTICES(I)) // choose another random vertex
    SWAP(v, w)

// using crossover to reproduce (can be done with replication)
// reproduces population P
REPRODUCEPOPULATION(P)
    NEW_P ← ∅
    FOR i ← 0 TO POPULATION_SIZE DO
        // choose parents (can be tested to be different parents)
        parent_A ← RANDOMINDIVIDUAL(P)
```

```

    parent_B ← RANDOMINDIVIDUAL(P)
    I ← CROSSOVER(parent_A, parent_B)
    random ← RANDOMFLOAT(0, 1) // random number between 0 and 1
    IF random < MUTATIONRATE THEN
        MUTATE(I)
    INSERT(NEW_P, I)
    RETURN NEW_P

// generate random population (random order of vertices to visit)
P ← GENERATERANDOMPOPULATION(V)

WHILE ... // decide stopping criteria
    FOR EACH individual ∈ P
        CALCULATEFITNESS(individual)

    best ← CULLPOPULATION(P, n)
    P ← REPRODUCEPOPULATION(best) // reproduce best individuals

```

4 Funcionalidades a implementar

4.1 Pré-processamento dos dados de entrada

Grafo

De modo a marcar todas as arestas alcançáveis a partir do vértice da central pode ser utilizada uma estratégia semelhante à procura em profundidade (*Depth-FirstSearch*), começando a visita na central, e marcar todos os vértices que forem visitados como *open*.

O pseudo-código para esta estratégia é o seguinte:

```

VISIT(node)
    reachable(node) ← true
    FOR w ∈ Adj(node) DO
        IF NOT reachable(w) THEN
            VISIT(w)

// G – graph
// source – starting point
VISITFROMSOURCE(G, source)
    FOR v ∈ VERTICES(G) DO
        reachable(v) ← false

    VISIT(source)

```


Para a identificação dos vértices do grafo que pertençam à componente fortemente conexa do vértice da central, será necessário analisar a conectividade do grafo e a construção do componente fortemente conexo, para o qual se destacam os algoritmos de Kosaraju e de Tarjan.

Algoritmo de Kosaraju

5 Bibliografia

- Apresentações fornecidas pelo professor Rosaldo José Fernandes Rossetti nas aulas teóricas da cadeira Conceção e Análise de Algoritmos
- [Shortest Path Problem](#)
- [Dijkstra's Algorithm](#)
- [Bellman-Ford Algorithm](#)
- [A* algorithm](#)
- [Admissible heuristic](#)
- [Traveling Salesman Problem](#)
- [Vehicle Routing Problem](#)
- [Held-Karp algorithm](#)
- [Nearest neighbour algorithm](#)
- [Genetic Algorithm](#)
- [Natural selection](#)
- [DNA replication](#)
- [Chromosomal crossover](#)
- [Mutation](#)
- [GeeksForGeeks - Strongly connected components](#)
- [Kosaraju's algorithm](#)
- [Tarjan's algorithm](#)
- [GeeksForGeeks - Tarjan's algorithm](#)
- [Desmos Graphing Tool](#)
- [Path Finder Visualization Program](#)