Отчёт по ИДЗ-2 «Классическая статистика» по дисциплине: Статистический анализ данных

Свиридов Артем, группа 5140201/50302

Вариант 18 (30225)

Задание 1

Вариационный ряд распределения:

-3.104 -2.632 -2.506 -2.395 -2.183 -2.172 -2.099 -1.836 -1.832 -1.808 -1.783 -1.769 -1.765 -1.721 -1.609 -1.607 -1.504 -1.438 -1.436 -1.304 -1.289 -1.121 -1.093 -1.075 -1.052 -1.036 -0.931 -0.906 -0.872 -0.864 -0.8 -0.708 -0.706 -0.629 -0.621 -0.608 -0.423 -0.397 -0.333 -0.264 -0.247 -0.191 -0.178 -0.067 0.17 0.181 0.655 1.102 1.35 1.591

График эмпирической функции распределения представлен на рис. 1

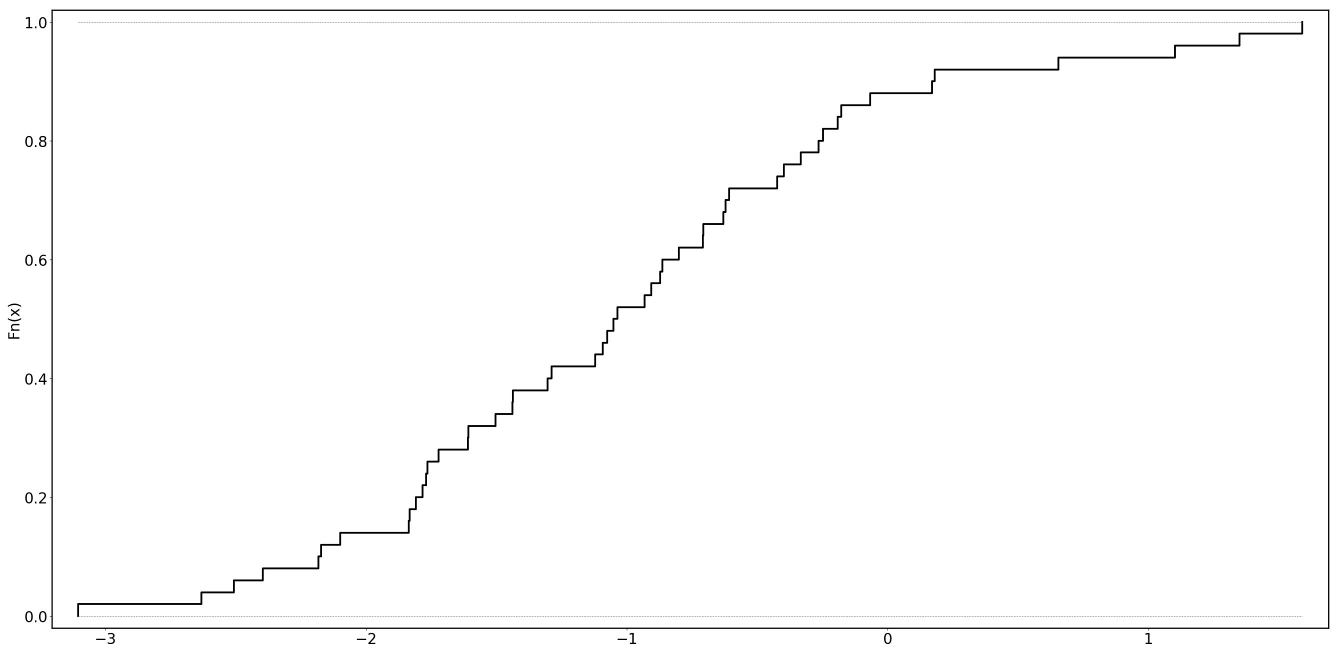

Рис. 1: График эмперической функции распределения

На Рис. 2 приведена гистограмма и полигон частот распределения с шагом h=0.40

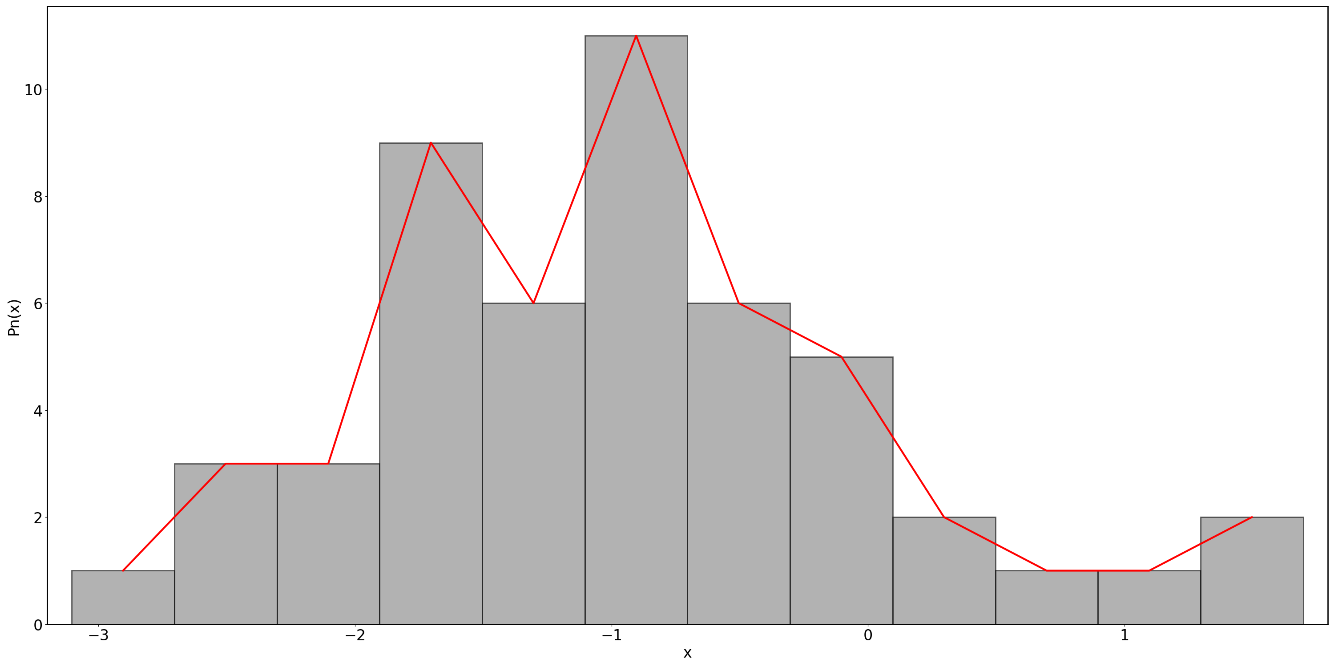

Рис. 2: гистограмма и полигон частот распределения с шагом h=0.40

Задание 2

Выборочное математическое ожидание:

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} x_i = \overline{x} = -0.9973.$$

Выборочная дисперсия:

$$s^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 0.9705.$$

Выборочная медиана:

$$M_e = \frac{xs[25] + xs[26]}{2} = -1.0440,$$

где xs – упорядоченная по возрастанию выборка. Так как $n = 50$ – чётное, то медиана равняется среднему арифметическому центральных элементов упорядоченной выборки.

Выборочный коэффициент асимметрии:

$$A_S = \frac{\overline{x^3}}{s^3} = 0.4619.$$

Выборочный эксцесс:

$$\gamma = \frac{\overline{x^4}}{s^4} - 3 = 0.2495.$$

Вероятность попадания случайной величины X в интервал $[-1.20; -0.80]$:

$$P\big(X \in [-1.20; -0.80]\big) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{50} 1_{\{-1.20 \le x_i \le -0.80\}}}{50} = 0.2000.$$

Задание 3

Необходимо построить оценку максимального правдоподобия параметров (a, σ^2). Запишем плотность нормального распределения:

$$\theta = (a, \sigma^2), \qquad p_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Логарифм функции правдоподобия:

$$LL(X, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}\right)\right) = n\left(-\log\sigma - \log\sqrt{2\pi}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2.$$

Частная производная по компоненте a:

$$\frac{\partial LL(X,\theta)}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)}{\sigma^2}.$$

Найдём значение a, при котором частная производная равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \overline{x}.$$

Частная производная по компоненте σ^2:

$$\frac{\partial LL(X,\theta)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2.$$

Найдём значение σ^2, при котором частная производная равна нулю:

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 = \sigma^2 = s^2.$$

Оценка максимального правдоподобия:

$$\hat{\theta}(X) = (\overline{x}, s^2) = (0.9973, 0.9705).$$

Построим соответствующую оценку по методу моментов. Для этого приравниваем выборочные моменты первого и второго порядка к теоретическим:

$$\begin{cases} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a, \\ \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sigma^2 + a^2. \end{cases}$$

Следовательно:

$$a = \overline{x}, \qquad \sigma^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^{\,2} = s^2.$$

Таким образом, оценка по методу моментов:

$$\tilde{\theta}(X) = (\overline{x}, s^2) = (0.9973, 0.9705).$$

В данном случае оценки максимального правдоподобия (ОМП) и по методу моментов (ОММ) совпали.

Найдём смещения оценок каждой из компонент θ.

Согласно п.1 Леммы Фишера:

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - a}{\sigma} \;\sim\; N(0, 1).$$

Следовательно:

$$\overline{X} - a \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right), \qquad \mathbb{E}\overline{X} = a \;\Rightarrow\; a - \mathbb{E}\overline{X} = 0.$$

Смещение оценки компоненты a:

$$a - \mathbb{E}\overline{X} = 0.$$

Оценка a несмещённая.

Согласно п.3 Леммы Фишера:

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Следовательно:

$$\mathbb{E}s^2 = \frac{(n-1)\sigma^2}{n}.$$

Смещение оценки компоненты σ^2:

$$\sigma^2 - \mathbb{E}s^2 = \sigma^2 - \frac{(n-1)\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Задание 4

Доверительный интервал для среднего a

Для построения доверительного интервала для параметра a с уровнем доверия $1 - \alpha_2 = 0.99$ (при уровне значимости $\alpha_2 = 0.01$) воспользуемся генератором, основанном на Лемме Фишера (п. 4):

$$G(X; a) = \sqrt{n-1}\,\frac{\overline{X} - a}{s}.$$

Он подчиняется распределению Стьюдента с $n - 1 = 49$ степенями свободы (t_{49}), и его распределение инвариантно относительно неизвестного параметра a.

Мы ищем симметричный интервал $[-x_{\alpha_2}, x_{\alpha_2}]$, который накрывает значение статистики с вероятностью $1 - \alpha_2$. Границы определяются квантилями распределения Стьюдента:

$$x_{\alpha_2} = F^{-1}_{t_{49}}\left(1 - \frac{\alpha_2}{2}\right) = F^{-1}_{t_{49}}(0.995).$$

По таблицам находим численное значение для $n = 50$:

$$x_{\alpha_2} = t_{0.995,\,49} \approx 2.680.$$

Таким образом, вероятностное утверждение, из которого выводится интервал, таково:

$$\mathbb{P}\left(-2.680 \le \sqrt{49}\,\frac{\overline{X} - a}{s} \le 2.680\right) = 0.99.$$

Из этого двойного неравенства выразим параметр a. Последовательные алгебраические преобразования приводят к следующему:

$$\overline{X} - t_{0.995,49}\,\frac{s}{\sqrt{n-1}} \le a \le \overline{X} + t_{0.995,49}\,\frac{s}{\sqrt{n-1}}.$$

Таким образом, искомый 99%-й доверительный интервал для среднего a определяется формулой:

$$\hat{\Theta}_a(X) = \left(\overline{X} - t_{0.995,49}\,\frac{s}{7},\ \overline{X} + t_{0.995,49}\,\frac{s}{7}\right).$$

Подставляем численные значения для данной выборки: $\overline{X} = -0.9973$ и $s \approx 0.9851$.

$$-0.9973 \pm 2.680 \cdot \frac{0.9851}{7} \approx -0.9973 \pm 0.3773.$$

Конечный результат:

$$\hat{\Theta}_a(X) = (-1.3746;\ -0.6200).$$

Доверительный интервал для дисперсии σ^2

Аналогично построим 99%-й доверительный интервал для параметра σ^2. В качестве центральной статистики (генератора) используем величину, основанную на п. 3 Леммы Фишера:

$$G(X;\sigma^2) = \frac{ns^2}{\sigma^2}.$$

Эта статистика подчиняется распределению хи-квадрат с $n-1=49$ степенями свободы (χ^2_{49}), и её распределение не зависит от σ^2.

Для построения двустороннего интервала найдём две квантильные точки $x_{\alpha_2,1}$ и $x_{\alpha_2,2}$, которые отсекают по $\alpha_2/2$ вероятности с каждого хвоста распределения:

$$x_{\alpha_2,1} = F^{-1}_{\chi^2_{49}}\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) = \chi^2_{0.005,\,49} \approx 27.249,$$

$$x_{\alpha_2,2} = F^{-1}_{\chi^2_{49}}\left(1-\frac{\alpha_2}{2}\right) = \chi^2_{0.995,\,49} \approx 78.337.$$

Вероятностное утверждение для генератора имеет вид:

$$\mathbb{P}\left(x_{\alpha_2,1} \le \frac{ns^2}{\sigma^2} \le x_{\alpha_2,2}\right) = 1-\alpha_2.$$

Выражая σ^2 из этого двойного неравенства, получаем:

$$\frac{ns^2}{x_{\alpha_2,2}} \le \sigma^2 \le \frac{ns^2}{x_{\alpha_2,1}}.$$

Следовательно, формула для 99%-го доверительного интервала для дисперсии σ^2:

$$\hat{\Theta}_{\sigma^2}(X) = \left(\frac{ns^2}{\chi^2_{0.995,49}},\ \frac{ns^2}{\chi^2_{0.005,49}}\right).$$

Подставляем известные численные значения: $n=50$, $s^2=0.9705$, а также найденные квантили.

$$\left(\frac{50\cdot 0.9705}{78.337},\ \frac{50\cdot 0.9705}{27.249}\right) = \left(\frac{48.525}{78.337},\ \frac{48.525}{27.249}\right).$$

Вычисляя границы, получаем итоговый интервал:

$$\hat{\Theta}_{\sigma^2}(X) = (0.6194;\ 1.7808).$$

Задание 5

Рассматривается простая гипотеза согласия

$$H_0 : X \sim N(a_0, \sigma_0^2), \quad a_0 = -4,\ \sigma_0^2 = 1.$$

В качестве статистики критерия Колмогорова берём

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|, \qquad T(X) = \sqrt{n}\, D_n.$$

Для заданного вариационного ряда максимальное отклонение достигается при $k^* = 2$, $X_{k^*} = -2.632$:

k	X_k	$F_n(X_k^-)$	$F_n(X_k^+)$	$F_0(X_k)$	$\lvert F_n(X_k^-) - F_0(X_k)\rvert$	$\lvert F_n(X_k^+) - F_0(X_k)\rvert$
2	−2.632	0.02	0.04	0.9143	0.8943	0.8743

Отсюда

$$D_n = 0.8943, \qquad T(X) = \sqrt{50}\, D_n \approx 6.324.$$

Распределение статистики $T(X)$ при верной H_0 задаётся функцией распределения Колмогорова $K(t)$. Для уровня значимости $\alpha_2 = 0.01$ критическое значение

$$x_{\alpha_2} = K^{-1}(0.99) \approx 1.63.$$

Поскольку

$$T(X) = 6.324 > x_{\alpha_2} \approx 1.63,$$

простая гипотеза согласия с распределением $N(-4, 1)$ на уровне значимости $\alpha_2 = 0.01$ отвергается.

С помощью библиотеки SciPy было получено

$$p\text{-value} \approx 3.17 \cdot 10^{-49},$$

которое показыает вероятность получить столь же большое или ещё большее значение статистики Колмогорова–Смирнова при условии, что гипотеза H_0 верна. Маленькое значение p-value также свидетельствует о сильном несогласии выборки с гипотезой H_0.

Задание 6

Рассмотрим простую гипотезу согласия с нормальным распределением

$$H_0 : X \sim N(a_0, \sigma_0^2), \qquad a_0 = -4,\ \sigma_0^2 = 1.$$

Группировка наблюдений

Для применения критерия хи-квадрат необходимо, чтобы ожидаемые частоты в интервалах не были слишком малыми (обычно $np_j \geq 5$). Поэтому объединим малочисленные крайние интервалы исходного разбиения.

В исходном разбиении с шагом $h = 0.4$ было 12 интервалов. Мы объединяем интервалы 1–3 в первый новый интервал, а интервалы 9–12 — в последний. В результате получаем $r = 7$ непересекающихся интервалов. Для того чтобы сумма теоретических вероятностей была равна 1, расширим границы крайних интервалов до бесконечности:

$$(-\infty, t_1],\ (t_1, t_2],\ \ldots,\ (t_6, +\infty),$$

где промежуточные точки деления:

$$t_1 = -1.904,\ t_2 = -1.504,\ \ldots,\ t_6 = 0.096.$$

Обозначим через n_j количество наблюдений в j-й группе, а через p_j — теоретическую вероятность попадания в эту группу при выполнении H_0:

$$p_j = P_{H_0}\{X \in (t_{j-1}, t_j]\} = F_0(t_j) - F_0(t_{j-1}),$$

где $F_0(x)$ — функция распределения $N(-4, 1)$. Для крайних интервалов, границы которых расширены до бесконечности, вероятности вычисляются как:

$$p_1 = F_0(t_1) - F_0(-\infty) = F_0(t_1), \qquad p_r = F_0(+\infty) - F_0(t_{r-1}) = 1 - F_0(t_{r-1}).$$

Результаты расчетов приведены в таблице:

j	Интервал $(t_{j-1}, t_j]$	n_j	p_j	np_j
1	$(-\infty, -1.904]$	7	0.9820	49.098
2	$(-1.904, -1.504]$	9	0.0118	0.588
3	$(-1.504, -1.104]$	6	0.0044	0.220
4	$(-1.104, -0.704]$	11	0.0014	0.070
5	$(-0.704, -0.304]$	6	0.0004	0.019
6	$(-0.304, \ 0.096]$	5	0.0001	0.004
7	$(\ 0.096, +\infty)$	6	$< 10^{-4}$	0.001
$\sum$		50	1.0000	50.000

Таблица 1: Интервалы, частоты и теоретические вероятности

Статистика критерия χ^2

В качестве статистики критерия Пирсона используем

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}.$$

Подставляя значения из таблицы, получаем наблюдаемое значение:

$$\chi^2_{\text{набл}} \approx 43779.84.$$

Число степеней свободы для простой гипотезы (параметры фиксированы) равно

$$\nu = r - 1 = 7 - 1 = 6.$$

Критическое значение для уровня значимости $\alpha_2 = 0.01$:

$$\chi^2_{1-\alpha_2,\nu} = \chi^2_{0.99,\,6} \approx 16.81.$$

Так как

$$\chi^2_{\text{набл}} = 43779.84 \gg 16.81,$$

основная гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости $\alpha_2 = 0.01$.

Наибольший уровень значимости

Наибольший уровень значимости, при котором ещё нет оснований отвергнуть гипотезу, определяется из равенства

$$F_{\chi^2_\nu}\big(\chi^2_{\text{набл}}\big) = 1 - \alpha_{\max}.$$

Для столь большого значения статистики получаем

$$\alpha_{\max} \approx 0,$$

что подтверждает сильное несогласие выборки с гипотезой H_0.

Задание 7

Построим сложную гипотезу:

$$H_0 : X_1, \ldots, X_n \sim N(a, \sigma^2),$$

где параметры a и σ^2 неизвестны.

Для проверки этой гипотезы воспользуемся методом минимума статистики хи-квадрат. Данный метод заключается в нахождении таких значений параметров $\theta = (a, \sigma)$, при которых нормированная сумма квадратов отклонений наблюдаемых частот от теоретических минимальна:

$$\chi^2(\theta) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\left(n_j - n\,p_j(\theta)\right)^2}{n\,p_j(\theta)} \;\to\; \min_{\theta},$$

где n_j — число наблюдений в j-й группе, а

$$p_j(\theta) = P_\theta\{X \in (t_{j-1}, t_j]\} = F_\theta(t_j) - F_\theta(t_{j-1}),$$

F_θ — функция распределения $N(a, \sigma^2)$ и интервалы $(t_{j-1}, t_j]$ совпадают с разбиением, использованным в Задании 6:

$$t_1 = -1.904,\ t_2 = -1.504, \ldots,\ t_6 = 0.096, \quad r = 7.$$

Численное минимизирование функции $\chi^2(\theta)$ по параметрам a и σ даёт следующую оценку минимума:

$$\chi^2_{\min} \approx 2.6365.$$

При этом значение параметров $\theta = (a, \sigma)$, в котором достигается данный минимум, равно

$$\hat{a} \approx -1.0071, \qquad \hat{\sigma} \approx 0.8828, \qquad \hat{\sigma}^2 \approx 0.7793.$$

Проверим основную гипотезу на уровне значимости $\alpha_2 = 0.01$. Распределение статистики хи-квадрат при верной сложной гипотезе имеет число степеней свободы

$$\nu = r - 1 - m = 7 - 1 - 2 = 4,$$

где $m = 2$ — количество оцениваемых параметров (a и σ). Распределение статистики хи-квадрат положительное, поэтому множество допустимых значений имеет вид $I_\alpha = [0; x_\alpha]$, где

$$x_\alpha = F^{-1}_{\chi^2_\nu}(1 - \alpha_2) = \chi^2_{0.99,4} \approx 13.277.$$

Запишем критерий хи-квадрат:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \chi^2 \le x_\alpha, \\ 1, & \chi^2 > x_\alpha. \end{cases}$$

Подставив численные значения, получим

$$2.6365 < 13.277,$$

а значит сложная гипотеза H_0 на уровне значимости $\alpha_2 = 0.01$ не отвергается.

Наименьшее значение x_α, при котором гипотеза H_0 ещё будет принята, равно $\chi^2_{\min} = 2.6365$. Подставив его в функцию распределения хи-квадрат с $\nu = 4$ степенями свободы, найдём наибольшее значение уровня значимости, на котором ещё нет оснований отвергнуть данную гипотезу:

$$F_{\chi^2_4}(2.6365) = 1 - \alpha_{\max}.$$

Численно

$$\alpha_{\max} = 1 - F_{\chi^2_4}(2.6365) \approx 0.6204.$$

Таким образом, наибольшее значение уровня значимости, при котором ещё нет оснований отвергнуть сложную гипотезу H_0, составляет $\alpha_{\max} \approx 0.62$, что согласуется с тем, что при уровне $\alpha_2 = 0.01$ гипотеза H_0 принимается.

Задание 8

Построим наиболее мощный критерий проверки гипотезы о нормальности с параметрами $(a, \sigma^2) = (a_0, \sigma_0^2)$ против простой альтернативы $(a, \sigma^2) = (a_1, \sigma_1^2)$.

Основная гипотеза:

$$H_0 : X_1, \ldots, X_n \sim N(a_0, \sigma_0^2), \qquad a_0 = -4,\ \sigma_0^2 = 1.$$

Альтернатива:

$$H_1 : X_1, \ldots, X_n \sim N(a_1, \sigma_1^2), \qquad a_1 = 1,\ \sigma_1^2 = 1.$$

Согласно лемме Неймана–Пирсона наиболее мощный критерий уровня значимости $\alpha_2 = 0.01$ имеет вид критерия отношения правдоподобий:

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & LR(X) > c, \\ 0, & LR(X) < c, \end{cases}$$

где константа c с вероятностью P_{θ_0} находится из уравнения

$$E_{\theta_0}\varphi(X) = P_{\theta_0}\big(LR(X) > c\big) = \alpha_2.$$

Статистика отношения правдоподобий по определению равна

$$LR(X) = \frac{L(X;\theta_1)}{L(X;\theta_0)}, \qquad \theta_0 = (a_0, \sigma_0^2),\ \theta_1 = (a_1, \sigma_1^2).$$

Запишем функции правдоподобия для нормального распределения:

$$L(X;\theta_0) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left\{-\frac{(x_i - a_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}, \qquad L(X;\theta_1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x_i - a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}.$$

В нашей задаче $\sigma_0 = \sigma_1 = 1$, поэтому

$$LR(X) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - a_1)^2 - (x_i - a_0)^2\right]\right\}.$$

Упростим выражение под знаком суммы:

$$(x_i - a_1)^2 - (x_i - a_0)^2 = (a_0^2 - a_1^2) + 2x_i(a_1 - a_0),$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - a_1)^2 - (x_i - a_0)^2\right] = n(a_0^2 - a_1^2) + 2(a_1 - a_0)\sum_{i=1}^{n} x_i = n(a_0^2 - a_1^2) + 2n(a_1 - a_0)\,\overline{X}.$$

Следовательно,

$$LR(X) = \exp\left\{-\frac{n}{2}(a_0^2 - a_1^2) - n(a_1 - a_0)\,\overline{X}\right\}.$$

Поскольку экспонента — монотонная функция, критерий $LR(X) > c$ эквивалентен критерию вида

$$-\frac{n}{2}(a_0^2 - a_1^2) - n(a_1 - a_0)\,\overline{X} > \ln c.$$

Так как $a_1 - a_0 = 1 - (-4) = 5 > 0$, неравенство можно переписать в виде

$$\overline{X} > c',$$

где c' — некоторая константа. Таким образом, наиболее мощный критерий имеет вид

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & \overline{X} > c', \\ 0, & \overline{X} \le c'. \end{cases}$$

Найдём c' из условия уровня значимости $\alpha_2 = 0.01$. При основной гипотезе

$$\overline{X} \sim N\left(a_0, \frac{\sigma_0^2}{n}\right) = N\left(-4, \frac{1}{50}\right),$$

поэтому

$$P_{H_0}(\overline{X} > c') = P\left(Z > \frac{c' - a_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) = \alpha_2, \qquad Z \sim N(0, 1).$$

Обозначив через $z_{1-\alpha_2}$ квантиль стандартного нормального распределения уровня $1 - \alpha_2$, получаем

$$\frac{c' - a_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = z_{1-\alpha_2}, \qquad c' = a_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha_2}.$$

Для $\alpha_2 = 0.01$ имеем

$$z_{1-\alpha_2} = z_{0.99} \approx 2.3263,$$

откуда при $a_0 = -4$, $\sigma_0 = 1$, $n = 50$ находим

$$c' = -4 + \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot 2.3263 \approx -3.6710.$$

Таким образом, наиболее мощный критерий уровня значимости $\alpha_2 = 0.01$ имеет вид

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & \overline{X} > -3.6710, \\ 0, & \overline{X} \le -3.6710. \end{cases}$$

Проверка основной гипотезы

Для данной выборки выборочное среднее равно

$$\overline{X} = -0.9973.$$

Сравнивая с порогом c', получаем

$$\overline{X} = -0.9973 > -3.6710 = c',$$

следовательно, на уровне значимости $\alpha_2 = 0.01$ основная гипотеза H_0 отвергается.

Эквивалентно можно рассмотреть стандартизованную статистику

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - a_0}{\sigma_0} = \sqrt{50}\,\frac{-0.9973 - (-4)}{1} \approx 21.23.$$

Так как $T \approx 21.23 > z_{0.99} \approx 2.3263$, критическая область достигается, и гипотеза H_0 отвергается.

Мощность критерия

Рассмотрим вероятность ошибки второго рода при альтернативе $H_1 : X \sim N(a_1, \sigma_1^2)$, где $a_1 = 1$, $\sigma_1^2 = 1$. Под H_1 выборочное среднее распределено как

$$\overline{X} \sim N\left(a_1, \frac{\sigma_1^2}{n}\right) = N\left(1, \frac{1}{50}\right).$$

Вероятность ошибки второго рода

$$\beta = P_{H_1}(\text{принять } H_0) = P_{H_1}(\overline{X} \le c') = P\left(Z \le \frac{c' - a_1}{\sigma_1/\sqrt{n}}\right),$$

где

$$\frac{c' - a_1}{\sigma_1/\sqrt{n}} = \frac{-3.6710 - 1}{1/\sqrt{50}} \approx -33.03.$$

Отсюда

$$\beta = \Phi(-33.03) \approx 0,$$

и, следовательно, мощность критерия

$$b(\theta_1) = 1 - \beta \approx 1.$$

То есть вероятность отклонить H_0 при справедливости альтернативы $H_1 : a = 1, \sigma^2 = 1$ практически равна единице, а вероятность ошибки второго рода пренебрежимо мала.